

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-744

地球の人工衛星の運動におよぼす微小な推力の  
影響に関する研究

武内 澄夫

1982年11月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 地球の人工衛星の運動におよぼす微小な推力の影響に関する研究\*

武内 澄夫\*\*

## EFFECTS OF SMALL THRUST ON THE MOTION OF AN ARTIFICIAL EARTH SATELLITE

Sumio Takeuchi

Abstract

*Perturbative effects of small thrust on the motion of an artificial earth satellite are investigated.*

The Lagrange planetary equations in Gaussian form are applied to determine the variations of the orbital elements. Also, equations of motion expressed in terms of different components of the thrust acceleration are used.

It is assumed that the small thrust acceleration is a function of time and expressible as a linear combination of a polynomial and a composite set of all sines and cosines.

By the method of linear perturbations the equations are solved and the perturbative effects on satellite orbital elements are obtained. The terms in variations of orbital elements are of three types. They are purely secular, periodic and mixed secular types.

Considering the gravitational disturbing function of the earth and the luni-solar disturbing function to deal with the combined effect, the theory is applied to the orbit of the geostationary satellite. Then the variations of orbital elements, the longitude, the latitude and the height based on the standard earth-ellipsoid are calculated.

In addition there is a discussion of the method of determining the components of the thrust that maintains the longitude and the latitude of the satellite within a given tolerance band about a prespecified station.

### 1. 緒 言

地球の人工衛星の運動に対する微小な推力の影響に関して考究を行うことにする。

このような推力の影響に関してこれまでに行われた諸研究においては運動方程式として直交座標<sup>1) 2)</sup>

あるいは極座標<sup>3) 4) 5) 6)</sup>を変数とする方程式, Lagrange's planetary equationsなどが用いられている。ところで地球の人工衛星の運動に対する各種の作用を取り扱う場合には同じ形の運動方程式を一貫して用い, 相互作用に対する考慮をすることが望ましい。そこでこの各種の作用を取り扱うすべての場合にLagrange形の運動方程式を用い, 一次の摂動および特に zonal harmonicsの作用に関しては二次の摂動を求める諸理論の確立を旨とすることにした。

\* 昭和57年9月24日 受付

\*\* 宇宙研究グループ

そしてその一部分としてここでは推力の影響に関して Lagrange 形の運動方程式をとって理論をすすめることにする。

この Lagrange 形の運動方程式を用いた理論における解法として種々のものがとられている。例えば軌道運動の一周期毎に方程式を積分して軌道要素の長期的な変化を求める方法<sup>7)8)9)</sup>、平均法<sup>10)</sup>、二変数漸近展開法<sup>11)</sup>、方程式を直接に数値積分する方法<sup>12)13)</sup>などである。しかし一次の摂動を求める諸理論の一環をなす理論としては、推力が撃力であり、その作用中の人工衛星の位置ベクトルの変化を無視できるとしたものがあのみである<sup>14)</sup>。

そこで地球の人工衛星の運動に対する微小な推力の影響に関して一次の摂動を線形摂動の方法によって求める理論を示すことにする。ここで推力に基づく摂動加速度は時刻の冪で表される項と周期項によって表示されるとする。また摂動は長年項、長周期項、短周期項などに分類されて求められている。したがって推力が連続的に作用する場合には長年項および長周期項によって運動に対しての見通しをうることができる。また推力が不連続的に作用する場合には運動の決定にはすべての項が一般的に必要となり、これに対応することも可能である。次に以上の理論に基づいて、静止衛星に関して実行された計算を示す。ここでは不連続的に作用する推力によって地球に相対的な静止の位置の保持を行うものとしてある。

## 2. 力学系

時刻系として原子時  $t$  をとる。そしてこれを用いて運動方程式から運動を決定することにする。

地心  $O$  を原点とし、1950.0 の平均春分点に向けて  $x_s$  軸をとる。また 1950.0 の平均春分点と平均赤道に基づく赤経が  $90^\circ$  の点をこの平均赤道上にとり、この点に向けて  $y_s$  軸をとる。このとき右手系直交座標系  $O x_s y_s z_s$  は 1950.0 の平均春分点と平均赤道に基づく地心を原点とし慣性系に対して並進運動のみをする系とみなされる。また座標系  $O x_s y_s z_s$  と同様に瞬時の真の春分点と赤道に基づいて考えられる右手系直交座標系を  $O x_T y_T z_T$  とする。これは瞬時の真の赤道に基づく地心赤道座標系である。こ

こで座標系  $O x_s y_s z_s$  に対する座標系  $O x_T y_T z_T$  の相対運動を表す一般歳差、黄経の章動、黄道傾角の変化などの大きさは微小である。したがってこれらを見無視して座標系  $O x_T y_T z_T$  を並進運動座標系とみなすことにする。以下においてはこのように並進運動座標系とみなした座標系  $O x_T y_T z_T$  を基準とし、これに関して運動を決定することにする。

人工衛星に作用する外力としては potential から導かれる力とそれ以外の力がある。この potential を人工衛星の単位質量に対して次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\mu}{r} + R \\ \mu &= G m_e \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

以上において

- $\mu$  : 地心重力定数
- $r$  : 人工衛星の地心距離
- $R$  : 摂動関数
- $G$  : 万有引力の定数
- $m_e$  : 地球の質量

とする。ここで地球の質量に対する人工衛星の質量を見無視してある。またこの potential から導かれる力以外の力による摂動加速度を  $\mathbf{P}$  とする。次に右手系直交座標系  $O X Y Z$  をとる。ここで  $X$  軸の方向、向きを  $O$  に関する人工衛星の位置ベクトルの方向、向きに一致させる。また  $Z$  軸の方向、向きを  $O$  に関する人工衛星の角運動量の方向、向きに一致させることにする。そして  $\mathbf{P}$  の  $X, Y, Z$  成分を  $S, T, W$  とする。

以下において potential から導かれる力として地球の重力 potential の中心項に基づく力のみを考える。また potential から導かれる力以外の力として微小な推力のみをとることにする。そしてこの推力に基づくことを添字  $T$  によって示すことにして、次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_T \\ S &= S_T, \quad T = T_T, \quad W = W_T \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ここで  $\mathbf{P}_T$  は  $t$  の関数として表されるとする。ただし運動方程式中に表れる軌道要素に対してその変化率を考える場合にはこれらの二力以外の諸作用をも考慮する。

### 3. 運動方程式

#### 3.1 Gauss形の運動方程式

座標系  $O x_T y_T z_T$  を基準として考えた人工衛星の接触軌道要素として次のものをとる。

- $a$  : 軌道の半長軸
- $e$  : 軌道の離心率
- $i$  : 瞬時の真の赤道面に対する軌道面の傾斜角
- $Q$  : 昇交点経度, 瞬時の真の春分点と赤道に基づいた昇交点の赤経
- $\omega$  : 瞬時の真の赤道面から測った近地点引数
- $\chi^*$  : 運動決定が行われる時刻  $t(j)$  の平均近点離角

また次のようにする。

- $M$  : 平均近点離角
- $f$  : 真近点離角
- $E$  : 離心近点離角
- $n$  : 平均運動

ここで次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= n^2 a^3 \\ M &= \chi^* + \int_{t(j)}^t n dt \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

また次のようにおく。

$$u = \omega + f \quad (3.1.2)$$

そうすれば座標系  $O x_T y_T z_T$  を基準とする諸量で表された, Gauss形の運動方程式は次のようになる<sup>15)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ e S \sin f + \frac{a(1-e^2)}{r} T \right\} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ S \sin f + T (\cos E + \cos f) \right\} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} r W \cos u \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} r W \sin u \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{dQ}{dt} \cos i \\ &\quad + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left\{ S \cos f + \left\{ \frac{r}{a(1-e^2)} + 1 \right\} T \sin f \right\} \\ \frac{d\chi^*}{dt} &= -\sqrt{1-e^2} \left( \frac{dQ}{dt} \cos i + \frac{d\omega}{dt} \right) - 2 \frac{r}{na^2} S \end{aligned} \right\} \quad (3.1.3)$$

#### 3.2 速さを用いて表された運動方程式

次に右手系直交座標系  $O X' Y' Z'$  をとる。ここで  $X'$  軸の方向, 向きを人工衛星の速度の方向, 向きに一致させる。また  $Z'$  軸は  $Z$  軸と一致させる。このとき  $Y'$  軸は軌道の主法線の方向をとり, また人工衛星から軌道の曲率中心への向きをとる。ここで  $P$  の  $X'$ ,  $Y'$  成分を  $T'$ ,  $N$  とすれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{e T' \sin f - (1+e \cos f) N}{\sqrt{1+2e \cos f + e^2}} \\ T &= \frac{(1+e \cos f) T' + e N \sin f}{\sqrt{1+2e \cos f + e^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

この  $T'$ ,  $N$ ,  $W$  を用いれば (3.1.3) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{\mu} a^2 v T' \\ \frac{de}{dt} &= 2 \frac{e + \cos f}{v} T' - \frac{r}{av} N \sin f \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} r W \cos u \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} r W \sin u \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{dQ}{dt} \cos i \\ &\quad + \frac{2}{ev} T' \sin f + \frac{1}{ev} (e + \cos f \\ &\quad + \frac{e \sin^2 f}{1+e \cos f}) N \\ \frac{d\chi^*}{dt} &= -\sqrt{1-e^2} \left( \frac{dQ}{dt} \cos i + \frac{d\omega}{dt} \right) \\ &\quad - 2 \frac{r}{a\sqrt{1-e^2} v} \left\{ e T' \sin f - (1+e \cos f) N \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

ここで  $v$  は速さを表し, (3.2.2) は速さを用いて表された運動方程式となる。なお次のようになる。

$$v = \frac{na \sqrt{1+e^2+2e \cos f}}{\sqrt{1-e^2}} \quad (3.2.3)$$

### 4. 摂動加速度および楕円軌道に関する諸関数の時刻および軌道要素による表示

#### 4.1 摂動加速度の表示式

$P_T$ の成分  $S_T, T_T, W_T, T'_T, N_T$  などのそれぞれを代表して  $A_T$  で表わすとき,  $A_T$  は次のようになるとする。

$$A_T = A_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{Tk} t^k + a_{A_T k} \cos kt + b_{A_T k} \sin kt) \quad (4.1.1)$$

