

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-709

有限面積法による二次元翼列まわりの
非粘性圧縮流の数値計算

福田正大・西村英明・田村敦宏

1982 年 5 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

有限面積法による二次元翼列まわりの 非粘性圧縮流の数値計算*

福田正大** 西村英明*** 田村敦宏****

Numerical Simulation of Inviscid Compressible Flow through Two-Dimensional Cascade by Finite Area Method By Masahiro Fukuda, Hideaki Nishimura, Atsuhiko Tamura

ABSTRACT

The steady inviscid compressible flow through the two-dimensional cascade is computed by the Method of Time-Dependent Finite Area with hexagonal integral domain. Three different equation systems are considered which are physically equivalent under two assumptions: i) steady state, ii) subsonic or existing weak shock flow field. The basic system is composed of the continuity equation, the Euler equation and the energy equation. Their differences during numerical behavior approaching the steady state have been examined through computations. To prevent the pressure or the density from becoming negative, the spatial averaging for smoothing was used, which appears to have some artificial viscosity and damping factor for time-dependent computations. In the steady state computed airfoil pressure distributions have shown good agreement with experimental measurements and there have been few differences among the three equation systems.

1. 緒 言

次世代のエンジンにおいては圧縮機・タービンの高効率・高負荷化が一つの重要な課題となっており

タービン入口温度の高温化や高負荷タービン翼列の開発などが意欲的に進められている。それと共に翼列試験に必要とされる費用の高騰など望ましい翼列の開発に伴う困難も漸増している。効果的に実験を進めるうえで、翼型設計においても数値シミュレーション等の信頼性の高い事前予測が普遍的に使われるようになってきており、その必要性・重要性は増大する一方である。

* 昭和56年12月21日 受付
** 計算センター
*** 原 動 機 部
**** 航空機公害研究グループ

翼列まわりの流れ(以下翼列流れと云う)の数値計算も古くから行われていて、差分法^{1),2),3)}、特性曲線法⁴⁾、有限面積法(Finite Area Method, FAM^{5),6)})等により二次元のポテンシャル方程式、オイラー方程式の数値解が計算されている。三次元問題も計算されており^{7),8)}、準三次元化というモデル化により計算を簡単にする工夫も行なわれている^{9),10)}、また設計問題への取組みも積極的に試みられている^{11),12)}。

当所においても計算空気力学の研究が意欲的に進められ、汎用ソフトウェアの開発につながっている。その一環として、現存及び近い将来の計算機の能力を考え、i) 二次元オイラー方程式の数値解でも十分な有用性がある、ii) 二次元ナビエ・ストークス方程式の数値解の計算のための初期値を得る、iii) 三次元オイラー方程式の数値計算への発展性、等の考慮のもとに二次元非粘性翼列流れの計算を行った。計算法としては、i) 原方程式を積分形式に書き直すことにより隣接格子への質量・運動量・エネルギーの授受が正確に表現できる、ii) その結果格子間隔が比較的粗く取れ、又その形状の任意性も大きい、iii) 三次元への拡張が容易に行える、等の理由から有限面積法(FAM)を採用した。基本積分領域としてはMcDonaldにより提案された⁵⁾六角形領域をとった。圧縮性を考慮した計算を行ったのでエネルギーの方程式を用いたが、この他にi) 断熱条件の式、ii) 全温度一定の式、の二種類の式を用いた計算も行いそれぞれの相違について数値的に調べた。計算結果の翼面圧力分布を実験と比較して良好一致が得られた。

2. 記 号

定 数

- A : 仕事の熱当量
 κ : 比熱比
 g : 重力加速度
 R : 気体定数

変 数

- t : 時 間
 x, y : カルテジアン座標
 p : 圧 力
 ρ : 密 度

T : 温 度

u, v : x, y 方向の速度成分

\vec{q} : 速度ベクトル, $\vec{q}T = (u, v)$

e : 内部エネルギー

F : 全エネルギー $(= \frac{g}{A} e + \frac{u^2 + v^2}{2})$

M : (局所)マッハ数

3. 基礎方程式と境界条件

基礎方程式 次元付量は工学単位系によって表示し、以下式系は基準長さ ℓ 、基準密度 ρ_0 、基準温度 T_0 、基準速度 $a_0 = \sqrt{\kappa g R T_0}$ によって無次元化されたものを扱い。圧力は $\rho_0 a_0^2$ で無次元化する。その結果無次元量で表わした全エネルギー F の定義は、 $F = T / \kappa (\kappa - 1) + (u^2 + v^2) / 2$ となる。

定常解を求める方法として、時間に依存する微分方程式を用いる方法と時間に依存しない微分方程式を用いる方法の二種類がある。前者の方法では、時間変数 t が十分大きくなるまで計算して定常状態に達したところの解を定常解とする。ここではこの時間依存型の微分方程式を用いる。二次元非粘性圧縮流は、連続の式・オイラーの式・エネルギーの式を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho F \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u(\rho F + p) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho F + p) \end{pmatrix} = 0 \quad (3-1)$$

と表現される。この方程式系は定常状態という仮定の下で、流線に沿って全温度 $T_t = T(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2)$ が一定という積分を有する。従って無限上流で全温度が流線によらず一定であれば、それは全領域で一定になる(閉じた流線は考えない)。本報告で求めようとしているのは定常解であるから、(2-1)の代わりに

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix} = 0$$

$$T \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right) = \text{一定} \quad (3-2)$$

という方程式系を用いることも可能である。あるいは系は断熱等エントロピー的に変化しているとして等エントロピー条件を採用することも考えられる。この場合には方程式系は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix} = 0$$

$$\kappa p = \rho^\kappa \quad (3-3)$$

となる。流れが全領域で亜音速であれば(3-1), (3-2), (3-3)は物理的に同一であり、弱い衝撃波がある場合にもその差異は無視できるものである。

本報告ではこれら三つの方程式系を用いた場合の相違をも数値的に調べた。なお以後方程式系を参照する場合、(3-1)式を $E_q - E$, (3-2)式を $E_q - T$, (3-3)式を $E_q - A$ と略記する。

境界条件^{13),14)} 翼列流れにおいては、i) 翼面上、ii) 周期境界、iii) 翼列上流、iv) 翼列下流の四種類の境界がある。翼面境界条件としては、翼面上の速度ベクトルが翼面に接しているというスリップ条件を課す。周期境界条件は、周期境界上の対応する点における対応する物理量が等しいものとする。

上流・下流の境界条件は、翼列流れには閉塞現象が起き得るということを考慮して、上流側で三つの境界条件を下流側で一つの境界条件を設定した。まず下流境界条件としては、下流境界で静圧 p_{ex} を与え、これを一定とした。上流境界条件三つのうち二つは、上流境界で全温度 $T_{t_{in}}$ と全圧 $p_{t_{in}}$ を与え、これらを一定とした。残る一つとして上流境界で、1) 流入マッハ数を与えこれを一定にする、2) 流入角を与えこれを一定にする、の二通りを考えた。どちらの場合にも y -方向には変化がないとした。

以後境界条件を参照する場合には、1) を M -固定、2) を θ -固定と略記する。

数値モデルとしての流れ場は、微分方程式と境界

条件の対で定まるものであり、結局本報告では六通りの数学モデルとしての流れ場を考えることになる。

4. 数値計算法

有限面積法 (FAM)⁵⁾ $E_q - E, E_q - T, E_q - A$ の微分方程式は所謂保存形式で書かれており、その一般形は、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{\Phi} = 0 \quad (4-1)$$

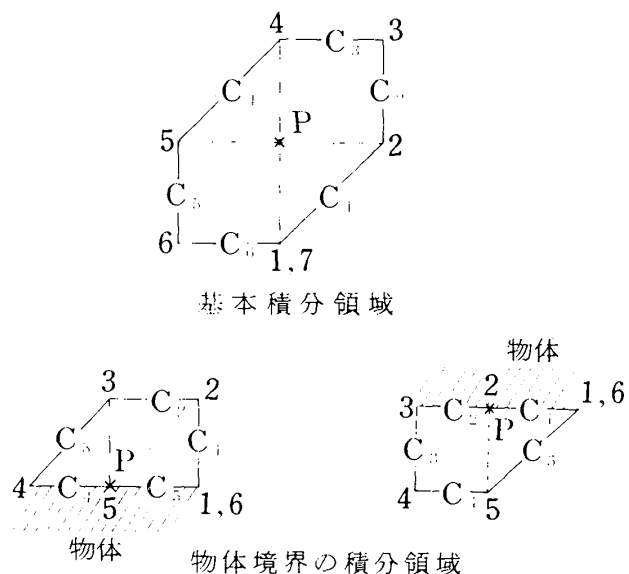
と表わされる。今の場合には、

φ	Φ_x	Φ_y
ρ	ρu	ρv
ρu	$\rho u^2 + p$	$\rho u v$
ρv	$\rho u v$	$\rho v^2 + p$
ρF	$u(\rho F + p)$	$v(\rho F + p)$

である ($E_q - T, E_q - A$ では $\varphi = \rho F$ に対応する方程式が代数式になっている)。これを積分形に書き面積分を線積分に変換することにより、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \varphi d\sigma + \oint_C \vec{\Phi} \cdot \vec{n} ds = 0$$

