

ISSN 0389-4010
UDC 533.6.01.5:
533.6.013.12

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-752

二物体相互干渉の近似推算法
(法線力, 横力)

近藤洋史

1983年3月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

二物体相互干渉の近似推算法 (法線力, 横力)*

近藤 洋史**

An Approximate method of Estimating The Aerodynamic Interference between Two parallel Bodies (Normal Force and Side Force)

Hirofumi Kondo

Abstract

The present study deals with an approximate method of estimating the aerodynamic interference between two parallel bodies.

Formulae are derived from the slender body theory.

The formulae for calculating the normal force and side force on one body are obtained as functions of the bank angle and the relative distances between bodies.

The results of the calculation are compared with those from wind tunnel tests and fairly good agreement is obtained in some restricted region.

It is pointed out that the present method can easily be extended to a combination of more than two bodies.

1. まえがき

宇宙開発事業団が開発したN-IIロケットに見られる如く推力増強の為主胴体回りに9本の固体補助ロケットが取り付けられた形態について、固体補助ロケット部の空力特性を推定する場合、相互に干渉するため単体の空力特性の和として多数本の場合の空力特性を与えることは出来ない。しかし、相互の干渉力は近接したもの同志の影響が大であると考えられるので、ここでは二物体について迎え角を取った時の法線力および横力の干渉量を推算する式を解析

的手法で導びく事を考えた。

先端の尖った細長い軸対称物体が2体平行に近接して置かれ主流に対し迎え角を取っている場合、その法線力および横力は相互に干渉し単体での状況とはかなり異なってくる。そこで、その空力的干渉力を推算することを考える。

推算式を求めるに当って、我々はパラメータの変化に対し、それが求める空力的干渉量へ寄与する割合を見通し易い形にするため、解析的手法で問題を扱うことを考えた。

非粘性、非回転、微小擾乱および細長体の仮定をした細長体理論を基にして次の如く扱った。擾乱速度ポテンシャルを軸流と横断流とに依るものに分け、軸流に対しては各物体を単体でそれぞれの境界条件

* 昭和58年1月21日 受付

** 空気力学第二部

を満足させるその中心軸上に分布された吹出しで代表させ、また、横断流に対してはダブレットで代表させ、求める物体に働く他方の物体の干渉力は他方の物体を代表する吹出し又はダブレットに対する鏡像を考えることに依り、求める物体上で境界条件を満足する近似的な擾乱速度ポテンシャルを求めることにより導びいた。これらの擾乱速度ポテンシャルを基に、物体表面上での圧力係数ならびに物体に働く法線力および横力を求める推算式を導びいた。

その結果を頂角 20° 、 25° 、 30° の円錐-円筒物体について実験した結果と比較し、物体が極く近接して置かれている時は実験値と推算値には乖離が見られたが、ある程度2物体が離れた状態ではかなり良く両者が一致することが分った。

2. 記号

- a ; 二物体の中心軸間距離
- c_B ; 物体後端部半径
- C_{Na} ; 法線力係数傾斜
- C_P ; 圧力係数
- $c(x)$; 物体半径
- c_1, c_2 ; 二物体のそれぞれの半径
- K_N ; $=(dN_{c_1(c_2)}/d\alpha)/(dN/d\alpha)_{c_1}$ 単体
- K_Y ; $=(dY_{c_1(c_2)}/d\alpha)/(dN/d\alpha)_{c_1}$ 単体
- K_1, K_2 ; (65), (66)式および(87), (88)式参照
- L ; 物体長
- m, m_1, m_2 ; 各物体を代表する吹出しの強さ
- M, M_1, M_2 ; 各物体を代表するダブレットの強さ
- N ; 法線力 (迎角変角面で物体軸に垂直な方向に働く力で上方を正とする)

- $N_{c_1(c_2)}$; c_2 物体が c_1 物体に及ぼす法線力の干渉成分
- q ; 一様流動圧
- r, θ ; 円筒座標系
- t ; $= a/c_B$
- U ; 一様流速度
- x, y, z ; 物体軸を x 軸とした直角座標系
- Y ; 横力 (迎角変角面に垂直な方向に働く力で右方を正とする)
- $Y_{c_1(c_2)}$; c_2 物体が c_1 物体に及ぼす横力の干渉成分
- α ; 迎え角
- ξ, η, ζ ; 一様流方向を ξ 軸とした直角座標系
- ϕ ; c_2 物体の中心と原点を結ぶ直線が y 軸の負方向の軸となす角
- Φ ; 速度ポテンシャル
- φ ; 擾乱速度ポテンシャル
- φ_1 ; 軸流に依る擾乱速度ポテンシャル
- φ_2 ; 横断流に依る擾乱速度ポテンシャル

3. 推算式の導出

3.1 一般的考察

図1の様に、細長い物体が一様流 U に対し微小迎角 α を取って置かれている場合を以下の議論の基礎となるので復習する。

座標軸は図に示す様に、物体先端を原点として物体軸を x 軸に、迎角変角面が $x-y$ 面となるように y, z 軸を取った直角座標 (x, y, z) と ξ 軸が主流と一致する様に y 軸の回りに反時計回りに α だけ回転して得られる直角座標 (ξ, η, ζ) を定める。

一様流速度 U を x 軸方向成分 (軸流; $U \cos \alpha$) と

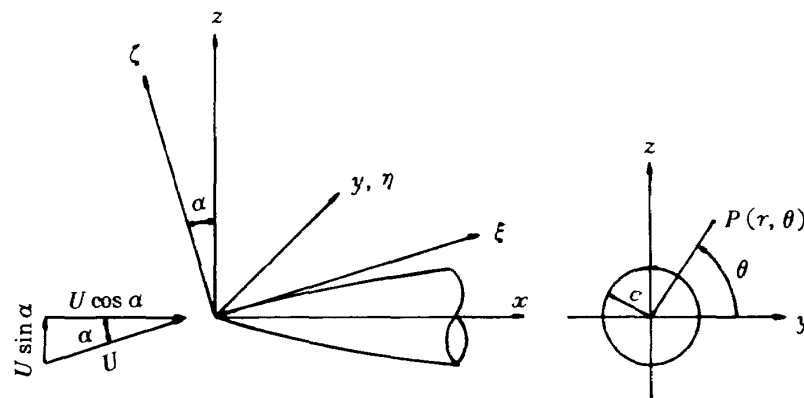


図1 座標軸系

z 軸方向成分 (横断流; $U \sin \alpha$) に分け, 非粘性, 非回転の仮定をすれば, 物体まわりの速度ポテンシャル Φ は,

$$\Phi = U \cos \alpha \cdot x + U \sin \alpha \cdot z + \varphi(x, y, z) \quad (1)$$

で与えられる。ここに, φ は擾乱速度ポテンシャルである。

微小擾乱の仮定をすれば, 擾乱速度ポテンシャルの方程式は線型となり, さらに細長物体の仮定をすれば, 2次元のラプラス方程式となる^{1), 2)}

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad (2)$$

ここで, 擾乱速度ポテンシャルを軸流および横断流による擾乱速度ポテンシャル φ_1 および φ_2 に分ければ, 重ね合せの理により

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (3)$$

(3) 式を (2) 式に代入し, 次の如く分離する。

$$\varphi_{1yy} + \varphi_{1zz} = 0 \quad (4)$$

$$\varphi_{2yy} + \varphi_{2zz} = 0 \quad (5)$$

流れが物体に沿って流れることおよび無限遠で擾乱が消失するという境界条件のもとに (4), (5) 式を解くことを考える。

その前に物体近傍での圧力係数について考察する。圧力係数 C_p は一様流 U に平行に ξ 軸を取った直角座標 (ξ, η, ζ) に対し次式で与えられる。

$$C_p = -2\varphi_\xi / U - (\varphi_\eta^2 + \varphi_\zeta^2) / U^2 \quad (6)$$

(6) 式を物体軸を x 軸に取った円筒座標 (x, r, θ) に変換すれば,

$$C_p = -\frac{2}{U} \varphi_x - \frac{2\alpha}{U} \cdot \left(\varphi_r \sin \theta + \frac{\varphi_\theta \cos \theta}{r} \right) - \frac{1}{U^2} \cdot \left(\varphi_r^2 + \frac{\varphi_\theta^2}{r^2} \right) \quad (7)$$

ただし, (7) 式を導びくに当っては, α を微小量として α の 2 次以上は省略し $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$ とした。

(7) 式に (3) 式を代入すると,

$$C_p = -\frac{2}{U} \cdot (\varphi_{1x} + \varphi_{2x}) - \frac{2\alpha \sin \theta}{U} (\varphi_{1r} + \varphi_{2r}) - \frac{2\alpha \cos \theta}{U r} \cdot (\varphi_{1\theta} + \varphi_{2\theta}) - \frac{1}{U^2} \cdot (\varphi_{1r} + \varphi_{2r})^2 - \frac{1}{U^2 r^2} (\varphi_{1\theta} + \varphi_{2\theta})^2 \quad (8)$$

