

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-748

地球の人工衛星の運動における大気の抵抗の
影響に関する研究

武内 澄夫

1982 年 12 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

地球の人工衛星の運動における大気の抵抗の 影響に関する研究*

武 内 澄 夫**

Atmospheric Drag Effects on the Motion of an Artificial Earth Satellite

Sumio Takeuchi

Abstract

Perturbative effects of atmospheric drag on the motion of an artificial earth satellite are investigated in this paper.

The atmosphere is considered to rotate with the same angular velocity as the earth. The altitudes of the satellite are given with reference to the standard earth-ellipsoid.

The Lagrange planetary equations in Gaussian form are applied to determine the variations of the orbital elements.

The atmospheric density at the satellite is regarded as a function of time. The density function is approximated by polynomials determined by the least-squares method. The coefficients are calculated from the finite set of ordinates corresponding to the density values computed by analytically evaluating the 1971 Jacchia density model. By use of the osculating orbital elements the position of the satellite is predicted. In this case it is assumed that the orbit of the satellite is perturbed by the variations of the earth's gravitational field alone. The ratio of the rate of the earth's rotation and the mean motion of the satellite is usually less than 1/10. This ratio and the eccentricity of the orbit are considered to be of the first order. In the expression of the magnitude of the relative velocity of the satellite with respect to the atmosphere, terms up to the third order are included.

By the method of linear perturbations the equations are solved and the perturbative effects on satellite orbital elements are obtained. The solution obtained in this manner consists of terms of three types: purely secular, periodic and mixed secular types.

1. 緒 言

地球の人工衛星の運動に対する大気の抵抗の影響

に関して考究を行うことにする。

このような研究は人工衛星が初めて打ち上げられた頃から開始され、すでに非常に多くのものが発表されている。^{1) 2)} これらの諸研究の方法は一般摂動法と特別摂動法に大別することができ、その特性においてそれぞれ長所と短所をもっている。一般に人工

* 昭和57年11月16日 受付

** 宇宙研究グループ

衛星の運動に対する各種の作用を論ずる場合には一貫して同一の方法をとり、同種の運動方程式を用い、相互作用をも取り入れることが望ましい。

これまでにすでに地球の人工衛星の運動に対する各種の作用を総括して取り扱う理論の確立をすすめてきた。この理論においては人工衛星の力学的な挙動に対する見とおしを得ることに第一の重点をおいて一般摂動法をとり、また人工衛星の運動に対する各種の作用の取り扱いが比較的簡単であることから Lagrange 形の運動方程式を用いた。ここでは、この理論の一部として大気の抵抗の作用をとりあげ、これについての所論を示すことにする。

人工衛星の運動に対する大気の影響に関し、この Lagrange 形の運動方程式を用いてすでに行われた研究を顧みると、初期のものの大半は人工衛星の寿命の予測をその主要な目標としていた。その後、単に寿命に限定せず、運動の全般にわたる比較的に整った研究が Stern によって行われた。^{3) 4) 5)} この大気の影響に関する理論において最も主要な問題はどのように大気をモデル化して表現するかにある。そしてこのモデルに基づいて密度が導き出され、これが人工衛星の運動の決定の要因となる。研究の初期における大気のモデルはその密度が簡単な指数関数で表現されるものであり、単に高度のみの関数であった。したがって現実の大気密度を表現するには全く不完全な状態にあった。次いで、本格的なモデルの作成が Cook および King-Hele によって始められた。^{6) ~ 11)} そしてこれらがまとめられ、¹²⁾ さらに改良がすすめられた。^{13) 14)} 以上において人工衛星の存在する位置における密度は高度のみならず、また時刻の関数として表現され、大気の扁平、地球と共に進む運動にさらに加えられた回転なども扱われるようになった。以上の大気モデルに関する理論と同等であるが、大気の密度の決定に係る諸量を一括して取り扱う理論をたて、これに基づいて人工衛星の運動の決定を行う研究が Santra によって行われた。^{15) 16)} またこれに類似する、Jacchia の 1971 年の大気モデルから求められる密度を近似する式を用いる Holdaway の理論がある。¹⁷⁾

人工衛星の運動の決定をさらに精確に行うためには一層現実に近い精密な大気のモデルを用いて理論

を進めることが必要である。このような研究には二種類が考えられる。その第一は Lafontaine の研究であり、¹⁸⁾ 軌道運動の一周期間で、この大気のモデルから導かれる密度の近地点における近似および多少の変更を行って得られる密度を運動方程式に用いるものである。なおこの際に Cook, King-Hele, Jacchia などのモデルを用い、また解を解析的に出している。そして第二は Barry 等の研究であり、¹⁹⁾ 軌道運動の一周期間で、この大気のモデルから導かれる密度を関数近似した密度を運動方程式に用いるものである。なおこの際に Jacchia の 1970 年の大気モデルから数値積分によって密度を求め、これを 4 次の Fourier 近似をして解を解析的に求めている。以上の研究において精密な大気のモデルそのものを再表現しようとする点はすぐれているが、その期間が一周期に限定され、また第二のものにおける数値積分法による密度の決定には時間を要する。

そこでこのような精密な大気のモデルそのものを再表現するが、その期間を軌道運動の一周期に限定することなく必要に応じて自在にとりうるようにし、また解析的表示による密度を用いてその決定を数値積分法による場合よりも効率的にすすめる理論を示すことにする。ここで大気のモデルとして Jacchia の 1971 年の大気モデルをとり、その再表現には時刻の関数である多項式を用いる近似を行うことにする。なお従来の理論においては大気に対する人工衛星の相対速度を表す式においては、軌道の離心率、地球の回転ベクトルの大きさと人工衛星の平均運動の比などの二乗までを考慮していた。しかし大気をモデル化して表現する理論の精密化に対応して三乗までを考慮する理論とする。そして大気抵抗による一次の摂動を線形摂動の方法によって求める。また摂動は長年項、長周期項などに分類されて求められている。次に以上の理論に基づいて実際の人工衛星に関する計算が示されている。この際に大気抵抗以外の摂動の作用としては最も主要である地球の重力 potential の harmonics に基づく力のみをとることにした。

2. 力学系

時刻系として原子時 t をとる。そしてこれを用い

て運動方程式から運動を決定することにする。

地心Oを原点とし、1950.0の平均春分点に向けて x_S 軸をとる。また1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく赤経が 90° の点をこの平均赤道上にとり、この点に向けて y_S 軸をとる。このとき右手系直交座標系 $O x_S y_S z_S$ は1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく地心を原点とし慣性系に対して並進運動のみをする系とみなされる。また座標系 $O x_S y_S z_S$ と同様に瞬時の真の春分点と赤道に基づいて考えられる右手系直交座標系を $O x_T y_T z_T$ とする。これは瞬時の真の赤道に基づく地心赤道座標系である。ここで座標系 $O x_S y_S z_S$ に対する座標系 $O x_T y_T z_T$ の相対運動を表す一般歳差、黄経の章動、黄道傾角の変化などの大きさは微小である。したがってこれらを見捨て座標系 $O x_T y_T z_T$ を並進運動座標系とみなすことにする。以下においてはこのように並進運動座標系とみなした座標系 $O x_T y_T z_T$ を基準とし、これに関して運動を決定することにする。

人工衛星に作用する外力としてはpotentialから導かれる力とそれ以外の力がある。このpotentialを人工衛星の単位質量に対して次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\mu}{r} + R \\ \mu &= G m_e \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