が得られる。積分領域 S として図1のような六角形



1~6あるいは1~7は節点を $C_1 \sim C_5$ あるいは $C_1 \sim C_6$ は辺をそれぞれ表わす。

図1 積分領域

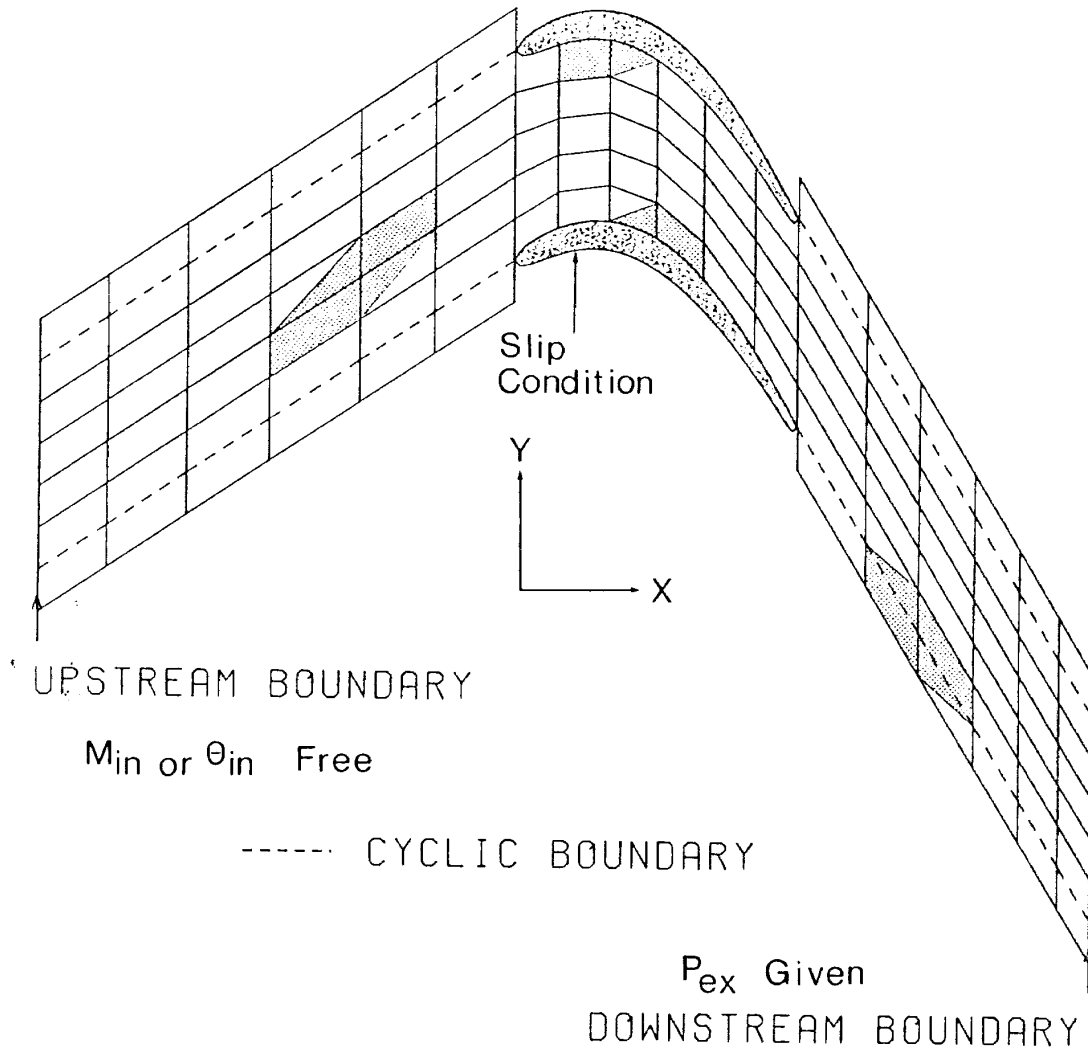


図2 積分領域と境界条件

領域をとり、 $\int_s \varphi d\sigma = S\varphi(P)$, $\oint_c \vec{\phi}_n ds = \sum_{ck} \int_{ck} \vec{\phi}_n ds = \sum_k \{ (\hat{\phi}_x^{ck}) \Delta y^{ck} - (\hat{\phi}_y^{ck}) \Delta x^{ck} \}$ と近似し、時間微分を1階差分で置き換えると、

$$\varphi^{n+1}(P) = \varphi^n(P) - \frac{\Delta t}{S} \sum_k \{ (\hat{\phi}_x^{ck})^n \Delta y^{ck} - (\hat{\phi}_y^{ck})^n \Delta x^{ck} \} \quad (4-2)$$

となる。ここで、 C_k は図1における辺 $C_1 \sim C_6$ に対応し、上添字 n は時刻 $n\Delta t$ における値を意味する。また、

$$\hat{\phi}_x^{ck} = (\phi^k + \phi^{k+1}) / 2, \quad \Delta x^{ck} = x^{k+1} - x^k$$

$$\Delta y^{ck} = y^{k+1} - y^k \quad (4-3)$$

である。ここで、左辺にある上添字 C_k は図1にお

ける辺 $C_1 \sim C_6$ に、右辺にある上添字 k は同図における節点1~7に対応する(ϕ^k は節点でその値が与えられている)。(4-3)式により時刻 n における値を用いて時刻 $n+1$ における値が計算される。

翼面境界での積分は図1に示すように五角形領域をとる。従って上記の総和記号における k は1から5までの値をとる。

全体の格子点網の中での積分領域を図2に示す。

計算格子 x 方向には前縁及び後縁付近での変化の大きさを考慮して、これらの点の近くで密な格子点を得るために等比級数的分点配置をとった。具体的には、翼面上の点で x 座標が最小となる点の格子番号を NL 、最大となる点の格子番号を NT 、翼面上に奇数個の格子点を取りその中央の格子番号を NC 、総格子点数を NX としたとき、

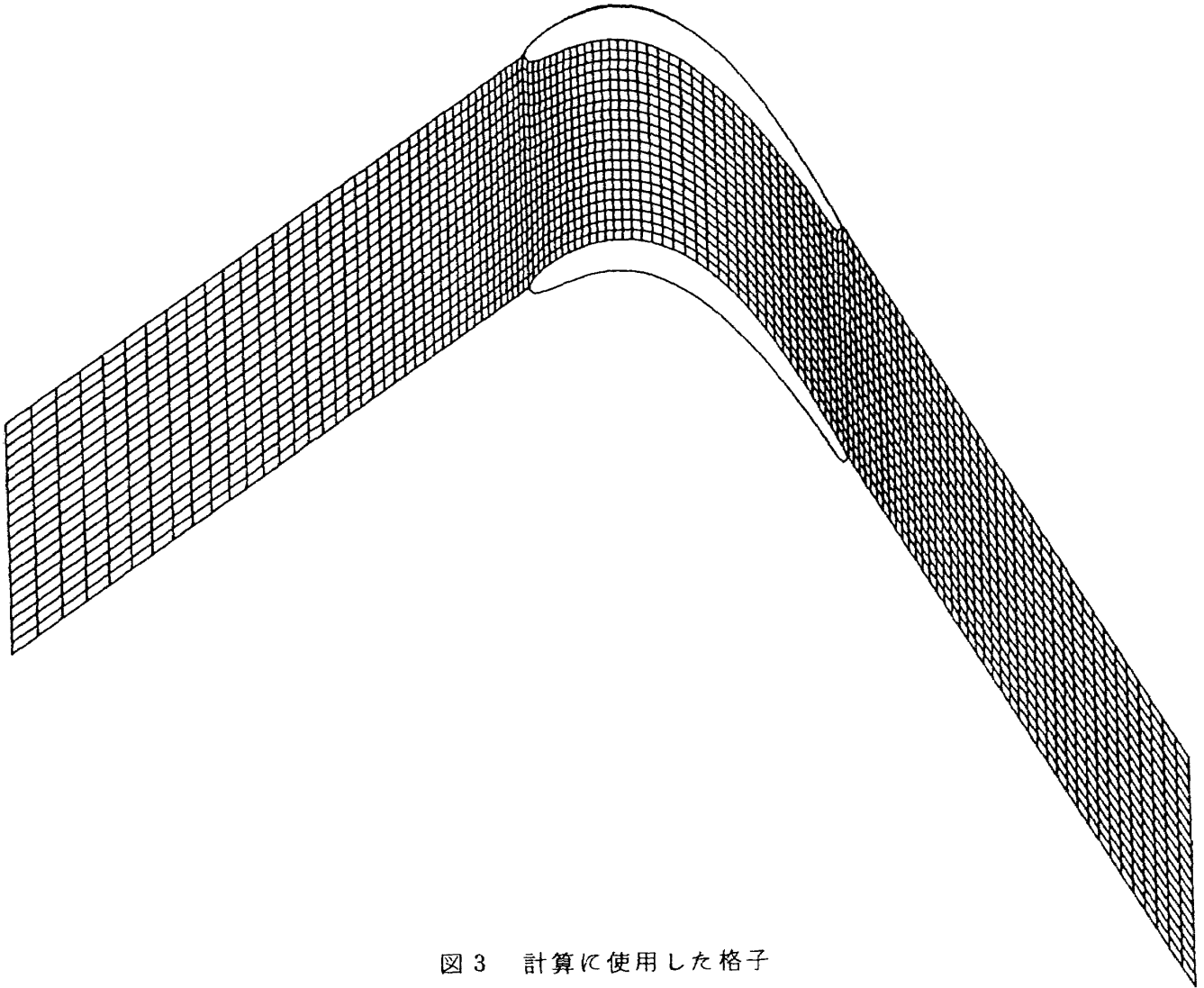


図3 計算に使用した格子

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i \\ \Delta x_{i-1} / \Delta x_i &= r_u \quad 2 \leq i \leq NL-1 \\ \Delta x_{i+1} / \Delta x_i &= r_w \quad NL \leq i \leq NC-2 \\ \Delta x_{i-1} / \Delta x_i &= r_w \quad NC+1 \leq i \leq NT-1 \\ \Delta x_{i+1} / \Delta x_i &= r_D \quad NT \leq i \leq NX-1 \end{aligned}$$