物体表面上 ($r = c(x)$) の圧力係数 (C_p) _{$r=c$} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} (C_p)_{r=c} = & -\frac{2}{U} (\varphi_{1x})_{r=c} - \frac{1}{U^2} (\varphi_{1r})_{r=c}^2 \\ & - \frac{1}{U^2 c^2} (\varphi_{1\theta})_{r=c}^2 - \frac{2}{U} \cdot (\varphi_{2x})_{r=c} \\ & - \frac{2\alpha \sin \theta}{U} (\varphi_{1r})_{r=c} - \frac{2\alpha \cos \theta}{U c} \cdot (\varphi_{1\theta})_{r=c} \\ & - \frac{2}{U^2} \cdot (\varphi_{1r})_{r=c} \cdot (\varphi_{2r})_{r=c} \\ & - \frac{2}{U^2 c^2} \cdot (\varphi_{1\theta})_{r=c} \cdot (\varphi_{2\theta})_{r=c} - \frac{2\alpha \sin \theta}{U} \cdot (\varphi_{2r})_{r=c} \\ & - \frac{2\alpha \cos \theta}{U c} \cdot (\varphi_{2\theta})_{r=c} - \frac{1}{U^2} \cdot (\varphi_{2r})_{r=c}^2 \\ & - \frac{1}{U^2 c^2} \cdot (\varphi_{2\theta})_{r=c}^2 \quad (9) \end{aligned}$$

(9) 式の右辺に於て, 1 項から 3 項までは α に対し 0 次の項であり, 4 項から 8 項までが α に対し 1 次の項となり, 9 項から 12 項までは α に対し 2 次の項となっている。 α は微小量を仮定しているため, (9) 式の 9 項以下は 2 次の微小量となるので省略し, 物体表面上の圧力係数 (C_p) _{$r=c$} は次式を採用する。

$$\begin{aligned} (C_p)_{r=c} = & -\frac{2}{U} \cdot (\varphi_{1x})_{r=c} - \frac{1}{U^2} \cdot (\varphi_{1r})_{r=c}^2 \\ & - \frac{1}{U^2 c^2} \cdot (\varphi_{1\theta})_{r=c}^2 - \frac{2}{U} \cdot (\varphi_{2x})_{r=c} - \frac{2\alpha \sin \theta}{U} \cdot (\varphi_{1r})_{r=c} \\ & - \frac{2\alpha \cos \theta}{U c} \cdot (\varphi_{1\theta})_{r=c} - \frac{2}{U^2} \cdot (\varphi_{1r})_{r=c} \cdot (\varphi_{2r})_{r=c} \\ & - \frac{2}{U^2 c^2} \cdot (\varphi_{1\theta})_{r=c} \cdot (\varphi_{2\theta})_{r=c} \quad (10) \end{aligned}$$

さらに, 物体に働く法線力 N と横力 Y はそれぞれ (11) 式および (12) 式を基に計算される。

$$N = q \int_0^L c \, dx \int_0^{2\pi} (-C_p)_{r=c} \cdot \sin \theta \, d\theta \quad (11)$$

$$Y = q \int_0^L c \, dx \int_0^{2\pi} (-C_p)_{r=c} \cdot \cos \theta \cdot d\theta \quad (12)$$

ここに, q は一様流動圧, L は物体長である。

次に, 図 1 に示す如く c 物体が単体で置かれている場合の擾乱速度ポテンシャルを (4) 式と (5) 式を基に求める。

まず, (4) 式を解く事を考える。半径が $c(x)$ で

与えられる一つの軸対称物体の軸に平行に一様流 U が当たるときの擾乱速度ポテンシャルを求めるには、物体中心軸上に吹出し m を分布させればよく、それに依る擾乱速度ポテンシャルは次式で与えられる。

$$\varphi_1(\tau, \theta; x) = \frac{m}{2\pi} \cdot \ln r \quad (13)$$

吹出しお大きさ m は、流れが物体表面に沿って流れるという境界条件

$$(\varphi_{1r})_{r=c} / U = \frac{dc}{dx} \quad (14)$$

から求まる。即ち、(13)式と(14)式とから、

$$m = 2\pi U c \cdot \frac{dc}{dx} \quad (15)$$

従って、(4)式の解は(16)式の如くなる。

$$\varphi_1(\tau, \theta; x) = U c \cdot \frac{dc}{dx} \ln r \quad (16)$$

φ_1 の x, τ, θ についての物体表面上での微係数を求めると、

$$(\varphi_{1x})_{r=c} = U \cdot \left\{ \left(\frac{dc}{dx} \right)^2 + c \cdot \frac{d^2x}{dx^2} \right\} \ln c \quad (17)$$

$$(\varphi_{1r})_{r=c} = U \cdot \frac{dc}{dx} \quad (18)$$

$$(\varphi_{1\theta})_{r=c} = 0 \quad (19)$$

次に(5)式を解く。横断流 $U\alpha$ が z 軸の正の向きに流れているとき、半径 $c(x)$ の円柱に沿って流れると云う境界条件を満足する擾乱速度ポテンシャルを求めるためには、 z 軸の負の向きに大きさが M なるダブレットを置けば良く、それに依る擾乱速度ポテンシャルは(20)式の如く与えられる。

$$\varphi_2(\tau, \theta; x) = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \quad (20)$$

また、境界条件は(21)式の如く与えられる。

$$(\varphi_{2r})_{r=c} = -U\alpha \cdot \sin \theta \quad (21)$$

(20)式と(21)式から、ダブレットの大きさ M は(22)式となる。

$$M = 2\pi U \alpha c^2 \quad (22)$$

従って、(5)式の解は次の如く与えられる。

$$\varphi_2(\tau, \theta; x) = U\alpha \cdot c^2 \cdot \frac{\sin \theta}{r} \quad (23)$$

(23)式の x, r, θ 方向の物体表面上での微係数を求めると、

$$(\varphi_{2x})_{r=c} = 2U\alpha \cdot \frac{dc}{dx} \cdot \sin \theta \quad (24)$$

$$(\varphi_{2r})_{r=c} = -U\alpha \sin \theta \quad (25)$$

$$(\varphi_{2\theta})_{r=c} = U\alpha c \cdot \cos \theta \quad (26)$$

(10)式に(17), (18), (19), (24), (25), (26)式を代入し、物体表面上の圧力係数を求め、さらに、これを(11)式および(12)式に代入して法線力と横力を求めると、途中の経過は省くが、次の如くなる。

$$N = 2\pi q c_B^2 \alpha \quad (27)$$

$$Y = 0 \quad (28)$$

ここに、 c_B は物体後端部の半径である。

(27)式から物体後端部の断面積を基準にした法線力係数傾斜 $C_{N\alpha}$ を求めると、

$$C_{N\alpha} = N / (\pi c_B^2 \cdot q \cdot \alpha) = 2 \quad (1/\text{radian}) \quad (29)$$

となり、良く知られた細長体理論に依る結果が得られる。本結果はマッハ数に依らない(2)式を基にしているの、亜音速から超音速に亘って細長物体について近似的に成立している。

3.2 二物体の場合

$y-z$ 平面に二物体の先端がくる様にし、且中心軸間距離を a として x 軸に平行に y 軸の負の方向を基点として時計回りに角度 ϕ を取っている二物体が迎角 α をもって置かれている時、 x 軸を中心軸として置かれた物体に働く法線力と横力を求める推算式を導びく(図2参照)。ここで、法線力とは迎角変角面で物体軸に垂直な方向に働く力で上方を正とし、横力とは迎角変角面に垂直な方向に働く力で右方を正とする。

この様な時、軸流および横断流による擾乱速度ポテンシャルを求めるに当って、二物体について共に境界条件を満足する解を見出すのは困難なので、参考文献3)に於て我々が採用した方法を二物体の場合に適用し、法線力および横力を求める近似的な推算式を導びく。

まず、軸流による擾乱速度ポテンシャル φ_1 について考える。

物体 c_1 および c_2 をそれぞれが単独で境界条件を満足させる様に分布された吹出しの分布

$$m_1 = 2\pi U c_1 \frac{dc_1}{dx} \quad (30)$$

$$m_2 = 2\pi U c_2 \frac{dc_2}{dx} \quad (31)$$

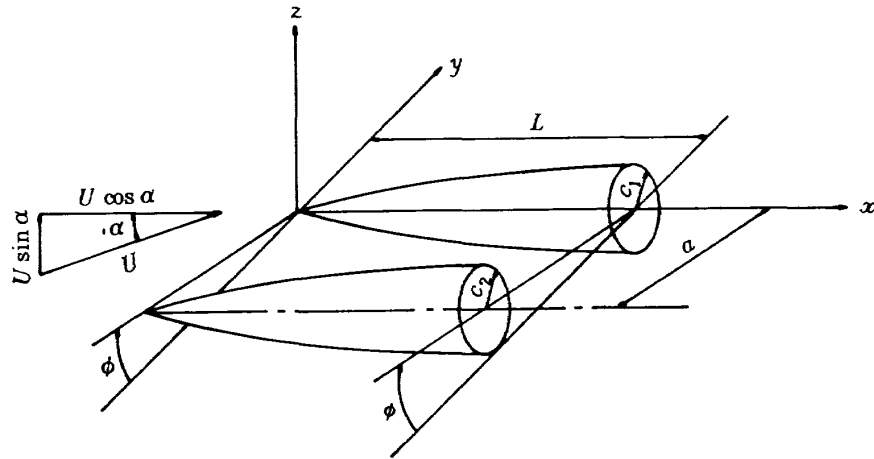


図2 2物体と座標軸系

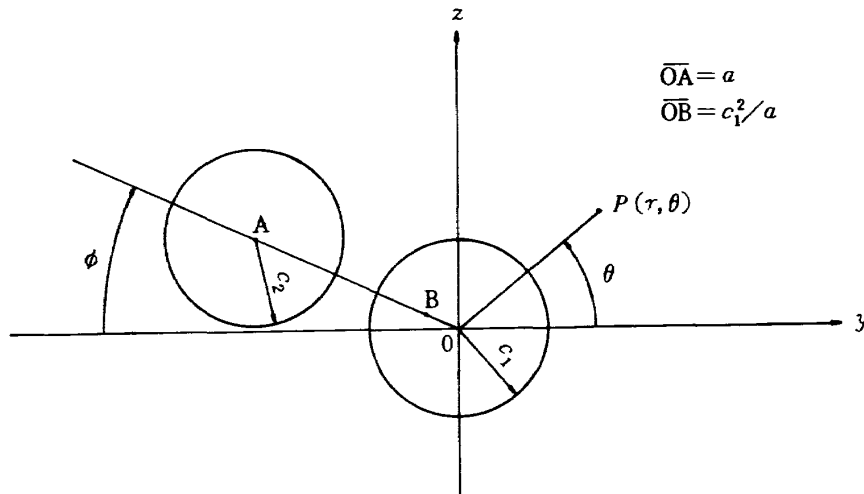


図3 2物体の横断面

で代表させる。そこで二物体が図3に示す如く角度 ϕ をもって置かれているとき、 c_1 物体上でのみ境界条件を満足させる近似的な擾乱速度ポテンシャルを求めるため、A点の円 c_1 に対する鏡像点Bに m_2 と同じ大きさの吹出しを、 c_1 の中心0に大きさが m_2 と同じ吸込みを分布させると c_1 物体上でのみ境界条件を満足する擾乱速度ポテンシャルが次の如く得られる（付録A参照）。即ち、