ここで  $A_{T0}, A_{Tk}, a_{A_T k}, b_{A_T k}$  などは定数とする。

4.2 楕円軌道に関する諸関数の表示式

$E$  に関して次式が成立する<sup>16)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \cos E &= A_{1,0}(e) + \sum_{l=1}^{\infty} A_{1,l}(e) \cos lM \\ A_{1,0}(e) &= -\frac{1}{2} e \\ A_{1,l}(e) &= \frac{1}{l} \{ J_{l-1}(le) - J_{l+1}(le) \} \\ &= \frac{2}{l^2} \frac{d}{de} J_l(le) \end{aligned} \right\} (4.2.1)$$

ここで  $J_l(le)$  は  $l$  次の第一種の Bessel 関数である。次に  $v$  と  $1/v$  は次のようになる。

$$v = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} F$$

$$F = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{s,q}(e)$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{p,s,q}(e) \cos pf$$

$$C_{s,q}(e) = \frac{1}{2^{2s}} \binom{2s-2q}{s-q} (-1)^{2s-2q-1} \times \frac{\{(4s-4q)+2q-3\}!!}{2^q(2s-2q)!q!} e^{2s}$$

$$C_{p,s,q}(e) = \frac{1}{2^{p-1+2s-2q}} \binom{p+2s-2q}{s-q} (-1)^{p+2s-q-1} \times \frac{(2p+4s-2q-3)!!}{2^q(p+2s-2q)!q!} e^{p+2s}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} F'$$

$$F' = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \cos pf$$

$$C'_{s,q}(e) = (-4s+2q+1) C_{s,q}(e)$$

$$C'_{p,s,q}(e) = (-2p-4s+2q+1) C_{p,s,q}(e) \quad (4.2.2)$$

さらに次のようになる。

$$\frac{e \sin^2 f}{1+e \cos f} = \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \frac{r}{a} (1 - \cos 2f) \quad (4.2.3)$$

また (3.1.3), (3.2.2) に (4.2.2) と (4.2.3) を代入した諸式などにおいて

$$\left( \frac{r}{a} \right)^q \frac{\cos pf}{\sin pf}$$

の形の関数が表れる。これらは次のようになる<sup>17)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{r}{a} \right)^q \cos pf &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l^{q,p}(e) \cos lM \\ \left( \frac{r}{a} \right)^q \sin pf &= \sum_{l=0}^{\infty} S_l^{q,p}(e) \sin lM \end{aligned} \right\} (4.2.4)$$

$$C_0^{q,p}(e) = X_0^{q,p}(e)$$

$$C_l^{q,p}(e) = X_l^{q,p}(e) + X_{-l}^{q,p}(e), [l \neq 0]$$

$$S_0^{q,p} = 0$$

$$S_l^{q,p} = X_l^{q,p}(e) - X_{-l}^{q,p}(e), [l \neq 0]$$

ここで  $X_l^{q,p}(e), X_{-l}^{q,p}$  などは Hansen 係数であり, 次のようになる<sup>17)18)</sup>

$$\left. \begin{aligned} X_l^{q,p}(e) &= (1+\beta^2)^{-q-1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(le) X_{l,s}^{q,p} \\ X_{l,s}^{q,p} &= H(p-q-1, -p-q-1, 1, \beta^2), [l-s-p=0] \\ X_{l,s}^{q,p} &= (-\beta)^{l-s-p} \binom{q+1-p}{l-s-p} \\ &\quad \times H(l-s-q-1, -p-q-1, l-s-p+1, \beta^2), \\ &\quad [l-s-p > 0] \\ X_{l,s}^{q,p} &= (-\beta)^{-l+s+p} \binom{q+1+p}{-l+s+p} \\ &\quad \times H(-l+s-q-1, p-q-1, -l+s+p+1, \beta^2), \\ &\quad [l-s-p < 0] \\ \beta &= \frac{1}{e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \end{aligned} \right\} (4.2.5)$$

ここで  $H$  は超幾何関数を表す。なお  $C_0^{q,p}, C_l^{q,p}$ ,

$S_i^{a,\beta}$ , Hansen 係数などの関数形の一部が Cayley によって与えられている<sup>19)</sup>

### 5. 軌道要素の変化率

(3.1.3) に (4.1.1), (4.2.1) および (4.2.4) を代入すれば次式をうる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{da}{dt}\right)_T &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \\ &\times \left[ e \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) D_s(S_T, lM) \right. \\ &+ (1-e^2) C_0^{-1,0}(e) \left\{ T_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (T_{Tk} t^k \right. \\ &+ a_{T_k} \cos kt + b_{T_k} \sin kt) \left. \right\} \\ &+ (1-e^2) \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{-1,0}(e) D_c(T_T, lM) \left. \right] \\ \left(\frac{de}{dt}\right)_T &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \\ &\times \left[ \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) D_s(S_T, lM) \right. \\ &+ \{A_{1,0}(e) + C_0^{0,1}(e)\} \left\{ T_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (T_{Tk} t^k \right. \\ &+ a_{T_k} \cos kt + b_{T_k} \sin kt) \left. \right\} \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \{A_{1,l}(e) + C_l^{0,1}(e)\} D_c(T_T, lM) \left. \right] \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_T &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \\ &\times \left[ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) + S_l^{1,1}(e)\} D_c(W_T, \omega + lM) \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) - S_l^{1,1}(e)\} D_c(W_T, \omega - lM) \left. \right] \\ \left(\frac{dQ}{dt}\right)_T &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2} \sin i} \\ &\times \left[ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) + S_l^{1,1}(e)\} D_s(W_T, \omega + lM) \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) - S_l^{1,1}(e)\} D_s(W_T, \omega - lM) \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_T &= -\left(\frac{dQ}{dt}\right)_T \cos i \\ &+ \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \\ &\times \left[ -C_0^{0,1}(e) \left\{ S_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (S_{Tk} t^k \right. \right. \\ &+ a_{S_k} \cos kt + b_{S_k} \sin kt) \left. \right\} \\ &- \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,1}(e) D_c(S_T, lM) \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-e^2} S_l^{1,1}(e) + S_l^{0,1}(e) \right\} D_s(T_T, lM) \left. \right] \\ \left(\frac{d\lambda^*}{dt}\right)_T &= -\sqrt{1-e^2} \left\{ \left(\frac{dQ}{dt}\right)_T \cos i + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_T \right\} \\ &- \frac{2}{na} \\ &\times \left[ C_0^{1,0}(e) \left\{ S_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (S_{Tk} t^k \right. \right. \\ &+ a_{S_k} \cos kt + b_{S_k} \sin kt) \left. \right\} \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{1,0}(e) D_c(S_T, lM) \left. \right] \\ D_s(A_T, \alpha_v) &= A_{T0} \sin \alpha_v \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_{Tk} t^k \sin \alpha_v \\ &+ \frac{1}{2} a_{ATk} \{ \sin(\alpha_v + kt) + \sin(\alpha_v - kt) \} \\ &- \frac{1}{2} b_{ATk} \{ \cos(\alpha_v + kt) - \cos(\alpha_v - kt) \}] \\ D_c(A_T, \alpha_v) &= A_{T0} \cos \alpha_v \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_{Tk} t^k \cos \alpha_v \\ &+ \frac{1}{2} a_{ATk} \{ \cos(\alpha_v + kt) + \cos(\alpha_v - kt) \} \\ &+ \frac{1}{2} b_{ATk} \{ \sin(\alpha_v + kt) - \sin(\alpha_v - kt) \}] \end{aligned} \quad (5.1)$$

