ISSN 0389-4010
UDC 629.783

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-738

地球の人工衛星の運動におけるZonal Harmonicsによる摂動

——一次および二次の摂動——

武 内 澄 夫

1982年9月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

地球の人工衛星の運動におけるZonal Harmonicsによる摂動*

——一次および二次の摂動——*

武 内 澄 夫**

Zonal Harmonic Perturbations in the Motion of an Artificial Earth Satellite

– the First and the Second Order Perturbations –

Sumio Takeuchi

Abstract

The use of canonical variables and von Zeipel's method in solving the problem of artificial satellite theory without air drag was studied by Brouwer. The equations of motion in the Lagrangean form have been investigated by Kozai in accordance with Brouwer's theory.

In the present paper the theoretical explanations of the equations of motion derived by Kozai are shown in more detail.

The equations are applied to the study of perturbative effects of earth oblateness on the motion of an artificial satellite around the earth. With the aid of eccentricity functions and inclination functions, the spherical harmonic disturbing function is converted to the function of Keplerian elements.

By the method of linear perturbations the first and the second order perturbations are determined. The perturbations include coupling effects dependent on the earth's oblateness and other actions upon the satellite.

1. 緒　　言

地球の人工衛星が zonal harmonics に基づく摂動力の作用を受ける場合の一次および二次の摂動を求める。ただしここで zonal harmonics に基づく摂動力以外の作用による相互作用をも考慮することにする。

摂動の理論には各種のものがあり，これらに用いられる諸方法の内では Delaunay 形の運動方程式を用いる方法と Lagrange 形の運動方程式を用いる方法が最も主要であると考えられる。

zonal harmonics に基づく摂動力の作用を取り扱う場合には Delaunay 形の運動方程式を用い正準変換を行う方法をとる理論によれば非常に精細に摂動が求められる。[1)2)3)4)5)] 一方 Lagrange 形の運動方程式を用いる方法をとる理論においても一次の摂動理論は確立されている。[6)] しかしこの方法による二次の摂動理論は軌道要素の変化率の展開式を用いるものであり，その確立にはあまりにも多大の労力を要す

* 昭和57年7月1日　受付
** 宇宙研究グループ

るためにはほとんど手をつけられていない[7] しかしこれを打開して一次および二次の摂動を求める方法が示された。これは Brouwer の理論に基づいて導き出された Lagrange 形の運動方程式を用いる方法である。そしてこの方法をとる理論においてはそれぞれの運動方程式に用いられている摂動関数の決定と主要な相互作用の選定が行われている[8]。

zonal harmonics に基づく摂動力以外の作用を取り扱う場合には摂動関数の表示式は一般に複雑となり，Delaunay 形の運動方程式を用い正準変換を行う方法を適用することは困難となる。しかしこのような場合においても Lagrange 形の運動方程式を用いる方法を適用することは比較的に簡単である。またこの方法の適用は，摂動力が摂動加速度の成分によって表示されているときにも Gauss 形の方程式をとることにすれば割合に簡単に行われる。そしてこのような場合の摂動力の大きさは一般に小さい。それ故に一次の摂動理論のみによって摂動を確定できることが多い。

実際には，zonal harmonics に基づく摂動力およびその他の作用が共に存在していて，これらの作用を同時に取り扱う必要がある場合が多い。このような場合に zonal harmonics に基づく二次以上の摂動までを求めるときには，zonal harmonics に基づく摂動力の作用の取り扱いには Delaunay 形の運動方程式を用い正準変換を行う方法をとり，その他の作用の取り扱いには Lagrange 形の運動方程式を用いる方法をとることが行われている[9] この Delaunay 形の運動方程式を用いる方法による理論は zonal harmonics に基づく摂動力の作用のみを対象とするものである。このために正準方程式および正準変換式の中にある正準変数の変化率においては zonal harmonics に基づく摂動力以外の作用による相互作用に対する考慮がされていない。

そこで Lagrange 形の運動方程式を用いる方法を一貫してとり，zonal harmonics に基づく摂動力およびその他の作用を同時に取り扱い，相互作用に対する考慮をもするような理論の確立をめざすことにした。

本研究においてはその一部として zonal harmonics に基づく摂動力の作用を取り上げる。そして，Brouwer の理論に基づいて導き出された Lagrange 形の運動方程式を用い，また線形摂動の方法をとって，一次および二次の摂動を求める理論を示す。したがってこの理論においては zonal harmonics に基づく摂動力以外の作用による相互作用が考慮されることになる。またここで Brouwer の理論において摂動関数に一般項表示を適用した理論[10]を用いた。そしてこれによって高次の harmonics までをとる場合にも諸式の取り扱いを容易にした。なお以上に先立って Brouwer の理論に基づいて導き出された Lagrange 形の運動方程式を用いる方法をとる摂動理論[8] に対する理論的な詳解を示しておいた。

2. 力学系

時刻系として原子時 t をとる。そしてこれを用いて運動方程式から運動を決定することにする。

地心Oを原点とし，1950.0の平均春分点に向けて x_S 軸をとる。また1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく赤経が 90° の点をこの平均赤道上にとり，この点に向けて y_S 軸をとる。このとき右手系直交座標系 Ox_S y_S z_S は 1950.0 の平均春分点と平均赤道に基づく地心を原点とし，慣性系に対し並進運動のみをする系とみなされる。また座標系O x_S y_S z_S と同様に瞬時の真の春分点と赤道に基づいて考えられる右手系直交座標系をO x_T y_T z_T とする。これは瞬時の真の赤道に基づく地心赤道座標系である。ここで座標系Ox_S y_S z_S に対する座標系Ox_T y_T z_T の相対運動を表わす一般歳差，黄経の章動，黄道傾角の変化などの大きさは微小である。したがってこれらを無視して座標系O x_T y_T z_Tを並進運動座標系とみなすことにする。以下においてはこのようにみなした座標系O x_T y_T z_Tを基準とし，これに関して運動を決定することにする[11]。

人工衛星に作用する外力としては potential から導かれる力とそれ以外の力がある。この potential を人工衛星の単位質量に対して次のように表わす。

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{\mu}{r} + R \\ \mu &= \mathrm{G\ m_e} \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

以上において

μ ：地心重力定数

r ：人工衛星の地心距離

R ：摂動関数

G ：万有引力の定数

m_e：地球の質量

とする。ここで地球の質量に対する人工衛星の質量を無視してある。またこの potential から導かれる力以外の力による摂動加速度を$\boldsymbol{P}$とする。次に右手系直交座標系O X Y Zをとる。ここでX軸の方向，向きをOに関する人工衛星の位置ベクトルの方向，向きに一致させる。またZ軸の方向，向きをOに関する人工衛星の角運動量の方向，向きに一致させることにする。そして$\boldsymbol{P}$のX，Y，Z成分をS，T，Wとする。

以下においては摂動力として特に zonal harmonics に基くもののみをとり，この作用を考究することにする。したがって摂動関数は zonal harmonics のみから構成されるとすることになり，次のようになる。

$$R=\frac{\mu}{r}\sum_{p=2}^{\infty}\mathrm{J}_p\left(\frac{a_e}{r}\right)^p\mathrm{P}_p(\sin\beta)$$

ここで

J_p：定数

a_e：地球の平均赤道半径

β ：人工衛星の地心緯度

P_p： Legendre 関数

である。ただし相互作用を考慮する場合には zonal harmonics に基づく摂動力による作用以外の各種の作用をも取り入れることにする。

3. 運動方程式

座標系Ox_T y_T z_Tを基準として考えた人工衛星の接触軌道要素として次のものをとる。

a ：軌道の半長軸

e ：軌道の離心率

i ：瞬時の真の赤道面に対する軌道面の傾斜角

Ω ：昇交点経度，瞬時の真の春分点と赤道に基づいた昇交点の赤経

ω ：瞬時の真の赤道面から測った近地点引数

χ^*：時刻$t_{(j)}$における平均近点離角

また次のようにする。

M ：平均近点離角

n ：平均運動

ここで次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}&\mu=n^2a^3\\&M=\chi^*+\int_{t(j)}^{t}n\,\mathrm{d}t\end{aligned}\right\}\quad(3.1)$$

次に Delaunay 変数を次のように表すことにする。

$$\left.\begin{aligned}&L=\sqrt{\mu a}\quad,\quad l=M\\&G=L\sqrt{1-e^2}\;,\quad g=\omega\\&H=G\cos i\quad,\quad h=\Omega\end{aligned}\right\}\quad(3.2)$$

また以下において

L，G，H，l，g，h

をそれぞれ

L_1，L_2，L_3，l_1，l_2，l_3

によって表すことにする。このとき Hamilton の正準方程式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}L_k}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial l_k},\quad\frac{\mathrm{d}l_k}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial F}{\partial L_k}\\&k=1,\ 2,\ 3\end{aligned}\right\}\quad(3.3)$$

ここでFは Hamilton 関数であり，次のようになる。

$$F=\frac{\mu^2}{2L^2}+R\qquad(3.4)$$

また次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial a}{\partial L}=\frac{2}{na},\quad\frac{\partial e}{\partial L}=\frac{1-e^2}{na^2e},\quad\frac{\partial i}{\partial L}=0\\&\frac{\partial a}{\partial G}=0\;,\quad\frac{\partial e}{\partial G}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e},\quad\frac{\partial i}{\partial G}=\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\\&\frac{\partial a}{\partial H}=0\;,\quad\frac{\partial e}{\partial H}=0,\quad\frac{\partial i}{\partial H}=-\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\end{aligned}\right\}\quad(3.5)$$

したがって次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{na}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\\&\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\\&\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\}\quad(3.6)$$

4. 摂動関数の表示

Kaula の式によれば次のようになる。[12)]

$$R = \sum_{p=2}^{\infty} U_{p,q=0}$$

$$U_{p,0} = \sum_{u=0}^{p} \sum_{v=-\infty}^{\infty} U_{p,0,u,v}$$

$$U_{p,0,u,v} = \mu\, J_p \frac{a_e^p}{a^{p+1}} G_{p,u,v}(e)\, F_{p,0,u}(i)$$

$$\cos\left[(p-2u)\omega + (p-2u+v)M - \left\{1-(-1)^p\right\}\frac{\pi}{4}\right] \tag{4.1}$$