$$\varphi_1(r, \theta; x) = \varphi_{10} + \varphi_{1A} + \varphi_{1A0} + \varphi_{1AB} \quad (32)$$

ここに、

φ_{10} ; c_1 の中心0点に分布された吹出しの m_1 によるP点での擾乱速度ポテンシャル

φ_{1A} ; c_2 の中心A点に分布された吹出し m_2 によるP点での擾乱速度ポテンシャル

φ_{1A0} ; A点の吹出し m_2 と大きさが同じ吸込み $-m_2$ を0点に分布させた時のP点での擾乱速度

ポテンシャル

φ_{1AB} ; A点の円 c_1 に対する鏡像点B ($\overline{OB} = c_1^2/a$) に吹出し m_2 を分布させた時のP点での擾乱速度ポテンシャル

であり、それぞれ(33)~(36)式の如く表わせる。

$$\varphi_{10} = \frac{m_1}{2\pi} \ln r = U c_1 \frac{dc_1}{dx} \ln r \quad (33)$$

$$\varphi_{1A} = \frac{m_2}{2\pi} \ln \overline{AP} = \frac{1}{2} U c_2 \cdot \frac{dc_2}{dx} \ln \{ r^2 + 2ar \cos(\theta + \phi) + a^2 \} \quad (34)$$

$$\varphi_{1A0} = -\frac{m_2}{2\pi} \ln r = -U c_2 \cdot \frac{dc_2}{dx} \ln r \quad (35)$$

$$\varphi_{1AB} = \frac{m_2}{2\pi} \ln \overline{BP} = \frac{1}{2} U c_2 \cdot \frac{dc_2}{dx} \cdot \ln \{ r^2 + 2\overline{OB} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OB}^2 \} \quad (36)$$

ここに、

$$\overline{AP}^2 = r^2 + 2ar \cos(\theta + \phi) + a^2 \quad (37)$$

$$\overline{BP}^2 = r^2 + 2\overline{OB}r \cos(\theta + \phi) + \overline{OB}^2 \quad (38)$$

$$\overline{OB} = c_1^2/a \quad (39)$$

従って,

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta; x) = & (Uc_1 \cdot \frac{dc_1}{dx} - Uc_2 \cdot \frac{dc_2}{dx}) \ln r \\ & + \frac{1}{2} U c_2 \frac{dc_2}{dx} \ln \{r^2 + 2ar \cos(\theta + \phi) + a^2\} \\ & + \frac{1}{2} U c_2 \frac{dc_2}{dx} \ln \{r^2 + 2\overline{OB}r \cos(\theta + \phi) + \overline{OB}^2\} \end{aligned} \quad (40)$$

c_1 物体表面上での φ_1 の x , r , θ の微係数は(41), (42), (43)の如くなる。

$$\begin{aligned} (\varphi_{1x})_{r=c_1} = & U \left\{ \left(\frac{dc_1}{dx} \right)^2 + c_1 \frac{d^2 c_1}{dx^2} \right\} \ln c_1 \\ & + U \left\{ \left(\frac{dc_2}{dx} \right)^2 + c_2 \frac{d^2 c_2}{dx^2} \right\} \ln \left[a \left\{ 1 \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2} \right\} + 2U \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{dc_1}{dx} \cdot \frac{dc_2}{dx} \right. \\ & \left. \frac{\frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2}}{1 + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2}} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

$$(\varphi_{1r})_{r=c_1} = U \frac{dc_1}{dx} \quad (42)$$

$$(\varphi_{1\theta})_{r=c_1} = -2Uc_2 \frac{dc_2}{dx} \cdot \frac{\frac{c_1}{a} \sin(\theta + \phi)}{1 + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2}} \quad (43)$$

次に、横断流による擾乱速度ポテンシャル φ_2 について考える。

物体 c_1 および c_2 をそれぞれが単独で境界条件を満足させる様に分布されたダブレット(向きは z 軸の負の向き)の分布

$$M_1 = 2\pi U \alpha c_1^2 \quad (44)$$

$$M_2 = 2\pi U \alpha c_2^2 \quad (45)$$

で代表させる。図3に示す如く二物体が置かれたとき、 c_1 物体表面上でのみ境界条件を満足させる様にするため、A点の円 c_1 に対する鏡像点Bに大きさが $M_2 \cdot \frac{c_1^2}{a^2}$ のダブレットを分布させればよい(付録B参照)。その時の擾乱速度ポテンシャルは次の如く示される。

$$\varphi_2(r, \theta; x) = \varphi_{20} + \varphi_{2A} + \varphi_{2AB} \quad (46)$$

ここに,

φ_{20} ; c_1 の中心Oに z 軸の負の向きに置かれた M_1 なるダブレットに依るP点での擾乱速度ポテンシャル。

φ_{2A} ; c_2 の中心Aに z 軸の負の向きに置かれた M_2 なるダブレットによるP点での擾乱速度ポテンシャル。

φ_{2AB} ; A点の円 c_1 に対する鏡像点Bに置かれた大きさ $M_2 \cdot \frac{c_1^2}{a^2}$ のダブレットによる擾乱速度ポテンシャル。

これらは、それぞれ次の如く示される。

$$\varphi_{20} = \frac{M_1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r} = U \alpha c_1^2 \cdot \frac{\sin \theta}{r} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{2A} = & \frac{M_2}{2\pi} \cdot \frac{r \sin \theta - a \sin \phi}{r^2 + 2ar \cos(\theta + \phi) + a^2} \\ = & U \alpha c_2^2 \cdot \frac{r \sin \theta - a \sin \phi}{r^2 + 2ar \cos(\theta + \phi) + a^2} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{2AB} = & \frac{M_2}{2\pi} \cdot \frac{c_1^2}{a^2} \cdot \frac{r \sin(\theta + 2\phi) + \overline{OB} \sin \phi}{r^2 + 2\overline{OB}r \cos(\theta + \phi) + \overline{OB}^2} \\ = & U \alpha \cdot \frac{c_1^2 c_2^2}{a^2} \cdot \frac{r \sin(\theta + 2\phi) + \overline{OB} \sin \phi}{r^2 + 2\overline{OB}r \cos(\theta + \phi) + \overline{OB}^2} \end{aligned} \quad (49)$$

従って,

$$\begin{aligned} \varphi_2(r, \theta; x) = & U \alpha c_1^2 \cdot \frac{\sin \theta}{r} \\ & + U \alpha c_2^2 \cdot \frac{r \sin \theta - a \sin \phi}{r^2 + 2ar \cos(\theta + \phi) + a^2} \\ & + U \alpha c_2^2 \cdot \frac{c_1^2}{a^2} \cdot \frac{r \sin(\theta + 2\phi) + \overline{OB} \sin \phi}{r^2 + 2\overline{OB}r \cos(\theta + \phi) + \overline{OB}^2} \end{aligned} \quad (50)$$

c_1 物体表面上での x , r , θ についての微係数は次の如くなる。

$$\begin{aligned} (\varphi_{2x})_{r=c_1} = & 2U \alpha \cdot \frac{dc_1}{dx} \cdot \left[\sin \theta \right. \\ & \left. + \frac{c_2^2}{a^2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{c_1^2}{a^2}\right) \cos \phi \sin(\theta + \phi) + \left(1 + \frac{c_1^2}{a^2}\right) \sin \phi \cos(\theta + \phi)}{\left\{1 + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2}\right\}} \right. \\ & \left. \frac{(\theta + \phi) + 2 \frac{c_1}{a} \sin \phi}{\left\{1 + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2}\right\}} \right] + 2U \alpha \cdot \frac{c_2}{a} \cdot \frac{dc_2}{dx} \end{aligned}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{c_1}{a} \cos \phi \sin(\theta + \phi) - \left(1 - \frac{c_1^2}{a^2}\right) \sin \phi}{1 + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2}} \quad (51)$$

$$(\varphi_{2r})_{r=c_1} = -U \alpha \sin \theta \quad (52)$$

$$\begin{aligned} (\varphi_{2\theta})_{r=c_1} &= U \alpha c_1 \cos \theta \\ &+ 2U \alpha c_1 \cdot \frac{c_2^2}{a^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{c_1^2}{a^2}\right) \cos \phi \cos(\theta + \phi)}{\left\{ 1 \right.} \\ &\left. - \left(1 - \frac{c_1^2}{a^2}\right) \sin \phi \sin(\theta + \phi) + 2 \frac{c_1}{a} \cos \phi \right.} \\ &\left. + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2} \right\}^2 \end{aligned} \quad (53)$$