となるように x_i を定める。 r_u, r_D は $\Delta x_{NL} = \Delta x_{NL-1}, \Delta x_{NT} = \Delta x_{NT-1}$ となるように定める。

y 方向についても、変化が大きい個所では細かい格子点をとる必要があるが、本報告では簡単のために等分割した。

周期境界線としては上流側では流入角に、下流側では流出角に等しい傾きをもつ直線とした。流入角等の条件が知られている場合はそれに、また知られていない場合は近似的な方向とすればよく、数値計

算結果の流れ方向とは必ずしも一致しなくてよい。

本報告での計算には計算領域として上流、下流それぞれに 1.75 コードをとり、 x 方向に 121 点(うち翼面上に 41 点, $NL=41, NC=61, NT=81, NX=121$), y 方向に 21 点の分点をとった(実験時の計測は上流に 1 コード、下流に 0.5 コードの位置でなされたが、それぞれの境界で一様な値をとるとする境界条件があるためこれらよりも若干遠くした)。また格子の大きさに極端な差が出ないようにとの配慮から、 $r_w=1.05$ とした。流入角と流出角は実験値の 33.2 度、 -58.0 度をとった。得られた計算格子を図 3 に示す。

このようにして得られた計算格子では前、後縁付近の前、後縁半径に相当する丸みの表現が十分でなかった。当該付近での計算格子による翼形状の拡大図を図 4 に示す。

境界条件 翼面上のスリップ境界条件は、翼面

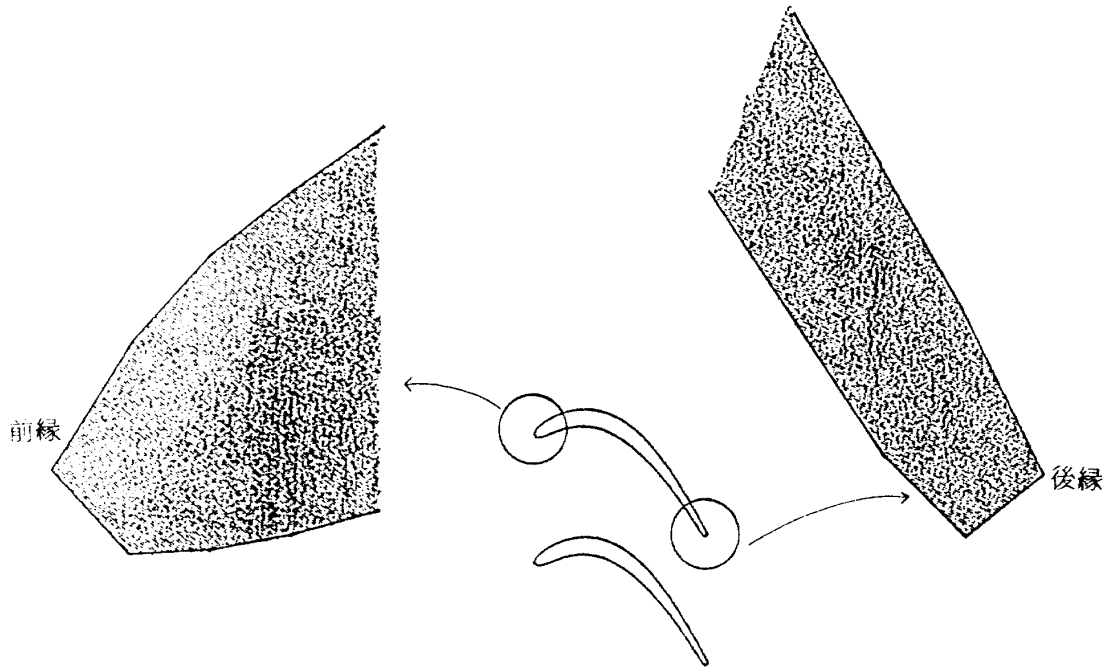


図4 前・後縁付近の格子拡大図

上に接する辺 C_k 上の積分において $\int_{C_k} \vec{q} \cdot \vec{n} ds = 0$ とすることにより実現される。

周期境界条件は、図2のように周期境界の上下に余分な格子線の一つずつ設け、内点を計算する場合と同じ六角形領域で積分することにより実現される。

下流境界条件は、下流境界上で静圧 p_{ex} が与えられている。

上流境界条件は、 M -固定の場合には $T_{t_{in}}, p_{t_{in}}, M_{in}$ が、 θ -固定の場合には $T_{t_{in}}, p_{t_{in}}, \theta_{in}$ が与えられている。

数値計算上必要となる残りの変数の上流境界、下流境界での値は、外挿により計算する。前述したように計算格子の上流、下流での方向を流入角、流出角にほぼ等しくとってあるので、計算格子に沿った外挿を行なった。

初期値分布 初期値分布を与えるためにまず上流境界、下流境界での値を定める。

M -固定計算では $T_{t_{in}}, p_{t_{in}}, M_{in}, p_{ex}$ が、 θ -固定計算では $T_{t_{in}}, p_{t_{in}}, \theta_{in}, p_{ex}$ がそれぞれ与えられる。両境界において y 方向に値は一定であるという境界条件があるが、それでもこれだけの量からではすべての値を決めることはできない。そこで M -固定計算では、結果として得られる流入角 θ_{in} の初期近似を、 θ -固定計算では、結果として得られ

る流入マッハ数 M_{in} の初期近似を与えてもらう。結局いずれの場合にも $T_{t_{in}}, p_{t_{in}}, M_{in}, \theta_{in}, p_{ex}$ の五つの値が与えられるのでこれらより、

$$T_{in} = T_{t_{in}} / \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{in}^2\right)$$

$$p_{in} = p_{t_{in}} / \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{in}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

$$\rho_{in} = \kappa p_{in} / T_{in}$$

$$q_{in} = M_{in} \sqrt{T_{in}}$$

$$u_{in} = q_{in} \cos \theta_{in}$$

$$v_{in} = q_{in} \sin \theta_{in}$$

$$F_{in} = T_{in} / \kappa (\kappa - 1) + q_{in}^2 / 2$$

と上流境界での値がすべて定まる。下流境界における値は、

$$T_{ex} = T_{t_{in}} / \left(p_{t_{in}} / p_{ex}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}$$

$$\rho_{ex} = \kappa p_{ex} / T_{ex}$$

$$q_{ex} = \left[\left\{ \left(p_{t_{in}} / p_{ex} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right\} \times \frac{2}{\kappa-1} T_{ex} \right]^{1/2}$$

$$\theta_{ex} = \cos^{-1} \left(\rho_{in} q_{in} \cos \theta_{in} / \rho_{ex} q_{ex} \right)$$

$$u_{ex} = q_{ex} \cos \theta_{ex}$$

$$v_{ex} = q_{ex} \sin \theta_{ex}$$

$$F_{ex} = T_{ex} / \kappa (\kappa - 1) + q_{ex}^2 / 2$$

よりすべて定まる。

実験結果と比較する場合等で、 M_{in} の代わりに入口静圧 p_{in} を与えたい場合がある。このときには、

$$M_{in}^2 = \left\{ \left(p_{t_{in}} / p_{in} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right\} \times \frac{2}{\kappa-1}$$

より M_{in} を求めればよい。

このようにして決められた上流境界、下流境界の値を用いて以下のように初期値分布を与える。前縁から上流側と後縁から下流側では y 方向に値が変化しないとして、それぞれ上流境界の値、下流境界の値に等しく与えた。翼間では、1) 上流側の値と下流側の値とから線型内挿して決める方法、2) x 方向の格子線が準流線であるのでこれに沿って流れているとし、これに断熱条件、流量及び全温度一定の条件の四つの条件を使って決める方法の二種類を考え、これらの初期値分布の与え方による相違についても調べた。

以後初期値分布を参照するときには前者を IV-1、後者を IV-2 と略記する。

時間間隔 陽的計算法であるので時間間隔 Δt には計算の安定性からその大きさに制限がある。立方体を積分要素とするオベレータスブリットした有限体積法において、差分法によく現われる安定条件 $\Delta t \leq \Delta \ell / (a+u)$ という関係に類似した関係が得られている¹⁵⁾。これは一次元問題での関係であるが、本報告で採用した計算格子は準流線であるのでこれに沿った一次元問題と考えられる。また上述の関係は各時刻、各格子点毎に考えるべきものであるが、それでは不必要に多くの計算をする必要が生じる。そこで

$$\left(\frac{\Delta \ell}{a+u} \right)_{min} \geq \frac{\Delta \ell_{min}}{a_{max} + u_{max}}$$

の右辺を初期値分布から決めて、これより小さい固定された Δt で計算を行なった ($\Delta \ell_{min}$ は準流線即ち x 方向の格子線に沿った長さの最小値である)。

本報告の計算例ではこの値は大略 7.5×10^{-3} であった。以後 Δt_0 として参照する。

計算安定化のための平滑化 本報告で採用した計算法を単純化し、それに基づく安定性解析によると¹⁴⁾本方法は差分法のオイラースキームと類似したものであり、オイラースキームは人工粘性をもたない不安定なスキームであることが示される。そこでこれに空間的平滑化を行なうことによって安定性を求める。これは一種の人工粘性効果を現わし、時間依存型で解を計算する場合に減衰効果をもたらす。

本報告の計算で採用した平滑化は単純な平均化操作で、具体的には以下のように行なった。考えている点 P の上下左右の隣接点をそれぞれ P_N, P_S, P_E, P_W とする。このとき時刻 n における P 点での値 $\varphi^n(P)$ を

$$\begin{aligned} \varphi^*(P) = & \frac{1}{2} \left\{ \varphi(P) \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{PP}_S \varphi(P_N) + \overline{PP}_N \varphi(P_S)}{\overline{PP}_N + \overline{PP}_S} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\overline{PP}_W \varphi(P_E) + \overline{PP}_E \varphi(P_W)}{\overline{PP}_E + \overline{PP}_W} \right) \right\} \end{aligned}$$