また (3.2.2) に (4.1.1), (4.2.2), (4.2.3) および (4.2.4) を代入すれば次式をうる。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{da}{dt}\right)_T &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \\
&\times \left[ \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{s,q}(e) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{p,s,q}(e) C_0^{0,p}(e) \right\} \right. \\
&\times \left\{ T'_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (T'_{Tk} t^k + a_{T'k} \cos kt \right. \\
&\quad \left. + b_{T'k} \sin kt) \right\} \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{p,s,q}(e) \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,p}(e) D_c(T'_T, lM) \Big] \\
\left(\frac{de}{dt}\right)_T &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \\
&\times \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \left[ 2 \{ e + C_0^{0,1}(e) \} \{ T'_{T0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (T'_{Tk} t^k + a_{T'k} \cos kt + b_{T'k} \sin kt) \right\} \right. \\
&+ 2 \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,1}(e) D_c(T'_T, lM) \\
&- \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{1,1}(e) D_s(N_T, lM) \Big] \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \left[ \{ 2e C_0^{0,p}(e) \right. \\
&\quad \left. + C_0^{0,p+1}(e) + C_0^{0,p-1}(e) \} \left\{ T'_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (T'_{Tk} t^k \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{T'k} \cos kt + b_{T'k} \sin kt) \right\} \right. \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \{ 2e C_l^{0,p}(e) + C_l^{0,p+1}(e) + C_l^{0,p-1}(e) \} D_c(T'_T, lM) \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \{ S_l^{1,p+1}(e) - S_l^{1,p-1}(e) \} D_s(N_T, lM) \right] \\
\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_T &= -\left(\frac{dQ}{dt}\right)_T \cos i \\
&\quad + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \\
&\times \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) D_s(T'_T, lM) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left\{ e + C_0^{0,1}(e) + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_0^{1,0}(e) - C_0^{1,2}(e) \} \right\} \\
&\times \left\{ N_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (N_{Tk} t^k + a_{N_Tk} \cos kt \right. \\
&\quad \left. + b_{N_Tk} \sin kt) \right\} + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ C_l^{0,1}(e) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_l^{1,0}(e) - C_l^{1,2}(e) \} \right] D_c(N_T, lM) \Big] \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \left[ \sum_{l=1}^{\infty} \{ S_l^{0,p+1}(e) \right. \\
&\quad \left. - S_l^{0,p-1}(e) \} D_s(T'_T, lM) + \left[ e C_0^{0,p}(e) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \{ C_0^{0,p+1}(e) + C_0^{0,p-1}(e) \} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_0^{1,p}(e) - \frac{1}{2} \{ C_0^{1,p+2}(e) + C_0^{1,p-2}(e) \} \} \right] \right. \\
&\quad \times \left\{ N_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (N_{Tk} t^k + a_{N_Tk} \cos kt + b_{N_Tk} \sin kt) \right\} \\
&\quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ e C_l^{0,p}(e) + \frac{1}{2} \{ C_l^{0,p+1}(e) + C_l^{0,p-1}(e) \} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_l^{1,p}(e) - \frac{1}{2} \{ C_l^{1,p+2}(e) + C_l^{1,p-2}(e) \} \} \right] \right. \\
&\quad \left. \times D_c(N_T, lM) \right] \Big] \\
\left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_T &= -\sqrt{1-e^2} \left\{ \left(\frac{dQ}{dt}\right)_T \cos i + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_T \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{na} \right. \\
&\quad \times \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \left[ e \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{1,1}(e) D_s(T'_T, lM) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \{ C_0^{1,0}(e) + e C_0^{1,1}(e) \} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left\{ N_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (N_{Tk} t^k + a_{N_Tk} \cos kt + b_{N_Tk} \sin kt) \right\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{l=1}^{\infty} \{ C_l^{1,0}(e) + e C_l^{1,1}(e) \} D_c(N_T, lM) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \left[ \frac{1}{2} e \sum_{l=1}^{\infty} \{ S_l^{1,p+1}(e) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -S_l^{1,p-1}(e) \} D_s(T_T, \mathcal{L}M) \\
& - \left[ C_0^{1,p}(e) + \frac{1}{2} e \{ C_0^{1,p+1}(e) + C_0^{1,p-1}(e) \} \right] \\
& \times \left\{ N_{T_0} + \sum_{k=1}^{\infty} (N_{T_k} t^k + a_{N_{T_k}} \cos kt + b_{N_{T_k}} \sin kt) \right\} \\
& - \sum_{l=1}^{\infty} \left[ C_l^{1,p}(e) + \frac{1}{2} e \{ C_l^{1,p+1}(e) + C_l^{1,p-1}(e) \} \right] \\
& \times D_c(N_T, \mathcal{L}M) \Big] \Big]
\end{aligned} \tag{5.2}$$

ここで  $di/dt$  と  $dQ/dt$  がないが、これらは(5.1)における式と同じである。

## 6. 軌道要素の変化

(5.1) あるいは (5.2) を解けば軌道要素の変化が  $t$  の関数として求められることになる。しかし(5.1) および (5.3) を解くことはできない。そこで近似解を求めることにする。

以下において諸量を示す記号における添字(j)によってこの諸量の  $t = t(j)$  における値を示すことにする。そして

$$(\delta t)_{(j)} = \{ t(j) + (\delta t)_{(j)} \} - t(j) = t(j+1) - t(j) \tag{6.1}$$

とする。ここで  $(\delta t)_{(j)}$  の間において変化する諸量は  $t(j)$  における変化率を以て変化するとみなす。また特に変化率が小さな諸量においてはその変化を無視して  $t(j)$  における値をとるとみなす。そうすれば  $(\delta t)_{(j)}$  の間においては次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned}
a &= a(j) \\
e &= e(j) \\
i &= i(j) \\
\omega &= \omega(j) + \dot{\omega}(j) \delta t(j) \\
\chi^* &= \chi^*(j) + \dot{\chi}^*(j) \delta t(j) \\
M &= M(j) + \dot{M}(j) \delta t(j) \\
\delta t(j) &= t - t(j)
\end{aligned} \right\} \tag{6.2}$$

なお諸量の変化率を諸量を示す記号に点をつけて示すことにする。

(5.1) あるいは (5.2) の右辺において以上のようにしたものは軌道要素  $El_k$  の変化率において一次の

摂動に基づく部分

$$\left( \frac{d El_k}{dt} \right)_{rr} \tag{6.3}$$

を表す式となる。そしてこの式は  $t$  に関して積分が可能である。

積分区間の幅を  $\delta t$  として、(6.3) を積分して求められる一次の摂動に基づく軌道要素の変化を次のように表す。

$$\delta_1 El_{kT}$$

とする。特に  $t(j)$  から  $t(j+1)$  まで積分して求める場合のこの変化を

$$(\delta_1 El_{kT})_{(j)}$$

とする。

なお軌道要素の関数の変化率および変化にも同様の取り扱いと表示法をとることにする。

以下に軌道要素の変化を四種に分類して求める。ここで(5.1) から導かれる(6.3) によって得られる式を先に示す。そしてその後(5.2) から導かれる(6.3) によって得られる式を示すことにする。ただしこれらが共通の場合には省略をする。

### 6.1 軌道要素の長年変化

軌道要素の長年変化は次のようになる。ここで添字 Tse をつけて表すことにする。

$$\left. \begin{aligned}
\delta_1 a_{Tse} &= 2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{n} C_0^{-1,0}(e) T_{T_0} \delta t \\
\delta_1 e_{Tse} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \{ A_{1,0}(e) + C_0^{0,1}(e) \} T_{T_0} \delta t \\
\delta_1 i_{Tse} &= 0 \\
\delta_1 Q_{Tse} &= 0 \\
\delta_1 \omega_{Tse} &= - \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} C_0^{0,1}(e) S_{T_0} \delta t \\
\delta_1 \chi_{Tse}^* &= - \sqrt{1-e^2} \delta_1 \omega_{Tse} - \frac{2}{na} C_0^{1,0}(e) S_{T_0} \delta t
\end{aligned} \right\} \tag{6.1.1}$$

また次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
\delta_1 a_{Tse} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} K_a(e) T'_{T_0} \delta t \\
\delta_1 \omega_{Tse} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} K_e(e) T'_{T_0} \delta t
\end{aligned} \right\}$$



$$\begin{aligned} \delta_1 \dot{i}_{Tse} &= 0 \\ \delta_1 \Omega_{Tse} &= 0 \\ \delta_1 \omega_{Tse} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} K_\omega(e) N_{T0} \delta t \\ \delta_1 \chi_{Tse}^* &= -\sqrt{1-e^2} \delta \omega_{Tse} \\ &\quad + \frac{2}{na} K_{\chi^*}(e) N_{T0} \delta t \\ K_a(e) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{s,q}(e) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{p,s,q}(e) C_0^{0,p}(e) \\ K_e(e) &= 2 \{ e + C_0^{0,1}(e) \} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \{ 2e C_0^{0,p}(e) \\ &\quad + C_0^{0,p+1}(e) + C_0^{0,p-1}(e) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_\omega(e) &= \left[ e + C_0^{0,1}(e) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_0^{1,0}(e) - C_0^{1,2}(e) \} \left. \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \right. \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \left[ e C_0^{0,p}(e) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ C_0^{0,p+1}(e) + C_0^{0,p-1}(e) \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \left[ C_0^{1,p}(e) - \frac{1}{2} \{ C_0^{1,p+2} \right. \\ &\quad \left. \left. + C_0^{1,p-2}(e) \} \right] \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{\chi^*}(e) &= \{ C_0^{1,0}(e) + e C_0^{1,1}(e) \} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \{ C_0^{1,p}(e) \\ &\quad + \frac{1}{2} e \{ C_0^{1,p+1}(e) + C_0^{1,p-1}(e) \} \} \end{aligned}$$

(6.1.2)

## 6.2 軌道要素の $t$ の幂で表される長年変化

軌道要素の  $t$  の幂で表される長年変化は次のようになる。ここで添字 Tps をつけて表すことにする。

$$\begin{aligned} \delta_1 a_{Tps} &= 2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{n} C_0^{-1,0}(e) \sum_{k=1}^{\infty} T_{Tk} I_k \\ \delta_1 e_{Tps} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \{ A_{1,0}(e) + C_0^{0,1}(e) \} \sum_{k=1}^{\infty} T_{Tk} I_k \\ \delta_1 \dot{i}_{Tps} &= 0 \\ \delta_1 \Omega_{Tps} &= 0 \\ \delta_1 \omega_{Tps} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} C_0^{0,1}(e) \sum_{k=1}^{\infty} S_{Tk} I_k \\ \delta_1 \chi_{Tps}^* &= -\sqrt{1-e^2} \delta_1 \omega_{Tps} \\ &\quad - \frac{2}{na} C_0^{1,0}(e) \sum_{k=1}^{\infty} S_{Tk} I_k \\ I_k &= G_p(k, t + \delta t) - G_p(k, t) \\ G_p(k, t) &= \frac{t^{k+1}}{k+1} \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

また次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta_1 a_{Tps} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} K_a(e) \sum_{k=1}^{\infty} T'_{Tk} I_k \\ \delta_1 e_{Tps} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} K_e(e) \sum_{k=1}^{\infty} T'_{Tk} I_k \\ \delta_1 \dot{i}_{Tps} &= 0 \\ \delta_1 \Omega_{Tps} &= 0 \\ \delta_1 \omega_{Tps} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} K_\omega(e) \sum_{k=1}^{\infty} N_{Tk} I_k \\ \delta_1 \chi_{Tps}^* &= -\sqrt{1-e^2} \delta \omega_{Tps} \\ &\quad + \frac{2}{na} K_{\chi^*}(e) \sum_{k=1}^{\infty} N_{Tk} I_k \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