(41), (42), (43), (51), (52), (53)式を(10)式に代入することによって c_1 物体表面上での圧力係数が求まり、これを(11)式に代入すれば法線力が(12)式に代入すれば横力が求められる。

実際に計算するに当っては、 α の0次の項と α の1次の項に分けて考えた方が扱い易いので、分けて考える。

α の0次の項のみを考えた圧力係数は次の如くなる。

$$\begin{aligned} (C_P)_{r=c_1}(\alpha \text{の0次の項}) &= \\ &= -\frac{2}{U} (\varphi_{1x})_{r=c_1} - \frac{1}{U^2} (\varphi_{1r})_{r=c_1}^2 - \frac{1}{U^2 c_1^2} (\varphi_{1\theta})_{r=c_1}^2 \\ &= -2 \left\{ \left(\frac{dc_1}{dx} \right)^2 + c_1 \frac{d^2 c_1}{dx^2} \right\} \ln c_1 - 2 \left\{ \left(\frac{dc_2}{dx} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + c_2 \frac{d^2 c_2}{dx^2} \right\} \cdot \ln \left[a \left\{ 1 + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2} \right\} \right] \\ &\quad - 4 \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{dc_1}{dx} \cdot \frac{dc_2}{dx} \cdot \frac{\frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2}}{1 + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2}} \\ &\quad - \left(\frac{dc_1}{dx} \right)^2 - \frac{4c_2^2}{c_1^2} \cdot \left(\frac{dc_2}{dx} \right)^2 \cdot \frac{\frac{c_1^2}{a^2} \sin^2(\theta + \phi)}{\left\{ 1 + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2} \right\}^2} \end{aligned} \quad (54)$$

(54)式を(11)式に代入しまとめると(55)式の如くなる。

$$N_{c_1(c_2)}(\alpha \text{の0次の項}) = 2\pi q \sin \phi \int_0^L \left\{ -\frac{c_1 c_2}{a} \cdot \frac{dc_1}{dx} \cdot \frac{dc_2}{dx} \right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{c_1^2 c_2^2}{a^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c_1^2}{a^2}} \left(\frac{dc_2}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (55)$$

仮定に依り、 $\frac{dc_1}{dx}$ 、 $\frac{dc_2}{dx}$ は微小量であるから、(55)式は2次の微小量となるので、法線力の α の0次の項は微小量と考えられる。同様に横力の α の0次の項も微小量となる。

$$N_{c_1(c_2)}(\alpha \text{の0次の項}) \simeq 0 \quad (56)$$

$$Y_{c_1(c_2)}(\alpha \text{の0次の項}) \simeq 0 \quad (57)$$

次に α の1次の項について考える。

α の1次の項のみを考えた圧力係数は次の如くなる。

$$\begin{aligned} (C_P)_{r=c_1}(\alpha \text{の1次の項}) &= -\frac{2}{U} (\varphi_{2x})_{r=c_1} \\ &= -\frac{2\alpha \sin \theta}{U} (\varphi_{1r})_{r=c_1} - \frac{2\alpha \cos \theta}{U c_1} (\varphi_{1\theta})_{r=c_1} \\ &= -\frac{2}{U^2} (\varphi_{1r})_{r=c_1} \cdot (\varphi_{2r})_{r=c_1} - \frac{2}{U^2 c_1^2} (\varphi_{1\theta})_{r=c_1} \cdot (\varphi_{2\theta})_{r=c_1} \\ &= 2 \cdot \frac{dc_1}{dx} \cdot \left[\sin \theta + \frac{c_2^2}{a^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{c_1^2}{a^2}\right) \sin \phi \cos(\theta + \phi)}{\left\{ 1 + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) \right.} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(1 - \frac{c_1^2}{a^2}\right) \cos \phi \sin(\theta + \phi) + 2 \frac{c_1}{a} \sin \phi}{+ \frac{c_1^2}{a^2} \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{dc_2}{dx} \cdot \left[\frac{c_2}{a} \cdot \frac{2 \frac{c_1}{a} \cos \phi \sin(\theta + \phi) - \left(1 - \frac{c_1^2}{a^2}\right) \sin \phi}{1 + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) + \frac{c_1^2}{a^2}} \right. \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \theta \sin(\theta + \phi) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{c_2^3}{a^3} \cdot \frac{\left(1 + \frac{c_1^2}{a^2}\right) \cos \phi \sin(\theta + \phi)}{\left\{ 1 + 2 \frac{c_1}{a} \cos(\theta + \phi) \right.} \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\cos(\theta + \phi) - \left(1 - \frac{c_1^2}{a^2}\right) \sin \phi \sin^2(\theta + \phi) + 2 \frac{c_1}{a} \cos \phi \sin(\theta + \phi)}{+ \frac{c_1^2}{a^2} \right\}^3} \right] \end{aligned} \quad (58)$$

(58)式を(11)式に代入し法線力の α の1次の項を求めると、

$$\begin{aligned} N_{c_1(c_2)}(\alpha \text{の1次の項}) &= 4\pi q \alpha \int_0^L \left[c_1 \cdot \frac{dc_1}{dx} \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_1^2 c_2^3}{a^4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{c_1^2}{a^2}\right)^2} \cdot \frac{dc_2}{dx} \right] dx \end{aligned}$$

$$+ 4\pi q \alpha \cdot \cos 2\phi \int_0^L \left\{ \frac{c_1 c_2^2}{a^2} \cdot \frac{dc_1}{dx} + \left\{ 3 \frac{c_1^2 c_2}{a^2} - \frac{c_1^2 c_2^3}{a^4} \cdot \frac{2 - \frac{c_1^2}{a^2}}{(1 - \frac{c_1^2}{a^2})^2} \right\} \cdot \frac{dc_2}{dx} \right\} dx \quad (59)$$

(58)式を(12)式に代入し、横力の α の1次の項を求めると、

$$Y_{c_1(c_2)} (\alpha \text{の1次の項}) = 4\pi q \alpha \sin 2\phi \int_0^L \left\{ \frac{c_1 c_2^2}{a^2} \cdot \frac{dc_1}{dx} + \left\{ 3 \frac{c_1^2 c_2}{a^2} - \frac{c_1^2 c_2^3}{a^4} \cdot \frac{2 - \frac{c_1^2}{a^2}}{(1 - \frac{c_1^2}{a^2})^2} \right\} \cdot \frac{dc_2}{dx} \right\} dx \quad (60)$$

ここで、特に c_1, c_2 物体が同一形状である場合の法線力、横力は(61)式と(62)式の如くなる。

$c = c_1 = c_2$ の場合、

$$N_{c_1(c_2)} (\alpha \text{の1次の項}) = 2\pi q \alpha c_B^2 \left\{ 2 + 2 \cdot \frac{a^2}{c_B^2} \ln \left(1 - \frac{c_B^2}{a^2} \right) + \frac{1}{1 - \frac{c_B^2}{a^2}} \right\} + \left\{ \frac{5}{2} \cdot \frac{c_B^2}{a^2} - \frac{c_B^2}{a^2} \ln \left(1 - \frac{c_B^2}{a^2} \right) - \frac{1}{1 - \frac{c_B^2}{a^2}} \right\} \cos 2\phi \quad (61)$$

$$Y_{c_1(c_1)} (\alpha \text{の1次の項}) = 2\pi q \alpha c_B^2 \left\{ \frac{5}{2} \cdot \frac{c_B^2}{a^2} - \frac{a^2}{c_B^2} \ln \left(1 - \frac{c_B^2}{a^2} \right) - \frac{1}{1 - \frac{c_B^2}{a^2}} \right\} \sin 2\phi \quad (62)$$

ここに、 c_B は物体後端部の半径である。

実際に実験値と比較するに当っては、1物体のみの時の値との比を取って比べることに依り、間接的にマッハ数効果を導入することが出来る。

$$K_N = (dN_{c_1(c_2)} / d\alpha) / (dN / d\alpha)_{c_1 \text{ 単体}} = K_1 + K_2 \cos 2\phi \quad (63)$$

$$K_Y = (dY_{c_1(c_2)} / d\alpha) / (dN / d\alpha)_{c_1 \text{ 単体}} = K_2 \sin 2\phi \quad (64)$$

ここに、

$$K_1 = 2 + 2 \cdot \frac{a^2}{c_B^2} \ln \left(1 - \frac{c_B^2}{a^2} \right) + \frac{1}{1 - \frac{c_B^2}{a^2}} \quad (65)$$

$$K_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{c_B^2}{a^2} - \frac{a^2}{c_B^2} \ln \left(1 - \frac{c_B^2}{a^2} \right) - \frac{1}{1 - \frac{c_B^2}{a^2}} \quad (66)$$