以上において

μ : 地心重力定数

r : 人工衛星の地心距離

R : 摂動関数

G : 万有引力の定数

m_e : 地球の質量

とする。ここで地球の質量に対する人工衛星の質量を見捨てある。またこのpotentialから導かれる力以外の力による摂動加速度を \mathbf{P} とする。次に右手系直交座標系 $OXYZ$ をとる。ここで X 軸の方向、向きを O に関する人工衛星の位置ベクトルの方向、向きに一致させる。また Z 軸の方向、向きを O に関する人工衛星の角運動量の方向、向きに一致させることにする。そして \mathbf{P} の X, Y, Z 成分を S, T, W とする。

以下においてpotentialから導かれる力として地球の重力potentialの中心項に基づく力のみを考え

る。またpotentialから導かれる力以外の力として大気の抵抗のみをとることにする。そしてこの抵抗に基づくことを添字Aによって示すことにして、次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_A \\ S &= S_A, \quad T = T_A, \quad W = W_A \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

そして次の表示が行われるとする。

$$\mathbf{P}_A = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho \mathbf{v}_r \mathbf{v}_r \quad (2.3)$$

ここで人工衛星に関して

m : 質量

A : 断面積

C_D : 抵抗係数

\mathbf{v}_r : 大気に相対的な速度

とし、また

ρ : 人工衛星が存在する位置における大気の密度とする。なお大気は地球と共に運動するとし、大気の地球に対する相対運動を見捨てる。さらに地球の表面は地球に理想的に適合する汎世界回転楕円体をなすとする。したがって人工衛星の高度は人工衛星からこの楕円体へ下した法線によって定義されるとする。ただし運動方程式中に表れる軌道要素に対してその変化率を考える場合には以上の二力以外の諸作用をも考慮する。

3. 運動方程式

座標系 $O x_T y_T z_T$ を基準として考えた人工衛星の接触軌道要素として次のものとする。

a : 軌道の半長軸

e : 軌道の離心率

i : 瞬時の真の赤道面に対する軌道面の傾斜角

Ω : 昇交点経度、瞬時の真の春分点と赤道に基づいた昇交点の赤経

ω : 瞬時の真の赤道面から測った近地点引数

χ^* : 運動決定が行われる時刻 $t(j)$ の平均近点離角
また次のようにする。

M : 平均近点離角

f : 真近点離角

E : 離心近点離角

n : 平均運動

ここで次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= n^2 a^3 \\ M &= \chi^* + \int_{t(j)}^t n dt \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

また次のようにおく。

$$u = \omega + f \quad (3.2)$$

そうすれば座標系 $O x_T y_T z_T$ を基準とする諸量で表された運動方程式は次のようになる。²⁰⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ e S \sin f + \frac{a(1-e^2)}{r} T \right\} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ S \sin f + T (\cos E + \cos f) \right\} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} r W \cos u \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} r W \sin u \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left\{ -S \cos f + \left\{ \frac{r}{a(1-e^2)} + 1 \right\} T \sin f \right\} \\ &\quad - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} W r \sin u \\ \frac{d\chi^*}{dt} &= \frac{1}{nae} \left\{ (1-e^2) \cos f - \frac{2er}{a} \right\} S \\ &\quad - \frac{1}{nae} \left(\frac{r}{a} + 1 - e^2 \right) T \sin f \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

4. 摂動加速度の時刻および軌道要素による表示式

摂動加速度 P_A の X, Y, Z 成分は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} S_A &= -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v_r v_{rX} \\ T_A &= -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v_r v_{rY} \\ W_A &= -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v_r v_{rZ} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

ここで v_{rX}, v_{rY}, v_{rZ} は v_r の X, Y, Z 成分を示す。

この ρ は t の関数であり、多項式として次のように表されたとする。

$$\rho = \sum_{k=0}^q C_k t^k \quad (4.2)$$

ここで $t(j)$ 以後にいくつかの t をとり、その各時刻に人工衛星が存在する位置において大気密度を求める。そしてこの密度を関数近似するように C_k を決定する。この際に人工衛星の存在する位置としては $t(j)$ における接触軌道要素にその後の摂動を加えて求められる軌道要素から決定されるものを用いる。そしてこの摂動としては最も主要である主問題における摂動のみを考慮することにする。また大気密度には Jacchia の 1971 年の大気模型に基づく解析的表示によって求められるものを用いる。²¹⁾

次に

v : 人工衛星の速度

ν : 地球のその自転軸のまわりの回転ベクトル

r : 人工衛星の O に関する位置ベクトル

とすれば次のようになる。

$$v_r = v - \nu \times r$$

この X, Y, Z 成分は楕円運動に関する諸式を用いれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} v_{rX} &= \frac{nae \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \\ v_{rY} &= \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r} - \nu r \cos i \\ v_{rZ} &= \nu r \sin i \cos u \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

またこれらの成分を用い、さらに

φ_c : 人工衛星の地心緯度

とし、楕円運動に関する諸式を用いれば次のようになる。

$$\begin{aligned} v_r^2 &= \frac{\mu(1+2e \cos f + e^2)}{a(1-e^2)} - 2\nu\sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i \\ &\quad + \frac{\nu^2 \{a(1-e^2)\}^2 \cos^2 \varphi_c}{(1+e \cos f)^2} \end{aligned}$$

ここで $\nu/n < 1$, $e < 1$ である。そこで ν/n および e に関してその三乗までを考慮することにして上式を変形すれば結局次のようになる。

$$\begin{aligned} v_r &= \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \tau \\ \tau &= \sigma_0 + \sigma_1 \cos f + \sigma_2 \cos^2 f + \sigma_3 \cos^3 f \\ &\quad + \sigma_4 \sin f \cos f + \sigma_5 \sin f \cos^2 f \\ \sigma_0 &= 1 - \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i + \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n} \right)^3 (1-e^2)^{\frac{9}{2}} \sin^2 i \cos i \\
& - \frac{3}{2} \frac{\nu}{n} e^2 (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \\
& - \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i \left\{ 1 \right. \\
& \left. + \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \cos 2\omega \\
\sigma_1 = & e \left\{ 1 - 3 \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right. \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 (5 \cos^2 i + \frac{1}{2} \sin^2 i) - \frac{1}{2} e^2 \left\{ \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 e (1-e^2)^3 \sin^2 i \cos 2\omega \right. \\
\sigma_2 = & - \frac{1}{2} e \left\{ e + 11 \frac{\nu}{n} e (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i \\
& \times \left\{ 1 + \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \cos 2\omega \\
\sigma_3 = & \frac{1}{2} e^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 e (1-e^2)^3 \sin^2 i \cos 2\omega \\
\sigma_4 = & - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i \\
& \times \left\{ 1 + \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \sin 2\omega \\
\sigma_5 = & - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 e (1-e^2)^3 \sin^2 i \left\{ 1 + \frac{5}{2} \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \\
& \times \sin 2\omega
\end{aligned} \tag{4.4}$$