5. Brouwer の理論に基づく摂動理論

Brouwerの理論において摂動関数に一般項表示を用いた理論[10)]を以下に用いることにする。二次の harmonic の定数 J_2 を微小数の基準とするとき第 I 位の微小数を因数とする量を添字 I をつけて表すことにする。そうすれば次のように表すことができる。

$$F = F_0 + F_1 + F_2$$

ここで次のようになる。

$$F_0 = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{L^2}$$

$$F_1 = -\frac{1}{2}\frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^6}\left\{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H^2}{G^2}\right)\frac{a^3}{r^3} + \left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\frac{H^2}{G^2}\right)\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2f)\right\}$$

$$= -\frac{\mu J_2 a_e^2}{a^3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)\frac{a^3}{r^3} + \frac{3}{4}\sin^2 i\,\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2f)\right\}$$

$$F_2 = \mu \sum_{p=3}^{\infty}\sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{J_p a_e^p}{a^{p+1}} G_{p,u,v}(e) F_{p,0,u}(i)$$

$$\cos\left[(p-2u)g + (p-2u+v)l - \left\{1-(-1)^p\right\}\frac{\pi}{4}\right]$$

ここで f は真近点離角である。

5.1 短周期摂動

5.1.1 正準変換

正準変数 L, G, H, l, g, h から母関数を S とする正準変換によって新変数 L', G', H', l', g', h' に変換する。F は L, G, H, l, g, h の関数であるが，F の中に表われぬ変数があればこの変数を記号 — で表わして変数の配列の中に置く表示法を以下に用いる。そして第一回の正準変換後のHamilton関数を F^* とし，

$$F(L, G, H, l, g, —) = F^*(L', G', H', —, g', —)$$

となるように変換を決定する。このとき次のように表される。

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots\cdots$$

$$F^* = F_0^* + F_1^* + F_2^* + \cdots\cdots$$

ここで

$$S_0 = L'l + G'g + H'h$$

とする。

このとき次式が成立する。

$$F_0\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right) + F_1\left(\frac{\partial S}{\partial l}, \frac{\partial S}{\partial g}, \frac{\partial S}{\partial h}, l, g, —\right) + F_2\left(\frac{\partial S}{\partial l}, \frac{\partial S}{\partial g}, \frac{\partial S}{\partial h}, l, g, —\right)$$

$$= F_0^*(L') + F_1^*\left(L', G', H', —, \frac{\partial S}{\partial G'}, —\right) + F_2^*\left(L', G', H'\ —, \frac{\partial S}{\partial G'}, —\right) \tag{5.1.1.1}$$

5.1.2 主問題の場合

(5.1.1.1)を

$$\frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial S_2}{\partial l} + \cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial g} + \frac{\partial S_2}{\partial g} + \cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial h} + \frac{\partial S_2}{\partial h} + \cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial G'} + \frac{\partial S_2}{\partial G'} + \cdots\cdots,$$

などの冪に従って展開する。ここで L, G, H の関数に ′ をつけた関数は，もとの関数の式中の L, G, H をそれぞれ L', G', H' で置き換えて得られる関数を表すことにする。また M に独立な部分と依存する部分をそれぞれ添字のＳとＰによって表す。そうすれば次式をうる。

$$F_0 = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{L'^2}$$

$$F_1 = F_{1S} + F_{1P}$$

$$F_{1S} = -\frac{1}{2}\frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L'^3 G'^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)$$

$$= F_{1S}(a', e', i', -, -, -)$$

$$= -\frac{\mu J_2 a_e^2}{a'^3 (1-e'^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sin^2 i'\right)$$

$$F_{1P} = -\frac{1}{2}\frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L'^6}\left\{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\left(\frac{a'^3}{r'^3}-\frac{L'^3}{G'^3}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\frac{a'^3}{r'^3}\cos(2g+2f)\right\}$$

$$= F_{1P}(a', e', i', -, g, f)$$

$$= -\frac{\mu J_2 a_e^2}{a'^3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sin^2 i'\right)\left\{\left(\frac{a'}{r'}\right)^3-(1-e'^2)^{-\frac{3}{2}}\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\sin^2 i'\cos(2\omega+2f')\right]$$

また母関数に関して次式が成立する。

$$\frac{\partial S_1}{\partial l} = -\frac{1}{\dfrac{\partial F_0}{\partial L'}} F_{1P}$$

運動量変数の正準変換は次のようになる。

$$L_\kappa - L'_\kappa = \frac{\partial S_1}{\partial l_\kappa} = \int \frac{\partial F_{1P}}{\partial l_\kappa}\, dt$$

$$\kappa = 1,\ 2,\ 3$$

以下において一次の摂動，主問題および短周期の場合をそれぞれ添字の 1，M および S によって示すことにする。そうすれば上式から次式が成立する。

$$\left\{\frac{d(L_k - L'_k)}{dt}\right\}_{1,M} = \left(\frac{dL_k}{dt}\right)_{1,M,S} = \frac{\partial F_{1P}}{\partial l_k}, \quad k = 1,\ 2,\ 3 \qquad (5.1.2.1)$$

ここで L_k と L'_k の差は J_2 を因数とする式によって表される。そこで

$$L'_k = L_k, \quad \kappa = 1,\ 2,\ 3 \qquad (5.1.2.2)$$

とみなすことにする。そうすれば変化率を表す諸量における第 I 位の微小数の大きさを持つ量において第 $(I+1)$ 位の微小数が無視されることになるにすぎない。したがって (3.6) と (5.1.2.1) から次式が得られる。

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{1,M,S} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \chi^*}$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{1,M,S} = \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \chi^*} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{1,M,S} = \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

$$R = F_{1P}(a, e, i, -, \omega, f) \qquad (5.1.2.3\mathrm{M})$$

角変数の正準変換は次のようになる。

$$l_\kappa - l'_\kappa$$

$$= -\frac{\partial S_1}{\partial L'_\kappa}$$

$$= -\int\left(\frac{\partial F_{1P}}{\partial a'}\frac{\partial a'}{\partial L'_\kappa} + \frac{\partial F_{1P}}{\partial e'}\frac{\partial e'}{\partial L'_\kappa} + \frac{\partial F_{1P}}{\partial i'}\frac{\partial i}{\partial L'_\kappa}\right)dt$$

$$-\int\left(\frac{\partial}{\partial a'}\frac{\partial F_0}{\partial L'_\kappa}\right)\delta_1 a'_{M,S}\,dt$$

$$\kappa = 1,\ 2,\ 3$$

ここで δ_1 は後に示すように一次の摂動に基づく軌道要素の変化を表す。角変数の正準変換の式の第三辺において第一項を用いれば次式が成立する。

$$\left\{\frac{d(l_\kappa - l'_\kappa)}{dt}\right\}_{1,M}$$

$$= \left(\frac{dl_\kappa}{dt}\right)_{1,M,S}$$

$$= -\frac{\partial F_{1P}}{\partial a}\frac{\partial a'}{\partial L'_\kappa} - \frac{\partial F_{1P}}{\partial e'}\frac{\partial e'}{\partial L'_\kappa} - \frac{\partial F_{1P}}{\partial i'}\frac{\partial i'}{\partial L'_\kappa}$$

$$\kappa = 1,\ 2,\ 3 \qquad (5.1.2.4)$$

ここでも (5.1.2.2) のようにみなすことにする。そうすれば (5.1.2.4) と (3.5) から次式が得られる。

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{1,M,S} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{1,M,S} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_{1,M,S} = -\frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)$$

$$R = F_{1P}(a, e, i, -, \omega, f) \qquad (5.1.2.3\mathrm{A})$$

ここで $\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)$ は $\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{n=const.}$ を示す。

次に角変数の正準変換の式の第三辺において第二項を用い，a の変化に基づく場合を添字の $\delta a'$ によって示すことにすれば次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\frac{d(l_\kappa-l'_\kappa)}{dt}\right\}_{1,\delta a',M} \\ &=\left(\frac{d l_\kappa}{dt}\right)_{1,\delta a',M,S} \\ &=-\left(\frac{\partial}{\partial a'}\frac{dF_0}{dL'_\kappa}\right)\delta_1 a'_{M,S} \\ &\kappa=1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \quad (5.1.2.5)$$

ここでも(5.1.2.2)のようにみなすことにする。そうすれば次式が得られる。

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{1,\delta a,M,S}=\frac{\partial n}{\partial a}\ \delta_1 a_{M,S} \qquad (5.1.2.6)$$

5.2 長周期摂動および長年摂動

5.2.1 正準変換

正準変数L', G', H', l', g', h'から母関数をS^*とする正準変換によって新変数L'', G'', H'', l'', g'', h''に変換する。そして第二回の正準変換後のHamilton関数をF^{**}とし,

$$F^*(L',\ G',\ H',\ -,\ g',\ -)$$
$$=F^{**}(L'',\ G'',\ H'',\ -,\ -,\ -)$$

となるように変換を決定する。このとき次のように表される。

$$S^*=S_0^*+S_1^*+S_2^*+\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{**}=F_0^{**}+F_1^{**}+F_2^{**}+\cdots\cdots\cdots$$

ここで

$$S_0^*=L''l'+G''g'+H''h'$$

とする。

このとき次式が成立する。

$$\begin{aligned} &F_0^*\left(\frac{\partial S^*}{\partial l'}\right)+F_1^*\left(\frac{\partial S^*}{\partial l'},\ \frac{\partial S^*}{\partial g'},\ \frac{\partial S^*}{\partial h'},\ -,\ g',\ -\right) \\ &\qquad+F_2^*\left(\frac{\partial S^*}{\partial l'},\ \frac{\partial S^*}{\partial g'},\ \frac{\partial S^*}{\partial h'},\ -,\ g',\ -\right) \\ &=F_0^{**}(L'')+F_1^{**}(L'',\ G'',\ H'',\ -,\ -,\ -) \\ &\qquad+F_2^{**}(L'',\ G'',\ H'',\ -,\ -,\ -) \end{aligned} \qquad (5.2.1.1)$$

5.2.2 主問題の場合

(5.2.1.1)を

$$\frac{\partial S_1^*}{\partial l'}+\frac{\partial S_2^*}{\partial l'}+\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial S_1^*}{\partial g'}+\frac{\partial S_2^*}{\partial g'}+\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial S_1^*}{\partial h'}+\frac{\partial S_2^*}{\partial h'}+\cdots\cdots\cdots,$$

などの冪に従って展開する。

ここでL', G', H'の関数に $''$ をつけた関数は，もとの関数の式中のL', G', H'をそれぞれL'', G'', H''で置き換えて得られる関数を表すことにする。