図4に頂角 $20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ で直径27mm、長さ240

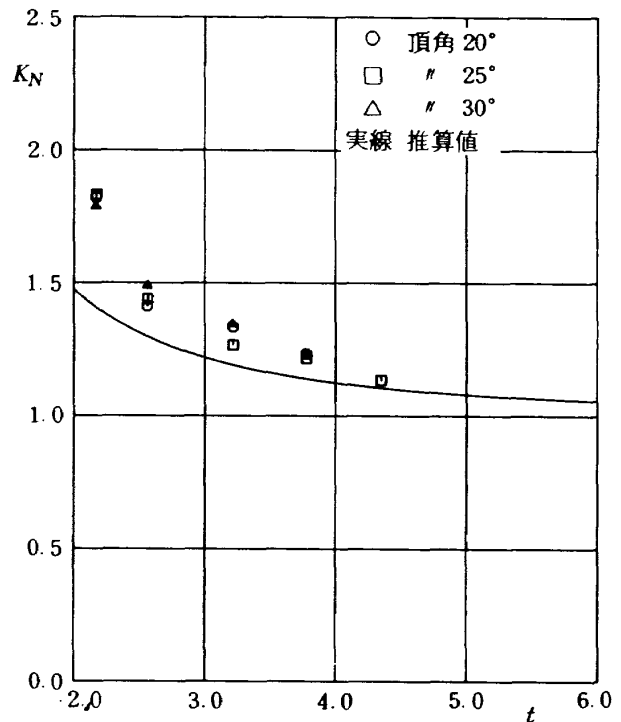


図4 実験値と(63)式による推算値との比較 (マッハ数1.5, $\phi = 0^\circ$)

mmの2物体について、 $\phi = 0^\circ$ で中心軸間距離を変えて、マッハ数1.5にて実験した結果と(63)式による推算値との比較を示した。中心軸間距離が小さい所では実験値と推算値はかなりの乖離がみられるが、中心軸間距離がある程度大きくなると両者の一致はかなり良くなっている事が分る。横軸は $t = a / c_B$ である。

図5には、頂角 20° の場合について、マッハ数1.5, $t = 2.148$ とした時の角度 ϕ の変化に対する(63)式と(64)式の推算結果と実験値の比較を示した。この場合、中心軸間距離が小さい所なので、両者はあまり良く一致しない。

以上の議論に於ては、 c_2 物体を代表する吹出し、又はダブレットを c_1 物体表面上では境界条件を満足させる様に c_1 の中心および鏡像点に吸込み、吹出し、ダブレットを分布させ擾乱速度ポテンシャルを求めた。

以下に於ては、さらに推算精度を上げるため、吹出し、吸込み、ダブレットの分布個数を以下の手順で増して擾乱速度ポテンシャルを求める事を考える。

まず、軸流についての擾乱速度ポテンシャル ϕ_1 について考える。

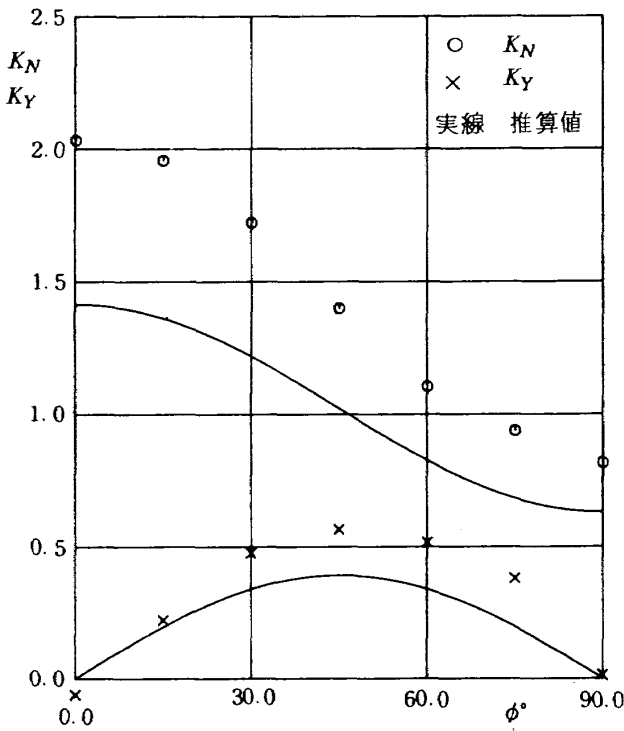


図5 実験値と(63)式, (64)式による
推算法との比較
(頂角 20°, マッハ数 1.5, $t=2.148$)

図6にみられる如く, c_1 を代表する吹出し m_1 に対し, c_2 物体上で境界条件を満す様に c_2 の中心Aに $-m_1$ なる吸込みを鏡像点Dに吹出し m_1 を分布させ, さらにこれらを c_1 物体上で境界条件を満す様に, c_2 物体を代表するA点の吹出し m_2 に対しては0点に $-m_2$ なる吸込みとB点に吹出し m_2 を分布させ, 新ら

たにA点に分布された $-m_1$ なる吸込みに対しては0点に m_1 なる吹出しとB点に $-m_1$ なる吸込みを分布させればよく, D点に分布された m_1 なる吹出しに対しては0点に $-m_1$ なる吸込みと新たにE点に吹出し m_1 を分布させると c_1 物体上では境界条件を満す擾乱速度ポテンシャルが以下の如く得られる。

$$\varphi_1(r, \theta; x) = \varphi_{10} + \varphi_{1A} + \varphi_{10A} + \varphi_{10D} + \varphi_{1A0} + \varphi_{1AB} + \varphi_{10AB} + \varphi_{10DE} \quad (67)$$

ここに,

φ_{10} ; (33)式に同じ。

φ_{1A} ; (34)式に同じ。

φ_{10A} ; 0点の吹出し m_1 に対し, c_2 上で境界条件を満す様にA点に $-m_1$ なる吸込みを分布させた時のP点での擾乱速度ポテンシャル。

φ_{10D} ; 0点の吹出し m_1 に対し, c_2 上で境界条件を満す様に鏡像点D ($\overline{AD} = c_2^2/a$)に吹出し m_1 を分布させた時のP点での擾乱速度ポテンシャル

φ_{1A0} ; (35)式に同じ。

φ_{1AB} ; (36)式に同じ。

φ_{10AB} ; c_2 物体上で境界条件を満す様にA点に分布された $-m_1$ なる吸込みに対し, c_1 物体上で境界条件を満す様に鏡像点Bに $-m_1$ なる吸込みを分布させた時のP点に於ける擾乱速度ポテンシャル。

φ_{10DE} ; c_2 物体上で境界条件を満す様に鏡像点Dに

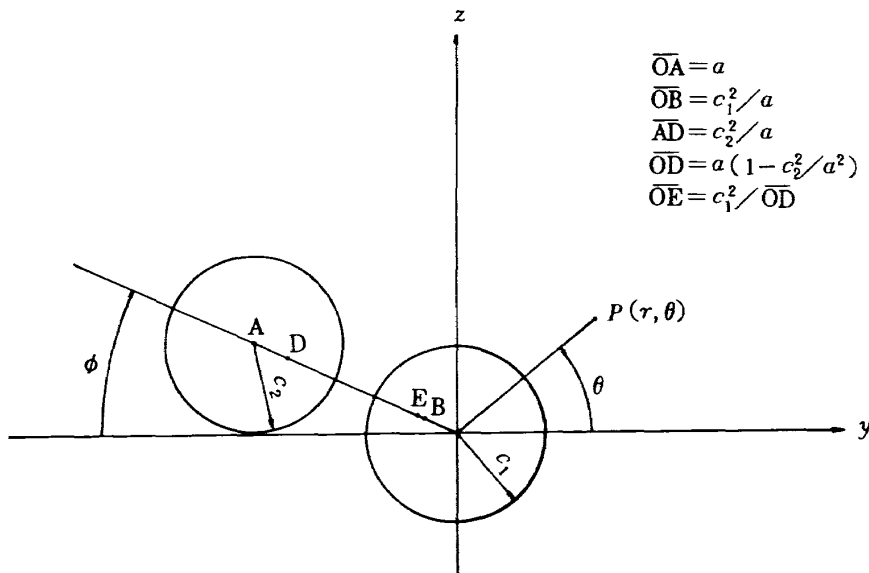


図6 2物体の横断面

分布された m_1 なる吹出しに対し, c_1 物体上で境界条件を満足させる様に D 点の c_1 に対する鏡像点 E に m_1 なる吹出しを分布させた時の P 点での擾乱速度ポテンシャル。

これらは, 次の如く表現される。

$$\begin{aligned}\varphi_{10A} &= -\frac{m_1}{2\pi} \ln \overline{AP} \\ &= -\frac{1}{2} U c_1 \frac{dc_1}{dx} \ln \{r^2 + 2ar \cos(\theta + \phi) + a^2\}\end{aligned}\quad (68)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{10D} &= \frac{m_1}{2\pi} \ln \overline{DP} \\ &= \frac{1}{2} U c_1 \frac{dc_1}{dx} \ln \{r^2 + 2\overline{OD} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OD}^2\}\end{aligned}\quad (69)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{10AB} &= -\frac{m_1}{2\pi} \ln \overline{BP} \\ &= -\frac{1}{2} U c_1 \frac{dc_1}{dx} \ln \{r^2 + 2\overline{OB} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OB}^2\}\end{aligned}\quad (70)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{10DE} &= \frac{m_1}{2\pi} \ln \overline{EP} \\ &= \frac{1}{2} U c_1 \frac{dc_1}{dx} \ln \{r^2 + 2\overline{OE} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OE}^2\}\end{aligned}\quad (71)$$