と修正した。ここで \overline{PP}_N 等は点 P と P_N の距離を示す。このような平均化操作を時間間隔 $T_S = N_S \Delta t$ 毎に行なった。

5. 計算結果

計算に使用した翼型は、FJR710/600ターボファンエンジンの低圧タービンの平均径断面に相当するもので、転向角を増すことによって高負荷化を図った翼型である。この翼型に基づく実験は原動機部空力研究室で系統的に行なわれたが、¹⁶⁾ 計算には実験 No.132 のデータを使用した。具体的な数値は

$$T_{t_{in}} = 401.3 \text{ °K}$$

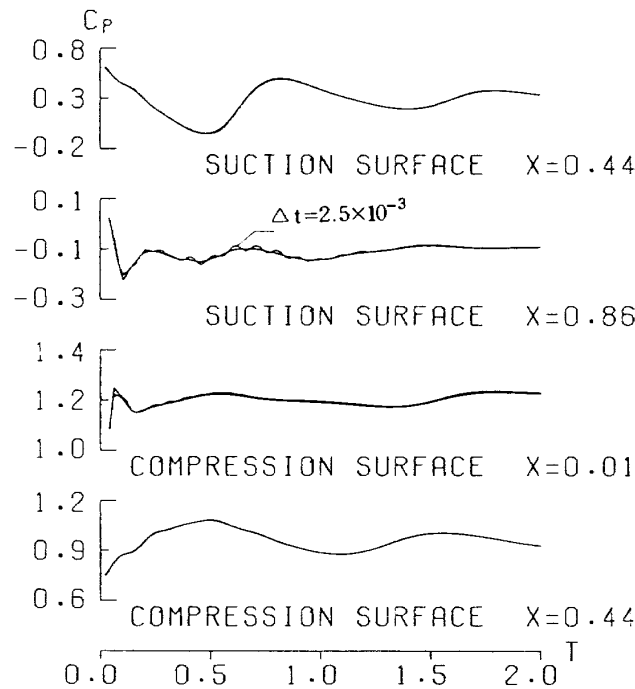
$$\begin{aligned}
 p_{t_{in}} &= 1448.75 \text{ mmHg} \\
 p_{ex} &= 755.30 \text{ mmHg} \\
 \theta_{in} &= 33.2^\circ \\
 p_{in} &= 1294.35 \text{ mmHg}
 \end{aligned}$$

である。これらの値から $M_{in} = 0.4045$ が得られる。 M -固定計算では $T_{t_{in}}, p_{t_{in}}, p_{ex}, p_{in}$ を与え、境界条件としての M_{in} は $p_{t_{in}}$ と p_{in} とより内部計算で求めた。 θ -固定計算では $T_{t_{in}}, p_{t_{in}}, \theta_{in}, p_{ex}$ を与えた。

計算は M -固定の境界条件の場合を主として行ない、比較のために θ -固定の境界条件の場合についても若干の計算を行なった。

時間間隔 Δt による影響 理論的には陽的解法においては、安定性を満足する程度に Δt が小さければ、その値に関係なく打ち切り誤差、累積誤差の範囲で一致する数値解が得られる。

このことをみるために $E_q - E, M$ -固定, IV-1, $T_s = 2 \times 10^{-2}$ という条件下で、 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-3}, 2.5 \times 10^{-3}$ の三通りの場合について計算した。従って N_s はそれぞれ 40, 20, 8 とな



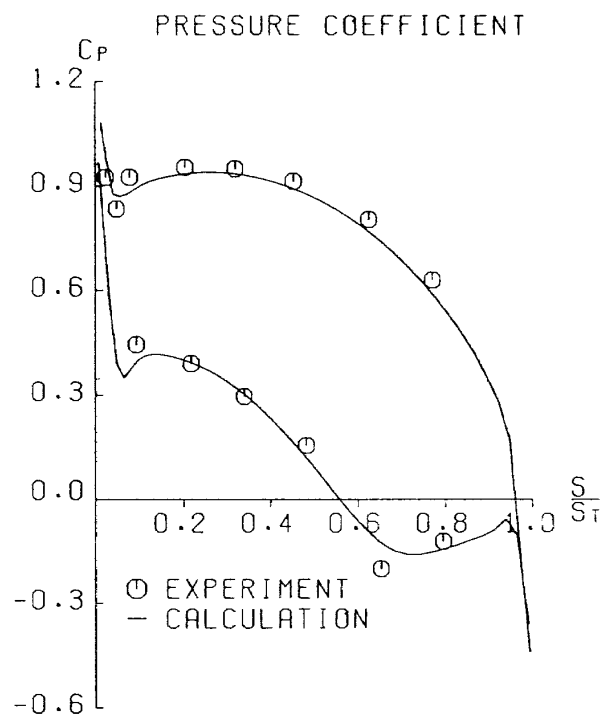
Δt による相違 ($\Delta t = 5 \times 10^{-4}, 10^{-3}, 2.5 \times 10^{-3}$)
 $E_q - E, M$ -固定, IV-1, $T_s = 2 \times 10^{-2}$

図5 圧力係数の履歴

る。4章で得た安定限界は $\Delta t_0 = 7.5 \times 10^{-3}$ であったのでこれに比べてかなり小さい。得られた結果を図5, 6に示す。図5は翼面上の特定の点における圧力係数が時間ステップと共にどのように変化していくかを示したものである。図5, 7, 9等も同じで、上から順に翼背面の midpoint, 後縁直前の点, 翼腹面の front edge 直後の点および midpoint における圧力係数である。図6は翼面圧力係数分布を比較したものであるが、先に述べたごとく殆んど差がないので、三本の線が一本の線になっている。

Δt を大きくすると初めのうちは時間的に頻りに振動するが、それがおさまって収れんするようになると小さな Δt で計算した場合と同じ値になっていく様子がわかる。 Δt をさらに大きくしていくと、方程式系によって若干の相違はあるが、予測した Δt_0 よりもかなり小さいにもかかわらず $\Delta t = 4 \times 10^{-3}$ 強のあたりで不安定性が生じている。

定常状態に達するまでの時間 t を一定とすると、必要な繰り返し回数は $t/\Delta t$ となり、 Δt の値ができるだけ大きい方が計算時間を短縮することができるのはいうまでもない。一方4章で与えた安定限界では大き過ぎることがわかった。その理由としては、



Δt による相違 ($t = 10.0$)

図6 翼面圧力係数分布

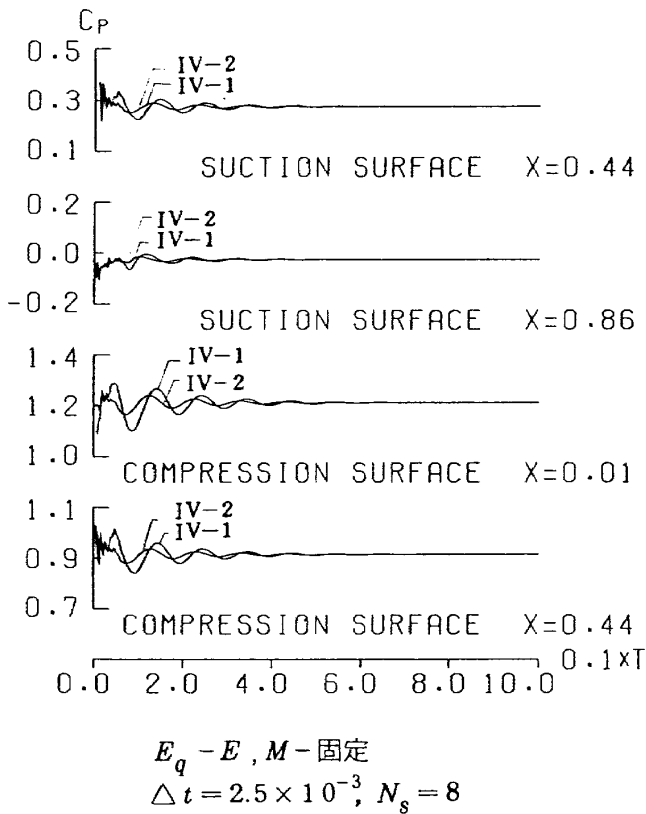


図7 圧力係数の履歴，初期値による相違

i) かなり単純化したモデルで考えた，ii) 非線型性が全く考慮されていない，iii) 六角形領域を積分領域としていることにより依存領域が小さくなった，等が考えられる。

従って4章で述べた方法によって得られる安定限界の $\frac{1}{3}$ ないし $\frac{1}{4}$ 程度の大きさの Δt で計算するのが望ましい。

初期値による影響 二種の初期分布の与え方について考えたが，その相違を $E_q - E, M$ -固定， $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ ， $N_s = 8$ ($T_s = 2 \times 10^{-2}$) の条件下で比較した結果を図7，8に示す。

数学的には，定常状態が唯一存在してすべての初期状態が定常状態に達するのであれば，定常状態は初期状態に依存しない。今回の計算例においても定常解はIV-1，IV-2という二種類の初期値分布に依らず，計算精度の範囲で一致し，一意的な解であることが図8より確認された。

定常状態に達するまでの時間あるいは収れん過程には差違が生じ得る。今回の計算例では定常状態に達するまでの時間には顕著な差はみられなかったが， M -固定計算では，IV-1による初期値分布の方が