## 6.3 軌道要素の長周期変化

軌道要素の長周期変化は次のようになる。ここで添字 Tlp をつけて表すことにする。

$$\begin{aligned} \delta_1 a_{Tlp} &= 0 \\ \delta_1 e_{Tlp} &= 0 \\ \delta_1 \dot{i}_{Tlp} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} C_0^{1,1}(e) W_{T0} I_C(\omega) \\ \delta_1 \Omega_{Tlp} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2} \sin i} C_0^{1,1}(e) W_{T0} I_S(\omega) \\ \delta_1 \omega_{Tlp} &= -\delta_1 \Omega_{Tlp} \cos i \\ \delta_1 \chi_{Tlp}^* &= 0 \end{aligned}$$

$$I_s(\alpha) = -\frac{1}{\dot{\alpha}} \{ \cos(\alpha + \dot{\alpha} \delta t) - \cos \alpha \}, [\dot{\alpha} \neq 0]$$

$$I_c(\alpha) = \frac{1}{\dot{\alpha}} \{ \sin(\alpha + \dot{\alpha} \delta t) - \sin \alpha \}, [\dot{\alpha} \neq 0]$$

$$I_s(\alpha) = (\sin \alpha) \delta t, [\dot{\alpha} = 0]$$

$$I_c(\alpha) = (\cos \alpha) \delta t, [\dot{\alpha} = 0]$$

(6.3.1)

## 6.4 軌道要素の短周期変化および混合長年変化

軌道要素の短周期変化および混合長年変化は次のようになる。ここで添字 Tspms をつけて表すことにする。

$$\delta_1 a_{\text{Tspms}} = \frac{2}{n \sqrt{1-e^2}} \times \left[ e \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) V_s(S_T, lM) \right.$$

$$+ (1-e^2) C_0^{-1,0}(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{T,k} I_c(kt) \}$$

$$+ b_{T,k} I_s(kt) \}$$

$$+ (1-e^2) \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{-1,0}(e) V_c(T_T, lM) \}$$

$$\delta_1 e_{\text{Tspms}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}$$

$$\times \left[ \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) V_s(S_T, lM) \right.$$

$$+ \{ A_{1,0}(e) + C_0^{0,1}(e) \} \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{T,k} I_c(kt) \}$$

$$+ b_{T,k} I_s(kt) \}$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \{ A_{1,l}(e) + C_l^{0,1}(e) \} V_c(T_T, lM) \}$$

$$\delta_1 i_{\text{Tspms}} = \frac{1}{na \sqrt{1-e^2}}$$

$$\times \left[ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{ C_l^{1,1}(e) + S_l^{1,1}(e) \} \right.$$

$$\{ V_c(W_T, \omega + lM) - W_{T0} I_c(\omega) \}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{ C_l^{1,1}(e) - S_l^{1,1}(e) \}$$

$$\{ V_c(W_T, \omega - lM) - W_{T0} I_c(\omega) \} \}$$

= F<sub>i</sub>

$$\delta_1 Q_{\text{Tspms}} = \frac{1}{na \sqrt{1-e^2} \sin i}$$

$$\times \left[ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{ C_l^{1,1}(e) + S_l^{1,1}(e) \} \right.$$

$$\times \{ V_s(W_T, \omega + lM) - W_{T0} I_s(\omega) \}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{ C_l^{1,1}(e) - S_l^{1,1}(e) \}$$

$$\times \{ V_s(W_T, \omega - lM) - W_{T0} I_s(\omega) \} \}$$

= F<sub>Q</sub>

$$\delta_1 \omega_{\text{Tspms}} = -\delta_1 Q_{\text{Tspms}} \cos i$$

$$+ \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}$$

$$\times \left[ -C_0^{0,1}(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{S_T,k} I_c(kt) \} \right.$$

$$+ b_{S_T,k} I_s(kt) \} + \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,1}(e) V_c(S_T, lM)$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-e^2} S_l^{1,1}(e) + S_l^{0,1}(e) \right\} V_s(T_T, lM) \}$$

$$\delta_1 X_{\text{Tspms}}^* = -\sqrt{1-e^2} (\delta_1 Q_{\text{Tspms}} \cos i + \delta_1 \omega_{\text{Tspms}}) - \frac{2}{na}$$

$$\times \left[ C_0^{1,0}(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{S_T,k} I_c(kt) + b_{S_T,k} I_s(kt) \} \right.$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{1,0}(e) V_c(S_T, lM) \}$$

$$V_s(A_T, \alpha) = A_{T0} I_s(\alpha)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \{ A_{T,k} I_{ks}(\alpha) \}$$

$$+ \frac{1}{2} a_{A_T,k} \{ I_s(\alpha + kt) - I_s(\alpha - kt) \}$$

$$- \frac{1}{2} b_{A_T,k} \{ I_c(\alpha + kt) - I_c(\alpha - kt) \} \}$$

$$V_c(A_T, \alpha) = A_{T0} I_c(\alpha)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \{ A_{T,k} I_{kc}(\alpha) \}$$

$$+ \frac{1}{2} a_{A_T,k} \{ I_c(\alpha + kt) + I_c(\alpha - kt) \}$$

$$+ \frac{1}{2} b_{A_T,k} \{ I_s(\alpha + kt) - I_s(\alpha - kt) \} \}$$

$$\begin{aligned}
I_{ks}(\alpha) &= G_s(\kappa, \alpha + \dot{\alpha} \delta t, \dot{\alpha}, t + \delta t) \\
&\quad - G_s(\kappa, \alpha, \dot{\alpha}, t), \quad [\dot{\alpha} \neq 0] \\
I_{kc}(\alpha) &= G_c(\kappa, \alpha + \dot{\alpha} \delta t, \dot{\alpha}, t + \delta t) \\
&\quad - G_c(\kappa, \alpha, \dot{\alpha}, t), \quad [\dot{\alpha} \neq 0] \\
G_s(\kappa, \alpha, \dot{\alpha}, t) &= \frac{\kappa \cdot \prime}{\dot{\alpha}^{k+1}} \\
G_c(\kappa, \alpha, \dot{\alpha}, t) &= \frac{\kappa \cdot \prime}{\dot{\alpha}^{k+1}} \\
&\quad \times \left[ \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + l} \frac{(\dot{\alpha} t)^{\frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1)}}{\left\{ \frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1) \right\} \prime} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + l} \frac{(\dot{\alpha} t)^{\frac{1-(-1)^k}{2} + 2l}}{\left\{ \frac{1-(-1)^k}{2} + 2l \right\} \prime} (-) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right] \\
I_{ks}(\alpha) &= I_k \sin \alpha, \quad [\dot{\alpha} = 0] \\
I_{kc}(\alpha) &= I_k \cos \alpha, \quad [\dot{\alpha} = 0]
\end{aligned} \tag{6.4.1}$$

ここで  $\lfloor (k+1)/2 \rfloor$ ,  $\lfloor k/2 \rfloor$  などは括弧内の数値の整数部分を表す。なお  $0^0$  は 1 とする。

また次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta_1 a_{T_{spms}} &= \frac{2}{n \sqrt{1-e^2}} \\
&\quad \times \left[ K_a(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{T_{\tau k}} I_c(kt) \right. \\
&\quad \left. + b_{T_{\tau k}} I_s(kt) \right] \\
&\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{p,s,q}(e) \\
&\quad \left[ \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,p}(e) V_c(T_{\tau}, lM) \right] \\
\delta_1 e_{T_{spms}} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \\
&\quad \times \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \left[ 2 \{ e + C_0^{0,1}(e) \} \right. \right. \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{T_{\tau k}} I_c(kt) + b_{T_{\tau k}} I_s(kt) \} \\
&\quad \left. + 2 \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,1}(e) V_c(T_{\tau}, lM) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{1,1}(e) V_s(N_{\tau}, lM) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \left[ \{ 2e C_0^{0,p}(e) \right. \\
&\quad \left. + C_0^{0,p+1}(e) + C_0^{0,p-1}(e) \} \right. \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{T_{\tau k}} I_c(kt) + b_{T_{\tau k}} I_s(kt) \} \\
&\quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \{ 2e C_l^{0,p}(e) + C_l^{0,p+1}(e) + C_l^{0,p-1}(e) \} \right. \\
&\quad \left. V_c(T_{\tau}, lM) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \{ S_l^{1,p+1}(e) - S_l^{1,p-1}(e) \} V_s(N_{\tau}, lM) \right] \\
\delta_1 i_{T_{spms}} &= F_i \\
\delta_1 \Omega_{T_{spms}} &= F_{\Omega} \\
\delta_1 \omega_{T_{spms}} &= -\delta_1 \Omega_{T_{spms}} \cos i \\
&\quad + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \\
&\quad \times \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) \right. \right. \\
&\quad \left. V_s(T_{\tau}, lM) + \left[ e + C_0^{0,1}(e) + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \{ C_0^{1,0}(e) - C_0^{1,2}(e) \} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{N_{\tau k}} I_c(kt) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_{N_{\tau k}} I_s(kt) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ C_l^{0,1}(e) + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_l^{1,0}(e) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - C_l^{1,2}(e) \} \right] V_c(N_{\tau}, lM) \right] \\
&\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \left[ \sum_{l=1}^{\infty} \{ S_l^{0,p+1}(e) \right. \\
&\quad \left. - S_l^{0,p-1}(e) \} V_s(T_{\tau}, lM) + \left[ e C_0^{0,p}(e) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \{ C_0^{0,p+1}(e) + C_0^{0,p-1}(e) \} + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left[ C_0^{1,p}(e) - \frac{1}{2} \{ C_0^{1,p+2}(e) + C_0^{1,p-2}(e) \} \right] \right] \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{N_{\tau k}} I_c(kt) + b_{N_{\tau k}} I_s(kt) \} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ e C_l^{0,p}(e) + \frac{1}{2} \{ C_l^{0,p+1}(e) \right. \\
& + C_l^{0,p-1}(e) \} + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_l^{1,p}(e) \\
& - \frac{1}{2} \{ C_l^{1,p+2}(e) + C_l^{1,p-2}(e) \} \} \\
& \times V_c(N_T, LM) \Big] \\
\delta_1 \chi_{Tspms}^* & = -\sqrt{1-e^2} (\delta_1 Q_{Tspms} \cos i + \delta_1 \omega_{Tspms}) \\
& - \frac{2}{na} \\
& \times \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \left\{ e \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{1,1}(e) \right. \right. \\
& \times V_s(T_T, LM) - \{ C_0^{1,0}(e) + e C_0^{1,1}(e) \} \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{N_T k} I_c(kt) + b_{N_T k} I_s(kt) \} \\
& - \sum_{l=1}^{\infty} \{ C_l^{1,0}(e) + e C_l^{1,1}(e) \} V_c(N_T, LM) \Big] \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \left[ \frac{1}{2} e \sum_{l=1}^{\infty} \right. \\
& \times \{ S_l^{1,p+1}(e) - S_l^{1,p-1}(e) \} V_s(T_T, LM) \\
& - \{ C_0^{1,p}(e) + \frac{1}{2} e \{ C_0^{1,p+1}(e) + C_0^{1,p-1}(e) \} \} \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{N_T k} I_c(kt) + b_{N_T k} I_s(kt) \} \\
& - \sum_{l=1}^{\infty} \{ C_l^{1,p}(e) + \frac{1}{2} e \{ C_l^{1,p+1}(e) \\
& + C_l^{1,p-1}(e) \} V_c(N_T, LM) \Big] \Big] \\
& \qquad \qquad \qquad (6.4.2)
\end{aligned}$$