ここに,

$$\overline{DP} = \{r^2 + 2\overline{OD} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OD}^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (72)$$

$$\overline{BP} = \{r^2 + 2\overline{OB} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OB}^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (73)$$

$$\overline{EP} = \{r^2 + 2\overline{OE} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OE}^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (74)$$

$$\overline{OD} = a(1 - c_2^2/a) \quad (75)$$

$$\overline{OB} = c_1^2/a \quad (76)$$

$$\overline{OE} = c_1^2/\overline{OD} \quad (77)$$

従って,

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, \theta; x) &= (U c_1 \frac{dc_1}{dx} - U c_2 \cdot \frac{dc_2}{dx}) \cdot \ln r \\ &+ \frac{1}{2} (U c_2 \frac{dc_2}{dx} - U c_1 \frac{dc_1}{dx}) \cdot \ln \{r^2 + 2ar \cos(\theta + \phi) + a^2\} \\ &+ \frac{1}{2} (U c_2 \frac{dc_2}{dx} - U c_1 \frac{dc_1}{dx}) \cdot \ln \{r^2 + 2\overline{OB} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OB}^2\} \\ &+ \frac{1}{2} U c_1 \frac{dc_1}{dx} \ln \{r^2 + 2\overline{OD} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OD}^2\}\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} U c_1 \frac{dc_1}{dx} \cdot \ln \{r^2 + 2\overline{OE} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OE}^2\} \quad (78)$$

次に, 横断流に依る擾乱速度ポテンシャル φ_2 について考える。 φ_2 は次の如くなる。

$$\varphi_2(r, \theta; x) = \varphi_{20} + \varphi_{2A} + \varphi_{20D} + \varphi_{2AB} + \varphi_{20DE} \quad (79)$$

ここに,

φ_{20} ; (47) 式に同じ。

φ_{2A} ; (48) 式に同じ。

φ_{20D} ; 0 点のダブレット M_1 を c_2 上で境界条件を満足させる様に鏡像点 D に $M_1 \cdot \frac{c_2^2}{a^2}$ なるダブレットを分布させた時の P 点での擾乱速度ポテンシャル。

φ_{2AB} ; (49) 式に同じ。

φ_{20DE} ; D 点に分布された $M_1 \cdot \frac{c_2^2}{a^2}$ なるダブレットに対し c_1 物体上で境界条件を満足させるため鏡像点 E に $M_1 \cdot \frac{c_1^2 c_2^2}{a^2 \cdot \overline{OD}^2}$ なるダブレットを分布させた時の P 点での擾乱速度ポテンシャル。

それぞれ次の如く表現される。

$$\varphi_{20D} = U \alpha \cdot \frac{c_1^2 c_2^2}{a^2} \cdot \frac{r \sin(\theta + 2\phi) + \overline{OD} \sin \phi}{r^2 + 2\overline{OD} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OD}^2} \quad (80)$$

$$\varphi_{20DE} = U \alpha \cdot \frac{c_1^4 c_2^2}{a^2 \cdot \overline{OD}^2} \cdot \frac{r \sin \theta - \overline{OE} \sin \phi}{r^2 + 2\overline{OE} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OE}^2} \quad (81)$$

従って,

$$\begin{aligned}\varphi_2(r, \theta; x) &= U \alpha c_1^2 \cdot \frac{\sin \theta}{r} \\ &+ U \alpha c_2^2 \cdot \frac{r \sin \theta - a \sin \phi}{r^2 + 2ar \cos(\theta + \phi) + a^2} \\ &+ U \alpha \cdot \frac{c_1^2 c_2^2}{a^2} \cdot \frac{r \sin(\theta + 2\phi) + \overline{OB} \sin \phi}{r^2 + 2\overline{OB} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OB}^2} \\ &+ U \alpha \cdot \frac{c_1^2 c_2^2}{a^2} \cdot \frac{r \sin(\theta + 2\phi) + \overline{OD} \sin \phi}{r^2 + 2\overline{OD} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OD}^2} \\ &+ U \alpha \cdot \frac{c_1^4 c_2^2}{a^2 \overline{OD}^2} \cdot \frac{r \sin \theta - \overline{OE} \sin \phi}{r^2 + 2\overline{OE} r \cos(\theta + \phi) + \overline{OE}^2}\end{aligned}\quad (82)$$

(78) 式, (82) 式を c_1 物体表面上での微係数を取り, (10) 式に代入し c_1 物体表面上での圧力係数を求め, これを (11) 式および (12) 式に代入して法線力および

横力が求められる。

項数が増え非常に煩雑になるので、2物体が同一形状の場合 ($c=c_1=c_2$) について結果だけを示す。

$$\begin{aligned}
 N_{c_1(c_2)} (\alpha \text{の1次の項}) &= 4\pi q \alpha \int_0^L \left[c + 4 \frac{c^5}{a^2 \cdot OD^2} \right. \\
 &+ 4 \frac{c^7}{a^3 \cdot OD^3} - \frac{2 \frac{c^7}{a^2 \cdot OD^4}}{1 - \frac{c^2}{OD^2}} + \frac{\frac{c^5}{a^2 \cdot OD^2}}{(1 - \frac{c^2}{OD^2})^2} - \frac{2 \frac{c^7}{a^2 \cdot OD^4}}{(1 - \frac{c^2}{OD^2})^3} \\
 &+ \left. \frac{\frac{c^5}{a^2 \cdot OD^2}}{(1 - \frac{c^2}{a \cdot OD})^2} \right] \cdot \left(\frac{dc}{dx} \right) \cdot dx \\
 &+ 4\pi q \alpha \cos 2\phi \int_0^L \left[\frac{7}{2} \cdot \frac{c^3}{a^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^3}{a \cdot OD} + \frac{c^3}{OD^2} \right. \\
 &+ \frac{\frac{c^5}{a^2 \cdot OD^2}}{1 - \frac{c^2}{OD^2}} - \frac{\frac{c^5}{a^2 \cdot OD^2}}{(1 - \frac{c^2}{OD^2})^2} + \frac{2 \cdot \frac{c^7}{a^2 \cdot OD^4}}{(1 - \frac{c^2}{OD^2})^3} \\
 &+ \frac{2 \cdot \frac{c^7}{a^5 \cdot OD}}{(1 - \frac{c^2}{a^2}) (1 - \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{OD})^2} - \frac{2 \cdot \frac{c^5}{a^3 \cdot OD}}{(1 - \frac{c^2}{a^2}) (1 - \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{OD})^2} \\
 &+ \left. \frac{\frac{c^7}{a^4 \cdot OD^2}}{(1 - \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{OD})^2} \right] \cdot \left(\frac{dc}{dx} \right) \cdot dx \quad (83)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{c_1(c_2)} (\alpha \text{の1次の項}) &= 4\pi q \alpha \sin 2\phi \int_0^L \left[\frac{7}{2} \cdot \frac{c^3}{a^2} \right. \\
 &- \frac{1}{2} \cdot \frac{c^3}{a \cdot OD} + \frac{c^3}{OD^2} + \frac{\frac{c^5}{a^2 \cdot OD^2}}{1 - \frac{c^2}{OD^2}} - \frac{\frac{c^5}{a^2 \cdot OD^2}}{(1 - \frac{c^2}{OD^2})^2} \\
 &+ \frac{2 \cdot \frac{c^7}{a^2 \cdot OD^4}}{(1 - \frac{c^2}{OD^2})^3} + \frac{2 \cdot \frac{c^7}{a^5 \cdot OD}}{(1 - \frac{c^2}{a^2}) (1 - \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{OD})^2} \\
 &- \left. \frac{2 \cdot \frac{c^5}{a^3 \cdot OD}}{(1 - \frac{c^2}{a^2}) (1 - \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{OD})^2} + \frac{\frac{c^7}{a^4 \cdot OD^2}}{(1 - \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{OD})^2} \right] \cdot \left(\frac{dc}{dx} \right) dx \quad (84)
 \end{aligned}$$

(83)式と(84)式を x について積分し、単体での値との比を取ると次の如くなる。

$$K_N = \frac{dN_{c_1(c_2)}/d\alpha}{(dN/d\alpha)_{\text{単体}}} = K_1 + K_2 \cos 2\phi \quad (85)$$

$$K_Y = \frac{dY_{c_1(c_2)}/d\alpha}{(dN/d\alpha)_{\text{単体}}} = K_2 \sin 2\phi \quad (86)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{\alpha^2}{c_B^2} \cdot \left\{ \frac{9}{2} \cdot \frac{c_B^2}{a^2} + \frac{1031}{200} + \frac{6}{\frac{c_B^2}{a^2} - 1} + \frac{2}{(\frac{c_B^2}{a^2} - 1)^2} \right. \\
 &- \frac{1}{16 \cdot (\frac{c_B^2}{a^2} - \frac{1}{2})} + \frac{1}{4} \ln |2 \cdot \frac{c_B^2}{a^2} - 1| - 2 \ln | \frac{c_B^4}{a^4} \\
 &- 3 \frac{c_B^2}{a^2} + 1 | - \frac{122}{25\sqrt{5}} \cdot \ln \left| \frac{(3 - \sqrt{5})(\frac{c_B^2}{a^2} - \frac{3 + \sqrt{5}}{2})}{(3 + \sqrt{5})(\frac{c_B^2}{a^2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2})} \right| \\
 &+ \frac{128 \cdot \frac{c_B^2}{a^2} + 58}{25(\frac{c_B^4}{a^4} - 3\frac{c_B^2}{a^2} + 1)} + \left. \frac{47 \cdot \frac{c_B^2}{a^2} - 18}{5 \cdot (\frac{c_B^4}{a^4} - 3\frac{c_B^2}{a^2} + 1)^2} \right\} \quad (87)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{\alpha^2}{c_B^2} \cdot \left\{ \frac{17}{8} \cdot \frac{c_B^4}{a^4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{c_B^2}{a^2} - \frac{887}{400} + \frac{3}{2} \ln | \frac{c_B^2}{a^2} - 1 | \right. \\
 &+ \frac{1}{16} \ln |2 \cdot \frac{c_B^2}{a^2} - 1| - \frac{1}{\frac{c_B^2}{a^2} - 1} + \frac{1}{32(\frac{c_B^2}{a^2} - \frac{1}{2})} \\
 &+ \frac{1}{2} \ln | \frac{c_B^4}{a^4} - 3\frac{c_B^2}{a^2} + 1 | - \frac{58 + 128 \frac{c_B^2}{a^2}}{25(\frac{c_B^4}{a^4} - 3\frac{c_B^2}{a^2} + 1)} \\
 &- \left. \frac{47 \cdot \frac{c_B^2}{a^2} - 18}{5(\frac{c_B^4}{a^4} - 3\frac{c_B^2}{a^2} + 1)^2} \right. \\
 &+ \left. \frac{69}{50\sqrt{5}} \ln \left| \frac{(3 - \sqrt{5})(\frac{c_B^2}{a^2} - \frac{3 + \sqrt{5}}{2})}{(3 + \sqrt{5})(\frac{c_B^2}{a^2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2})} \right| \right\} \quad (88)
 \end{aligned}$$