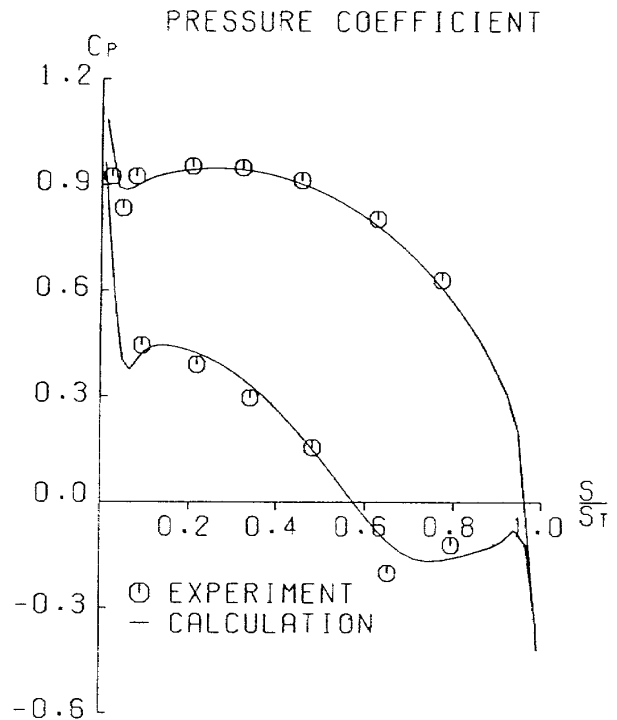


図8 翼面圧力係数分布

初期値による相違 ($t = 100.0$)

収れん過程における圧力係数値の振幅が若干大きかった (θ -固定計算では大した差は認められなかった)。

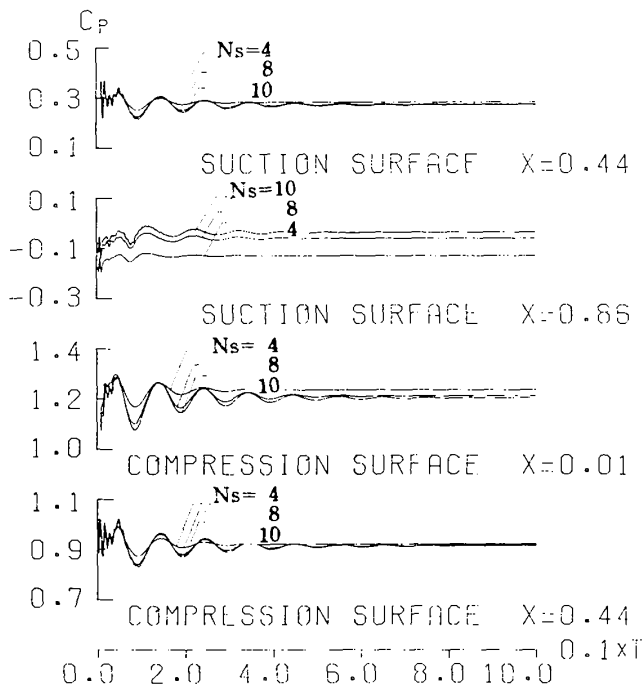
結局簡便さからIV-1という初期値分布で計算すれば十分であると思われる。

平滑化による影響 平滑化の間隔 N_s (T_s)による相違を $E_q - E, M$ -固定，IV-2， $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ という条件下で $N_s = 4, 8, 10$ とした場合の結果を図9，10に示す。

図9からわかるように頻りに平滑化を行なった方が定常状態に達するのが速い。それは平滑化が減衰効果をもっていることによるものと思われる。

平滑化は一種の人工粘性効果を現わし，その効果の大きさが間隔 N_s に依存するので N_s の違いによって得られる数値解に若干の差が生じる(図10)。

本計算例に対応する実験では，翼背面のコード位置 $S/S_T = 0.65$ のあたりで弱い衝撃波が生じていると思われる (S は翼面に沿った長さ)。計算では平滑化の粘性効果により拡散しているため十分とらえきれていないが，平滑化の間隔を長くするとこの部分での圧力勾配が徐々に急峻になることが示された(図10)。



$E_q - E, M$ -固定
 $IV-2, \Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$
 図9 圧力係数の履歴,
 N_s による相違 ($N_s = 4, 8, 10$)

平滑化の間隔を長くとり過ぎると翼腹面上の後縁直前の点で圧力あるいは密度が負になり計算の続行が不可能となった。この格子点付近の計算格子は図4のごとくであり、過膨張の影響も考えられる。

平滑化の問題は本計算法における問題点の一つであり格子形状も含めてその間隔、方法、効果の評価等今後の検討が必要である。

上流境界条件による影響 3章で定式化した翼列流れにおいては上流境界で流入マッハ数 M_{in} と流入角 θ_{in} を任意に与えることはできず、 M_{in} と θ_{in} は両立する値をとらねばならない。両立する M_{in} と θ_{in} の値のもとでは定常な流れ場は一意的でなければならない。このことを確かめるために $E_q - E, M$ -固定, $IV-2, \Delta t = 2.5 \times 10^{-3}, N_s = 8$ の条件で定常状態における流入角 $\bar{\theta}_{in}$ を計算した。得られた値は $\bar{\theta}_{in} = 38.45^\circ$ で、実験値の $\theta_{in} = 33.2^\circ$ とは異っている。結局

$$\begin{aligned}
 T_{t_{in}} &= 401.3^\circ K \\
 p_{t_{in}} &= 1448.75 \text{ mmHg} \\
 M_{in} &= 0.4045
 \end{aligned}$$

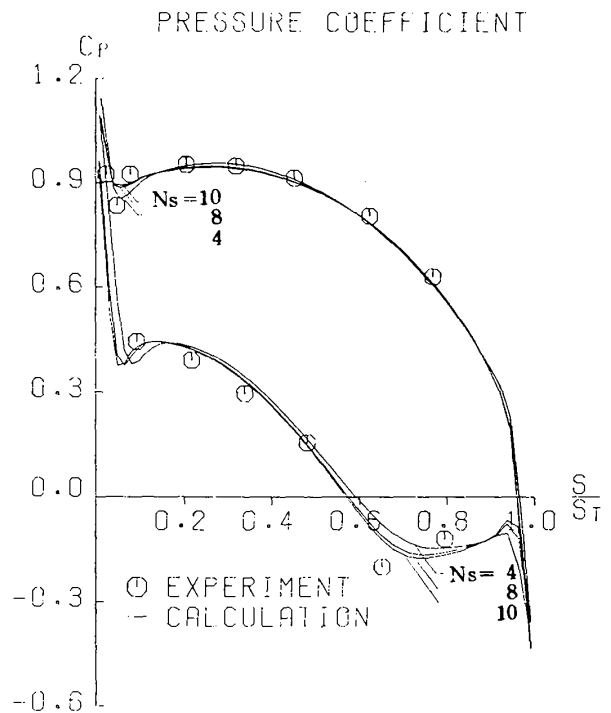
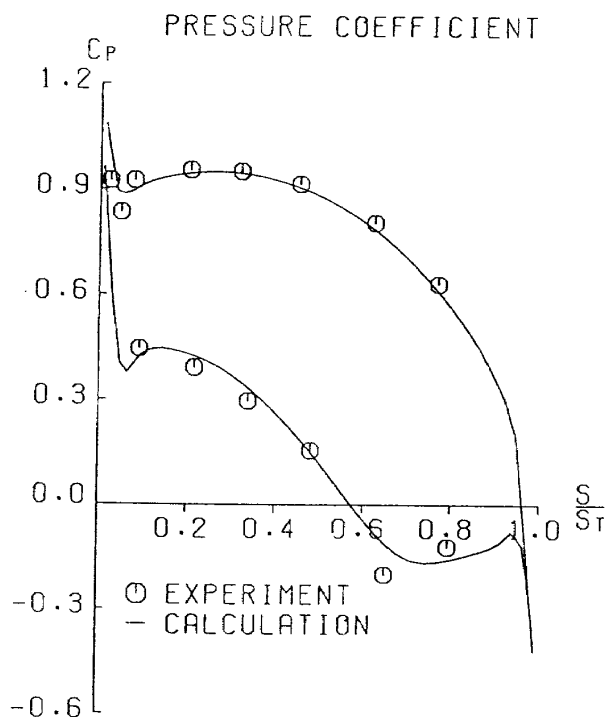


図10 翼面圧力分布
 T_s による相違 ($t = 100.0$)

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta}_{in} &= 38.45^\circ \\
 p_{ex} &= 755.30 \text{ mmHg}
 \end{aligned}$$

という境界値のもとで流れ場が一つでなければならない。そのため $E_q - E, IV-2, \Delta t = 2.5 \times 10^{-3}, N_s = 8$ という条件で、 M -固定計算 ($T_{t_{in}}, p_{t_{in}}, M_{in}, p_{ex}$ を与える)と θ -固定計算 ($T_{t_{in}}, p_{t_{in}}, \theta_{in}, p_{ex}$ を与える)とを行なった。その結果得られた翼面圧力係数分布を図11に示す。計算精度の範囲で両結果は一致しており図では区別がつかない。順序を逆にすれば、流入角 $\theta_{in} = 33.2^\circ$ と両立すべき流入マッハ数として $\bar{M}_{in} = 0.3786$ が得られる。これらをもとにした計算においてもやはり計算精度の範囲で二つの結果が一致した。従って論理的、プログラムの矛盾のないことがわかる。

M -固定と θ -固定との違いによる収れん過程の相違をみるために $E_q - E, IV-2, \Delta t = 2.5 \times 10^{-3}, N_s = 8$ の条件下で計算した結果を図12に示す(境界値は実験データに基づくものである)。この図からわかるように、 M -固定計算よりも θ -固定計算の方が圧倒的に速く定常状態に達する。この傾向は $E_q - E$ の代わりに $E_q - T$ を用いた計算において顕



両立する M_{in} , θ_{in} 値での M -固定, θ -固定の比較
 $E_q - E$, IV-2, $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$, $N_s = 8$