またg'に独立な部分と依存する部分をそれぞれ添字のSとPによって表す。そうすれば次式をうる。

$$F_0^*=\frac{1}{2}\ \frac{\mu^2}{L''^2}$$

$$\begin{aligned} F_1^*&=-\frac{1}{2}\ \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L''^3 G''^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H''^2}{G''^2}\right) \\ &=F_1^*(a'',\ e'',\ i'',\ -,\ -,\ -) \\ &=\frac{\mu J_2 a_e^2}{a''^3(1-e'^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sin^2 i''\right) \end{aligned}$$

$$F_2^*=F_{2S}^*+F_{2P}^*$$

$$\begin{aligned} F_{2S}^*&=\frac{1}{4}\ \frac{\mu^6 J_2^2 a_e^4}{L''^{10}}\left\{\frac{15}{32}\frac{L''^5}{G''^5}\left(1-\frac{18}{5}\frac{H''^2}{G''^2}+\frac{H''^4}{G''^4}\right)\right. \\ &\qquad+\frac{3}{8}\frac{L''^6}{G''^6}\left(1-6\frac{H''^2}{G''^2}+9\frac{H''^4}{G''^4}\right) \\ &\qquad\left.-\frac{15}{32}\frac{L''^7}{G''^7}\left(1-2\frac{H''^2}{G''^2}-7\frac{H''^4}{G''^4}\right)\right\} \\ &=F_{2S}^*(a'',\ e'',\ i'',\ -,\ -,\ -) \\ &=\frac{3}{128}\ \frac{\mu J_2^2 a_e^4}{a''^5(1-e''^2)^{\frac{7}{2}}}\left\{5(8-16\sin^2 i''+7\sin^4 i'')\right. \\ &\qquad+4\sqrt{1-e''^2}\,(2-3\sin^2 i'')^2 \\ &\qquad\left.-(1-e''^2)(8-8\sin^2 i''-5\sin^4 i'')\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{2P}^*&=\frac{1}{4}\ \frac{\mu^6 J_2^2 a_e^4}{L''^{10}}\left\{-\frac{3}{16}\left(\frac{L''^5}{G''^5}-\frac{L''^7}{G''^7}\right)\right. \\ &\qquad\left.\times\left(1-16\frac{H''^2}{G''^2}+15\frac{H''^4}{G''^4}\right)\cos 2g'\right. \\ &=F_{2P}^*(a'',\ e'',\ i'',\ -,\ g',\ -) \\ &=-\frac{3}{64}\ \frac{\mu J_2 a_e^4}{a''^5}\ (1-e''^2)^{-\frac{7}{2}}\ e''^2 \\ &\qquad\times\sin^2 i''(14-15\sin^2 i'')\cos 2g' \end{aligned}$$

また第二回の正準変換後のHamilton関数は次のようになる。

$$F_0^{**}=\frac{1}{2}\ \frac{\mu^2}{L''^2}$$

$$F_1^{**}(a'',\ e'',\ i'',\ -,\ -,\ -)$$
$$=F_1^*(a'',\ e'',\ i'',\ -,\ -,\ -)$$

$$F_2^{**}(a'', e'', i'', -, -, -) = F_{2S}^{*}(a'', e'', i'', -, -, -)$$

さらに母関数に関して次式が成立する。

$$\frac{\partial S_1^*}{\partial g'} = -\frac{1}{\dfrac{\partial F_1^*}{\partial G''}} F_{2P}^*$$

角変数に関する正準方程式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d l''_\kappa}{dt}\\&= -\frac{\partial F^{**}}{\partial L''_\kappa}\\&= -\frac{\partial F^{**}}{\partial a''}\frac{\partial a''}{\partial L''_\kappa} - \frac{\partial F^{**}}{\partial e''}\frac{\partial e''}{\partial L''_\kappa} - \frac{\partial F^{**}}{\partial i''}\frac{\partial i''}{\partial L''_\kappa}\\&\kappa = 1, 2, 3\end{aligned}\right\} \tag{5.2.2.1}$$

ここでL_κとL''_κの差およびg'とgの差は共にJ_2を因数とする式によって表される。そこで

$$\left.\begin{aligned}L''_\kappa &= L_\kappa\\ g' &= g\\ \kappa &= 1, 2, 3\end{aligned}\right\} \tag{5.2.2.2}$$

とみなすことにする。そうすれば変化率を表す諸量における第I位の微小数の大きさを持つ量において第($I+1$)位の微小数が無視されることになるにすぎない。したがって(5.2.2.1)と(3.5)から次式が得られる。なお以下において二次の摂動および長年的の場合をそれぞれ添字の2およびseによって示すことにする。

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{O,M,se} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}\\ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{O,M,se} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}\\ \left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_{O,M,se} &= -\frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)\\ R &= F_O^{**}(a, e, i, -, -, -)\end{aligned}\right\} \tag{5.2.2.3}$$

ここでOは1と2をとる。ただしここで特にOが1をとる一次の長年摂動の場合だけは(5.2.2.2)のようにみなさず(5.2.2.3)の右辺の軌道要素として平均軌道要素を用いることを要する。もし(5.2.2.2)のようにみなして(5.2.2.3)の右辺の軌道要素として平均軌道要素の代りに接触軌道要素を用いれば一次の長年摂動において第2位の微小数の大きさの不正確な部分が生じる。なおこの不正確な部分と同等の大きさをもつ，長年摂動において第2位の微小数の大きさをもつ部分としてはharmonicsの二次から高次のものまでによって生起する二次の長年摂動の多数の構成部分が存在している。

運動量変数の正準変換は次のようになる。

$$L'_\kappa - L''_\kappa = \frac{\partial S_1^*}{\partial l'_\kappa} = \int \frac{\partial F_{2P}^*}{\partial l'_\kappa}\,dt$$

$$\kappa = 1, 2, 3$$

以下において変換後のHamilton関数における第二位の微小数を因数とする周期項に基づく場合および長周期の場合をそれぞれ添字のFおよびlによって示すことにする。そうすれば上式から次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}\left\{\frac{d(L'_\kappa - L''_\kappa)}{dt}\right\}_{2,F} &= \left(\frac{dL_\kappa}{dt}\right)_{2,F,l} = \frac{\partial F_{2P}^*}{\partial l'_\kappa}\\ \kappa &= 1, 2, 3\end{aligned}\right\} \tag{5.2.2.4}$$

ここでも(5.2.2.2)のようにみなすことにする。そうすれば(3.6)と(5.2.2.4)から次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{da}{dt}\right)_{2,F,l} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \chi^*}\\ \left(\frac{de}{dt}\right)_{2,F,l} &= \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \chi^*} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \omega}\\ \left(\frac{di}{dt}\right)_{2,F,l} &= \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}\\ R &= F_{2P}^*(a, e, i, -, \omega, -)\end{aligned}\right\} \tag{5.2.2.5M}$$

角変数の正準変換は次のようになる。

$$\begin{aligned}&l'_\kappa - l''_\kappa\\&= -\frac{\partial S_1^*}{\partial L_\kappa^*}\\&= -\int\left(\frac{\partial F_{2P}^*}{\partial a''}\frac{\partial a''}{\partial L''_\kappa} + \frac{\partial F_{2P}^*}{\partial e''}\frac{\partial e''}{\partial L''_\kappa} + \frac{\partial F_{2P}^*}{\partial i''}\frac{\partial i''}{\partial L''_\kappa}\right)dt\\&\quad + \int\left[\left\{\frac{\partial}{\partial e''}\left(\frac{d l''_\kappa}{dt}\right)_{1,M,se}\right\}\delta_2 e''_{F,l}\right.\\&\quad \left. + \left\{\frac{\partial}{\partial i''}\left(\frac{d l''_\kappa}{dt}\right)_{1,M,se}\right\}\delta_2 i''_{F,l}\right]dt\\&\kappa = 1, 2, 3\end{aligned}$$

ここでδ_2は後に示すように二次の摂動に基づく軌道要素の変化を表す。この角変数の正準変換の式の第

三辺において第一項を用いれば次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\frac{\mathrm{d}(l'_\kappa-l''_\kappa)}{\mathrm{d}t}\right\}_{2,\mathrm{F}}\\
&=\left(\frac{\mathrm{d}l_\kappa}{\mathrm{d}t}\right)_{2,\mathrm{F},l}\\
&=-\frac{\partial F^*_{2\mathrm{P}}}{\partial a''}\frac{\partial a''}{\partial L''_\kappa}-\frac{\partial F^*_{2\mathrm{P}}}{\partial e''}\frac{\partial e''}{\partial L''_\kappa}\\
&\quad-\frac{\partial F^*_{2\mathrm{P}}}{\partial i''}\frac{\partial i''}{\partial L''_\kappa}\\
&\qquad\kappa=1,\ 2,\ 3
\end{aligned}\right\}\quad(5.2.2.6)$$

ここでも(5.2.2.2)のようにみなすことにする。そうすれば(5.2.2.6)と(3.5)から次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{2,\mathrm{F},l}=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}\\
&\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{2,\mathrm{F},l}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}\\
&\left(\frac{\mathrm{d}\chi^*}{\mathrm{d}t}\right)_{2,\mathrm{F},l}=-\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)\\
&\qquad R=F^*_{2\mathrm{P}}(a,\ e,\ i,\ —,\ \omega,\ —)
\end{aligned}\right\}$$

(5.2.2.5A)

次に角変数の正準変換の式の第三辺において第二項を用い，相互作用に基づく場合を添字のCによって示すことにすれば次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\frac{\mathrm{d}(l'_\kappa-l''_\kappa)}{\mathrm{d}t}\right\}_{2,\mathrm{C}}\\
&=\left(\frac{\mathrm{d}l_\kappa}{\mathrm{d}t}\right)_{2,\mathrm{C},l}\\
&=\left\{\frac{\partial}{\partial e''}\left(\frac{\mathrm{d}l''_\kappa}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_2 e''_{\mathrm{F},l}\\
&\quad+\left\{\frac{\partial}{\partial i''}\left(\frac{\mathrm{d}l''_\kappa}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_2 i''_{\mathrm{F},l}\\
&\qquad\kappa=1,\ 2,\ 3
\end{aligned}\right\}\quad(5.2.2.7)$$

ここでも(5.2.2.2)のようにみなすことにする。そうすれば次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{2,\mathrm{C},l}=\left\{\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_2 e_{\mathrm{F},l}\\
&\qquad+\left\{\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_2 i_{\mathrm{F},l}\\
&\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{2,\mathrm{C},l}=\left\{\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_2 e_{\mathrm{F},l}\\
&\qquad+\left\{\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_2 i_{\mathrm{F},l}\\
&\left(\frac{\mathrm{d}\chi^*}{\mathrm{d}t}\right)_{2,\mathrm{C},l}=\left\{\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\mathrm{d}\chi^*}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_2 e_{\mathrm{F},l}\\
&\qquad+\left\{\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\mathrm{d}\chi^*}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_2 i_{\mathrm{F},l}
\end{aligned}\right\}$$

(5.2.2.8)

5.2.3 二次をこえるharmonicsをとった場合

主問題の場合の諸量に対して，二次をこえるp次のharmonic のみをとった場合に付加される量をΔ_pによって表すことにする。

第一回の正準変換後のHamilton関数に関して次式が成立する。

$$\begin{aligned}
&\Delta_p\ F^*_{2\mathrm{P}}(a'',\ e'',\ i'',\ —,\ g',\ —)\\
&=\frac{\mu\,\mathrm{J}_p a_e^p}{a''^{p+1}}\sum_u G_{p,u,-p+2u}(e'')F_{p,0,u}(i'')\\
&\quad\times\cos\left[(p-2u)g'-\{1-(-1)^p\}\frac{\pi}{4}\right]
\end{aligned}$$

ここで$\sum_u$は0からpまでの整数についての和を表す。ただし$p/2$についての和を除く。また第二回の正準変換後のHamilton関数に関して次式が成立する。

$$\begin{aligned}
&\Delta_p\ F^{**}_2(a'',\ e'',\ i'',\ —,\ —,\ —)\\
&=\frac{\mu\,\mathrm{J}_p a_e^p}{a''^{p+1}}G_{p,\frac{p}{2},0}(e'')F_{p,0,\frac{p}{2}}(i'')
\end{aligned}$$