それから $C_D A/m$ は時間の経過と共に変化する量ではあるが、ここでは運動方程式の積分区間において一定値をとるとみなすことにする。

5. 軌道要素の変化率

(3.3) に (2.2), (4.1), (4.3), (4.4) などを代入すれば軌道要素の変化率を表す次式が得られる。

$$\left(\frac{da}{dt} \right)_A = - \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \sqrt{a}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{e^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \sin^2 f + \sqrt{1-e^2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 - \frac{\nu}{n} \cos i \right\} \tau \\
\left(\frac{de}{dt} \right)_A = & - \frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \frac{1}{\sqrt{a}} \\
& \times \left\{ \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin^2 f + \sqrt{1-e^2} \frac{a}{r} (\cos E + \cos f) \right. \\
& \left. - \frac{\nu}{n} \cos i \frac{r}{a} (\cos E + \cos f) \right\} \tau \\
\left(\frac{di}{dt} \right)_A = & - \frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \\
& \times \frac{\nu}{n} \frac{\sin i}{\sqrt{a} (1-e^2)} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos^2 (\omega + f) \tau \\
\left(\frac{dQ}{dt} \right)_A = & - \frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \\
& \times \frac{\nu}{n} \frac{1}{\sqrt{a} (1-e^2)} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin (\omega + f) \cos (\omega + f) \tau \\
\left(\frac{d\omega}{dt} \right)_A = & \frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \frac{1}{\sqrt{a}} \\
& \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \cos f - \frac{1}{e \sqrt{1-e^2}} \sin f \right. \\
& + \frac{\nu}{n} \frac{\cos i}{e (1-e^2)} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin f \\
& - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{a}{r} \sin f \\
& + \frac{\nu}{n} \frac{\cos i}{e} \frac{r}{a} \sin f \\
& \left. + \frac{\nu}{n} \frac{\cos i}{1-e^2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin (\omega + f) \cos (\omega + f) \right\} \tau \\
\left(\frac{d\chi^*}{dt} \right)_A = & - \frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \frac{1}{\sqrt{a}} \\
& \times \left\{ \sin f \cos f - \frac{2e}{1-e^2} \frac{r}{a} \sin f - \frac{1}{e} \sin f \right. \\
& + \frac{\nu}{n} \frac{\cos i}{e \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin f \\
& - \frac{1-e^2}{e} \frac{a}{r} \sin f \\
& \left. + \frac{\nu}{n} \frac{\sqrt{1-e^2} \cos i}{e} \frac{r}{a} \sin f \right\} \tau
\end{aligned} \tag{5.1}$$

6. 軌道要素の変化

(5.1) を解けば軌道要素の変化が t の関数として求められることになる。しかし (5.1) を解くことはできない。そこで近似解を求めることにする。

以下において諸量を示す記号における添字 (j) によってこの諸量の $t = t_{(j)}$ における値を示すことにする。そして

$$(\delta t)_{(j)} = \{t_{(j)} + (\delta t)_{(j)}\} - t_{(j)} = t_{(j+1)} - t_{(j)} \quad (6.1)$$

とする。ここで $(\delta t)_{(j)}$ の間において軌道要素および平均近点離角は $t_{(j)}$ における変化率を以て変化するとみなす。ただし特に変化率が小さな諸量においてはその変化を無視して $t_{(j)}$ における値をとるとみなす。そうすれば $(\delta t)_{(j)}$ の間においては次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} a &= a_{(j)} \\ e &= e_{(j)} \\ i &= i_{(j)} \\ \omega &= \omega_{(j)} + \dot{\omega}_{(j)} \delta t_{(j)} \\ \chi^* &= \chi_{(j)}^* + \dot{\chi}_{(j)}^* \delta t_{(j)} \\ M &= M_{(j)} + \dot{M}_{(j)} \delta t_{(j)} \\ \delta t_{(j)} &= t - t_{(j)} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

なお諸量の変化率を諸量を示す記号に点をつけて示すことにする。

(5.1) の右辺において以上のようにしたものは軌道要素 El_k の変化率において一次の摂動に基づく部分

$$\left(\frac{dEl_k}{dt} \right)_{1A} \quad (6.3)$$

を表す式となる。そしてこの式は t に関して積分が可能である。

積分区間の幅を δt として、(6.3) を積分して求めた一次の摂動に基づく軌道要素の変化を次のように表す。

$$\delta_1 El_{kA}$$

特に $t_{(j)}$ から $t_{(j+1)}$ まで積分して求めた場合のこの変化を

$$(\delta_1 El_{kA})_{(j)}$$

とする。

なお軌道要素の関数の変化率および変化にも同様

の取り扱いと表示法をとることにする。

以下に (6.3) から軌道要素の変化を求める。(6.3) は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dEl_k}{dt} \right)_{1A} &= \Sigma \rho F_A \sigma_m T_r \\ F_A &= F_A(a, e, i) \\ \sigma_m &= \sigma_m(a, e, i, \omega) \\ T_r &= T_r(e, \omega, f) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

ここで σ_m は $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_5$ の何れかであり、 T_r は f の周期 2π の関数である。また Σ は存在しているこのような形のすべての項にわたって加えることを示す。この T_r は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} T_r &= T_{ri} + T_{rd} \\ T_{ri} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_r df = T_{ri}(e, \omega) \\ T_{rd} &= T_{rd}(e, \omega, f) \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

実際にはまず楕円軌道に関する諸式を用いて T_r を e, ω および f の関数である構成項の和として表し、この構成項を用いて T_{ri} を求める。 T_r には 70 種類あり、その構成項は 247 項とした。 T_{ri} を次に示す。

$$\left. \begin{aligned} (\sin f)_i &= 0 \\ (\sin^2 f)_i &= \frac{1}{2} \\ (\cos f)_i &= 0 \\ (\cos^2 f)_i &= \frac{1}{2} \\ (\cos^3 f)_i &= 0 \\ (\sin f \cos f)_i &= 0 \\ (\sin f \cos^2 f)_i &= 0 \\ (\sin f \cos^3 f)_i &= 0 \\ (\sin f \cos^4 f)_i &= 0 \\ (\sin^2 f \cos f)_i &= 0 \\ (\sin^2 f \cos^2 f)_i &= \frac{1}{8} \\ (\sin^2 f \cos^3 f)_i &= 0 \\ (\sin^3 f \cos f)_i &= 0 \\ (\sin^3 f \cos^2 f)_i &= 0 \\ \left(\frac{a}{r} \sin f \right)_i &= 0 \\ \left(\frac{a}{r} \cos f \right)_i &= \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos^2 f\right)_i = \frac{1}{2} \frac{1}{1-e^2}$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos^3 f\right)_i = \frac{3}{8} \frac{e}{1-e^2}$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos^4 f\right)_i = \frac{3}{8} \frac{1}{1-e^2}$$

$$\left(\frac{a}{r} \sin f \cos f\right)_i = 0$$

$$\left(\frac{a}{r} \sin f \cos^2 f\right)_i = 0$$

$$\left(\frac{a}{r} \sin f \cos^3 f\right)_i = 0$$

$$\left(\frac{a}{r} \sin^2 f \cos f\right)_i = \frac{1}{8} \frac{e}{1-e^2}$$

$$\left(\frac{a}{r} \sin^2 f \cos^2 f\right)_i = \frac{1}{8} \frac{1}{1-e^2}$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E\right)_i = \frac{e}{1-e^2}$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E \cos f\right)_i = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^2}{1-e^2}\right)$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E \cos^2 f\right)_i = \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2}$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E \cos^3 f\right)_i = \frac{3}{8} \left(1 + \frac{e^2}{1-e^2}\right)$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E \sin f \cos f\right)_i = 0$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E \sin f \cos^2 f\right)_i = 0$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2\right\}_i = \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right)$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos f\right\}_i = \frac{e}{(1-e^2)^2}$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos^2 f\right\}_i = \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} e^2\right)$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos^3 f\right\}_i = \frac{3}{4} \frac{e}{(1-e^2)^2}$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin f \cos f\right\}_i = 0$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin f \cos^2 f\right\}_i = 0$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin f\right)_i = 0$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos f\right)_i = (1-e^2) \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{8} e^2\right) e$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos^2 f\right)_i = (1-e^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} e^2\right)$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos^3 f\right)_i = (1-e^2) \left(-\frac{3}{8} - \frac{5}{16} e^2\right) e$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos^4 f\right)_i = (1-e^2) \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{16} e^2\right)$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin f \cos f\right)_i = 0$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin f \cos^2 f\right)_i = 0$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin f \cos^3 f\right)_i = 0$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin^2 f \cos f\right)_i = (1-e^2) \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{16} e^2\right) e$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin^2 f \cos^2 f\right)_i = (1-e^2) \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} e^2\right)$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos E\right)_i = 0$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos E \cos f\right)_i = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} e^2\right)$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos E \cos^2 f\right)_i = \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} e^2\right) e$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos E \cos^3 f\right)_i = \frac{3}{8} \sqrt{1-e^2}$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos E \sin f \cos f\right)_i = 0$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos E \sin f \cos^2 f\right)_i = 0$$