### 6.5 半長軸の変化による平均近点離角の変化

半長軸の変化による平均近点離角の変化率は次のようになる。ここで半長軸の変化に起因することを添字  $\delta a$  をつけることによって表してある。

$$\left. \begin{aligned}
\left( \frac{dM}{dt} \right)_{1,\delta a,T} & = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \delta_1 a_T \\
\delta_1 a_T & = \delta_1 a_{Tse} + \delta_1 a_{Tps} + \delta_1 a_{Tlp} + \delta_1 a_{Tspms}
\end{aligned} \right\} \quad (6.5.1)$$

半長軸の変化による平均近点離角の変化は、(6.5.1) に (6.1.1), (6.2.1), (6.3.1), (6.4.1) などを用いて積分すれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta_1 M_{\delta a,T} & = -\frac{3}{2a} \left[ \sqrt{1-e^2} C_0^{-1,0}(e) T_{T0} (\delta t)^2 \right. \\
& + 2\sqrt{1-e^2} C_0^{-1,0}(e) \sum_{k=1}^{\infty} T_{Tk} I'_k \\
& + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \\
& \times \left\{ e \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) V'_s(S_T, LM) \right. \\
& - (1-e^2) C_0^{-1,0}(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{T_T k} I'_c(kt) \\
& + b_{T_T k} I'_s(kt) \} \\
& + (1-e^2) \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{-1,0}(e) V'_c(T_T, LM) \Big\} \\
I'_k & = G'_p(k, t+\delta t) - G'_p(k, t) - \{ G'_p(k, t) \} \delta t \\
G'_p(k, t) & = \frac{t^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \\
I'_s(\alpha) & = -\frac{1}{\dot{\alpha}} \left[ \frac{1}{\dot{\alpha}} \{ \sin(\alpha + \dot{\alpha} \delta t) - \sin \alpha \} \right. \\
& \left. - (\cos \alpha) \delta t \right], \quad [\dot{\alpha} \neq 0] \\
I'_s(\alpha) & = \frac{1}{2} (\delta t)^2 \sin \alpha, \quad [\dot{\alpha} = 0] \\
I'_c(\alpha) & = \frac{1}{\dot{\alpha}} \left[ -\frac{1}{\dot{\alpha}} \{ \cos(\alpha + \dot{\alpha} \delta t) - \cos \alpha \} - (\sin \alpha) \delta t \right], \\
& \quad [\dot{\alpha} \neq 0] \\
I'_c(\alpha) & = \frac{1}{2} (\delta t)^2 \cos \alpha, \quad [\dot{\alpha} = 0] \\
V'_s(A_T, \alpha) & = A_{T0} I'_s(\alpha) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_{Tk} I'_{ks}(\alpha) \right. \\
& + \frac{1}{2} a_{A_T k} \{ I'_s(\alpha+kt) + I'_s(\alpha-kt) \} \\
& \left. - \frac{1}{2} b_{A_T k} \{ I'_c(\alpha+kt) - I'_c(\alpha-kt) \} \right\} \\
V'_c(A_T, \alpha) & = A_{T0} I'_c(\alpha) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_{Tk} I'_{kc}(\alpha) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} a_{ATk} \{ I'_c(\alpha+kt) + I'_c(\alpha-kt) \} \\
 & + \frac{1}{2} b_{ATk} \{ I'_s(\alpha+kt) - I'_s(\alpha-kt) \} \\
 I'_{ks}(\alpha) &= G'_s(k, \alpha + \dot{\alpha} \delta t, \dot{\alpha}, t + \delta t) \\
 & - G'_s(k, \alpha, \dot{\alpha}, t) \\
 & - G_s(k, \alpha, \dot{\alpha}, t) \delta t, [\dot{\alpha} \neq 0] \\
 I'_{kc}(\alpha) &= G'_c(k, \alpha + \dot{\alpha} \delta t, \dot{\alpha}, t + \delta t) \\
 & - G'_c(k, \alpha, \dot{\alpha}, t) \\
 & - G_c(k, \alpha, \dot{\alpha}, t) \delta t, [\dot{\alpha} \neq 0] \\
 G'_s(k, \alpha, \dot{\alpha}, t) &= \frac{k \dot{\alpha}}{\dot{\alpha}^{k+1}} \\
 & \times \left[ \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + l} \frac{\dot{\alpha}^{\frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1)}}{\{ \frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1) \}} \right. \\
 & \times \left. \frac{G_s(\frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1), \alpha, \dot{\alpha}, t)}{G_c} \right. \\
 & + \left. \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + l} \frac{\dot{\alpha}^{\frac{1-(-1)^k}{2} + 2l}}{\{ \frac{1-(-1)^k}{2} + 2l \}} \right. \\
 & \times \left. \frac{(-)G_c(\frac{1-(-1)^k}{2} + 2l, \alpha, \dot{\alpha}, t)}{G_s} \right] \\
 I'_{ks}(\alpha) &= I'_k \sin \alpha, [\dot{\alpha} = 0] \\
 I'_{kc}(\alpha) &= I'_k \cos \alpha, [\dot{\alpha} = 0]
 \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

ここで  $\lfloor (k+1)/2 \rfloor$ ,  $\lfloor k/2 \rfloor$  などは括弧内の数値の整数部分を表す。

また (6.5.1) に (6.1.2), (6.2.2), (6.3.1), (6.4.2) などを用いて積分すれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \delta_1 M_{\delta a, T} &= -\frac{3}{2} \frac{1}{a \sqrt{1-e^2}} \\
 & \times \left[ K_a(e) T'_{T0} (\delta t)^2 \right. \\
 & + 2K_a(e) \sum_{k=1}^{\infty} T'_{Tk} I'_k \\
 & + 2K_a(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{T'k} I'_c(kt) \\
 & + b_{T'k} I'_s(kt) \} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{q=1}^s
 \end{aligned}$$

$$\times C_{p,s,q}(e) \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,p}(e) V'_c(T'_T, lM) \tag{6.5.3}$$

### 7. 軌道要素

軌道要素の変化は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \delta E l_k &= \delta_1 E l_{kT} \\
 \delta_1 E l_{kT} &= \delta_1 E l_{kTbe} + \delta_1 E l_{kTps} + \delta_1 E l_{kTlp} \\
 & + \delta_1 E l_{kTspms}
 \end{aligned} \right\} \tag{7.1}$$

また平均近点離角の変化は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \delta M &= \delta \chi^* + n \delta t + \delta_1 M_{\delta a} \\
 \delta_1 M_{\delta a} &= \delta_1 M_{\delta a, T}
 \end{aligned} \right\} \tag{7.2}$$

運動決定の開始時を  $t_{(1)}$  とする。このとき

$$\begin{aligned}
 t_{(j)} &= t_{(1)} + \sum_{j=1}^{j-1} (\delta t)_{(j)} \\
 &= t_{(1)} + \Delta t
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

における軌道要素は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 E l_{k(j)} &= E l_{k(1)} + \sum_{j=1}^{j-1} (\delta E l_k)_{(j)} \\
 &= E l_{k(1)} + \Delta E l_k
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

また平均近点離角は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 M_{(j)} &= M_{(1)} + \sum_{j=1}^{j-1} (\delta M)_{(j)} \\
 &= M_{(1)} + \Delta M
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

なお以下において軌道要素の関数にも同様の表示法をとることとする。

### 8. 計 算

#### 8.1 力学系

地球の重力 potential の中心項に基づく力と推力以外の作用を考慮せずに理論をすすめてきたが、ここで  $R$  の一部分をも考慮することにする。このような部分として地球の重力 potential の harmonics  $R_E$ 、月の引力の potential  $R_L$  および太陽の引力の potential  $R_S$  をとりあげる。そして人工衛星としては不連続的に作用する微小な推力によって地球に相対的な静止の位置の保持を行う場合の静止衛星をとるこ

とにする。

## 8.2 使用する式

$P_T$ が $S_T$ ,  $T_T$ ,  $W_T$ 成分によって表示されるとし、この場合における第6章の軌道要素の変化の諸式を用いる。

$R_E$ ,  $R_L$ ,  $R_S$ などに基づく軌道要素の変化は次のようにして求められるとする。まず軌道要素の変化率を表す諸式をとる。<sup>20)21)</sup>そしてこれから線形摂動の方法によって軌道要素の変化率において一次の摂動に基づく部分を導き出す。さらにこれらを積分すれば一次の摂動に基づく軌道要素の変化が求められる。これらをそれぞれ $\delta_1 El_{kE}$ ,  $\delta_1 El_{kL}$ ,  $\delta_1 El_{kS}$ とする。このとき軌道要素の変化は(7.1)の第一式を変更して次のようになる。

$$\delta El_k = \delta El_{kE} + \delta_1 El_{kL} + \delta_1 El_{kS} + \delta_1 El_{kT} \quad (8.2.1)$$