さらに母関数に関して次式が成立する。

$$\frac{\partial\,\Delta_p\,S^*_1}{\partial g'}=-\frac{1}{\dfrac{\partial F^*_1}{\partial G''}}\ \Delta_p\,F^*_{2\mathrm{P}}$$

角変数に関する正準方程式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_p\frac{\mathrm{d}l''_\kappa}{\mathrm{d}t}\\
&=-\frac{\partial\,\Delta_p F^{**}_2}{\partial L''_\kappa}\\
&=-\frac{\partial\,\Delta_p F^{**}_2}{\partial a''}\frac{\partial a''}{\partial L''_\kappa}-\frac{\partial\,\Delta_p F^{**}_2}{\partial e''}\frac{\partial e''}{\partial L''_\kappa}\\
&\quad-\frac{\partial\,\Delta_p F^{**}_2}{\partial i''}\frac{\partial i''}{\partial L''_\kappa}\\
&\qquad\kappa=1,\ 2,\ 3
\end{aligned}\right\}$$

(5.2.3.1)

ここでも(5.2.2.2)のようにみなすことにする。また以下においてp次のharmonicに基づく場合を添字の

p によって示すことにする。そうすれば(5.2.3.1)と(3.5) から次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,p,\mathrm{se}} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}\\
\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,p,\mathrm{se}} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}\\
\left(\frac{\mathrm{d}\chi^*}{\mathrm{d}t}\right)_{1,p,\mathrm{se}} &= -\frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)\\
R &= \Delta_p F_2^{**}(a,\ e,\ i,\ -,\ -,\ -)
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.3.2}$$

運動量変数の正準変換は次のようになる。

$$\Delta_p(L'_\kappa-L''_\kappa)=\frac{\partial\Delta_p S_1^*}{\partial l'_\kappa}=\int\frac{\partial\Delta_p F_{2\mathrm{P}}^*}{\partial l'_\kappa}\,\mathrm{d}t$$

$$\kappa=1,\ 2,\ 3$$

上式から次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
\left\{\Delta_p\frac{\mathrm{d}(L'_\kappa-L''_\kappa)}{\mathrm{d}t}\right\}_1 &= \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)_{1,p,l}=\frac{\partial\Delta_p F_{2\mathrm{P}}^*}{\partial l'_\kappa}\\
\kappa &= 1,\ 2,\ 3
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.3.3}$$

ここでも(5.2.2.2)のようにみなすことにする。そうすれば (3.6) と (5.2.2.3) から次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_{1,p,l} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial\chi^*}\\
\left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)_{1,p,l} &= \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial\chi^*}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial\omega}\\
\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)_{1,p,l} &= \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial\omega}\\
&\quad -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial\Omega}\\
R &= \Delta_p F_{2\mathrm{P}}^*(a,\ e,\ i,\ -,\ \omega,\ -)
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.3.4M}$$

角変数の正準変換は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\Delta_p(l'_\kappa-l''_\kappa)\\
&=-\frac{\partial\Delta_p S_1^*}{\partial L''_\kappa}\\
&=-\int\left(\frac{\partial\Delta_p F_{2\mathrm{P}}^*}{\partial a''}\frac{\partial a''}{\partial L''_\kappa}+\frac{\partial\Delta_p F_{2\mathrm{P}}^*}{\partial e''}\frac{\partial e''}{\partial L''_\kappa}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial\Delta_p F_{2\mathrm{P}}^*}{\partial i''}\frac{\partial i''}{\partial L''_\kappa}\right)\mathrm{d}t\\
&\quad+\int\left[\left\{\frac{\partial}{\partial e''}\left(\frac{\mathrm{d}l''_\kappa}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_1 e_{p,l}\right.\\
&\qquad\left.+\left\{\frac{\partial}{\partial i''}\left(\frac{\mathrm{d}l''_\kappa}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_1 i''_{p,l}\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\kappa=1,\ 2,\ 3$$

この角変数の正準変換の式の第三辺において第一項を用いれば次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\Delta_p\frac{\mathrm{d}(l'_\kappa-l''_\kappa)}{\mathrm{d}t}\right\}_1\\
&=\left(\frac{\mathrm{d}l_\kappa}{\mathrm{d}t}\right)_{1,p,l}\\
&=-\frac{\partial\Delta_p F_{2\mathrm{P}}^*}{\partial a''}\frac{\partial a''}{\partial L''_\kappa}-\frac{\partial\Delta_p F_{2\mathrm{P}}^*}{\partial e''}\frac{\partial e''}{\partial L''_\kappa}\\
&\quad-\frac{\partial\Delta_p F_{2\mathrm{P}}}{\partial i''}\frac{\partial i''}{\partial L''_\kappa}\\
&\kappa=1,\ 2,\ 3
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.3.5}$$

ここでも(5.2.2.2)のようにみなすことにする。そうすれば (5.2.3.5) と (3.5) から次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,p,l} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}\\
\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,p,l} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}\\
\left(\frac{\mathrm{d}\chi^*}{\mathrm{d}t}\right)_{1,p,l} &= -\frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)\\
R &= \Delta_p F_{2\mathrm{P}}^*(a,\ e,\ i,\ -,\ \omega,\ -)
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.3.4A}$$

次に角変数の正準変換の式の第三辺において第二項を用いれば次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\Delta_p\frac{\mathrm{d}(l'_\kappa-l''_\kappa)}{\mathrm{d}t}\right\}_2\\
&=\left(\frac{\mathrm{d}l_\kappa}{\mathrm{d}t}\right)_{2,p,l}\\
&=\left\{\frac{\partial}{\partial e''}\left(\frac{\mathrm{d}l''_\kappa}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_1 e''_{p,l}\\
&\quad+\left\{\frac{\partial}{\partial i''}\left(\frac{\mathrm{d}l''_\kappa}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_1 i''_{p,l}\\
&\kappa=1,\ 2,\ 3
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.3.6}$$

ここでも(5.2.2.2)のようにみなすことにする。そうすれば次式が得られる。

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{2,p,l}=\left\{\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M},\mathrm{se}}\right\}\delta_1 e_{p,l}$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,se}}\right\}\delta_1 i_{p,l}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{2,p,l}=\left\{\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,se}}\right\}\delta_1 e_{p,l}+\left\{\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,se}}\right\}\delta_1 i_{p,l}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\chi^*}{\mathrm{d}t}\right)_{2,p,l}=\left\{\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\mathrm{d}\chi^*}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,se}}\right\}\delta_1 e_{p,l}+\left\{\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\mathrm{d}\chi^*}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,se}}\right\}\delta_1 i_{p,l}$$

(5.2.3.7)

6. 軌道要素の変化率

6.1 一次の摂動における軌道要素の変化率

6.1.1 主問題の場合

(1) 短周期項

(5.1.2.3.M)と(5.1.2.3.A)によれば次のようになる。

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,s}}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,s}}=\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial M}-\frac{3}{2}\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2\frac{na\sqrt{1-e^2}\sin^2 i}{er^3}\sin(2\omega+2f)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,s}}=\frac{3}{2}\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2\frac{na\sin i\cos i}{\sqrt{1-e^2}\,r^3}\sin(2\omega+2f)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,s}}=\frac{3}{2}\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2\frac{na\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{1}{a^3}\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-\frac{3}{2}}\right\}-\frac{1}{r^3}\cos(2\omega+2f)\right]$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,s}}=-\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2\frac{n}{a}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,s}}=-\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2\frac{n\sqrt{1-e^2}}{a^2e}\left[\frac{3}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\times\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f-(1-e^2)^{-\frac{5}{2}}e\right\}+\frac{9}{4}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\cos(2\omega+2f)-\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\times\sin(2\omega+2f)\sin f\right]$$

$$+\frac{3}{2}\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2\frac{n\cos^2 i}{a^2\sqrt{1-e^2}}\left\{-\left(\frac{a}{r}\right)^3+\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}+\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos(2\omega+2f)\right\}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\chi^*}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,s}}=\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2\frac{n(1-e^2)}{a^2e}\left[\frac{3}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\times\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f-\frac{e}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}+\frac{9}{4}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\cos(2\omega+2f)-\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\times\sin(2\omega+2f)\sin f\right]-6\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2$$

$$-6\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2\frac{n}{a^2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\times\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3-\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin^2 i\cos(2\omega+2f)\right]$$

$$R=F_{1\mathrm{P}}(a,\ e,\ i,\ —,\ \omega,\ f)$$

(6.1.1.1)

(2) 長年項

(5.2.2.3)によれば次のようになる。ただし 0 を1とする。

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,se}}=\frac{3}{2}\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2\frac{n\cos i}{a^2(1-e^2)^2}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,se}}=-\frac{3}{4}\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2\frac{n(4-5\sin^2 i)}{a^2(1-e^2)^2}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\chi^*}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\mathrm{M,se}}=-\frac{3}{4}\mathrm{J}_2a_\mathrm{e}^2\frac{n(2-3\sin^2 i)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(6.1.1.2)

(3) 半長軸の変化による平均近点離角の変化率

(5.1.2.6)によれば次のようになる。

$$\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right)_{1,\delta a,\mathrm{M,S}}=-\frac{3}{2}\frac{n}{a}\delta_1 a_{\mathrm{M,S}} \qquad (6.1.1.3)$$

ここで $\delta_1 a_{\mathrm{M,S}}$ は(7.1.1.1)で求められている。

6.1.2 二次をこえるharmonicsに基づく摂動力をとった場合

(1) 長周期項

(5.2.3.4.M) と (5.2.3.4.A) によれば次のようになる。

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{1,p,l}=0$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{1,p,l}=J_p a_e^p \frac{n\sqrt{1-e^2}}{a^p e}\sum_u (p-2u)\times G_{p,u,-p+2u}(e)F_{p,0,u}(i)\sin\left[(p-2u)\omega-\{1-(-1)^p\}\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{1,p,l}=-J_p a_e^p \frac{n\cot i}{a^p\sqrt{1-e^2}}\sum_u (p-2u)\times G_{p,u,-p+2u}(e)F_{p,0,u}(i)\sin\left[(p-2u)\omega-\{1-(-1)^p\}\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{1,p,l}=J_p a_e^p \frac{n}{a^p\sqrt{1-e^2}\sin i}\times\sum_u G_{p,u,-p+2u}(e)F'_{p,0,u}(i)\cos\left[(p-2u)\omega-\{1-(-1)^p\}\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{1,p,l}=J_p a_e^p\left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\sum_u G'_{p,u,-p+2u}(e)F_{p,0,u}(i)\times\cos\left[(p-2u)\omega-\{1-(-1)^p\}\frac{\pi}{4}\right]-\frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}}\sum_u G_{p,u,-p+2u}(e)F'_{p,0,u}(i)\times\cos\left[(p-2u)\omega-\{1-(-1)^p\}\frac{\pi}{4}\right]\right]$$

$$\left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_{1,p,l}=J_p a_e^p\frac{n}{a^p}\left[-\frac{1-e^2}{e}\sum_u G'_{p,u,-p+2u}(e)\times F_{p,0,u}(i)\times\cos\left[(p-2u)\omega-\{1-(-1)^p\}\frac{\pi}{4}\right]+2(p+1)\sum_u G_{p,u,-p+2u}(e)F_{p,0,u}(i)\times\cos\left[(p-2u)\omega-\{1-(-1)^p\}\frac{\pi}{4}\right]\right]$$

