

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-759

波板ウェブのせん断座屈強度

三本木 茂夫 ・ 戸田 勸

1983年5月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

波板ウェブのせん断座屈強度*

三本木 茂 夫** 戸 田 勲**

Buckling Strength of Corrugated Shear Webs

Shigeo SANBONGI and Susumu TODA

ABSTRACT

The buckling strength of corrugated shear webs was investigated. A finite element program containing a curved strip element was used in the analysis. Effects of geometrical parameters such as ratio of web depth to pitch and ratio of amplitude to pitch in corrugation were discussed. Buckling stresses obtained from an approximate solution to the corrugated plates by using an anisotropic plate model were compared with those obtained from finite element solutions.

Experimental results were obtained from tests performed on polyester corrugated plates and were compared with computed results.

1. はじめに

波板は軽量構造要素として古くから各種の構造物に適用されており、航空機構造においても波板を積極的に採用する試みがなされたことがあった。これらの構造物で用いられた波板は、いわゆるトタン板で代表されるように、波のピッチに比べて波の軸方向の長さが十分に長い形状であって、その力学的特性が直交異方性板のモデルによって解析できるものであった。ところが最近開発されている advanced structure¹⁾あるいは複合材製の翼桁ウェブでは、²⁾³⁾波の軸方向長さが比較的短かく、直交異方性板モデルの解析結果を適用するには無理があると考えられる。このような短かい波板から長い波板までの範囲にわたる圧縮座屈特性を前回の報告⁴⁾では解明したが、今回はせん断座屈特性について調べた。解析は、波板を高精度の曲面帯板要素でモデル化した有限要素法で行った。まず、無限幅の波板について形

状寸法と座屈応力の関係を求め、次に有限幅の影響を調べた。更に、最適波板寸法を決定する一つの試みとして、座屈応力が規定された場合の最小板厚の波板の形状パラメータに対して計算した。また、有限要素解析で得られる波板のせん断座屈応力が実際の座屈応力とどの程度一致するかを調べるために、ポリエステルフィルムで波板を作製し、座屈実験を行った。

2. 解 析 法

図1に示すように波板を曲面帯板要素の集合体としてモデル化する。軸方向の境界 ($x=0$ および $x=L$) では $v=w=\partial^2 w/\partial x^2=0$ の単純支持を仮定し、変位関数には次式を用いる。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^k \{Y\}^T \{ \delta_u^{(n)} \} \cdot \cos(n\pi x/L) \\ v &= \sum_{n=1}^k \{Y\}^T \{ \delta_v^{(n)} \} \cdot \sin(n\pi x/L) \\ w &= \sum_{n=1}^k \{Y\}^T \{ \delta_w^{(n)} \} \cdot \sin(n\pi x/L) \end{aligned} \quad (1)$$