図11 翼面圧力係数分布

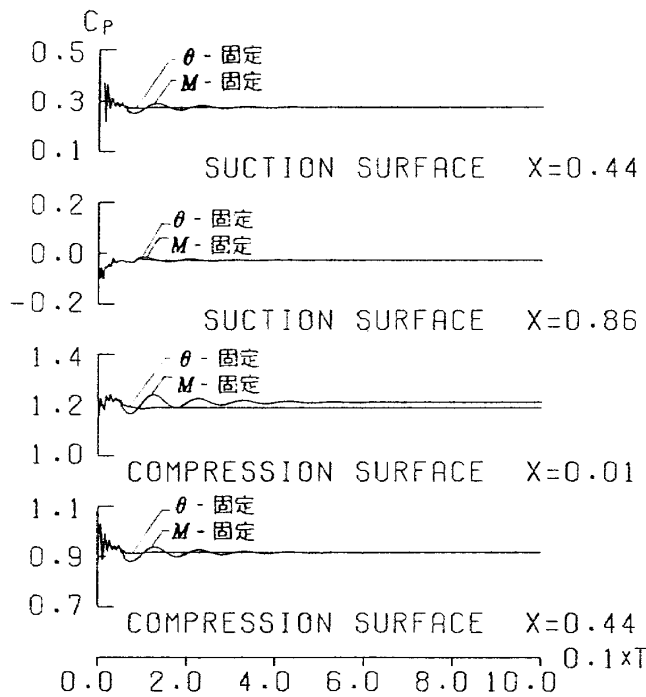
著であった。

先に述べたごとく, 本報告の定式化にあつては両立しない M_{in} と θ_{in} をもとに M -固定計算, θ -固定計算を行なえば, 二つの相異なる流れ場を得ることになる。本報告の計算例 $M_{in} = 0.4045$, $\theta_{in} = 33.2^\circ$ は両立しないので, これをもとにした M -固定計算, θ -固定計算は異なる翼面圧力係数分布を与える。 $E_q - E$, IV-2, $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$, $N_s = 8$ の条件下で計算した結果を図13に示す。

M -固定と θ -固定の二つの境界条件を考えたが, もちろん両立する M_{in} と θ_{in} の値のもとでは同じ流れ場を与える。

どちらの境界条件で計算するかは実験との比較あるいは流入角を与えて設計する等の考慮から別途決められるべきものである。

方程式系による影響 3章で三種類の方程式系と二種類の境界条件による六種類の数学モデルとしての流れ場を考えてきた。前節において両立する M_{in} と θ_{in} のもとでは境界条件による違いがないことを確かめた。ここでは方程式系による相違について調べる。



$E_q - E$, IV-2
 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$, $N_s = 8$

図12 圧力係数の履歴, 境界条件による相違

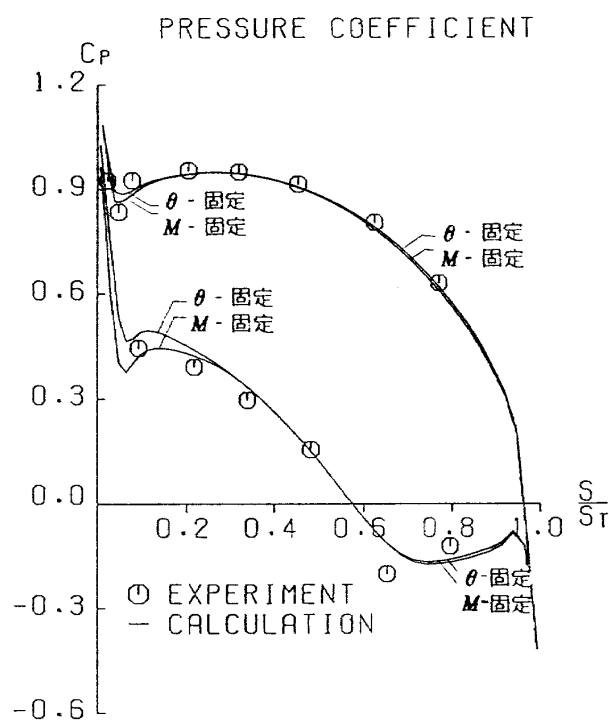


図13 翼面圧力係数分布,
 境界条件による相違 ($t = 100.0$)

M -固定, IV-2, $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$, $N_s = 8$ の条件下での計算結果を図14.15に, θ 固定, IV-2, $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$, $N_s = 8$ の条件下での計

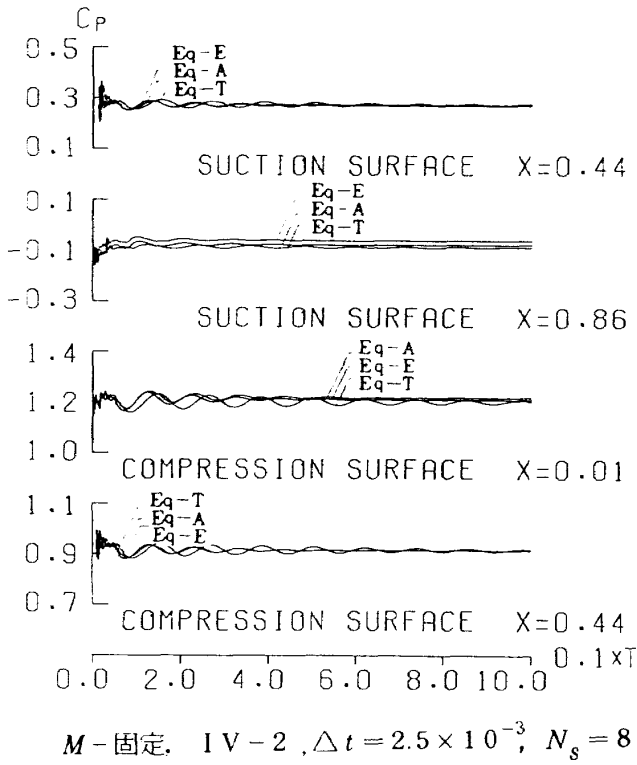


図14 圧力係数の履歴, 方程式による相違

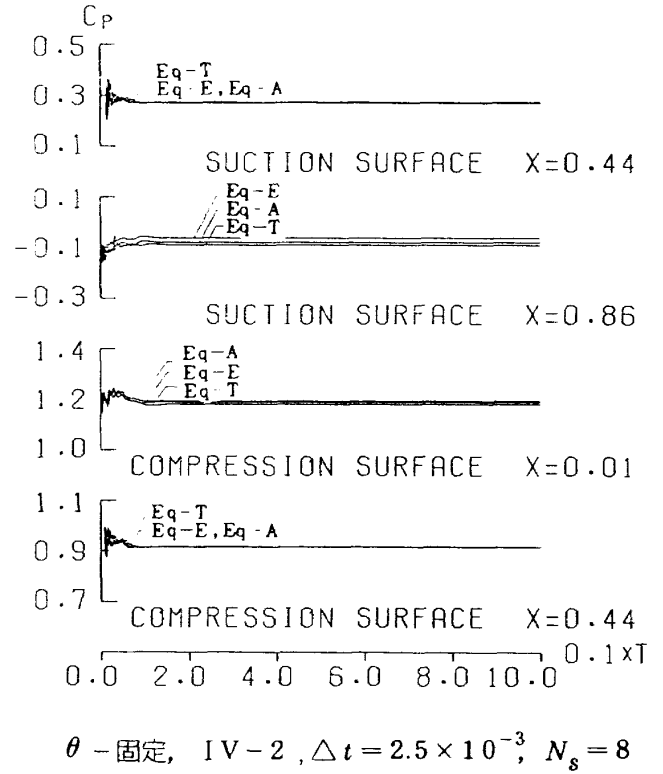


図16 圧力係数の履歴, 方程式による相違

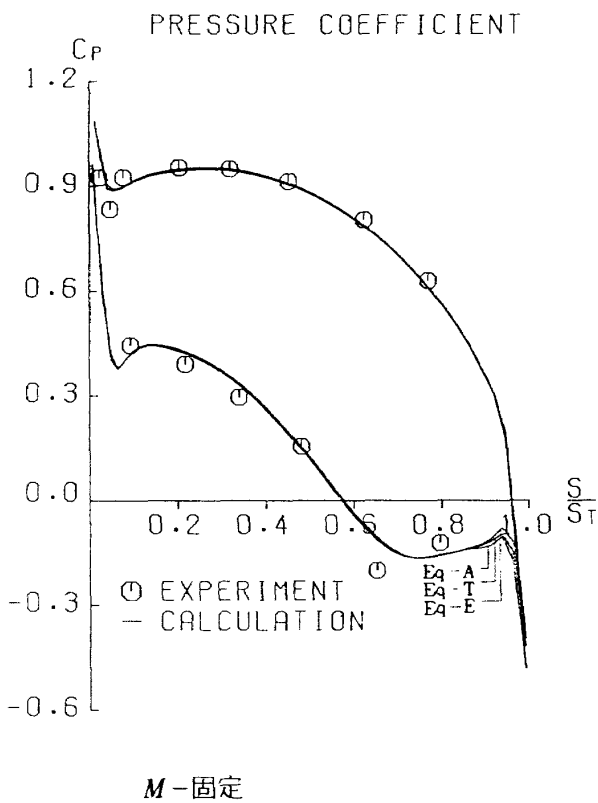


図15 翼面圧力係数分布, 方程式による相違 ($t=100.0$)