(6.1.2.1)

ここで $\sum_u$ は $p/2$ を除く 0 から p までの整数についての和を示す。

(2) 長年項

(5.2.3.2) によれば次のようになる。

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{1,p,se}=J_p a_e^p\frac{n}{a^p\sqrt{1-e^2}\sin i}G_{p,\frac{p}{2},0}(e)F'_{p,0,\frac{p}{2}}(i)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{1,p,se}=J_p a_e^p\frac{n}{a^p}\left\{\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}G'_{p,\frac{p}{2},0}(e)F_{p,0,\frac{p}{2}}(i)-\frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}}G_{p,\frac{p}{2},0}(e)F'_{p,0,\frac{p}{2}}(i)\right\}$$

$$\left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_{1,p,se}=J_p a_e^p\frac{n}{a^p}\left\{-\frac{1-e^2}{e}G'_{p,\frac{p}{2},0}(e)F_{p,0,\frac{p}{2}}(i)+2(p+1)G_{p,\frac{p}{2},0}(e)F_{p,0,\frac{p}{2}}(i)\right.$$

(6.1.2.2)

6.2 二次の摂動における軌道要素の変化率

6.2.1 主問題の場合

(1) 長周期項

(a) 変換後の Hamilton 関数による部分

(5.2.2.5.M) および (5.2.2.5.A) によれば次のようになる。

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{2,F,l}=0$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{2,F,l}=-\frac{3}{32}J_2^2 a_e^4\frac{n e\sin^2 i(14-15\sin^2 i)}{a^4(1-e^2)^3}\sin 2\omega$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{2,F,l}=\frac{3}{32}J_2^2 a_e^4\frac{n e^2\cos i\sin i(14-15\sin^2 i)}{a^2(1-e^2)^4}\times\sin 2\omega$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{2,F,l}=-\frac{3}{16}J_2^2 a_e^4\frac{n e^2\cos i(7-15\sin^2 i)}{a^4(1-e^2)^4}\cos 2\omega$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{2,F,l}=\frac{3}{64}J_2^2 a_e^4\times\frac{n\{e^2(28-158\sin^2 i+135\sin^4 i)-2\sin^2 i(14-15\sin^2 i)\}}{a^4(1-e^2)^4}\times\cos 2\omega$$

$$\left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_{2,F,l}=\frac{3}{64}J_2^2 a_e^4\frac{n(2-5e^2)\sin^2 i(14-15\sin^2 i)}{a^4(1-e^2)^{\frac{7}{2}}}\times\cos 2\omega$$

(6.2.1.1.a)

(b) 相互作用による部分

(5.2.2.8) によれば次のようになる。

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{2,C,l}=6J_2 a_e^2\frac{n e\cos i}{a^3(1-e^2)^3}\delta_2 e_{F,l}-\frac{3}{2}J_2 a_e^2\frac{n\sin i}{a^2(1-e^2)^2}\delta_2 i_{F,l}$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{2,C,l}=-3J_2 a_e^2\frac{n e(4-5\sin^2 i)}{a^2(1-e^2)^3}\delta_2 e_{F,l}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\frac{15}{4}J_2 a_e^2 \frac{n\sin 2i}{a^2(1-e^2)^2}\delta_2 i_{F,l}\\
\left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_{2,c,l} &= -\frac{9}{4}J_2 a_e^2 \frac{ne(2-3\sin^2 i)}{a^2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}\delta_2 e_{F,l}\\
&+\frac{9}{4}J_2 a_e^2 \frac{n\sin 2i}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\delta_2 i_{F,l}
\end{aligned}\right\} \quad (6.2.1.1.b)
$$

ここで $\delta_2 e_{F,l}$ および $\delta_2 i_{F,l}$ は (7.2.1.1.a) で求められている。

(2) 長年項

(5.2.2.3)によれば次のようになる。ただし0を2とする。

$$
\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{2,M,se} &= -\frac{3}{32}J_2^2 a_e^4 \frac{n\cos i}{a^4(1-e^2)^4}\\
&\times\left\{36+4e^2+24\sqrt{1-e^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)-5(8-e^2)\sin^2 i\right.\\
\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{2,M,se} &= \frac{3}{128}J_2^2 a_e^4 \frac{2}{a^4(1-e^2)^4}\\
&\times\{(8-10\sin^2 i)(48-43\sin^2 i)\\
&+24\sqrt{1-e^2}(4-5\sin^2 i)(2-3\sin^2 i)\\
&+e^2(56-36\sin^2 i-45\sin^2 i)\}\\
\left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_{2,M,se} &= \frac{3}{128}J_2^2 a_e^4 \frac{n}{a^4(1-e^2)^4}\\
&\times\{15\sqrt{1-e^2}(8-16\sin^2 i+7\sin^4 i)\\
&+16(1-e^2)(2-3\sin^2 i)^2\\
&+5\sqrt{1-e^2}(1-e^2)(-8+8\sin^2 i+5\sin^4 i)\}
\end{aligned}\right\} \quad (6.2.1.2)
$$

6.2.2 二次をこえるHarmonicsに基づく摂動力をとった場合

(5.2.3.7)によれば次のようになる。

$$
\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{2,p,l} &= 6J_2 a_e^2 \frac{ne\cos i}{a^3(1-e^2)^3}\delta_1 e_{p,l}\\
&-\frac{3}{2}J_2 a_e^2 \frac{n\sin i}{a^2(1-e^2)^2}\delta_1 i_{p,l}\\
\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{2,p,l} &= -3J_2 a_e^2 \frac{ne(4-5\sin^2 i)}{a^2(1-e^2)^3}\delta_1 e_{p,l}\\
&+\frac{15}{4}J_2 a_e^2 \frac{n\sin^2 i}{a^2(1-e^2)^2}\delta_1 i_{p,l}\\
\left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_{2,p,l} &= -\frac{9}{4}J_2 a_e^2 \frac{ne(2-3\sin^2 i)}{a^2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}\delta_1 e_{p,l}\\
&+\frac{9}{4}J_2 a_e^2 \frac{n\sin 2i}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\delta_1 i_{p,l}
\end{aligned}\right\} \quad (6.2.2)
$$

ここで $\delta_1 e_{p,l}$ および $\delta_1 i_{p,l}$ は(7.1.2.1.1)で求められている。

6.2.3 zonal harmonics に基づく摂動力以外の作用をとった場合

non-zonal harmonics に基づく摂動力，月および太陽の引力，太陽の輻射圧，大気の抵抗の力，推力，赤道面の運動などのような zonal harmonics に基づく摂動力以外の作用をとり上げてみる。そしてこの作用をとった場合を添字のNで表すことにする。ここでこの作用による相互作用のうちで最も主要である一次の摂動における軌道要素の変化率の主問題の場合の長年項に対するものは次のようになる。

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{dEl_\kappa}{dt}\right)_{2,N} = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial El_l}\left(\frac{dEl_\kappa}{dt}\right)_{1,M,se}\delta_1 El_{lN}\\
&\kappa = 4,\ 5,\ 6
\end{aligned}\right\} \quad (6.2.3)
$$

上式において a，e，i，Ω，ω，χ^* などをそれぞれ El_1，El_2，El_3，El_4，El_5，El_6 などによって表してある。

7. 軌道要素の変化

第6章における軌道要素の変化率を表す諸式を解けば軌道要素の変化が t の関数として求められる。しかしこの諸式を解くことはできないので近似解を求める。

$t=t_{(j)}$ から $t=t_{(j+1)}$ にいたるまでの時間を

$$(\delta t)_{(j)}=t_{(j+1)}-t_{(j)} \quad (7.1)$$

とする。また以下において諸量を示す記号における添字(j)によってこの諸量が $t=t_{(j)}$ における値をとることを示す。そして($\delta t_{(j)}$)の間は，変化率を表す諸式の右辺において次式が成立するとする。

$$
\left.\begin{aligned}
a &= a_{(j)}\\
e &= e_{(j)}\\
i &= i_{(j)}\\
\Omega &= \Omega_{(j)}+\dot{\Omega}_{(j)}(t-t_{(j)})\\
\omega &= \omega_{(j)}+\dot{\omega}_{(j)}(t-t_{(j)})\\
M &= M_{(j)}+\dot{M}_{(j)}(t-t_{(j)})
\end{aligned}\right\} \quad (7.2)
$$

ここで$\dot{\Omega}$，$\dot{\omega}$および$\dot{M}$はそれぞれΩ，ωおよびMの変化率を表す。

第6章における軌道要素El_{κ}の変化率を表す諸式の右辺において以上のようにすれば一次および二次の摂動を表す諸式

$$\left(\frac{dEl_{\kappa}}{dt}\right)_{1\mathrm{V}},\quad \left(\frac{dEl_{\kappa}}{dt}\right)_{2\mathrm{V}}$$

はtに関して積分が可能となる。ここで添字のVは第6章に示した各種の添字を表すとする。

積分区間の幅をδtとしてこれらの式を積分して求められる一次および二次の摂動に基づく軌道要素の変化を

$$\delta_1 El_{\kappa\mathrm{V}},\quad \delta_2 El_{\kappa\mathrm{V}}$$

とする。特に$t_{(j)}$から$t_{(j+1)}$まで積分して求めた場合のこの変化を

$$(\delta_1 El_{k}\mathrm{V})_{(j)},\quad (\delta_2 El_{k}\mathrm{V})_{(j)}$$

とする。また$t_{(j+1)}$をtとしたときのこの変化を

$$\delta_1 El_{\kappa\mathrm{V}(j)},\quad \delta_2 El_{\kappa\mathrm{V}(j)}$$

とする。

なお，軌道要素の関数の変化率および変化にも同様の取り扱いと表示法をとることにする。

以下に軌道要素の変化を求める。

7.1 一次の摂動における軌道要素の変化

7.1.1 主問題の場合

(1) 短周期項

χ^*の変化率を$\dot{\chi}^*$とすれば

$$\dot{M}=n+\dot{\chi}^*$$

となる。軌道要素の短周期変化の大きさは小さいので(6.1.1.1)の右辺においては$\dot{\omega}$および$\dot{\chi}^*$を無視することにすれば，(6.1.1.1)から次式をうる。

$$\delta_1 a_{\mathrm{M,S}}=2\frac{1}{n^2 a}\delta R$$

$$\delta_1 e_{\mathrm{M,S}}=\frac{1-e^2}{n^2a^2e}\delta R+\frac{3}{4}J_2a_e^2\frac{\sin^2 i}{a^2(1-e^2)e}\Big\{\delta\cos(2\omega+2f)+e\,\delta\cos(2\omega+f)+\frac{1}{3}e\,\delta\cos(2\omega+3f)\Big\}$$