* 昭和57年12月8日受付

** 機体第二部

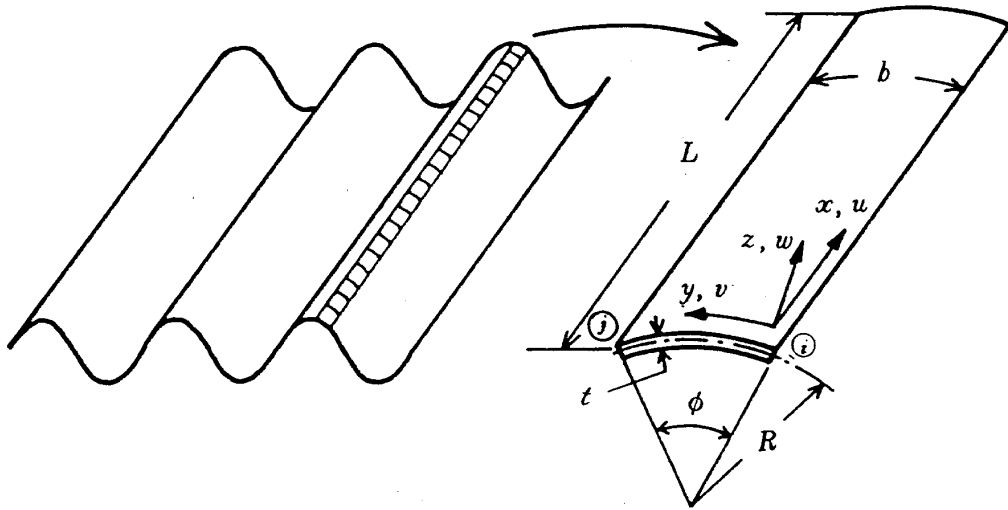


図1 帯板要素による解析モデル

ここで $\{Y\}^T$ は y 方向の補関数であり次式で与えられる。

$$\{Y\}^T = \{ 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, (\eta - 2\eta^2 + \eta^3)b, 3\eta^2 - 2\eta^3, (-\eta^2 + \eta^3)b \}^T \quad (2)$$

ただし

$$\eta = y/b, \quad b = R\phi$$

また,

$$\begin{aligned} \{\delta_u^{(n)}\} &= \{u_i^{(n)}, u_{yi}^{(n)}, u_j^{(n)}, u_{yj}^{(n)}\} \\ \{\delta_v^{(n)}\} &= \{v_i^{(n)}, v_{yi}^{(n)}, v_j^{(n)}, v_{yj}^{(n)}\} \\ \{\delta_w^{(n)}\} &= \{w_i^{(n)}, w_{yi}^{(n)}, w_j^{(n)}, w_{yj}^{(n)}\} \end{aligned} \quad (3)$$

u_y, v_y, w_y はそれぞれ $\partial u/\partial y, \partial v/\partial y, \partial w/\partial y$ を表わし, i, j はそれぞれ i, j 節点における値であることを表わす。

ひずみと変位の関係を, Sanders の定義に基づいて次式で表わす。

線形膜ひずみ:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^L &= \partial u/\partial x \\ \epsilon_y^L &= \partial v/\partial y + w/R \\ \gamma_{xy}^L &= \partial v/\partial x + \partial u/\partial y \end{aligned} \quad (4)$$

曲げひずみ:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^z &= -z \cdot \partial^2 w/\partial x^2 \\ \epsilon_y^z &= -z \cdot [\partial^2 w/\partial y^2 - (1/R)(\partial v/\partial y)] \\ \gamma_{xy}^z &= -z \cdot [2\partial^2 w/\partial x \partial y - (3/2R)(\partial v/\partial x) + (1/2R)(\partial u/\partial y)] \end{aligned} \quad (5)$$

非線形膜ひずみ:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^N &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial w/\partial x)^2 \\ \epsilon_y^N &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial w/\partial y - v/R)^2 \\ \gamma_{xy}^N &= (\partial w/\partial x)(\partial w/\partial y) - (v/R)(\partial w/\partial x) \end{aligned} \quad (6)$$

剛性マトリックス

式(1)~(3)の変位関数を式(4)と(5)に代入したものを $\{\epsilon^L\} = [B^L] \{\delta\}$ および $\{\epsilon^z\} = [B^z] \{\delta\}$ と表わし, 応力とひずみの関係を $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$ で表示すると, 等方性材料あるいは対称積層板に対する剛性マトリックスは次式で与えられる。⁵⁾

$$[k] = \int [B^L]^T [D] [B^L] dV + \int [B^z]^T [D] [B^z] dV \quad (7)$$

ここで

$$[k] = \begin{matrix} \begin{matrix} k_{uu} & k_{uw} & k_{uw} \\ & k_{vv} & k_{vw} \\ \text{対称} & & k_{ww} \end{matrix} \end{matrix} \rightarrow [k_{vw}] = \begin{matrix} [k_{vw}^{(1,1)}] & \dots & [k_{vw}^{(1,n)}] \\ \vdots & & \vdots \\ [k_{vw}^{(n,1)}] & \dots & [k_{vw}^{(n,n)}] \end{matrix} \quad (8)$$

一般の異方性板の場合には上式のように, $n = p$ と $n = q$ に対応する連成項 $[k^{(p,q)}]$ が存在するが, 等方性板あるいは直交異方性板のように, 膜剛性 $[\bar{D}]$ および曲げ剛性 $[\bar{D}^z]$ の中の $\bar{D}_{13}, \bar{D}_{23}$ および