$$\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f\right\}_i = 0$$

$$\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f \cos f\right\}_i = 0$$

$$\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f \cos^2 f\right\}_i = 0$$

$$\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f \cos^3 f\right\}_i = 0$$

$$\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 f \cos f\right\}_i = \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{23}{4} - 4 e^2\right) e$$

$$\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 f \cos^2 f\right\}_i = (1-e^2)^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{16} e^2\right)$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos^2(\omega+f) \right\}_i = \frac{1}{2} \sqrt{1-e^2} + \frac{3}{8} (1-e^2)^2 e^2 \cos 2\omega$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin(\omega+f) \cos(\omega+f) \right\}_i = \frac{3}{8} (1-e^2)^2 e^2 \sin 2\omega$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos f \cos^2(\omega+f) \right\}_i = \frac{1}{2} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} + \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{17}{4} - \frac{27}{8} e^2 \right) e \cos 2\omega$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos^2 f \cos^2(\omega+f) \right\}_i = \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{16} e^2 \right) + \sqrt{1-e^2} \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{16} e^2 \right) \cos 2\omega$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos^3 f \cos^2(\omega+f) \right\}_i = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{16} e^2 \right) e + (1-e^2) \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{32} e^2 \right) e \cos 2\omega$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos f \sin(\omega+f) \cos(\omega+f) \right\}_i = \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{8} e^2 \right) e \sin 2\omega$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos^2 f \sin(\omega+f) \cos(\omega+f) \right\}_i = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{16} e^2 \right) \sin 2\omega$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos^3 f \sin(\omega+f) \cos(\omega+f) \right\}_i = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{32} e^2 \right) e \sin 2\omega$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin f \cos f \cos^2(\omega+f) \right\}_i = \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{8} e^2 \right) \sin 2\omega$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin f \cos^2 f \cos^2(\omega+f) \right\}_i = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{5}{8} - \frac{5}{32} e^2 \right) e \sin 2\omega$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin f \cos f \sin(\omega+f) \cos(\omega+f) \right\}_i = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8} e^2 \right) \cos 2\omega$$

$$\left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin f \cos^2 f \sin(\omega+f) \cos(\omega+f) \right\}_i$$

$$= \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{5}{8} + \frac{5}{32} e^2 \right) e \cos 2\omega \quad (6.5)$$

この T_{ri} を用い, $\sigma_m T_{ri}$ を次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m T_{ri} &= G_{se} + G_{lp} \\ G_{se} &= G_{se}(a, e, i) \\ G_{lp} &= G_{lp}(a, e, i, \omega) \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

そうすれば次のようになる。

$$\rho F_A \sigma_m T_r = \rho F_A G_{se} + \rho F_A G_{lp} + \rho F_A \sigma_m T_{rd} \quad (6.7)$$

この右辺の第三項はほぼ短周期的な変化をするのみなされ, これに基づく軌道要素の変化の大きさは比較的小さい。そこでこの項を(6.3')において無視することにする。以上のようにして(6.3')から求めた軌道要素の変化を二種に分類して次に示す。

6.1 軌道要素の長年変化および t の幂で表される長年変化

軌道要素の長年変化および t の幂で表される長年変化は次のようになる。ここで添字 $Aseps$ をつけて表すことにする。

$$\delta_1 a_{Aseps} = A_A F_q$$

$$A_A = -\sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \sqrt{a}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} e^2 \left\{ 1 - \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \right. \\ & + (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) \left\{ 1 - \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \right. \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i + \frac{1}{2} e^2 \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n} \right)^3 (1-e^2)^{\frac{9}{2}} \sin^2 i \cos i \\ & - \frac{3}{2} \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} e^2 \cos i \left. \right\} \\ & + \frac{1}{4} (1-e^2)^{-2} e^2 \left\{ 3 - 23 \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \\ & - \frac{\nu}{n} \cos i \left\{ 1 - \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i + \frac{1}{4} e^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\delta_1 e_{Aseps} = -\frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\left[\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2 - 2 \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right. \right. \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i + \frac{15}{16} e^2 \\ + \left(1 + \frac{7}{8} \frac{e^2}{1-e^2} \right) \left\{ 1 - 3 \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right. \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 (1+9 \cos^2 i) - \frac{1}{2} e^2 \} \\ \left. \left. - \frac{1}{16} e^2 \right\} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{n} e \cos i \left\{ 1 - \frac{\nu}{n} \left(5 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{11}{4} e^2 \right) (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \right\} F_q$$

$$\delta_1 i_{\text{Aseps}} = -\frac{1}{4} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\nu}{n} \frac{\sin i}{1-e^2}$$

$$\left[\sqrt{1-e^2} \left\{ 1 - \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i + \frac{7}{4} e^2$$

$$\left. + \frac{1}{16} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \left(6 + \frac{9}{2} e^2 \right) \sin^2 i \right\} F_q$$

$$\delta_1 \Omega_{\text{Aseps}} = 0$$

$$\delta_1 \omega_{\text{Aseps}} = 0$$

$$\delta_1 \chi_{\text{Aseps}}^* = 0$$

$$F_q = \sum_{k=0}^q C_k I_k$$

$$I_k = G_p(k, t + \delta t) - G_p(k, t)$$

$$G_p(k, t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

(6.1.1)

6.2 軌道要素の長周期変化および混合長年変化

軌道要素の長周期変化および混合長年変化は次のようになる。ここで添字 Alpmms をつけて表すことにする。

$$\delta_1 a_{\text{Alpmms}} = 0$$

$$\delta_1 e_{\text{Alpmms}} = \frac{1}{16} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^{\frac{5}{2}} e \sin^2 i \\ \left\{ 2 - 3(1-e^2)^{-2} F_{qc}(2\omega) \right.$$

$$\left. \delta_1 i_{\text{Alpmms}} = \frac{1}{16} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\nu}{n} \frac{1}{1-e^2} \sin i \right.$$

$$\left[\left\{ \left(\frac{67}{2} - \frac{35}{4} e^2 \right) e^2 \right. \right. \\ + \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 \left(2 - \frac{33}{4} e^2 \right) \sin^2 i \} F_{qc}(2\omega) \\ \left. \left. - \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 \left(1 - \frac{31}{8} e^2 \right) \sin^2 i F_{qc}(4\omega) \right\} \right]$$

$$\delta_1 \Omega_{\text{Alpmms}} = \frac{7}{32} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\nu}{n} e^2 \\ \times \left(1 + \frac{9}{7} e^2 \right) F_{qs}(2\omega)$$