$$\delta_1 i_{\mathrm{M,S}}=-\frac{3}{8}J_2a_e^2\frac{\sin 2i}{a^2(1-e^2)^2}\times\Big\{\delta\cos(2\omega+2f)+e\,\delta\cos(2\omega+f)+\frac{1}{3}e\,\delta\cos(2\omega+3f)\Big\}$$

$$\delta_1\Omega_{\mathrm{M,S}}=\frac{3}{2}J_2a_e^2\frac{\cos i}{a^2(1-e^2)^2}\Big\{\delta f-\delta M+e\,\delta\sin f-\frac{1}{2}\delta\sin(2\omega+2f)-\frac{1}{2}e\,\delta\sin(2\omega+f)-\frac{1}{6}e\,\delta\sin(2\omega+3f)\Big\}$$

$$\begin{aligned}\delta_1\omega_{\mathrm{M,S}}=-\frac{3}{2}J_2a_e^2\frac{1}{a^2(1-e^2)^2}\Big[&\Big(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\Big)\times(\delta f-\delta M+e\,\delta\sin f)\\&+\Big(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\Big)\Big\{\frac{1}{e}\Big(1-\frac{1}{4}e^2\Big)\delta\sin f+\frac{1}{2}\delta\sin 2f+\frac{1}{12}e\,\delta\sin 3f\Big\}\\&-\frac{1}{e}\Big\{\frac{1}{4}\sin^2 i+\Big(\frac{1}{2}-\frac{15}{16}\sin^2 i\Big)e^2\Big\}\times\delta\sin(2\omega+f)\\&-\frac{1}{16}e\sin^2 i\,\delta\sin(2\omega-f)\\&-\frac{1}{2}\Big(1-\frac{5}{2}\sin^2 i\Big)\delta\sin(2\omega+2f)\\&+\frac{1}{e}\Big\{\frac{7}{12}\sin^2 i-\frac{1}{6}\Big(1-\frac{19}{8}\sin^2 i\Big)e^2\Big\}\times\delta\sin(2\omega+3f)\\&+\frac{3}{8}\sin^2 i\,\delta\sin(2\omega+4f)\\&+\frac{1}{16}e\sin^2 i\,\delta\sin(2\omega+5f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_1\chi^*_{\mathrm{M,S}}=\frac{3}{2}J_2a_e^2\frac{1}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}e}\Big[&\Big(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\Big)\times\Big\{-e\,\delta f+e\,\delta M+\Big(1-\frac{5}{4}e^2\Big)\delta\sin f\\&+\frac{1}{2}e\,\delta\sin 2f+\frac{1}{12}e^2\delta\sin 3f\Big\}\\&+\sin^2 i\Big\{\Big(-\frac{1}{4}-\frac{17}{16}e^2\Big)\delta\sin(2\omega+f)\\&+\frac{1}{16}e^2\delta\sin(-2\omega+f)\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{3}{4}e\,\delta\sin(2\omega+2f)\\
&+\left(\frac{7}{12}-\frac{13}{48}e^2\right)\delta\sin(2\omega+3f)\\
&+\frac{3}{8}e\,\delta\sin(2\omega+4f)\\
&+\frac{1}{16}e^2\,\delta\sin(2\omega+5f)\}\Big]\\
R&=F_{1\mathrm{P}}(a,\ e,\ i,\ —,\ \omega,\ f)
\end{aligned}\right\}
\tag{7.1.1.1}
$$

(2) 長年項

(6.1.1.2)から次式をうる。

$$
\left.\begin{aligned}
\delta_1\Omega_{\mathrm{M,se}}&=\frac{3}{2}J_2a_e^2\,\frac{n\cos i}{a^2(1-e^2)^2}\,\delta t\\
\delta_1\omega_{\mathrm{M,Se}}&=-\frac{3}{4}J_2a_e^2\,\frac{n(4-5\sin^2 i)}{a^2(1-e^2)^2}\,\delta t\\
\delta_1\chi^*_{\mathrm{M,Se}}&=-\frac{3}{4}J_2a_e^2\,\frac{n(2-3\sin^2 i)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,\delta t
\end{aligned}\right\}
\tag{7.1.1.2}
$$

(3) 半長軸の変化による平均近点離角の変化

半長軸は短周期変化をする。そしてその大きさは小さいので(6.1.1.3)の右辺においては$\dot{\omega}$および$\dot{\chi}^*$を無視することにすれば(6.1.1.3)から次式をうる。

$$
\begin{aligned}
&\delta_1M_{\delta a,\mathrm{M,s}}\\
&=\frac{3}{2}J_2a_e^2\Big[\frac{1}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}e}\\
&\quad\times\Big[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)(e\,\delta f-e\,\delta M+e^2\delta\sin f)\\
&\quad+\sin^2 i\left\{\frac{3}{4}e^2\delta\sin(2\omega+f)+\frac{3}{4}e\,\delta\sin(2\omega+2f)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{4}e^2\,\delta\sin(2\omega+2f)\right\}\Big]\\
&\quad-\frac{n}{a^2}\Big[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3-\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}\\
&\quad+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin^2 i\,\cos(2\omega+2f)\Big]\delta t\Big]
\end{aligned}
$$

7.1.2 二次をこえをharmonicsに基づく摂動力をとった場合

(1) 長周期項

(6.1.2.1)から次式をうる。

$$
\left.\begin{aligned}
\delta_1a_{p,l}&=0\\
\delta_1e_{p,l}&=J_pa_e^p\,\frac{n\sqrt{1-e^2}}{a^pe}\sum_u(p-2u)G_{p,u,-p+2u}(e)\\
&\quad\times F_{p,0,u}(i)\,I_{\mathrm{S}}(\alpha_{1,p,l},\ \dot{\alpha}_{1,p,l},\ \delta t)\\
\delta_1i_{p,l}&=-J_pa_e^p\,\frac{n\cot i}{a^p\sqrt{1-e^2}}\sum_u(p-2u)G_{p,u,-p+2u}(e)\\
&\quad\times F_{p,0,u}(i)\,I_{\mathrm{S}}(\alpha_{1,p,l},\ \dot{\alpha}_{1,p,l},\ \delta t)\\
\delta_1\Omega_{p,l}&=J_2a_e^p\,\frac{a_e^pn}{a^p\sqrt{1-e^2}\sin i}\sum_u G_{p,u,-p+2u}(e)\\
&\quad\times F'_{p,0,u}(i)\,I_{\mathrm{C}}(\alpha_{1,p,l},\ \dot{\alpha}_{1,p,l},\ \delta t)\\
\delta_1\omega_{p,l}&=J_pa_e^p\,\frac{n}{a^p}\left\{\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\sum_u G'_{p,u,-p+2u}(e)\right.\\
&\quad\times F_{p,0,u}(i)\,I_{\mathrm{C}}(\alpha_{1,p,l},\ \dot{\alpha}_{1,p,l},\ \delta t)\\
&\quad-\frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}}\sum_u G_{p,u,-p+2u}(e)\\
&\quad\left.\times F'_{p,0,u}(i)\,I_{\mathrm{C}}(\alpha_{1,p,l},\ \dot{\alpha}_{1,p,l},\ \delta t)\right\}\\
\delta_1\chi^*_{p,l}&=J_pa_e^p\,\frac{n}{a^p}\left\{-\frac{1-e^2}{e}\sum_u G'_{p,u,-p+2u}(e)\right.\\
&\quad\times F_{p,0,u}(i)\,I_{\mathrm{C}}(\alpha_{1,p,l},\ \dot{\alpha}_{1,p,l},\ \delta t)\\
&\quad+2(p+1)\sum_u G_{p,u,-p+\ u}(e)\\
&\quad\left.\times F_{p,0,l}(i)\,I_{\mathrm{C}}(\alpha_{1,p,l},\ \dot{\alpha}_{1,p,l},\ \delta t)\right\}\\
\alpha_{1,p,l}&=(p-2u)\omega-\{1-(-1)^p\}\frac{\pi}{4}\\
\dot{\alpha}_{1,p,l}&=(p-2u)\dot{\omega}
\end{aligned}\right\}
\tag{7.1.2.1.1}
$$

ここで$\sum_u$は$p/2$を除く0からpまでの整数についての和を表す。またαの変化率を$\dot{\alpha}$とするとき

$$
I_{\mathrm{S}}(\alpha,\dot{\alpha},\delta t)=-\frac{1}{\dot{\alpha}}\{\cos(\alpha+\dot{\alpha}\,\delta t)-\cos\alpha\}
$$

$$
I_{\mathrm{C}}(\alpha,\dot{\alpha},\delta t)=\frac{1}{\dot{\alpha}}\{\sin(\alpha+\dot{\alpha}\,\delta t)-\sin\alpha\}
$$

とする。ただし

$$\dot{\alpha}=0$$

のときには

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{S}}&=(\sin\alpha)\,\delta t\\
I_{\mathrm{C}}&=(\cos\alpha)\,\delta t
\end{aligned}
$$

とする。

pが

$$p=3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ l_{\mathrm{EZ}l\max}$$

までの harmonics をとることにすれば軌道要素の変化は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\delta_1 El_{\kappa a,l}=\sum_{p=3}^{l_{\mathrm{EZ}l\max}}\delta_1 El_{\kappa\, p,l}\\&\kappa=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6\end{aligned}\right\}\quad(7.1.2.1.2)$$

(2) 長年項

(6.1.2.2)から次式をうる。

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1\Omega_{p,\mathrm{se}}&=J_p a_e^p\frac{n}{a^p\sqrt{1-e^2}\sin i}G_{p,\frac{p}{2},0}(e)\\
&\quad\times F'_{p,0,\frac{p}{2}}(i)\,\delta t\\
\delta_1\omega_{p,\mathrm{se}}&=J_p a_e^p\frac{n}{a^p}\left\{\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}G'_{p,\frac{p}{2},0}(e)\,F_{p,0,\frac{p}{2}}(i)\right.\\
&\quad\left.-\frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}}G_{p,\frac{p}{2},0}(e)\,F'_{p,0,\frac{p}{2}}(i)\right\}\delta t\\
\delta_1\chi^*_{p,\mathrm{se}}&=J_p a_e^p\frac{n}{a^p}\left\{-\frac{1-e^2}{e}G'_{p,\frac{p}{2},0}(e)\,F_{p,0,\frac{p}{2}}(i)\right.\\
&\quad\left.+2(p+1)\,G_{p,\frac{p}{2},0}(e)\,F_{p,0,\frac{p}{2}}(i)\right\}\delta t
\end{aligned}\right\}$$

(7.1.2.2.1)

p が

$$p=3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ l_{\mathrm{EZ}l\max}$$

までの harmonics をとることにすれば軌道要素の変化は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\delta_1 El_{\kappa a,\mathrm{se}}=\sum_{p=3}^{l_{\mathrm{EZ}l\max}}\delta_1 El_{\kappa\, p,\mathrm{se}}\\&\kappa=4,\ 5,\ 6\end{aligned}\right\}\quad(7.1.2.2.2)$$