D_{13}^2, D_{23}^2 が零の場合は、連成項はすべて零になる。本論文では等方性板ないしは直交異方性板の扱いをするので連成項はなく計算結果は簡単に次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
[k_{uu}^{(A,p)}] &= \bar{D}_{11}(L/2)(p\pi/L)^2 [C_1] \\
&\quad + \bar{D}_{33}(L/2) [C_2] \\
&\quad + D_{33}^2(L/2)(1/2R)^2 [C_2] \\
[k_{ww}^{(A,p)}] &= -\bar{D}_{12}(L/2)(p\pi/L) [C_3] \\
&\quad + D_{33}^2(p\pi/L) [C_4] \\
&\quad \cdot \{L/2 - (3L/8)(1/R)^2\} \\
[k_{uw}^{(A,p)}] &= -\bar{D}_{12}(L/2)(p\pi/LR) [C_1] \\
&\quad + D_{33}^2(L/2)(p\pi/LR) [C_2] \\
[k_{vv}^{(A,p)}] &= \bar{D}_{22}(L/2) [C_2] \\
&\quad + \bar{D}_{33}(L/2)(p\pi/L)^2 [C_1] \\
&\quad + D_{22}^2(L/2)(1/R)^2 [C_2] \\
&\quad + D_{33}^2(L/2)(3/2R)^2 (p\pi/L)^2 [C_1] \\
[k_{vw}^{(A,p)}] &= \bar{D}_{22}(L/2R) [C_4] \\
&\quad - D_{22}^2(L/2R) [C_5] \\
&\quad - D_{12}^2(L/2R)(p\pi/L)^2 [C_4] \\
&\quad - D_{33}^2(3L/2R)(p\pi/L)^2 [C_3] \\
[k_{ww}^{(A,p)}] &= \bar{D}_{22}(L/2)(1/R)^2 [C_1] \\
&\quad + D_{11}^2(L/2)(p\pi/L)^4 [C_1] \\
&\quad + D_{22}^2(L/2) [C_8] \\
&\quad - D_{12}^2(L/2)(p\pi/L)^2 ([C_6] + [C_7]) \\
&\quad + D_{33}^2(2L)(p\pi/L)^2 [C_2]
\end{aligned} \tag{9}$$

ここで

$$[\bar{D}] = \int_{-1/2}^{1/2} [D] dz, \quad [D^2] = \int_{-1/2}^{1/2} [D] z^2 dz \tag{10}$$

$$[C_1] = \int_0^b \{Y\} \{Y\}^T dy$$

$$[C_2] = \int_0^b \{\partial Y / \partial y\} \{\partial Y / \partial y\}^T dy$$

$$[C_3] = \int_0^b \{Y\} \{\partial Y / \partial y\}^T dy$$

$$[C_4] = [C_3]^T$$

$$[C_5] = \int_0^b \{\partial Y / \partial y\} \{\partial^2 Y / \partial y^2\}^T dy$$

$$[C_6] = \int_0^b \{Y\} \{\partial^2 Y / \partial y^2\}^T dy$$

$$[C_7] = [C_6]^T$$

$$[C_8] = \int_0^b \{\partial^2 Y / \partial y^2\} \{\partial^2 Y / \partial y^2\}^T dy \tag{11}$$

初期応力マトリックス

$\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ の初期応力がある場合の初期応力マトリックス $[k^C]$ は一般に次式で与えられる。⁵⁾

$$\begin{aligned}
k_{ij}^C &= \int [\sigma_x^0 (\partial^2 \epsilon_x^N / \partial \delta_i \partial \delta_j) \\
&\quad + \sigma_y^0 (\partial^2 \epsilon_y^N / \partial \delta_i \partial \delta_j) \\
&\quad + \tau_{xy}^0 (\partial^2 \tau_{xy}^N / \partial \delta_i \partial \delta_j)] dV \tag{12}
\end{aligned}$$

式(1), (2), (3), (6)を上式に代入すると、要素内初期応力分布が一様の場合には次式のように求められる。式(8)と同様に対角を含む上半分だけについて示す。