また同様にして求められる $R_E$ ,  $R_L$ ,  $R_S$ などに基づく半長軸の変化による平均近点離角の変化をそれぞれ $\delta_1 M_{\delta a,E}$ ,  $\delta_1 M_{\delta a,L}$ ,  $\delta_1 M_{\delta a,S}$ とする。このとき半長軸の変化による平均近点離角の変化は(7.2)の第二式を変更して次のようになる。

$$\delta_1 M_{\delta a} = \delta_1 M_{\delta a,E} + \delta_1 M_{\delta a,L} + \delta_1 M_{\delta a,S} + \delta_1 M_{\delta a,T} \quad (8.2.2)$$

ここで運動方程式中に表れる軌道要素に対してその変化率を考えるを要し、これらに対しては以上に求められた一次の摂動に基づく軌道要素の変化率の内の主要な部分を用いることにする。

なお $\delta_1 El_{kL}$ ,  $\delta_1 El_{kS}$ などを求める際に月と太陽の赤道系軌道要素が必要となる。これらは月と太陽の平均軌道要素から求めることにする。<sup>22)</sup>また $\delta_1 El_{kE}$ を求める際に恒星時を要し、これを定める場合に必要となる平均黄道傾角, 黄道傾角の章動, 黄経の章動などは天体暦に示される諸式によって求められる。<sup>22)</sup>さらに以上の諸量を求めるためには各種の時系における時刻を要し、これらは各種時系に関する諸式によって決定される。<sup>23)</sup>ここで協定世界時を $t_c$ とし、またこの時系において、 $t_{(1)}$ ,  $dt$ に対応する量をそれぞれ $t_{c(1)}$ ,  $dt_c$ とする。

推進系において、 $(\delta t)_{(j)}$ の間における推力および比推力, したがって排出される質量流量は, 一定であるとする。ここで次の量をとる。

$m$  : 人工衛星の質量

$K$  : 質量流量の $m_{(1)}$ に対する比

$F_{A_T}$  : 推力の $A_T$ を規定する方向, 向きの成分  
そうすれば

$$F_{A_T} = m A_T \quad (8.2.3)$$

となる。このとき $(\delta t)_{(j)}$ の間において次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_T &= \frac{F_{A_T(j)}}{m_{(1)}(R_{m(j)} + K_{(j)}t)} \\ R_{m(j)} &= R_{m(j-1)} + (K_{(j-1)} - K_{(j)})t_{(j)} \\ R_{m(0)} &= 1 \\ K_{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.2.4)$$

ここで推力の成分の $t_{(1)}$ における質量に対する比

$$A_e = \frac{F_{A_T}}{m_{(1)}} \quad (8.2.5)$$

が与えられれば(8.2.4)から $A_T$ が求められることになる。 $A_T$ と $A_e$ において記号 $A$ は共通のものを示す。

測地学的経度 $\lambda$ は軌道要素から座標を求め,<sup>16)</sup>これから赤経を出し, それから恒星時を減じて決定される。

測地学的緯度と高度は人工衛星から地球に理想的に適合する汎世界回転楕円体へ下した法線によって定義されるとして求められる。<sup>24)</sup>

## 8.3 運動を決定する計算

### 8.3.1 与えられる諸量

(1) 軌道要素の変化の式を構成する量

この式は無数の項から構成され, この構成項を任意にとって計算を実行できるようになっている。ここでは次のようにとることにする。まず地球の重力potentialのharmonicsにおいて長年および長周期項, 短周期項においてそれぞれ4次, 2次までをとる。またこのharmonicsを展開した場合の離心率関数においてとる離心率の冪指数の最大値を2とする。次に月あるいは太陽の引力による摂動関数のharmonicsの長年および長周期項においてとる最大の次数を2とする。またこのharmonicsを展開した場合の人工衛星の離心率関数においてとる離心率の冪指数の最大値を2とする。それから月あるいは太陽の離心率関数においてとる離心率の冪指数の最大値を2とする。さらに(4.1.1)においてとる $k$ の最大値を

3 とする。また (4.2.4) においてとる  $i$  の最大値を 2 とする。

(2) 時刻

1984 年 7 月 1 日 12<sup>h</sup> 日本時を運動決定の開始時  $t_{c(1)}$  とする。

(3) 軌道要素

運動決定の開始時  $t_{(1)}$  における軌道要素を表 1 のようにする。なおこのとき  $\lambda_{(1)}$  は 135.0000 deg となる。

(4) 天文学的量

次の諸量をとる。

$A_U$  : 天文単位距離

$a_e$  : 地球の赤道半径

$f'$  : 地球の扁率

$J_{l,m}$  : 地球の重力 potential の定数

$\lambda_{l,m}$  : 地球の重力 potential の定数

そして以上の諸量と  $\mu$  の値を表 2 のようにする。<sup>25)26)2)</sup>

さらに次の諸量をとる。

$m_L$  : 月の質量

$m_S$  : 太陽の質量

そして次のようにする。

$$\frac{m_L}{m_e} = 0.01230\ 002$$

$$\frac{m_S}{m_e + m_L} = 328900.5$$

(5) 推力に関する量

地球に相対的な静止の位置の保持は、 $i$  と  $\Delta\lambda$  が次式に示される範囲内にあることによって規定されるとする。

$$\left. \begin{aligned} i &\leq 0.1 \text{ deg} \\ |\Delta\lambda| &\leq 0.1 \text{ deg} \end{aligned} \right\} \quad (8.3.1)$$

推力の作用がない場合には、 $t_{(1)}$  の直後間もなく (8.3.1) の不成立となる。そこで  $t_{c(1)}$  以後の経過時間  $\Delta t_c$  が  $\Delta t_{c1}, \Delta t_{c2}, \dots$  となるときに (8.3.1) を成立させるような推力を作用させることにする。ここでは  $\Delta t_{c1}$  から  $\Delta t_{c4}$  までを表 3 のようにとる。

この推力は人工衛星の周期にほとんど等しい 1 恒星日を周期として作用するとする。ここでこの 1 恒星日を表 4 に示す時間  $T_1, T_2, T_3$  および  $T_4$  に、この順に分割する。ここで括弧内には時間と分による表示がしてある。またこの際に人工衛星が昇交点と

表 1  $t_{c(1)}$  における軌道要素

$a_{(1)}$	km	42164.5
$e_{(1)}$		0.0001
$i_{(1)}$	deg	0.1
$\Omega_{(1)}$	deg	265
$\omega_{(1)}$	deg	10
$\chi^*_{(1)}$	deg	278.7249

表 2 天文学的量

$A_U$	km	149597870
$\mu$	km <sup>3</sup> /s <sup>2</sup>	398600.5
$a_e$	km	6378.140
$f'$		1/298.256
$J_{2,0}$		$-1.082637 \times 10^{-3}$
$J_{2,1}$		0
$J_{2,2}$		$1.7711 \times 10^{-6}$
$J_{3,0}$		$2.541 \times 10^{-6}$
$J_{3,1}$		$2.1712 \times 10^{-6}$
$J_{3,2}$		$3.7041 \times 10^{-7}$
$J_{3,3}$		$2.2380 \times 10^{-7}$
$J_{4,0}$		$1.618 \times 10^{-6}$
$J_{4,1}$		$6.7225 \times 10^{-7}$
$J_{4,2}$		$1.6865 \times 10^{-7}$
$J_{4,3}$		$6.2499 \times 10^{-7}$
$J_{4,4}$		$7.8553 \times 10^{-7}$
$\lambda_{2,1}$	deg	0
$\lambda_{2,2}$	deg	-14.924
$\lambda_{3,1}$	deg	6.3799
$\lambda_{3,2}$	deg	-22.069
$\lambda_{3,3}$	deg	24.073
$\lambda_{4,1}$	deg	223.09
$\lambda_{4,2}$	deg	31.477
$\lambda_{4,3}$	deg	-2.1821
$\lambda_{4,4}$	deg	161.6061

表3  $t_{c(1)}$  以後の経過時間

$\Delta t_{c1}$	$\Delta t_{c2}$	$\Delta t_{c3}$	$\Delta t_{c4}$
day	day	day	day
5	60	85	135

表4 1 恒星日の分割

		$\Delta t_{c1} \leq \Delta t_c < \Delta t_{c2}$	$\Delta t_{c2} \leq \Delta t_c < \Delta t_{c3}$	$\Delta t_{c3} \leq \Delta t_c < \Delta t_{c4}$
$T_1$	day	0.0416666 (1h)	0.0534722 (1h17m)	0.0416666 (1h)
$T_2$	day	0.9556028	0.4243292	0.3485034
$T_3$	day		0.0833333 (2h)	0.2916666 (7h)
$T_4$	day		0.4361347	0.3154328

表5 推力の成分の運動決定開始時の質量に対する比

	$\Delta t_{c1} \leq \Delta t_c < \Delta t_{c2}$			$\Delta t_{c2} \leq \Delta t_c < \Delta t_{c3}$			$\Delta t_{c3} \leq \Delta t_c < \Delta t_{c4}$		
	$S_e$	$T_e$	$W_e$	$S_e$	$T_e$	$W_e$	$S_e$	$T_e$	$W_e$
	km/day <sup>2</sup>	km/day <sup>2</sup>	km/day <sup>2</sup>	km/day <sup>2</sup>	km/day <sup>2</sup>	km/day <sup>2</sup>	km/day <sup>2</sup>	km/day <sup>2</sup>	km/day <sup>2</sup>
$T_1$	0	-15	0	0	-15	40	0	-15	40
$T_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$T_3$				0	0	-40	0	0	-40
$T_4$				0	0	0	0	0	0