$$\delta_1 \omega_{\text{Alpmms}} = \frac{1}{32} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \\ \left\{ \left(\frac{\nu}{n} \right)^3 (45 - 121 e^2) \sin^2 i \cos i \right. \\ \left. - \frac{\nu}{n} e^2 (7 + 16 e^2) \cos i \right\} F_{qs}(2\omega)$$

$$\delta_1 \chi_{\text{Alpmms}}^* = -\frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \\ \left[\left(\frac{\nu}{n} \right)^3 \left(\frac{93}{32} - \frac{151}{64} e^2 \right) \sin^2 i \cos i \right. \\ + \frac{1}{16} \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 \left\{ 2 + \frac{7}{2} \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \\ \left. \times (1-e^2)^3 \sin^2 i \right\} F_{qs}(2\omega)$$

$$F_{qs}(\alpha) = \sum_{k=0}^q C_k \frac{I_{ks}(\alpha)}{I_{kc}}$$

$$I_{ks}(\alpha) = \frac{G_s}{G_c}(k, \alpha + \dot{\alpha} \delta t, \dot{\alpha}, t + \delta t) \\ - \frac{G_s}{G_c}(k, \alpha, \dot{\alpha}, t), \quad [\dot{\alpha} \neq 0, k=0],$$

$$\frac{G_s}{G_c}(k, \alpha, \dot{\alpha}, t) = \frac{k!}{\dot{\alpha}^{k+1}}$$

$$\left[\sum_{l=1}^{\left[\frac{k+1}{2} \right]} (-1)^{\left[\frac{k+1}{2} \right] + l} \frac{(\dot{\alpha} t)^{\frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1)}}{\left\{ \frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1) \right\}!} \sin^{\alpha} \cos^{\alpha} \right. \\ \left. + \sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2} \right]} (-1)^{\left[\frac{k}{2} \right] + l} \frac{(\dot{\alpha} t)^{\frac{1-(-1)^k}{2} + 2l}}{\left\{ \frac{1-(-1)^k}{2} + 2l \right\}!} (-)^{\cos \alpha} \sin^{\alpha} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \frac{I_{ks}}{I_{kc}}(\alpha) &= \frac{I_s}{I_c}(\alpha), [\dot{\alpha} \neq 0, k \neq 0], \\
 I_s(\alpha) &= -\frac{1}{\dot{\alpha}} \{ \cos(\alpha + \dot{\alpha} \delta t) - \cos \alpha \}, \\
 I_c(\alpha) &= \frac{1}{\dot{\alpha}} \{ \sin(\alpha + \dot{\alpha} \delta t) - \sin \alpha \}, \\
 \frac{I_{ks}}{I_{kc}}(\alpha) &= I_k \frac{\sin}{\cos} \alpha, [\dot{\alpha} = 0]
 \end{aligned}
 \tag{6.2.1}$$

ここで $[(k+1)/2]$, $[k/2]$ などは括弧内の数値の整数部分を表す。また 0^0 は 1 とする。

6.3 半長軸の変化による平均近点離角の変化

半長軸の変化による平均近点離角の変化率は次のようになる。ここで半長軸の変化に起因することを添字 δa をつけることによって表してある。

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{dM}{dt} \right)_{1, \delta a, A} &= -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \delta_1 a_A \\
 \delta_1 a_A &= \delta_1 a_{A \text{seps}} + \delta_1 a_{A \text{lpms}}
 \end{aligned} \right\} \tag{6.3.1}$$

半長軸の変化による平均近点離角の変化は(6.3.1)に(6.1.1), (6.2.1)などを用いて積分すれば求められる次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_1 M_{\delta a, A} &= -\frac{3}{2} \frac{n}{a} A_A F'_q \\
 F'_q &= \sum_{k=0}^q C_k I'_k \\
 I'_k &= G'_p(k, t + \delta t) - G'_p(k, t) - \{ G_p(k, t) \} \delta t \\
 G'_p(k, t) &= \frac{t^{k+2}}{(k+1)(k+2)}
 \end{aligned} \right\} \tag{6.3.2}$$

7. 軌道要素

軌道要素の変化は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \delta E l_k &= \delta_1 E l_{kA} \\
 \delta_1 E l_{kA} &= \delta_1 E l_{kA \text{seps}} + \delta_1 E l_{kA \text{lpms}}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

また平均近点離角の変化は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \delta M &= \delta \chi^* + n \delta t + \delta_1 M_{\delta a, A} \\
 \delta_1 M_{\delta a} &= \delta_1 M_{\delta a, A}
 \end{aligned} \right\} \tag{7.2}$$

運動決定の開始時を $t_{(1)}$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
 t_{(j)} &= t_{(1)} + \sum_{j=1}^{J-1} (\delta t)_{(j)} \\
 &= t_{(1)} + \Delta t
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

における軌道要素は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 E l_{k(j)} &= E l_{k(1)} + \sum_{j=1}^{J-1} (\delta E l_k)_{(j)} \\
 &= E l_{k(1)} + \Delta E l_k
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

また平均近点離角は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 M_{(j)} &= M_{(1)} + \sum_{j=1}^{J-1} (\delta M)_{(j)} \\
 &= M_{(1)} + \Delta M
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

8. 計 算

8.1 力学系

1972年1月31日にNASAによってESROの科学衛星HEOS 2号(1972-05A)が打上げられた。その打上げロケットの第二段(1972-05B)の軌道が落下に至るまでの約7年にわたって観測されている。²²⁾²³⁾そこでその落下の15日前からの運動に関する計算を行うことにする。

また前章までにおいて地球の重力 potential の中心項に基づく力と大気の抵抗以外の作用を考慮せずに理論をすすめてきたが、ここで R の一部分をも考慮することにする。このような部分として地球の重力 potential の harmonics R_E をとりあげる。

8.2 使用する式

第2章から第7章に至るまでの諸式を用いる。

以上に示された諸式以外のものとして、各種の時系における時刻は各種時系に関する諸式によって決定される。²⁴⁾ここで協定世界時を t_c とし、この時系において $t_{(1)}$, Δt に対応する量をそれぞれ $t_{c(1)}$, Δt_c とする。また R_E に基づく軌道要素の変化は次のようにして求められる。まず軌道要素の変化率を表す諸式をとる。²⁵⁾そしてこれから線型摂動の方法によって軌道要素の変化率において一次の摂動に基づく部分を導き出す。次にこれを積分すれば一次の摂動に基づく軌道要素の変化が求められる。これを $\delta_1 E l_{kE}$ とする。このとき軌道要素の変化は(7.1)で表されるが、その第一式は次のようになる。

$$\delta E l_k = \delta_1 E l_{kE} + \delta_1 E l_{kA} \quad (8.2.1)$$

なお同様にして求められる R_E に基づく半長軸の変化による平均近点離角の変化を $\delta_1 M_{\delta a, E}$ とする。このとき半長軸の変化による平均近点離角の変化は(7.2)で表されるが、その第二式は次のようになる。

$$\delta_1 M_{\delta a} = \delta_1 M_{\delta a, E} + \delta_1 M_{\delta a, A} \quad (8.2.2)$$

ここで軌道要素の変化率を表す式における軌道要素に対してさらにその変化率を考える場合には主問題における長年的な変化のみをとることとする。次に人工衛星の直交座標と赤経は軌道要素から求められ、²⁸⁾ これらを用いて測地学的緯度および高度がきめられる。²⁷⁾