7.2 二次の摂動における軌道要素の変化

7.2.1 主問題の場合

(1) 長周期項

(a) 変換後の Hamilton 関数による部分

(6.2.1.1.a)から次式をうる。

$$\left.\begin{aligned}
\delta_2 a_{\mathrm{F},l}&=0\\
\delta_2 e_{\mathrm{F},l}&=-\frac{3}{32}J_2^2 a_e^4\frac{ne\sin^2 i\,(14-15\sin^2 i)}{a^4(1-e^2)^3}\\
&\quad\times I_{\mathrm{S}}(\alpha_{2,\mathrm{F},l},\ \dot{\alpha}_{2,\mathrm{F},l},\ \delta t)\\
\delta_2 i_{\mathrm{F},l}&=\frac{3}{32}J_2^2 a_e^4\frac{ne^2\cot i\,\sin^2 i\,(14-15\sin^2 i)}{a^4(1-e^2)^4}\\
&\quad\times I_{\mathrm{S}}(\alpha_{2,\mathrm{F},l},\ \dot{\alpha}_{2,\mathrm{F},l},\ \delta t)\\
\delta_2\Omega_{\mathrm{F},l}&=-\frac{3}{16}J_2^2 a_e^4\frac{ne^2\cot i\,(7-15\sin^2 i)}{a^4(1-e^2)^4}\\
&\quad\times I_{\mathrm{C}}(\alpha_{2,\mathrm{F},l},\ \dot{\alpha}_{2,\mathrm{F},l},\ \delta t)\\
\delta_2\omega_{\mathrm{F},l}&=\frac{3}{64}J_2^2 a_e^4\frac{n}{a^4(1-e^2)^4}\\
&\quad\times\{e^2(28-158\sin^2 i+135\sin^4 i)\\
&\qquad-2\sin^2 i\,(14-15\sin^2 i)\}\\
&\quad\times I_{\mathrm{C}}(\alpha_{2,\mathrm{F},l},\ \dot{\alpha}_{2,\mathrm{F},l},\ \delta t)\\
\delta_2\chi^*_{\mathrm{F},l}&=\frac{3}{64}J_2^2 a_e^4\frac{n(2-5e^2)\sin^2 i\,(14-15\sin^2 i)}{a^4(1-e^2)^{\frac{7}{2}}}\\
&\quad\times I_{\mathrm{C}}(\alpha_{2,\mathrm{F},l},\ \dot{\alpha}_{2,\mathrm{F},l},\ \delta t)\\
\alpha_{2,\mathrm{F},l}&=2\omega\\
\dot{\alpha}_{2,\mathrm{F},l}&=2\dot{\omega}
\end{aligned}\right\}$$

(7.2.1.1.a)

(b) 相互作用による部分

(6.2.1.1.b)から次式をうる。

$$\left.\begin{aligned}
\delta_2\Omega_{\mathrm{C},l}&=-\frac{45}{64}J_2^3 a_e^6\frac{n^2e^2\sin^2 i\,\cos i\,(14-15\sin^2 i)}{a^6(1-e^2)^6}\\
&\quad\times I'_{\mathrm{S}}(\alpha_{2,\mathrm{C},l},\ \dot{\alpha}_{2,\mathrm{C},l},\ \delta t)\\
\delta_2\omega_{\mathrm{C},l}&=\frac{9}{64}J_2^3 a_e^6\frac{n^2e^2\sin^2 i\,(13-15\sin^2 i)(14-15\sin^2 i)}{a^6(1-e^2)^6}\\
&\quad\times I'_{\mathrm{S}}(\alpha_{2,\mathrm{C},l},\ \dot{\alpha}_{2,\mathrm{C},l},\ \delta t)\\
\delta_2\chi^*_{\mathrm{C},l}&=\frac{27}{128}J_2^3 a_e^6\frac{n^2e^2(4-5\sin^2 i)\sin^2 i\,(14-15\sin^2 i)}{a^6(1-e^2)^{\frac{11}{2}}}\\
&\quad\times I'_{\mathrm{S}}(\alpha_{2,\mathrm{C},l},\ \dot{\alpha}_{2,\mathrm{C},l},\ \delta t)\\
\alpha_{2,\mathrm{C},l}&=2\omega\\
\dot{\alpha}_{2,\mathrm{C},l}&=2\dot{\omega}
\end{aligned}\right\}$$

(7.2.1.1.b)

ここで

$$I'_{\mathrm{S}}(\alpha,\dot{\alpha},\delta t)=-\frac{1}{\dot{\alpha}}\left[\frac{1}{\dot{\alpha}}\{\sin(\alpha+\dot{\alpha}\,\delta t)-\sin\alpha\}\right.$$
$$\left.-(\cos\alpha)\,\delta t\right]$$

とする。ただし

$$\dot{\alpha}=0$$

のときには

$$I'_{\mathrm{S}}(\alpha,\dot{\alpha},\delta t)=\frac{1}{2}(\delta t)^2\sin\alpha$$

とする。

(2) 長年項

(6.2.1.2)から次式をうる。

$$\begin{aligned}
\delta_2\Omega_{\mathrm{M,se}}&=-\frac{3}{32}J_2^2 a_e^4\frac{n\cos i}{a^4(1-e^2)^4}\\
&\quad\times\left\{36+4e^2+24\sqrt{1-e^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right.
\end{aligned}$$

$$-5(8-e^2)\sin^2 i\Big\}\delta t$$

$$\delta_2\omega_{\mathrm{M,se}}=\frac{3}{128}J_2^2 a_e^4\frac{n}{a^4(1-e^2)^4}$$
$$\times\Big\{(8-10\sin^2 i)(48-43\sin^2 i)$$
$$+24\sqrt{1-e^2}(4-5\sin^2 i)(2-3\sin^2 i)$$
$$+e^2(56-36\sin^2 i-45\sin^4 i)\Big\}\delta t$$

$$\delta_2\chi^*_{\mathrm{M,se}}=\frac{3}{128}J_2^2 a_e^4\frac{n}{a^4(1-e^2)^4}$$
$$\times\Big\{15\sqrt{1-e^2}(8-16\sin^2 i+7\sin^4 i)$$
$$+16(1-e^2)(2-3\sin^2 i)^2$$
$$+5\sqrt{1-e^2}(1-e^2)$$
$$\times(-8+8\sin^2 i+5\sin^4 i)\Big\}\delta t$$
(7.2.1.2)

7.2.2 二次をこえるHarmonicsに基づく摂動力をとった場合

(6.2.2) から次式をうる。

$$\delta_2\Omega_{p,l}=\frac{15}{2}J_2J_p a_e^{2+p}\frac{n^2\cos i}{a^{2+p}(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}\sum_u(p-2u)$$
$$\times G_{p,u,-p+2u}(e)F_{p,0,u}(i)I_S'(\alpha_{2,p,l},\dot\alpha_{2,p,l},\delta t)$$
$$\delta_2\omega_{p,l}=-J_2J_p a_e^{2+p}\frac{n}{a^{2+p}(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$\times\Big(12-15\sin^2 i+\frac{15}{2}\cos^2 i\Big)\sum_u(p-2u)$$
$$\times G_{p,u,-p+2u}(e)F_{p,0,u}(i)I_S'(\alpha_{2,p,l},\dot\alpha_{2,p,l},\delta t)$$
$$\delta_2\chi^*_{p,l}=-\frac{9}{4}J_2J_p a_e^{2+p}\frac{n^2}{a^{2+p}(1-e^2)^2}$$
$$\times(2-3\sin^2 i+2\cos^2 i)\sum_u(p-2u)$$
$$\times G_{p,u,-p+2u}(e)F_{p,0,u}(i)I_S'(\alpha_{2,p,l},\dot\alpha_{2,p,l},\delta t)$$
$$\alpha_{2,p,l}=(p-2u)\omega-\Big\{1-(-1)^p\Big\}\frac{\pi}{4}$$
$$\dot\alpha_{2,p,l}=(p-2u)\dot\omega$$
(7.2.2.1)

ここで $\sum_u$ は $p/2$ を除く 0 から p までの整数についての和を表す。

p が

$$p=3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ l_{\mathrm{EZ}l\max}$$

までの harmonics をとることにすれば軌道要素の変化は次のようになる。

$$\delta_2 El_{\kappa a,l}=\sum_{p=3}^{l_{\mathrm{EZ}l\max}}\delta_2 El_{\kappa p,l}$$
$$\kappa=4,\ 5,\ 6$$
(7.2.2.2)

7.2.3 zonal harmonics に基づく摂動力以外の作用をとった場合

(6.2.3) から次式をうる。

$$(\delta_2 El_{\kappa,\mathrm{N}})_{(j)}=\sum_{l=1}^{3}\Big\{\frac{\partial}{\partial El_l}\Big(\frac{dEl_\kappa}{dt}\Big)_{1,\mathrm{M,se}}\Big\}_{(j)}$$
$$\times\int_{t(j)}^{t(j+1)}\delta_1 El_{l\mathrm{N}(j)}\,dt$$
$$\kappa=4,\ 5,\ 6$$
(7.2.3)

これは各種の作用に対応していろいろの関数形をとる。

8. 軌道要素

軌道要素の変化は一次および二次の摂動から構成されるとすれば次のようになる。ただし zonal harmonics に基づく場合を添字のZで表すことにする。

$$\delta El_\kappa=\delta_1 El_{\kappa\mathrm{Z}}+\delta_2 El_{\kappa\mathrm{Z}} \quad (8.1)$$

また次のようになる。

$$\delta_1 El_{\kappa\mathrm{Z}}=\delta_1 El_{\kappa\mathrm{Z,S}}+\delta_1 El_{\kappa\mathrm{Z},l}+\delta_1 El_{\kappa\mathrm{Z,se}}$$
$$\delta_1 El_{\kappa\mathrm{Z,S}}=\delta_1 El_{\kappa\mathrm{M,S}}$$
$$\delta_1 El_{\kappa\mathrm{Z},l}=\delta_1 El_{\kappa a,l}$$
$$\delta_1 El_{\kappa\mathrm{Z,se}}=\delta_1 El_{\kappa\mathrm{M,se}}+\delta_1 El_{\kappa a,\mathrm{se}}$$
(8.2)

さらに次のようになる。

$$\delta_2 El_{\kappa\mathrm{Z}}=\delta_2 El_{\kappa\mathrm{Z,S}}+\delta_2 El_{\kappa\mathrm{Z},l}+\delta_2 El_{\kappa\mathrm{Z,se}}+\delta_2 El_{\kappa\mathrm{N}}$$
$$\delta_2 El_{\kappa\mathrm{Z,S}}=0$$
$$\delta_2 El_{\kappa\mathrm{Z},l}=\delta_2 El_{\kappa\mathrm{F},l}+\delta_2 El_{\kappa\mathrm{C},l}+\delta_2 El_{\kappa a,l}$$
$$\delta_2 El_{\kappa\mathrm{Z,se}}=\delta_2 El_{\kappa\mathrm{M,se}}$$
(8.3)