図7にマッハ数1.5, 角度 $\phi=0^\circ$ の時の K_N を t に対し、実験値と(85)式に依る推算値との比較を示した。図4に比べ t の小さな所で若干改善された推算結果が得られた。

図8にはマッハ数1.5, $t=2.148$ の時の K_N , K_Y を角度 ϕ に対し、実験値と(85)式および(86)式に依る推算結果との比較を示した。中心軸間距離の小さい所での実験結果との比較であるので、推算値とは良く合っているとは云えない。

しかしながら、角度 ϕ の 0° と 90° の実験結果を基に、次に示す(89)式と(90)式

$$K_1 = \frac{(K_N)_{\phi=0^\circ} + (K_N)_{\phi=90^\circ}}{2} \quad (89)$$

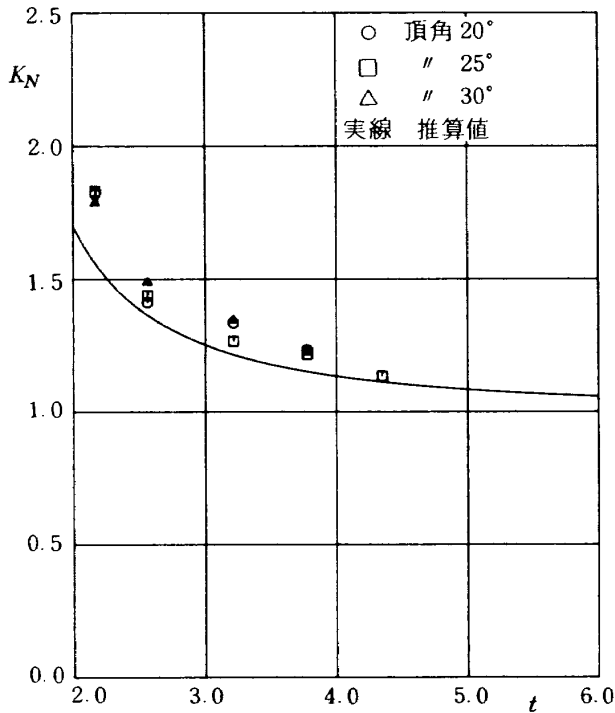


図7 実験値と(85)式による推算値との比較
(マッハ数 1.5, $\phi = 0^\circ$)

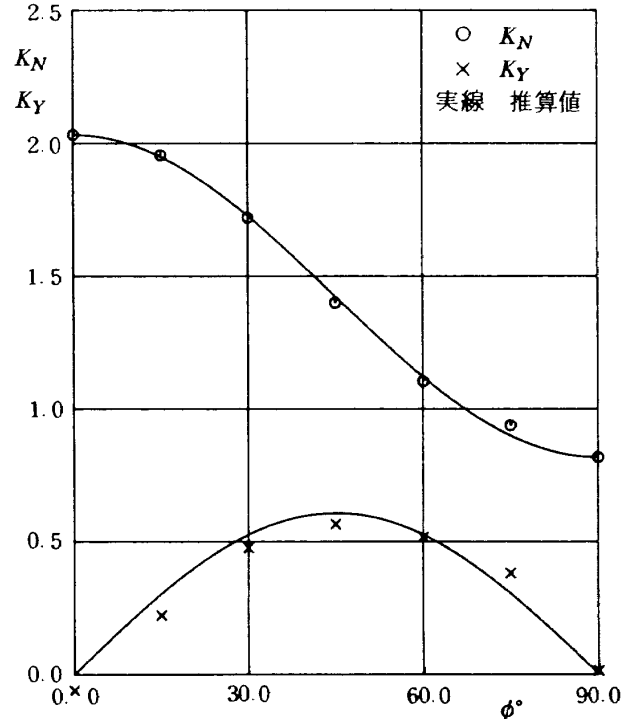


図9 実験値と(89)式, (90)式による推算との比較
(頂角 20° , マッハ数 1.5, $t = 2.148$)

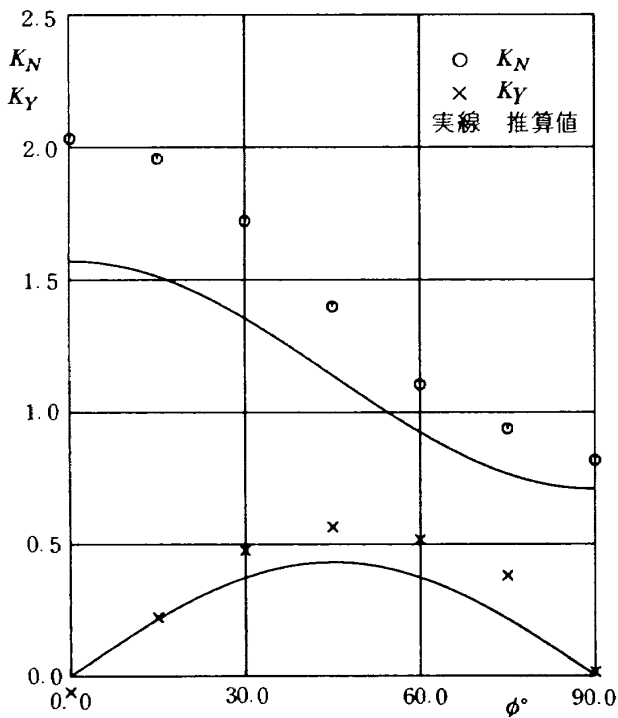


図8 実験値と(85)式, (86)式による
推算値との比較
(頂角 20° , マッハ数 1.5, $t = 2.148$)

$$K_2 = \frac{(K_N)_{\phi=0^\circ} - (K_N)_{\phi=90^\circ}}{2} \quad (90)$$

から K_1 と K_2 を求め、これらの値を使って(85)式および(86)式から任意の角度 ϕ での値を推算したものを図9に示した。実験値と良く合った結果が得られており、2物体の場合の法線力および横力の角度 ϕ に対する関係は(85)式および(86)式に示す形をしていると云える。

4. まとめ

1) 2物体が並置された場合の法線力および横力を求める推算式を細長体理論を基に近似的に導びいた。

2) 零迎角では、法線力および横力ともに2次の微小量となるので、ほぼ零と考えられる。

3) 迎角を取った場合、角度 ϕ に対し

$$K_N = \frac{dN_{c_1(c_2)}/d\alpha}{(dN/d\alpha)_{\text{単体}}} = K_1 + K_2 \cos 2\phi$$

$$K_Y = \frac{dY_{c_1(c_2)}/d\alpha}{(dN/d\alpha)_{\text{単体}}} = K_2 \sin 2\phi$$

の形で推算され、中心軸間距離の小さい所では推算値は実験値より低目になるが、物体同志がある程度

離れて来ると両者の一致はかなり良くなる。

4) 角度 ϕ の 0° と 90° での実験結果を基に K_1 と K_2 を算出し、これらを使って任意の角度 ϕ での法線力および横力を前記3)より求めると、非常に良く実験値と一致する。

5) 本方法は容易に2体以上の場合に拡張できる。

6) 今回導びいた推算式については実験結果との比較はマッハ数1.5についてしか行っていないが、理論的には亜音速から超音速に亘って適用可能と考える。

参 考 文 献

- 1) 河村龍馬；高速空気力学，日刊工業新聞社，昭和33年12月
- 2) リープマン，ロシュコ；気体力学，物理学叢書15，吉岡書店，1967年8月
- 3) 近藤洋史，河村龍馬；胴体相互干渉の近似推定法，東京大学，宇宙航空研究所報告 第7巻 第3号 1971年7月

付録 A

図Aに示す如く横軸を実軸 y とし、縦軸を虚軸 iz とする複素平面を考える。

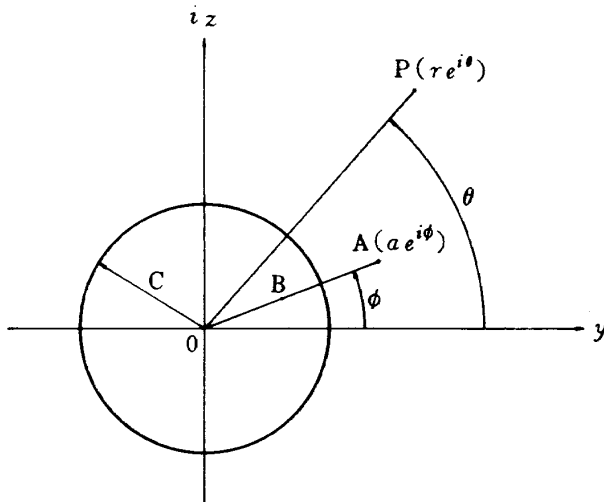


図 A

0点を原点として点A ($\overline{OA} = a$) を任意に取り、B点はA点の半径Cの円に対する鏡像点とすると、定義より $\overline{OB} = c^2/a$ である。