降交点に在る時刻が  $T_1$  および  $T_3$  で示される時間のほぼ中央になるようにしてある。ただしこうするために、このような分割は  $t_{(1)}$  以後

$$T_{ep} = 0.17645 \ 98292 \ \text{day}$$

において開始することにする。そして  $T_1$  および  $T_3$  で示される時間においてのみ推力が作用するようにする。

次に推力の成分の  $t_{(1)}$  における質量に対する比  $A_e$  を表5のようにする。

(6) 推進系に関する量

推進機は4台とし、Y、Z軸方向の正、負の向き

に、推力を発生するように1台ずつ配置されているとする。そして比推力を5000Sにとる。

(7) 積分区間の幅と運動決定の期間

$t$  に関しての積分区間の幅としてはまず  $T_{ep}$  をとり、次に  $T_1, T_2, T_3, T_4$  を繰り返してとることにする。そして  $t_{(1)}$  以後

$$\Delta t_{cM} = 135 \ \text{day}$$

までの運動を決定することにする。

### 8.3.2 計算の実行と結果

以上のようにして計算する。またこの計算において推力の作用だけを除いた場合の計算をも行う。た



だしこの場合には  $\Delta t_{e_2}$  を 135 day とする。

次に計算の結果として、まず推力の作用がない場合の  $\Delta i$  と  $\Delta \lambda$  を図 1 と図 2 に示す。それから推力が作用する場合の  $\Delta E_{Lk}$  と  $\Delta \lambda$  を図 3 から図 9 までに示す。これらの図においては  $\Delta t$  を横軸にとり、また上に示した諸量を縦軸にとっている。したがってこの  $\Delta t$  の各値における上に示した諸量の値を示す諸点が表示されている。

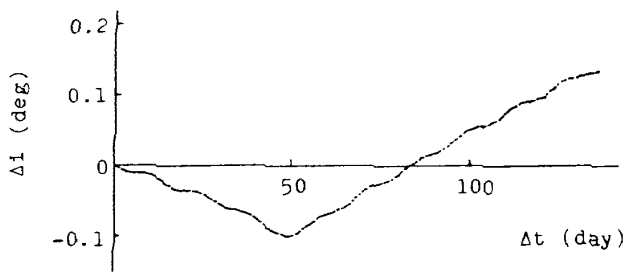


図 1 推力の作用がない場合の  $\Delta t$  と  $\Delta i$  との関係

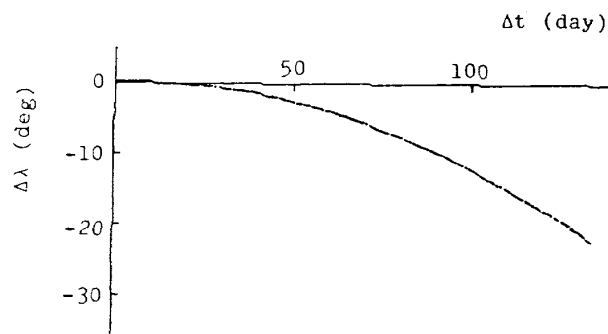


図 2 推力の作用がない場合の  $\Delta t$  と  $\Delta \lambda$  との関係

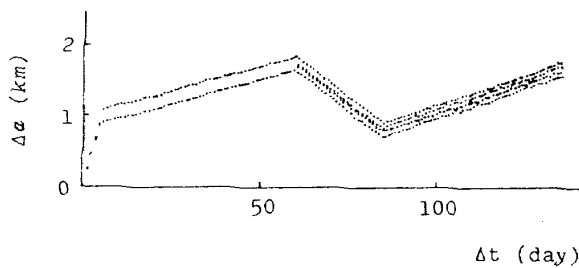


図 3  $\Delta t$  と  $\Delta a$  との関係

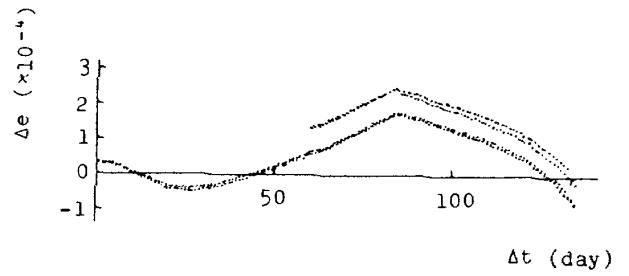


図 4  $\Delta t$  と  $\Delta e$  との関係

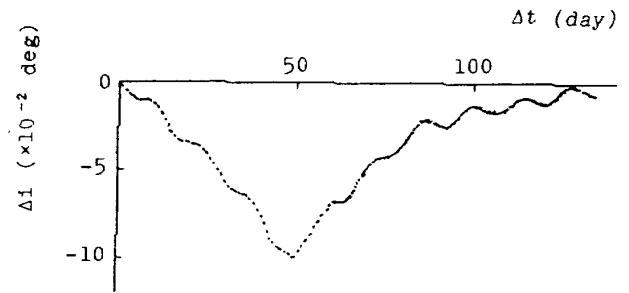


図 5  $\Delta t$  と  $\Delta i$  との関係

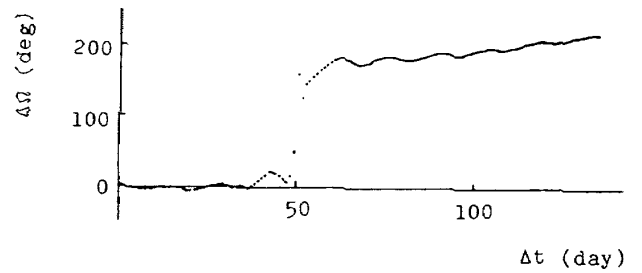


図 6  $\Delta t$  と  $\Delta \Omega$  との関係

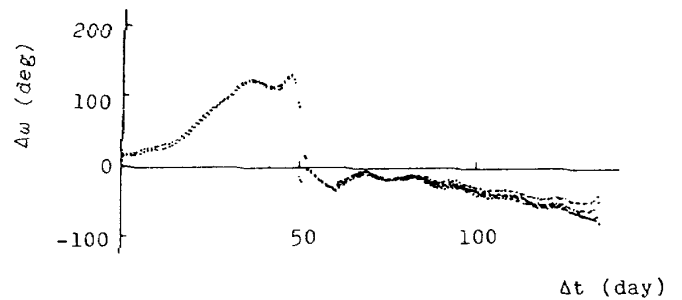
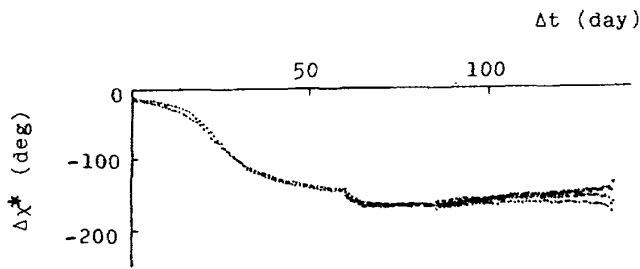
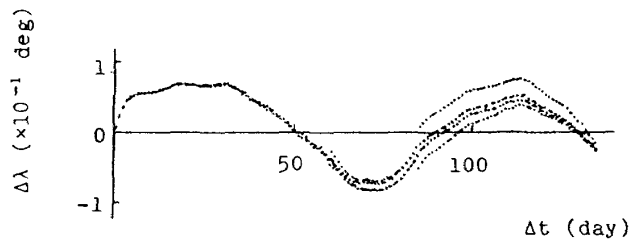


図 7  $\Delta t$  と  $\Delta \omega$  との関係

図8  $\Delta t$  と  $\Delta \chi^*$  との関係図9  $\Delta t$  と  $\Delta \lambda$  との関係

## 9. 考 察

第7章までの所論によれば地球の人工衛星の運動に対する微小な推力の影響における軌道要素に対する一次の摂動を求めることが可能である。

次にこの理論によって行われた第8章の計算において与えられる諸量の内の第8.3.1節(5)の推力に関する量について考える。(8.3.1)は $|\Delta i|$ と $|\Delta \lambda|$ を小さくすれば成立する。そして $|\Delta \lambda|$ を小さくすることは、 $S$ をcritical argumentとすると、 $|\Delta S|$ を小さくすれば成立する。さらにこれは $|\Delta a|$ および $|\Delta(\Omega + \omega + \chi^*)|$ を小さくすれば成立する。この二者の内では $|\Delta a|$ の作用が主要であり、 $|\Delta(\Omega + \omega + \chi^*)|$ は比較的小さい。したがって(8.3.1)を成立させることから $|\Delta a|$ と $|\Delta i|$ を小さくすることが主要な目標となる。この $\Delta a$ の構成項は $R_E$ に関してはnon-zonal harmonicsのresonance termsを主要項とし、 $\mathbf{P}_T$ に関しては $S_T$ および $T_T$ 成分に基づく項から成る。また $\Delta i$ の構成項は $R_L$ に関しては人工衛星と月の昇交点経度の差を引数とする三角関数の項を主要項とし、 $\mathbf{P}_T$ に関しては $R_T$ 成分に基づく項から成る。ここで推力が連続的に作用する場合に運動を決定するときには $R_E$ および $R_L$ に関する摂動の主要項ならびに $\mathbf{P}_T$ に関する摂動の長年項および長周期項のみを取り出し、この式の形および