なお平均近点離角の変化は次のようになる。

$$\delta M=\delta\chi^*+n\,\delta t+\delta_1 M_{\delta a}$$
$$\delta_1 M_{\delta a}=\delta_1 M_{\delta a,\mathrm{Z}}$$
$$\delta_1 M_{\delta a,\mathrm{Z}}=\delta_1 M_{\delta a,\mathrm{Z,S}}$$
$$\delta_1 M_{\delta a,\mathrm{Z,S}}=\delta_1 M_{\delta a,\mathrm{M,S}}$$
(8.4)

運動決定の開始時を $t_{(1)}$ とする。このとき

$$\left.\begin{aligned} t_{(J)} &= t_{(1)} + \sum_{j=1}^{J-1} (\delta t)_{(j)} \\ &= t_{(1)} + \Delta t \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

における軌道要素は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} El_{\kappa(J)} &= El_{\kappa(1)} + \sum_{j=1}^{J-1} (\delta El_{\kappa})_{(j)} \\ &= El_{\kappa(1)} + \Delta El_{\kappa} \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

また平均近点離角は次のようになる

$$\left.\begin{aligned} M_{(J)} &= M_{(1)} + \sum_{j=1}^{J-1} (\delta M)_{(j)} \\ &= M_{(1)} + \Delta M \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

9. 計　算

以上の理論によって zonal harmonics に基づく摂動力以外の作用による相互作用の影響に関する量を算定することにする。そこで一例として静止衛星をとる。そして二次の摂動における軌道要素 Ω, ω および χ^* の変化において主問題の場合の長周期項を求める。ここで $\dot{\omega}$ は主要部分である一次の摂動における主問題の場合の年長項と付属的部分である相互作用に基づく項によって構成されている。この相互作用に基づく項は zonal harmonics に基づく摂動力以外のすべての作用に基づく無数の項から成っている。しかしここではこれらの無数の項の内で特に微小な推力に基づく項だけを取り上げて考慮することにする。なお推力による摂動加速度は Y および Z 成分の T および W のみをもつとする。

二次の摂動における軌道要素の変化において主問題の場合の長周期項は(7.2.1.1.a)および(7.2.1.1.b)に与えられている。また $\dot{\omega}$ において一次の摂動における主問題の場合の長年項は(6.1.1.2)に与えられている。添字の J_2 は $\dot{\omega}$ としてこの長年項を用いる場合を示すことにする。$\dot{\omega}$ において推力による部分は長周期的なものならびに短周期的および混合長年的なものから構成される。添字の $J_2 l$ は $\dot{\omega}$ としてこの長年項に長周期的なものを加えたものを用いる場合を示し，また添字の $J_2 l S$ は $\dot{\omega}$ としてさらに短周期的および混合長年的なものを加えたものを用いる場合を示すことにする。ここで推力の成分としては，その定数項のみをとり，これが最も主要であるとする。[13] また楕円軌道における

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} pf$$

の形の関数の展開式においても最も主要である第一項のみをとることにする。[14] そうすれば $\dot{\omega}$ において推力による部分における長周期的なものは次のようになる。

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{T,l} = \frac{3}{2}\frac{e\cos i}{na\sin i}(\sin\omega)W \tag{9.1}$$

また短周期的および混合長年的なものは次のようになる。これは結局は短周期的なものとなっている。

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{T,spms} = -\frac{W\cos i}{na\sin i}\sin(\omega+M) + 2\frac{T}{nae}\sin M \tag{9.2}$$

軌道要素および平均近点離角，地球に関する量，推力による摂動加速度などをそれぞれ表１，表２，表３のようにとる。また運動決定の期間を積分区間の幅 δt とし，これを0.125 day とする。

以上のようにして計算を行う。

ここで $\dot{\omega}$ として次式で表される三種のものを考える。

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_{J_2} &= \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{1,M,se} \\ \dot{\omega}_{J_2 l} &= \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{1,M,se} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{T,l} \\ \dot{\omega}_{J_2 lS} &= \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{1,M,se} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{T,l} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{T,spms} \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

これらの値は表４に示すようになる。

このとき次の計算結果をうる。

$$\frac{\dot{\omega}_{J_2 l} - \dot{\omega}_{J_2}}{\dot{\omega}_{J_2}} = 8.97385\times10^{-3} \tag{9.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta El_{\kappa F,l,J_2 l} - \delta El_{\kappa F,l,J_2}}{\delta El_{\kappa F,l,J_2}} = -1.91556\times10^{-7} \\ &\frac{\delta El_{\kappa C,l,J_2 l} - \delta El_{\kappa C,l,J_2}}{\delta El_{\kappa C,l,J_2}} = 9.64331\times10^{-7} \\ &\qquad \kappa = 4,\ 5,\ 6 \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

表1 軌道要素および平均近点離角

a	e	i	ω	M
km		deg	deg	deg
42164.0	0.00075	0.1	10	330

表2 地球に関する量

μ	a_e	J_2
km³/s²	km	
398601.3	6378.140	-1.082637×10^{-3}

表3 推力による摂動加速度の成分

T	W
$\dfrac{\text{km}}{\text{day}^2}$	$\dfrac{\text{km}}{\text{day}^2}$
−2	10

表4 $\dot{\omega}$

$\dot{\omega}_{J_2}$	$\dot{\omega}_{J_2 l}$	$\dot{\omega}_{J_2 l s}$
$\dfrac{\text{rad}}{\text{day}}$	$\dfrac{\text{rad}}{\text{day}}$	$\dfrac{\text{rad}}{\text{day}}$
4.68249×10^{-4}	4.72461×10^{-4}	1.78819×10^{-2}

$$\frac{\dot{\omega}_{J_2 ls}-\dot{\omega}_{J_2}}{\dot{\omega}_{J_2}}=3.71888\times10^{1} \tag{9.6}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\delta El_{\kappa F,l,J_2 ls}-\delta El_{\kappa F,l,J_2}}{\delta El_{\kappa F,l,J_2}}=-7.95668\times10^{-4}\\&\frac{\delta El_{\kappa C,l,J_2 ls}-\delta El_{\kappa C,l,J_2}}{\delta El_{\kappa C,l,J_2}}=2.68318\times10^{-3}\\&\qquad\qquad\kappa=4,\ 5,\ 6\end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

10. 考　察

第8章までの所論によれば，Brouwerの理論に基づいて導き出されたLagrange形の運動方程式を用いる方法によって，地球の人工衛星がzonal harmonicsに基づく摂動力の作用をうける場合の一次および二次の摂動が確定される。ここでBrouwerの理論における相互作用の他に次の二種の相互作用が考慮されている。その第一のものは二次の摂動における軌道要素の変化率の一部であり，zonal harmonicsに基づく摂動力以外の作用による，主問題の一次の長年摂動の変化率に対する部分である。したがってこれは軌道要素の変化率を表す方程式に具現されるものである。また第二のものは軌道要素の変化率を表す方程式の中にある軌道要素の変化率における，zonal harmonicsに基づく摂動力以外の作用による部分である。したがってこれは方程式中の軌道要素の変化率に具現されるものである。

この相互作用の第二のものに関する計算が第9章に行われている。ここで(9.5)に示される値の(9.4)に示される値に対する比の絶対値は大体10^{-5}から10^{-4}となる。また(9.7)に示される値の(9.6)に示される値に対する比の絶対値も大体10^{-5}から10^{-4}となる。つまり$\dot{\omega}$における相互作用がδEl_κにおける相互作用として影響する場合には10^{-5}から10^{-4}の程度となる。これは$\dot{\omega}$が軌道要素の変化を表す式中の一構成部分に過ぎぬことに由来する。次に(9.5)に示される値の大きさは非常に小さいが，これは長周期変化であるから，長期間においては次第に大きくなる。一方(9.7)に示される値の大きさは比較的に大きいが，これは短周期変化であるから，あまり大きくなることはない。

11. 結　論

Brouwerの理論に基づいて導き出されたLagrange形の運動方程式を用いる方法をとる摂動理論に対する理論的な詳解を示した。

この摂動理論を地球の人工衛星がzonal harmonicsに基づく摂動力の作用をうける場合に適用した。そして軌道要素の変化率を与えた。

変化率を表す方程式に具現される相互作用として，二次の摂動における軌道要素の変化率の一部をなし，zonal harmonicsに基づく摂動力以外の作用による，主問題の一次の長年摂動の変化率に対する部分を求めた。

二次をこえるharmonicsに対しては，離心率関数

と傾斜角関数を用いて一般項表示をとった。

軌道要素の変化率を与える方程式から，線形摂動の方法によって一次および二次の摂動を決定した。この際に軌道要素の変化率を与える方程式中にある軌道要素の変化率における，zonal harmonicsに基づく摂動力以外の作用による相互作用の部分を考慮した。

本研究を行うにあたりこれに対して助言をされた当研究所の松島弘一主任研究官ならびに助力をして頂いた白百合女子大学学生家入直子嬢およびトータルシステム研究所の小林昭夫氏に対してここに謝意を表明する。

引 用 文 献

1) D. Brouwer ; Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag, Astr. J., 64, 1959, 1274, 378-397.

2) Y. Kozai ; Second-Order Solution of Artificial Satellite Theory without Air Drag, Astr. J., 67, 1962, 7, 446-461.

3) G. Hori ; Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables, Publ. Astr. Soc. Japan, 18, 1966, 4.

4) K. Aksness ; A Second-Order Artificial Satellite Theory Based on an Intermediate Orbit, Astr. J., 75, 1970, 9, 1066-1076.

5) H. Kinoshita ; Third-Order Solution of an Artificial Satellite Theory, Smithonian Astrophys. Obs. Spec. Rep., No.379, 1977.

6) 武内澄夫；地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究－運動が長期間にわたる場合，航技研報告，TR-320，1973.

7) G. V. Groves (ed.)；Dynamics of Rockets and Satellites, 1965, pp.196-198, North-Holland Publishing Co..

8) 古在由秀；人工衛星の軌道，1972，東京大学東京天文台天体掃索部資料.

9) E. M. Gaposchkin (ed.)；1973 Smithonian Standard Earth (III), Smithonian Astrophys. Obs. Spec. Rep., No.353, 1973.

10) 武内澄夫；人工衛星の運動におけるZonal Harmonicsによる摂動－von Zeipelの方法による一次理論，航技研報告，TR-384，1974.

11) 武内澄夫；地球の人工衛星の赤道系軌道要素に対する赤道面の運動の影響，航空宇宙学会誌，30，1982，339，pp.11-18.

12) W. M. Kaula；Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites, Geophys. J., 5, 1961, pp. 104-133.

13) 武内澄夫；地球の人工衛星の運動におよぼす微小な推力の影響に関する研究，航技研報告，TR－744，1982.

14) A. Gayley ; Tables of the Developments of Functions in the Theroy of Elliptic Motion, Mem. Roy. Astr. Soc., 29, 1861, pp.191-306.

航空宇宙技術研究所報告738号

昭和57年9月発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所　株式会社　共進
東京都杉並区久我山5－6－17

Printed in Japan