今、A点とB点に吹出し m を、0点に吸込み $-m$ があるとすると、P点での複素速度ポテンシャルは次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 f(\zeta) &= -\frac{m}{2\pi} \ln \zeta + \frac{m}{2\pi} \ln(\zeta - ae^{i\phi}) \\
 &+ \frac{m}{2\pi} \ln\left(\zeta - \frac{c^2}{a} e^{i\phi}\right) \\
 &= -\frac{m}{2\pi} \ln r e^{i\theta} + \frac{m}{2\pi} \ln \overline{AP} e^{i \tan^{-1} \frac{r \sin \theta - a \sin \phi}{r \cos \theta - a \cos \phi}} \\
 &+ \frac{m}{2\pi} \ln \overline{BP} e^{i \tan^{-1} \frac{r \sin \theta - \overline{OB} \sin \phi}{r \cos \theta - \overline{OB} \cos \phi}} \\
 &= -\frac{m}{2\pi} \ln r + \frac{m}{2\pi} \ln \overline{AP} + \frac{m}{2\pi} \ln \overline{BP} \\
 &+ i \left(-\frac{m}{2\pi} \theta + \frac{m}{2\pi} \tan^{-1} \frac{r \sin \theta - a \sin \phi}{r \cos \theta - a \cos \phi} \right. \\
 &\left. + \frac{m}{2\pi} \tan^{-1} \frac{r \sin \theta - \overline{OB} \sin \phi}{r \cos \theta - \overline{OB} \cos \phi} \right) \quad (A-1)
 \end{aligned}$$

従って、流れ関数 ϕ は

$$\phi = -\frac{m}{2\pi} \theta + \frac{m}{2\pi} \tan^{-1} \frac{r \sin \theta - a \sin \phi}{r \cos \theta - a \cos \phi}$$

$$+ \frac{m}{2\pi} \tan^{-1} \frac{r \sin \theta - \overline{OB} \sin \phi}{r \cos \theta - \overline{OB} \cos \phi} \quad (A-2)$$

円周上 $r = c$ で、

$$(\phi)_{r=c} = \frac{m}{2\pi} \phi = \text{一定} \quad (A-3)$$

依って、 $r = c$ なる円周上を流線としている。

この時の速度ポテンシャルは (A-1) 式の実部で与えられるから、

$$\begin{aligned}
 \varphi &= -\frac{m}{2\pi} \ln r + \frac{m}{2\pi} \ln \overline{AP} + \frac{m}{2\pi} \ln \overline{BP} \\
 &= -\frac{m}{2\pi} \ln r + \frac{m}{2\pi} \ln \{ r^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + a^2 \}^{1/2} \\
 &+ \frac{m}{2\pi} \ln \left\{ r^2 - 2\frac{c^2}{a} r \cos(\theta - \phi) + \frac{c^4}{a^2} \right\}^{1/2} \quad (A-4)
 \end{aligned}$$

となる。

ちなみに、(A-4) 式を r について微分し、 $r = c$ とすると、

$$(\varphi_r)_{r=c} = 0 \quad (A-5)$$

となり、ラジアル方向の速度は0となる。

従って、A点に吹出し m があるとき、これに加えて円Cの原点0に吸込み $-m$ を、鏡像点Bに m なる吹出しを分布させると、円Cの円周上でラジアル方向の速度変化を与えないことになる。

付録 B

ダブレットの円に対する鏡像を考える。

図Bの如く y 軸を実軸、 iz 軸を虚軸とする複素座標を考える。

図に示す如く、A点を中心として、距離 ϵ の所にB点とC点を線分BCが y 軸と β なる角をなす様にする。そこでB点に吸込み $-m$ をC点に吹出し m を置く。それらに依るP点での複素速度ポテンシャル $f_A(\zeta)$ は

$$f_A(\zeta) = -\frac{m}{2\pi} \ln(\zeta - \overline{OB} e^{i\phi_B}) + \frac{m}{2\pi} \ln(\zeta - \overline{OC} e^{i\phi_C}) \quad (B-1)$$

ここに、

$$\overline{OB} = \{ a^2 + 2a\epsilon \cos(\phi - \beta) + \epsilon^2 \}^{1/2} \quad (B-2)$$

$$\overline{OC} = \{ a^2 + 2a\epsilon \cos(\phi - \beta) + \epsilon^2 \}^{1/2} \quad (B-3)$$

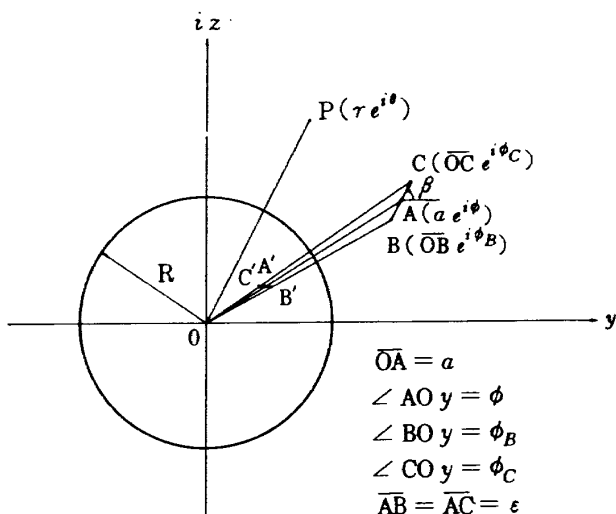


図 B

$$\phi_B = \tan^{-1} \frac{a \sin \phi - \epsilon \sin \beta}{a \cos \phi - \epsilon \cos \beta} \quad (\text{B-4})$$

$$\phi_C = \tan^{-1} \frac{a \sin \phi + \epsilon \sin \beta}{a \cos \phi + \epsilon \cos \beta} \quad (\text{B-5})$$

ここで、ダブレットの定義

$$M \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2m\epsilon \quad (\text{B-6})$$

を考慮して、 ϵ を 0 に収斂させると、

$$\begin{aligned} f_A(\zeta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{2m\epsilon}{2\pi} \right) \cdot \frac{1}{2\epsilon} \left\{ \ln(\zeta - \overline{OB} e^{i\phi_B}) \right. \\ &\quad \left. - \ln(\zeta - \overline{OC} e^{i\phi_C}) \right\} \\ &= -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{e^{i\beta}}{\zeta - a e^{i\phi}} \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

(B-7)式が A 点に置かれた大きさ M なるダブレットの P 点での複素速度ポテンシャルである。

(B-7)式の実部から速度ポテンシャルは (B-8) 式の如く与えられる。

$$\varphi_A = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{r \cos(\theta - \beta) - a \cos(\phi - \beta)}{r^2 + 2ar \cos(\theta - \phi) + a^2} \quad (\text{B-8})$$

B, C 点の円 R に対する鏡像点を B' , C' とする。付録 A にみられる如く、C 点にある吹出し m に対しては C' 点に吹出し m を 0 点に吸込み $-m$ を分布させ、B 点にある吸込み $-m$ に対しては B' 点に吸込み $-m$ を 0 点に吹出し m を分布させると、円 R を流線とする複素速度ポテンシャルが得られる。しかるに、0 点では吹出しと吸込みとで相殺されるので、新たに C' 点の吹出し m と B' 点の吸込み $-m$ について考えれば良い。

B' 点の吸込み $-m$ と C' 点の吹出し m による P 点での複素速度ポテンシャルは、

$$\begin{aligned} f_A'(\zeta) &= -\frac{m}{2\pi} \ln(\zeta - \overline{OB'} e^{i\phi_B}) \\ &\quad + \frac{m}{2\pi} \ln(\zeta - \overline{OC'} e^{i\phi_C}) \end{aligned} \quad (\text{B-9})$$

ここに、

$$\overline{OB'} = \frac{R^2}{\overline{OB}} = \frac{R^2}{\{a^2 - 2a\epsilon \cos(\theta - \beta) + \epsilon^2\}^{1/2}} \quad (\text{B-10})$$

$$\overline{OC'} = \frac{R^2}{\overline{OC}} = \frac{R^2}{\{a^2 + 2a\epsilon \cos(\theta - \beta) + \epsilon^2\}^{1/2}} \quad (\text{B-11})$$

ここで、 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\epsilon m = M$ として、 $\epsilon \rightarrow 0$ なる極限を取ると、

$$f_A'(\zeta) = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot \frac{e^{i(2\phi - \beta + \pi)}}{\zeta - \frac{R^2}{a} e^{i\phi}} \quad (\text{B-12})$$

速度ポテンシャルは (B-12) 式の実部として (B-13) 式の如く与えられる。

$$\varphi_A' = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot \frac{-r \cos(\theta + \beta - 2\phi) + \frac{R^2}{a} \cos(\phi - \beta)}{r^2 + 2\frac{R^2}{a} r \cos(\theta - \phi) + \frac{R^4}{a^2}} \quad (\text{B-13})$$

航空宇宙技術研究所報告752号

昭和58年3月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊦182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山5-6-17