この式の容易に求め得る数値に基づいて運動の見通しを即時に得ることが出来る。このために $t_{(1)}$ 以後 $\Delta t_M$ の間に(8.3.1)を成立させる適切な推力を初めから与えることは大体において可能である。しかしこの計算において推力は不連続的に作用する。この場合に運動を決定するときには $R_E$ および $R_L$ に関する摂動の主要項ならびに $\mathbf{P}_T$ に関するすべての摂動項を取る必要がある。しかもこの式の数値を簡略に求めることはできない。したがって運動の見通しを即時に得ることはできない。このために $t_{(1)}$ 以後 $\Delta t_M$ の間に(8.3.1)を成立させる適切な推力を初めから、即時に与えることは一般にはできない。そこでここでは(8.3.1)の成立、したがって $|\Delta a|$ と $|\Delta i|$ を小さくすることを目指すような数種の推力を概算によって求める。この際に推力が連続的に作用する場合に運動の見通しを即時に得る上に示した方法をとる。そして $\mathbf{P}_T$ に関する摂動の短周期項に関しては主要な少数の項のみを考慮する。それからこの推力を用いて摂動の計算を行い、その結果から適切な推力を推定する方法をとった。この推力は、推力の作用する期間の始めと終わりの時刻、その期間中に推力を作用させる時間の始めと終わりの時刻、推力の成分などによって規制される。ところでこの規制におけるわずかな差異でも $\Delta i$ 、 $\Delta \lambda$ などに影響し、(8.3.1)の制限に抵触することがある。このために適切な推力を求めるためにはさらに何回もの摂動の計算を要することになる。このようにして適切な推力を求めて行く過程の中の一例を表3から5は示している。したがってこれはまだあまり良好なものではない。

また第8.3.1節(7)の積分区間は被積分関数を連続とする区間に限定されるために $T_{ep}$ 、 $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3$ 、 $T_4$ などのような短時間にとられている。したがって長期間にわたる積分区間をとり得る一般摂動の理論に制限を与えることになるがやむを得ない。

さらに次いで第8.3.2節の計算の結果を調べてみる。推力の作用を除いた場合の $\Delta i$ と $\Delta \lambda$ が図1と2に示されている。図1によれば $t_{(1)}$ 以後に $i$ は次第に減少し、 $\Delta t$ が50日の付近から増大に転じ、間もなく0.1 degをこえてしまう。また図2によれば $t_{(1)}$ の直後に $\lambda$ はわずかに増大し、すぐに減少を始める。

そこで(8.3.1)を成立させるために表3から5に示すように $\Delta t_c$ が5日から1恒星日に1時間 $F_{T_T}$ を作用させる。 $i$ は0 degに近づくので $F_{W_T}$ は作用させないで置く。そうすれば図9に示されるように $\lambda$ は多少増大してから減少に向かい、 $\Delta t$ が50日の付近から負の値をとる。そこでまた表3から5に示すように $\Delta t_c$ が60日から1恒星日に1時間17分昇交点の近くで $F_{T_T}$ と $F_{W_T}$ を作用させ、さらに2時間降交点の近くで逆符号をとる $F_{W_T}$ を作用させる。そうすれば図9に示されるように $\lambda$ はわずかに減少してから増大に向かい、 $\Delta t$ が90日の付近から正の値をとる。また図5に示されるように $i$ は増大を続けるが0.1 deg以下に留まっている。ここでさらにまた表3から5に示すように $\Delta t_c$ が85日から1恒星日に1時間昇交点の近くで $F_{T_T}$ と $F_{W_T}$ を作用させ、さらに7時間降交点の近くで逆符号をとる $F_{W_T}$ を作用させる。そうすれば図9に示されるように $\lambda$ は多少増大してから減少に向かう。また図5に示されるように $i$ は増大を続けるがなお0.1 deg以下にある。

また図3に示されるように $a$ は $F_{T_T}$ の作用を受けて $\Delta t_{c1}$ から $\Delta t_{c2}$ 、 $\Delta t_{c2}$ から $\Delta t_{c3}$ 、 $\Delta t_{c3}$ から $\Delta t_{c4}$ の間において緩やかな増大、減少、増大をしている。それから図4, 6, 7, 8などには $\Delta e$ ,  $\Delta Q$ ,  $\Delta \omega$ ,  $\Delta \chi^*$ などが示されている。ここで $i$ が0 degに接近する $\Delta t$ が50日の付近において $\Delta Q$ は急激に増大し、それ以後も増大を続けている。しかしこれを打ち消すような変化が $\Delta \omega$ と $\Delta \chi^*$ に生じている。

以上の所論によると、推力に関する量を表3から5に示すようにとれば、 $t_{c(1)}$ 以後 $\Delta t_{cm} = 135$ 日に対しては(8.3.1)が成立する。ここでさらに長期間にわたって(8.3.1)を成立させるためにはこれでは不十分であり、その長期間にわたって推力に関する量を求めるを要する。しかし以上にとった方法によれば適切な推力を求め得ることが示されたことになる。

## 10. 結 論

地球の人工衛星の運動に対する微小な推力の影響を考究するために、力学系における外力として地球の重力 potential の中心項に基づく力と推力のみをとり、Lagrange 形の運動方程式を用いて、一次の

摂動を線形摂動の方法によって求めた。

推力に基づく摂動加速度は時刻の $\sqrt{t}$ で表される項と周期項によって表示されるとした。このとき摂動は長年項、長周期項、短周期項および混合長年項から構成される。そしてこれによって運動が決定されることになる。

軌道の制御を連続的に作用する微小な推力によって行う際には、本理論における摂動の長年項および長周期項に基づいて適切な推力を比較的簡単に求め得る。また不連続的に作用する微小な推力によって行う際には、本理論に基づく概算によって与えられる数種の推力を用いて摂動の計算を実行し、これらの結果から適切な推力を推定することができる。

力学系において外力にさらに地球の重力 potential の harmonics に基づく力、月と太陽の引力などを加え、不連続的に作用する微小な推力によって地球に相対的な静止位置の保持を行う場合の静止衛星の運動を本理論によって計算した。そしてこれによって軌道の制御の実行の一例を示した。

最後に、本研究を行うに当たり、推進系に関して助言をされた当研究所の長洲秀夫総合研究官、山中龍夫主任研究官および中村嘉宏主任研究官、摂動理論に関して助言をされた松島弘一主任研究官ならびに随所において助力をして頂いた白百合女子大学学生中馬三智子嬢に対してここに謝意を表明する。

## 引 用 文 献

- 1) M. S. Allione, A. L. Blackford, J. C. Mendez, & M. M. Whittouck; Guidance, Flight Mechanics and Trajectory Optimization Vol. VI—The N-Body Problem and Special Perturbation Techniques, NASA CR-1005(1968).
- 2) 松島弘一, 他; 宇宙飛行体の汎用軌道解析用プログラム“STANPS” [1] 人工衛星および惑星間宇宙船の軌道生成プログラム, 航技研資料 TM-359 (1978/8).
- 3) K. Forster; Satellite Dynamics for Small Eccentricity Including Drag and Thrust, AIAA Journal, Vol.1, No.11(1963)

- pp.2621-2623.
- 4) Y. Y. Shi & M. C. Eckstein ; *Ascent or Descent from Satellite Orbit by Low Thrust*, AIAA Journal, Vol.4, No.12 (1966/12) pp.2203-2209.
  - 5) W. Brofman ; *Approximate Analytical Solution for Satellite Orbits Subjected to Small Thrust or Drag*, AIAA Journal, Vol.5, No.6(1967/6) pp.1121-1128.
  - 6) K. J. Schwenzfeger ; *Nonnumerical Tangential Low Thrust Energy Increase Trajectories Calculations*, Z. Flugwiss., 22 (1974) pp.249-253.
  - 7) S. J. Citron ; *Satellite Lifetimes under the Influence of Continuous Thrust, Atmospheric Drag, and Planet Oblateness*, AIAA Journal, Vol.1, No.6 (1963/6) pp.1355-1360.
  - 8) E. G. C. Burt ; *On Space Manoeuvres with Continuous Thrust*, Planet. Space Sci., Vol.15(1967) pp. 103-122.
  - 9) E. G. C. Burt ; *The Dynamics of Low-Thrust Spacecraft Manoeuvres*, The Aeronautical Journal, Vol.72 (1968/11) pp.925-940.
  - 10) V. N. Lebedev ; *Calculation of The Motion of A Low-Thrust Spacecraft*, NASA TT F-586 (1969/11).
  - 11) G. A. Flandro ; *Asymptotic Solution for Solar Electric Low-Thrust Orbit Raising with Eclipse Penalty*, AIAA Paper, No. 74-802 (1974/8).
  - 12) 吉村庄市・上村平八郎・山中龍夫；微小推力による人工衛星の軌道遷移についての数値シミュレーション，航技研報告 TR-395 (1974/11).
  - 13) R. Holdaway ; *Satellite Ephemeris Prediction and Orbit Maneuverability By Low Thrust*, AIAA Paper, 75-355 (1975/3).
  - 14) 松島弘一；自機搭載型軌道保持システムのための軌道決定と制御，航技研報告 TR-295 (1972/8).
  - 15) 武内澄夫；地球の人工衛星の赤道系軌道要素に対する赤道面の運動の影響，航空宇宙学会誌 Vol. 30 No.339 (1982/4) pp.191-198.
  - 16) W.M. Smart ; *Celestial Mechanics* (1953), Longmans, Green, London.
  - 17) F. Tisserand ; *Traité de Mécanique Céleste*, Tome 1 (1918), Gauthier-Villars, Paris.
  - 18) H. C. Plummer ; *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy* (1918), Dover Publications, Inc. New York.
  - 19) A. Cayley ; *Tables of the Developments of Functions in the Theory of Elliptic Motion*, Memoirs of the Royal Astronomical Society, Vol.29 (1861) pp.191-306.
  - 20) 武内澄夫；地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究，航技研報告 TR-320 (1973/6).
  - 21) 武内澄夫・松島弘一；月と太陽の引力の作用下にある地球の人工衛星の運動に関する研究，航技研報告 R-323 (1973/7).
  - 22) 海上保安庁水路部；昭和56年天体位置表，海上保安庁 (1979).
  - 23) 松島弘一；衛星運動のシミュレーションシステムにおける世界時の予測，航技研報告 TR-430 (1975/10).
  - 24) 原田健久；準換回転楕円体，建設省国土地理院資料 (昭和50).
  - 25) 青木信仰；IAU (1976)天文定数系について，天文月報，Vol.70 (1977/5) pp.122-127.
  - 26) E. M. Gaposchkin (ed.); 1973 Smithsonian Standard Earth (III), SAO Special Report 353(1973).

---

## 航空宇宙技術研究所報告744号

昭和57年11月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山5-6-17

---