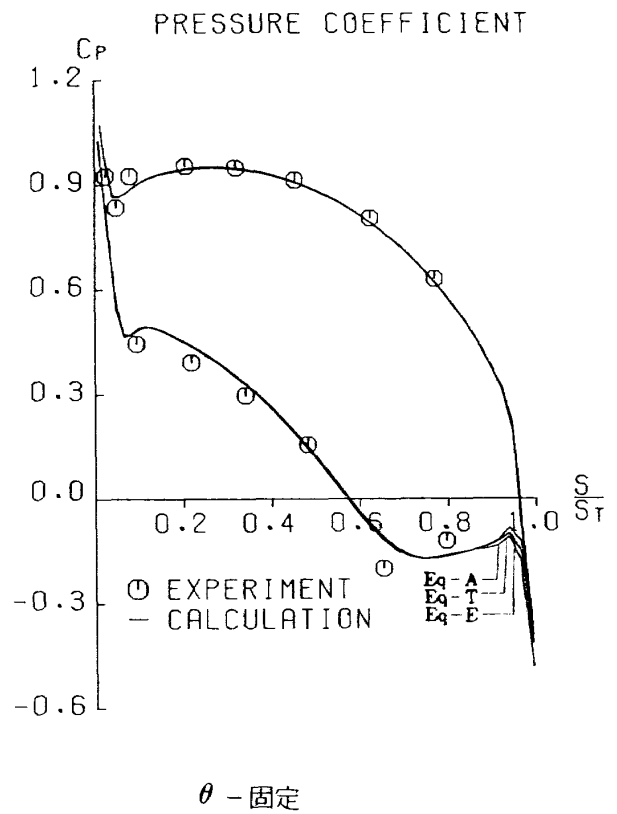
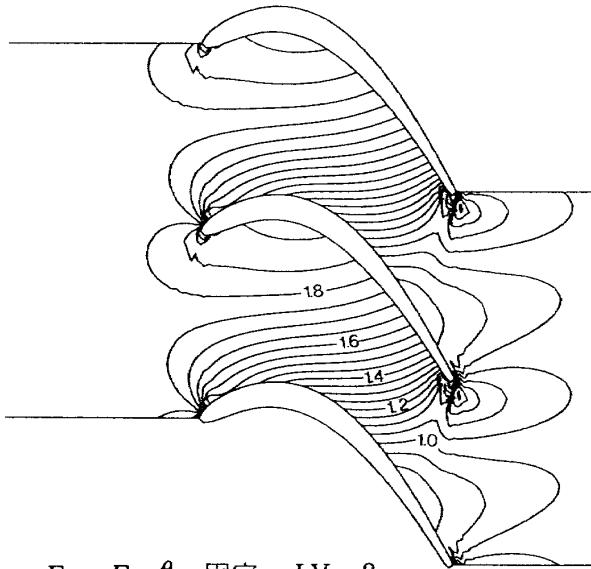
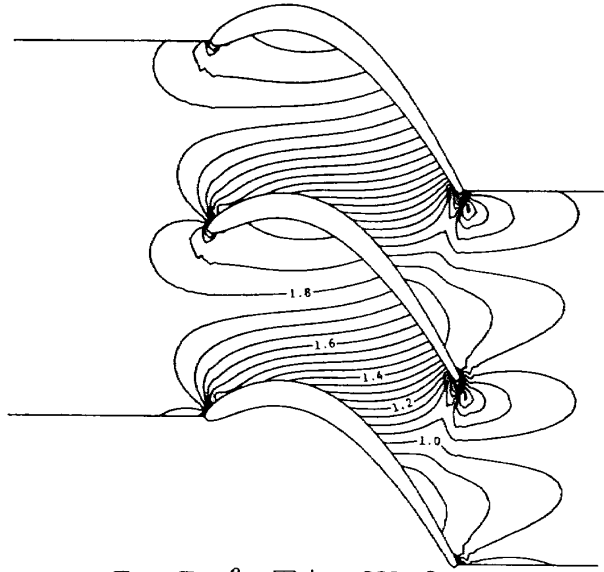


図17 翼面圧力係数分布, 方程式による相違 ($t=100.0$)



$E_q - E, \theta - \text{固定}, IV-2,$
 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}, N_s = 8$

図18 等圧線



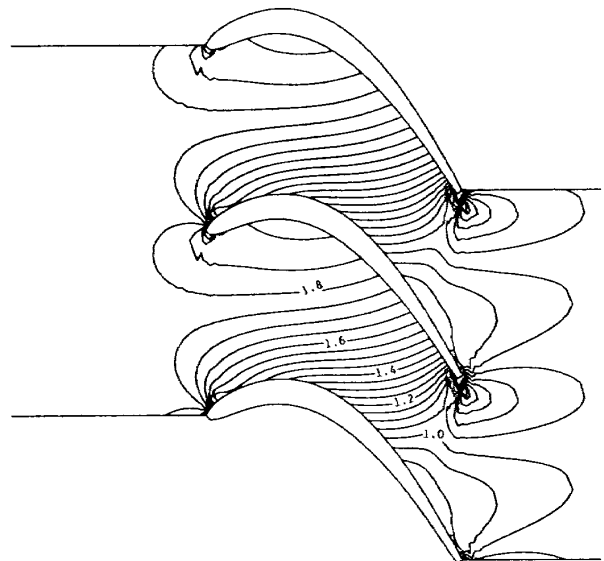
$E_q - T, \theta - \text{固定}, IV-2,$
 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}, N_s = 8$

図19 等圧線

算結果を図16, 17に示す。どちらの場合にも定常状態における翼面圧力係数分布には、翼背面の後縁部を除いて方程式系による差が殆んどみられない(図15, 17)。一方定常状態に達するまでの時間ステップ数についてみると、 θ -固定計算では方程式系による差はみられないが(図16)、 M -固定計算では $E_q - E$ と $E_q - A$ が殆んど同じ収れん性を示し $t = 100$ までには定常状態に達しているが、 $E_q - T$ によるものはその振幅が十分小さくなってはいるものの $t = 100$ でも未だ振動性を示している(図14)。

1回の時間ステップ当りの計算時間は演算構成に依存する。互いに異っているのは第四番目の式だけでありその特徴は、i) $E_q - E$ は微分方程式であり従ってFAMにより四則演算のみなる、ii) $E_q - A$ は代数式であるが実数の実数乗を含み指数函数、対数函数の計算が必要となる、iii) $E_q - T$ は四則演算だけの代数式である。これをうけて、FACOM 230-75 AP による計算時間は、 121×21 の格子点で1回の時間ステップ当り、 $E_q - E$ で 5.5×10^{-2} 秒、 $E_q - A$ で 6.3×10^{-2} 秒、 $E_q - T$ で 4.6×10^{-2} 秒であった。上述したごとく $E_q - A$ が最も遅く、 $E_q - T$ が最も速い結果となることが確かめられた。

従って定常状態に達するまでに要する全計算コストからみると、 θ -固定計算では $E_q - T$ を用い、 M

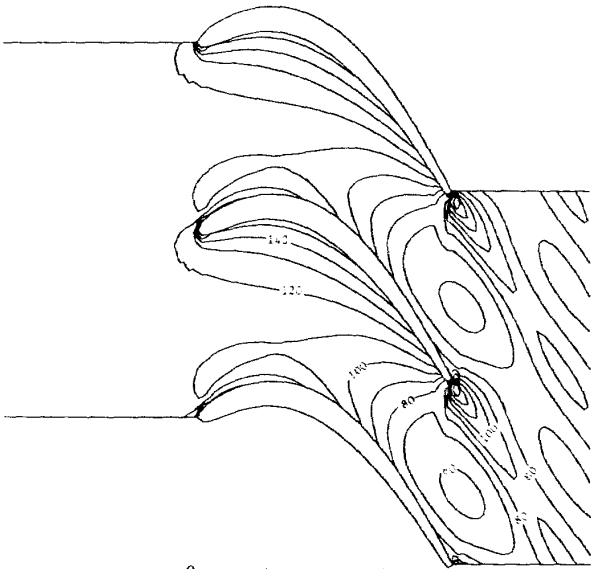


$E_q - A, \theta - \text{固定}, IV-2,$
 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}, N_s = 8$

図20 等圧線

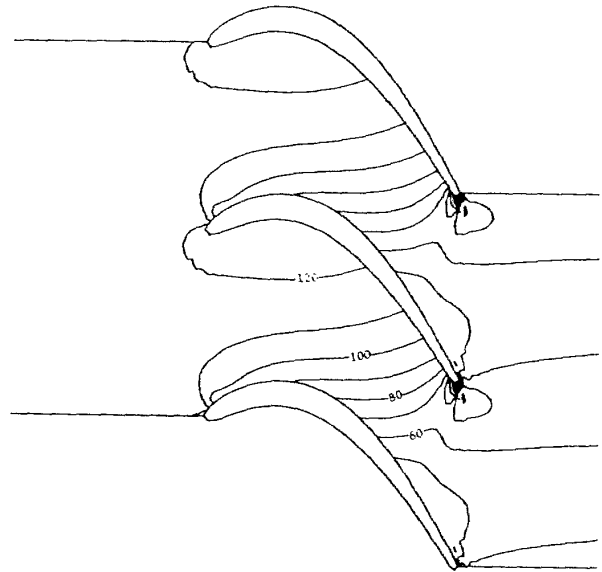
—固定計算では $E_q - E$ を用いるのが好ましい。

流れ場全域の様子をみると、圧力場は方程式系による差があまりみられなかった(図18, 19, 20)。一方温度場にはかなりの差がみられ、 $E_q - T$ による翼面温度を基準として、絶対温度で数%ないし+%ほど $E_q - E$ では高く、 $E_q - A$ では小さくなった。 θ -固定、IV-1、 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ 、 $N_s = 8$ の条件下で計算した温度場を図21, 22, 23に示す。