8.3 運動を決定する計算

8.3.1 与えられる諸量

(1) 構成項数

(4.2)における q は $20 \geq q \geq 1$ として計算できるようにしてあるが、ここでは20とする。また軌道要素の変化を表す式における構成項数は任意にとりうる。しかしここでは次のようにする。地球の重力 potential の harmonics の長年、長周期および短周期の各項のそれぞれにおいて4次までをとる。またこの harmonics を展開した場合の離心率関数においてとる離心率の冪指数の最大値を2とする。

(2) 時刻

運動決定の開始時を1978年9月12日 0^hUTCとする。

(3) 軌道要素

運動決定の開始時 $t_{c(1)}$ における軌道要素を表1のようにする。

(4) 天文学的定数

次の諸量をとる。

a_e : 地球の赤道半径

f' : 地球の扁率

$J_{l,m}$: 地球の重力 potential の定数

$\lambda_{l,m}$: 地球の重力 potential の定数

そして以上の諸量と μ , ν の値を表2のようにする。^{28) 29) 30)}

(5) 地球物理学的量

次の諸量をとる。

$F_{10.7}$: 太陽の10.7 cm電波強度を $10^{-22} \cdot W \cdot cm^{-2}$.

Hz^{-1} を単位として表した数値

$\bar{F}_{10.7}$: 太陽が三回転する間の $F_{10.7}$ の平均値

表1 $t_{c(1)}$ における軌道要素

$a_{(1)}$	km	6659.372411
$e_{(1)}$		0.0072336
$i_{(1)}$	deg	89.73715
$\Omega_{(1)}$	deg	18.67815
$\omega_{(1)}$	deg	9.663
$\chi_{(1)}^*$	deg	90.663

表2 天文学的定数

μ	km^3/s^2	398600.5
a_e	km	6378.140
f'		¹ 298.256
ν	rad/s	$0.7292115085 \times 10^{-4}$
$J_{2.0}$		-1.082637×10^{-3}
$J_{2.1}$		0
$J_{2.2}$		1.7711×10^{-6}
$J_{3.0}$		2.541×10^{-6}
$J_{3.1}$		2.1712×10^{-8}
$J_{3.2}$		3.7041×10^{-7}
$J_{3.3}$		2.2380×10^{-7}
$J_{4.0}$		1.618×10^{-6}
$J_{4.1}$		6.7225×10^{-7}
$J_{4.2}$		1.6865×10^{-7}
$J_{4.3}$		6.2499×10^{-7}
$J_{4.4}$		7.8553×10^{-7}
$\lambda_{2.1}$	deg	0
$\lambda_{2.2}$	deg	-14.924
$\lambda_{3.1}$	deg	6.3799
$\lambda_{3.2}$	deg	-22.069
$\lambda_{3.3}$	deg	24.073
$\lambda_{4.1}$	deg	223.09
$\lambda_{4.2}$	deg	31.477
$\lambda_{4.3}$	deg	-2.1821
$\lambda_{4.4}$	deg	161.6061

K_p : 3 hour geomagnetic planetary index
 $F_{10.7}$ および K_p の数値として, 1978 年 9 月における³¹⁾
 値から求めた運動決定の期間内の平均値をとれば次のようになる。

$$F_{10.7} = 154.90$$

$$K_p = 2.29$$

また $\bar{F}_{10.7}$ は $F_{10.7}$ に等しいとしておく。

(6) 人工衛星の物理学的特性

$C_D A/m$ を運動決定の期間内において一定値をとるとして次のようにする。

$$C_D \frac{A}{m} = 1.45 \times 10^{-8} \frac{\text{km}^2}{\text{kg}}$$

(7) 積分区間の幅と運動決定の期間

積分区間の幅 δt として $t_{(1)}$ における軌道運動の周期 $T_{o(1)}$ をとり, 次のようにする。

$$\delta t = T_{o(1)} = 0.0625960205 \text{ day}$$

また運動決定の期間 Δt_M を次のようにする。

$$\Delta t_M = 16.5 \text{ day}$$

ただし人工衛星の高度の計算値が 90 km 以下となれば計算を終了させることにする。

8.3.2 計算の実行と結果

以上のようにして計算する。

その計算の結果を図 1 から図 6 までに示す。これらの図においては Δt を横軸にとり, また $\Delta E l_k$ および ΔM の諸量を縦軸にとって示す諸点が表示されている。

9. 考 察

地球の人工衛星の運動に対する大気の影響における軌道要素に対する一次の摂動が第 7 章までの所論によって求められた。ここで人工衛星の運動を一般摂動法を用いて決定するこれまでの諸理論を振り返れば, この大気の影響に関する理論は最も扱いにくいものとされている。その理由は力学系の構成および摂動加速度の表示を現実即して行うことが困難なことにある。このことに関して本理論においては, 大気の扁平, 地球と共に行う大気の回転, Jacchia の 1971 年の大気模型に基づく大気の密度の解析的表示の再表現, 大気に対する人工衛星の相対速度の表示式における微小量までの考慮など

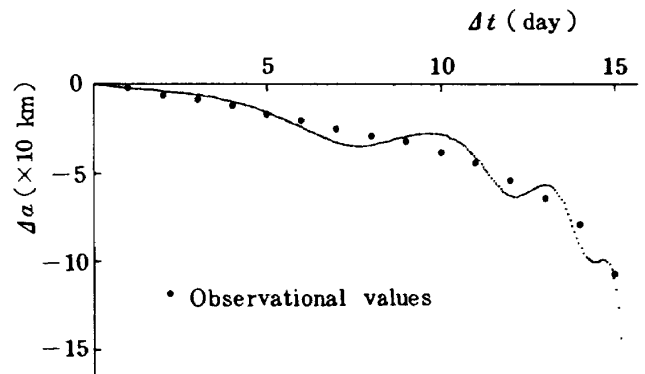


図 1 Δt と Δa との関係

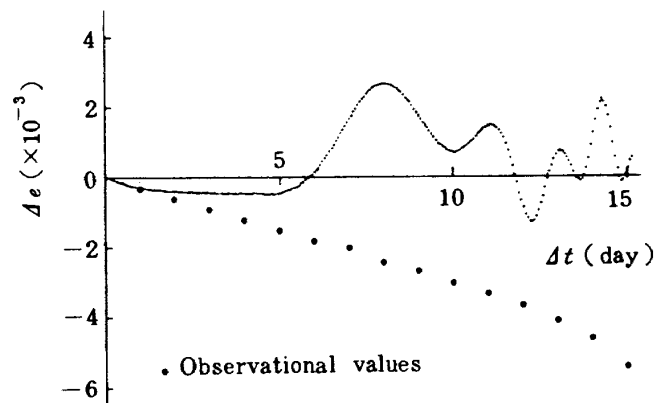


図 2 Δt と Δe との関係

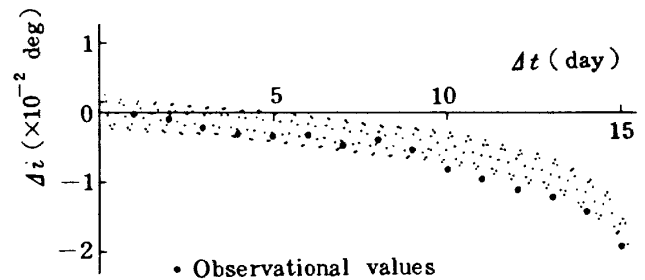


図 3 Δt と Δi との関係

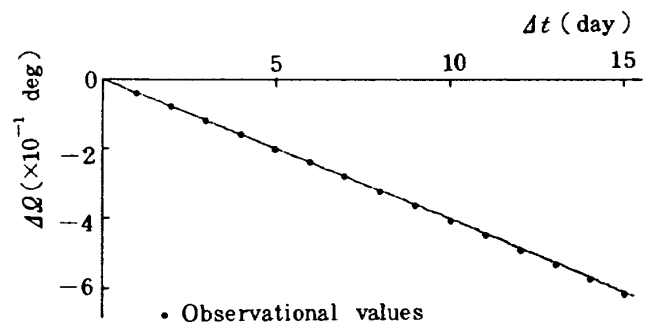
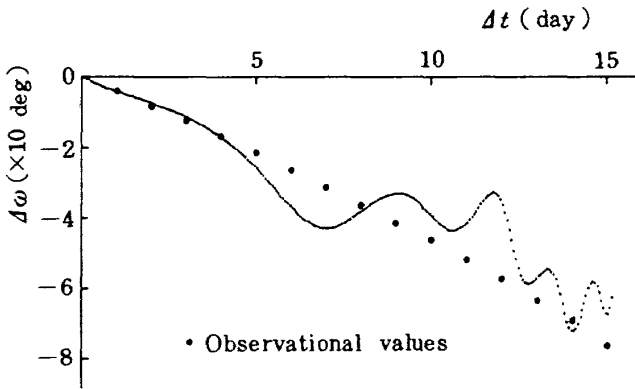
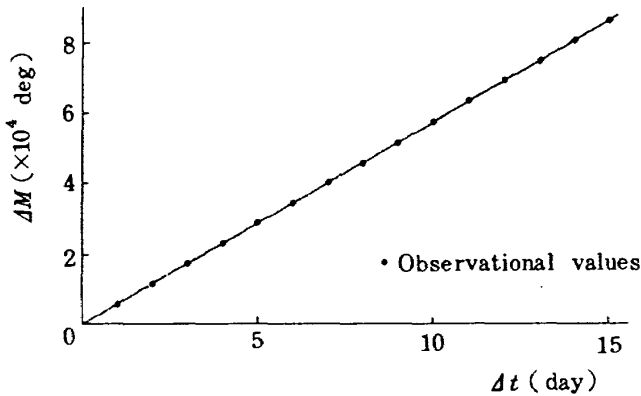


図 4 Δt と ΔQ との関係

図5 Δt と $\Delta\omega$ との関係図6 Δt と ΔM との関係

を取り入れた。そして従来的一般摂動法に基づいた諸理論よりも一層の精確化を期した。またこれと共に計算時間の短縮をもめざした。しかし人工衛星の運動に対する大気の影響に関する問題の複雑さに対しては、一次の摂動理論の範囲内においてすらまだ十分に対応できず、次の諸点において今後の改良を要する。まず最も主要な点は大気密度であり、さらに良好な大気モデルを用い、その解析的表示による密度を精確に再表現することが必要である。次に重要な点は抵抗係数と断面積であり、これらを軌道運動中の実際に対応して表示することも必要である。また超高層大気中の風に対する考慮も要する。なお、人工衛星の、現在以後における運動の決定を行う場合には地球物理学的量の予報値を要する。ただし本研究においてはこれにふれることなく、信頼するに足る予報値が得られるものとしておく。

次に本理論によって行われた第8章の計算について考える。計算に際して第8.3.1節の(2)から(5)まで

において諸量のとり値は観測に基づくものである。しかし(6)においては $C_D A/m$ の実際の数値が不明である。そこでこれまでに人工衛星に関してとられた $C_D A/m$ の数値を参考にいくつかのものをもって計算し、その内の一つをここに示してある。このように $C_D A/m$ の数値を運動決定の期間にわたって一定とすればこの量に平均的な値を与えたことになる。また(7)において δt は、大気密度の再表現が可及的に精確に行われる限りにおいて、任意にとりうるが、ここでは軌道運動の一周期とした。

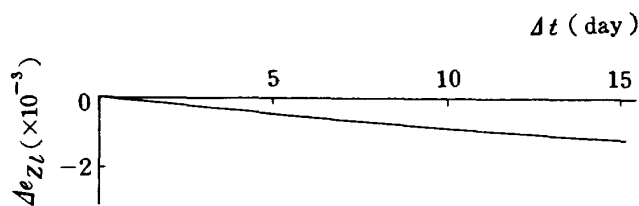
さらに次いで第8.3.2節の計算の結果を調べてみる。 Δa , Δi , ΔQ および $\Delta\omega$ が図1, 3, 4 および 5 にそれぞれ示されている。これらは観測による値と大体において一致するとみなしうる。しかし図2に示される Δe は運動決定の期間の全体にわたってみれば減少の傾向にあるが、観測による値はさらにこの傾向が強い。しかしこれは、計算値と観測による値の差異の全容を示すものではない。これを以下に示す。重力 potential の zonal harmonics に基づく摂動の内の長周期項、短周期項、non-zonal harmonics に基づく摂動の内の resonance 状態にある項、その他の項などであることをそれぞれ添字の Z_I, Z_S, N_r, N などで示す。そうすれば次のようになる。

$$\delta_1 e_E = \delta_1 e_{Z_I} + \delta_1 e_{Z_S} + \delta_1 e_{N_r} + \delta_1 e_N \quad (9.1)$$

$\delta_1 e_{N_r}$ および $\delta_1 e_N$ はその大きさが小さいので無視すれば、(7.4), (8.2.1) および (9.1) から次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta e &= \Delta e_{Z_I} + \Delta e_{Z_S} + \Delta e_A \\ \Delta e_{Z_I} &= \sum_{j=1}^{J-1} (\delta_1 e_{Z_I})_{(j)} \\ \Delta e_{Z_S} &= \sum_{j=1}^{J-1} (\delta_1 e_{Z_S})_{(j)} \\ \Delta e_A &= \sum_{j=1}^{J-1} (\delta_1 e_A)_{(j)} \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

ここで Δt の各値における Δe_{Z_I} を計算すれば図7のようになる。また Δt の各値における Δe_{Z_S} を計算すれば軌道運動の一周期間に、この周期およびこの $1/3$ の周期をもつ二種の短周期摂動が表われ、この振れの大きさは 3×10^{-3} の程度となる。それから Δt の各値における Δe_A の値の大きさは非常に小さい。し

図7 Δt と Δe_{zl} との関係

たがって Δt と Δe の関係は図7の曲線をはさんで、軌道運動の一周期毎に、縦軸方向に正負の向きに 1.5×10^{-3} の程度に振れる連続曲線で示される。そしてこの連続曲線上に横軸方向に $T_{(1)}$ の間隔にとられた諸点を図3は示すに過ぎない。故に Δt と Δe の関係の全容を示す連続曲線の大部分は図3に示される諸点よりも縦軸の負の向きに存在することになる。しかしこのような状態であるにしても計算値と観測による値との間にはなお幾分の差異があることにはなる。また図6に示される ΔM は観測による値とはほぼ一致するように見えるが、約0.1%の差異がある。以上によれば Δa および Δe 、したがって人工衛星の寿命の予測を行うことができるとしても ΔM 、したがってその軌道上における位置を正確に予測することは容易ではない。本理論は一般摂動理論ではあるが、その実態は特別摂動理論の進め方をとっている。そしてまた理論の構成を可及的に精確なものとしている。したがって従来の一般摂動理論による人工衛星の運動決定に比べて一層精確な運動決定を行うことができる。しかしこのような理論を以てしても落下の直前の人工衛星の運動の決定は、以上の計算結果に示されるように、まだ完全であるとはできない。