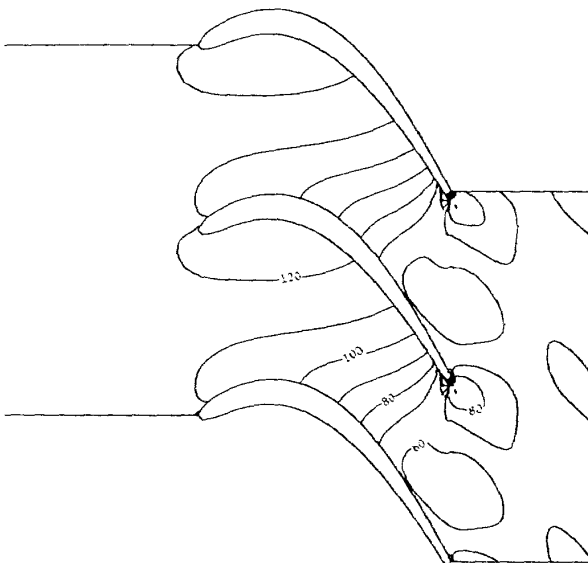
$E_q - E, \theta - \text{固定}, IV-2,$
 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}, N_s = 8$

図21 等温線



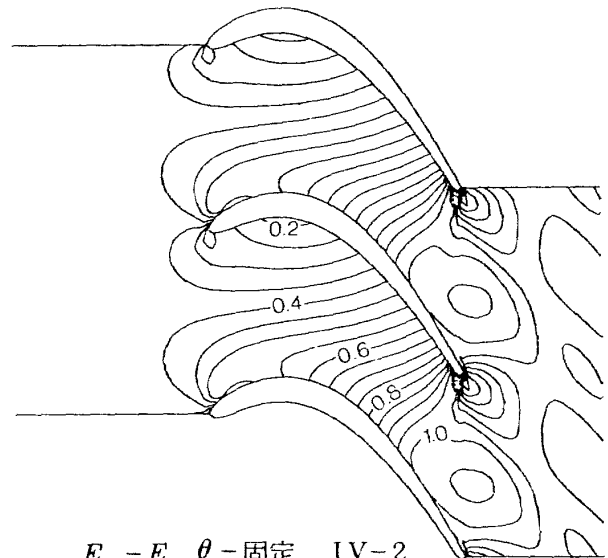
$E_q - A, \theta - \text{固定}, IV-2,$
 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}, N_s = 8$

図23 等温線



$E_q - T, \theta - \text{固定}, IV-2,$
 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}, N_s = 8$

図22 等温線

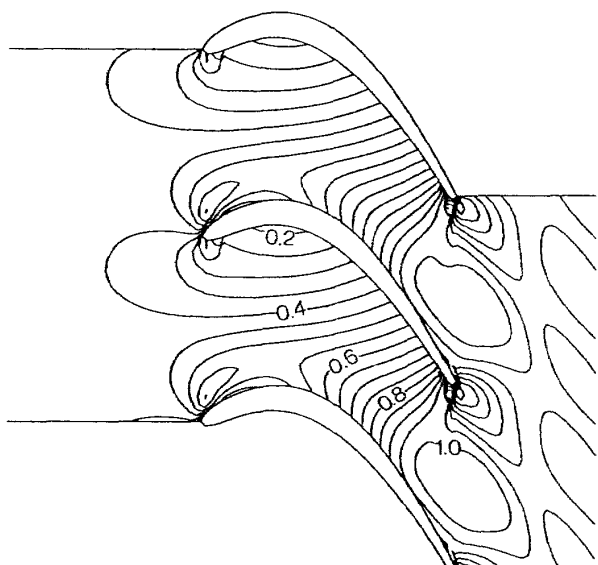


$E_q - E, \theta - \text{固定}, IV-2,$
 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}, N_s = 8$

図24 等マッハ線

今回の計算例ではエネルギー関係の式を代えてそれのみの影響を摘出することを試みたので、翼表面上あるいは翼上流、下流における境界条件を同一にして計算を行なった。しかしながら $E_q - E, E_q - T, E_q - A$ というそれぞれの方程式系に応じた温度境界条件の設定あるいは取り扱い方法を検討する必要があると思われる。

実験結果との比較 これまでに示した翼面圧力係数分布図(図6, 8等)をみると計算結果が実験結果とよく一致しているのがわかる。また高負荷化を図った成果がある程度みられるが、コード位置 $S/S_T = 0.1$ から 0.6 にかけてもっと翼背面の圧力を下げて、さらに大きな高負荷を実現する余地があるように思われる。



$E_q - E, M$ -固定, IV-2,

$\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}, N_s = 8$

図25 等マッハ線

実験結果をみると弱い衝撃波が生じていると思われるが、これまでに掲げた翼面圧力係数分布図をみてもそれに相当する急激な圧力の変化がみられない。また等圧線、等マッハ線を見ても衝撃波の存在を示す密になった分布が見当たらない(図19, 20, 21, 24)。実際M-固定計算では翼面上でマッハ数が1を越えた所はなく(図25), θ -固定計算においてもごくわずかに1を越しているだけである。ただx方向にはほぼ平行な圧縮波らしきものが認められる。これはこの程度の弱い衝撃波では、計算の際に発散を防ぐために行なっている平滑化のために確認できない程度に広がってしまったものと思われる。

衝撃波の捕獲性については、より強い衝撃波が現われるデータについて計算を行ない議論をする必要がある。今後このような計算も行なり予定である。

6. 結 び

非粘性圧縮性の二次元翼列流れをFAMによって計算するプログラムを作成し、実際の粘性流れの遷音速タービン翼列の計測値と比較した結果、翼面圧力係数分布により一致を得た。

本報告による計算例からの結論として、特別の事情がない限り $E_q - T, \theta$ -固定, IV-1 の組み合わせによる計算が最も計算効率が良く、その場合に必要な計算時間は3分未満である。

この結果本プログラムを汎用ソフトウェアとして整備し、広く研究者の利用に供する価値があると認められる。

今回は計算方法の確認を目的としたため一種類の実験データについての計算を行なったが、同一翼型での豊富な実験データに対応する計算、あるいは異なる翼型に関する計算を通じて検証を行ない、平滑化あるいは前、後縁近傍の取り扱い等の問題点を解決し、汎用化に必要なノウハウを得つつある。

さらに三次元オイラー方程式の数値計算への本手法の適用、あるいはここで得られた値を初期値として二次元ナビエ・ストークス方程式の数値解の計算へと進む予定である。

終りに、原動機部空力研究室より貴重な実験データの提供を受けたこと、および空気力学第二部の河合技官より等高線図を描くためプログラムの提供を受けたことを記しておく。

参 考 文 献

- 1) S. Gopalakrishnan, R. Bozzola; A Numerical Technique for the Calculation of Transonic Flows in Turbomachinery Cascades, ASME paper 71-GT-42
- 2) S. Gopalakrishnan, R. Bozzola; Computation of Shocked Flows in Compressor Cascades, ASME paper 72-GT-31
- 3) D.C. Ives, J.F. Liutermoza; Second Order Accurate Calculation of Transonic Flow Over Turbomachinery Cascades, AIAA paper 78-1149
- 4) R.A. Delaney, P. Kavanagh; Transonic Flow Analysis in Axial-Flow Turbomachinery Cascades by a Time-Dependent Method of Characteristics. Trans. ASME, J of Engineering for Power, July 1976
- 5) P.W. McDonald; The Computation of Transonic Flow Through Two-Dimensional Gas Turbine Cascades,

- ASME paper 71-GT-89
- 6) J.R. Casper, D.E. Hobbs and R.L. Davis; The Calculation of Two-Dimensional Compressible Potential Flow in Cascades Using Finite Area Techniques, AIAA paper 79-0077
 - 7) W.T. Thompkins, A.H. Epstein; A Comparison of the Computed and Experimental Three-Dimensioned Flow in a Transonic Compressor Rotor, AIAA paper 76-368
 - 8) G. Haymann-Haber, W.T. Thompkins, Jr.; Comparison of Experimental and Computational Shock Structure in a Transonic Compressor Rotor, ASME paper 80-GT-81
 - 9) S. Biniaris; The Calculation of the Quasi-Three-Dimensional Flow in an Axial Gas Turbine, Trans. ASME, J. of Engineering for Power, April, 1975
 - 10) J.P. Veuillot; Calculation of the Quasi Three-Dimensional Flow in a Turbomachine Blade Row, Trans. ASME, J. of Engineering for Power, January, 1977
 - 11) W. Schwering; Design of Cascades for Incompressible Plane Potential Flows With Prescribed Velocity Distribution, Trans. ASME' J. of Engineering for Power, July. 1971
 - 12) F.G. Sator; Inverse Computation of Profile Shapes for Given Transonic Flow-Configurations With and Without Detached Bow-Shocks in Two-Dimensional Turbomachinery Cascades, Trans, ASME, J. of Engineering for Power, October, 1977
 - 13) S. Gopalakrishnan, R. Bozzola; Numerical Representation of Inlet and Exit Boundary Conditions in Transient Cascade Flow, Trans. ASME' J. of Engineering Power, October 1973
 - 14) M. Couston; Transonic Flows In Axial Turbomachinery, VKI Lecture Ser. 84
 - 15) A.W. Rizzi, M. Inouye; Time-Split Finite-Volume Method for Three-Dimensional Blunt-Body flow, AIAA Journal, Vol. 11, No. 11
 - 16) 養田光弘, 山崎紀雄, 能瀬弘幸; 低圧タービン用翼列の二次元試験, 第21回航空原動機に関する講演会講演集(1981) 14~17
 - 17) D.C. Ives, J.F. Liutermoza; Analysis of Transonic Cascade Flow Using Conformal Mapping and Relaxation Techniques, AIAA Journal, Vol. 15, May 1977

航空宇宙技術研究所報告 709 号

昭和 57 年 5 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社実業公報社
東京都千代田区九段南 4-2-12

Printed in Japan