10. 結 論

地球の人工衛星の運動に対する大気の影響を考究するために、力学系における外力として地球の重力 potential の中心項に基づく力と大気の抵抗のみをとり、Lagrange 形の運動方程式を用いて、一次の摂動を線形摂動の方法によって求めた。

大気は地球と共に回転するとし、また人工衛星の高度は汎世界回転楕円体の法線によって規定されると考える。

人工衛星の存在する位置における大気の密度は時刻の関数であり、多項式によって表示されるものと

する。またこの多項式における係数には多数の密度の値を用いて最小二乗近似の方法によって決定された値を用いる。そしてこの密度の値には Jacchia の 1971 年の大気模型に基づいて解析的表示から求められるものとする。なおこの場合に人工衛星の存在する位置は、接触軌道要素に地球の重力 potential の harmonics に基づく摂動のみを加えて得られる軌道要素から求めることにする。

人工衛星の大気に相対的な速度を表す式を、軌道の離心率、地球の回転ベクトルの大きさと人工衛星の平均運動の比などの三乗までを考慮して表示した。

軌道要素における摂動を長年項、長周期項、混合長年項などに分けて求めた。

本理論は一般摂動理論ではあるが、特別摂動理論の進め方をとっている。したがって従来の一般摂動理論による人工衛星の運動決定に比べて、一層精確な運動の決定を行うことができる。

本研究を行うに当りこれに対して助言をされた当研究所の松島弘一主任研究官および助力をして頂いた白百合女子大学学生山口敬子嬢に対してここに謝意を表明する。

引 用 文 献

- 1) B. Billik; Survey of Current Literature on Satellite Lifetimes, ARS Journal(1962/11) pp. 1641-1650.
- 2) J. de Lafontaine; A Review of Satellite Lifetime and Orbit Decay Prediction, UTIAS Review, No. 43 (1980).
- 3) T.E. Sterne; An Atmospheric Model and Some Remarks on the Inference of Density from the Orbit of a Close Earth Satellite, Astronom. J., Vol. 63, No. 3 (1958) pp. 81-87.
- 4) T.E. Sterne; Development of Some General Theories of the Orbits of Artificial Earth Satellite, Astronom. J., Vol. 63, No. 1264 (1958) pp. 424-426.
- 5) T.E. Sterne; Effect of the Rotation of a Planetary Atmosphere upon the Orbit of

- a Close Satellite, ARS Journal (1959/10) pp. 777-782.
- 6) G.E.Cook & R.N.A. Plimmer ; The Effect of Atmospheric Rotation on the Orbital Plane of a Near-Earth Satellite, Proc. Roy. Soc., Vol. 258A (1960) pp. 516-528.
 - 7) G.E.Cook ; Effect of an Oblate Rotating Atmosphere on the Orientation of a Satellite Orbit, Proc. Roy. Soc., Vol. 261A (1961) pp. 246-258.
 - 8) G.E.Cook, D.G.King-Hele & D.M.C. Walker ; The Contraction of Satellite Orbits under the Influence of Air Drag I. With Spherically Symmetrical Atmosphere, Proc. Roy. Soc., Vol. 257A (1960) pp. 224-249.
 - 9) G.E.Cook, D.G.King-Hele & D.M.C. Walker ; The Contraction of Satellite Orbits under the Influence of Air Drag II. With Oblate Atmosphere, Proc. Roy. Soc., Vol. 264A (1961) pp. 88-121.
 - 10) D.G.King-Hele ; The Contraction of Satellite Orbits under the Influence of Air Drag III. High-Eccentricity Orbits ($0.2 \leq e < 1$), Proc. Roy. Soc., Vol. 267A (1962) pp. 541-557.
 - 11) G.E.Cook & D.G.King-Hele ; The Contraction of Satellite Orbits under the Influence of Air Drag IV. With Scale Height Dependent on Altitude, Proc. Roy. Soc., No. 275A (1963) pp. 357-390.
 - 12) D.G.King-Hele ; Theory of Satellite Orbits in an Atmosphere (1964) Butterworths.
 - 13) G.E.Cook & D.G.King-Hele ; The Contraction of Satellite Orbits under the Influence of Air Drag V. With Day-to-Night Variation in Air Density, Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 259 (1965) pp. 33-67.
 - 14) G.E.Cook & D.G.King-Hele ; The Contraction of Satellite Orbits under the Influence of Air Drag VI. Near-Circular Orbits with Day-to-Night Variation in Air Density, Proc. Roy. Soc., Vol. 303A (1968) pp. 17-35.
 - 15) F.A.Santra ; Satellite Drag Perturbations in an Oblate Diurnal Atmosphere, AIAA J., Vol. 13, No.9 (1975) pp. 1212-1216.
 - 16) E.A.Santra ; Drag Perturbations of Near-Circular Orbits in an Oblate Diurnal Atmosphere, AIAA J., Vol. 14, No.9 (1976) pp. 1196-1200.
 - 17) R.Holdaway ; Satellite Ephemeris Prediction and Orbit Maneuverability by Low Thrust, AIAA P., 75-355 (1975).
 - 18) J.de Lafontaine ; Orbital Decay in a Dynamic Atmosphere, UTIAS Rep., No.244 (1979).
 - 19) B.F.Barry, R.S.Pimm & C.K.Rowe ; Techniques of Orbital Decay and Long Term Ephemeris Prediction for Satellites in Earth Orbit, NASA-CR-121053 (1971).
 - 20) 武内澄夫 ; 地球の人工衛星の赤道系軌道要素に対する赤道面の運動の影響, 日本航空宇宙学会誌, Vol. 30, No.339 (1982) pp. 191-198.
 - 21) 武内澄夫 ; Jacchia の 1971 年の大気模型に基づいた超高層大気の密度の解析的表示, 航技研報告 TR-541 (1978).
 - 22) P.Moore & D.Holland ; Analysis of the Orbital Inclination of Heos 2 Second-Stage Rocket 1972-05B, J. of Bri. Interpla. Soc., Vol. 35 (1982) pp. 368-379.
 - 23) H.Hiller ; The Orbit of 1972-05B in its Final Phase, with Geophysical Inferences, Planet. Space Sci., Vol. 29, No. 5 (1981) pp. 579-588.
 - 24) 松島弘一 ; 衛星運動のシミュレーションシステムにおける世界時の予測, 航技研報告 TR-430 (1975).
 - 25) 武内澄夫 ; 地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究, 航技研報告 TR-320

- (1973).
- 26) D.Brouwer & G.M.Clemence; Methods of Celestial Mechanics (1961) Academic Press.
- 27) 原田健久; 準拠回転楕円体, 建設省国土地理院資料 (昭和50).
- 28) 青木信仰; IAU (1976) 天文定数系について(II), 天文月報, Vol.70 (1977/5) pp.122-127.
- 29) E.M.Gaposchkin(ed.); 1973 Smithsonian Standard Earth (III), SAO Special Report, 353 (1973).
- 30) 松島弘一, その他; 宇宙飛行体の汎用軌道解析用プログラム“STANPS”(I) 人工衛星および惑星間宇宙船の軌道生成プログラム, 航技研資料 TM-359 (1978).
- 31) J.V.Lincoln(ed.); Geomagnetic and Solar Data, J. of Geophysical Research, Vol.84, No. A1 (1979).

航空宇宙技術研究所報告748号

昭和57年12月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊦182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山5-6-17