非連成項

$$\begin{aligned}
[k_{uu}^{C(A,p)}] &= (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) (Lt/8) [C_2] \\
[k_{ww}^{C(A,p)}] &= -(\sigma_x^0 + \sigma_y^0) (p\pi t/8) [C_4] \\
[k_{uw}^{C(A,p)}] &= 0 \\
[k_{vv}^{C(A,p)}] &= (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) (Lt/8) (p\pi/L)^2 [C_1] \\
&\quad + \sigma_y^0 (Lt/2) (1/R)^2 [C_1] \\
[k_{vw}^{C(A,p)}] &= -\sigma_y^0 (Lt/2R) [C_3] \\
[k_{ww}^{C(A,p)}] &= \sigma_x^0 (Lt/2) (p\pi/L)^2 [C_1] \\
&\quad + \sigma_y^0 (Lt/2) [C_2] \tag{13}
\end{aligned}$$

連成項

$$\begin{aligned}
[k_{vw}^{C(A,q)}] &= -\tau_{xy}^0 (q\pi t/2R) S(p, q) [C_1] \\
[k_{ww}^{C(A,q)}] &= \tau_{xy}^0 (p\pi t/2) S(p, q) [C_3] \\
&\quad + \tau_{xy}^0 (q\pi t/2) S(p, q) [C_4] \tag{14}
\end{aligned}$$

ここで

$$S(p, q) = \int_0^L \sin(p\pi x/L) \cdot \cos(q\pi x/L) dx$$

であって

$$p \pm q \text{ が偶数のとき } S(p, q) = 0$$

$$p \pm q \text{ が奇数のとき } S(p, q)$$

$$= 2Lp / [\pi(p^2 - q^2)] \tag{15}$$

式(13)および(14)に示されるように、 τ_{xy}^0 に関するせん断座屈の解析の場合は、初期応力マトリックスが式

(14)の連成項だけとなる。

節点パラメータの変換

これまでに得られたマトリックスは、各 n について $\{\delta_u^{(n)}, \delta_v^{(n)}, \delta_w^{(n)}\}$ に対応した順序で配列されているが、構造全体のマトリックスの組立に際して、次のような節点ごとの順序に再配列する。

$$\{u_i^{(n)}, u_{jx}^{(n)}, v_i^{(n)}, v_{jy}^{(n)}, w_i^{(n)}, w_{jz}^{(n)}, u_j^{(n)}, u_{jy}^{(n)}, v_j^{(n)}, v_{jx}^{(n)}, w_j^{(n)}, w_{jz}^{(n)}\} \quad (16)$$

さらに、図1の x 軸まわりの回転変位が

$$\theta = -\partial w / \partial y + v / R \quad (17)$$

であり、これは節点において連続であるから、式(16)の節点変位ベクトル内の $\partial w / \partial y$ を θ に置きかえ、これに対応するようにマトリックスを変換する。

また、被板においては波の山と谷との中間点(変曲点)で、 $\partial u / \partial y$ 、 $\partial v / \partial y$ が不連続になるから、この点ではこれらのパラメータを独立に扱おう。⁴⁾

座屈応力の計算

剛性マトリックスおよび初期応力マトリックス ($\tau_{xy}^0 = 1$, $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = 0$) を被板全体について組立てたものをそれぞれ $[K]$ および $[K_G]$ で表わすと、せん断座屈に関する固有値方程式が次のように求められる。

$$([K] + \lambda [K_G]) \{\delta\} = 0 \quad (18)$$

解法には逆べき乗法を用いた。剛性マトリックスは一般には各節点ごとの節点パラメータ $\{\delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}, \dots, \delta_i^{(n)}\}$, $\{\delta_j^{(1)}, \delta_j^{(2)}, \dots, \delta_j^{(n)}\}$ に対応して組立てられる。ところが、式(9)に示したように n に関する連成項が無いので、各 n ごとに全体マトリックスを配列しなおし、 $\{\delta_i^{(1)}, \delta_i^{(1)}\}$, $\{\delta_i^{(2)}, \delta_i^{(2)}\}$, \dots , $\{\delta_i^{(n)}, \delta_i^{(n)}\}$ に対応してバンドマトリックスの形式で表現できる。初期応力マトリックスは連成項だけから成り、上記の順序で配列するとバンド幅が非常に大きくなるので、実際には全体マトリックスの組立てを行わずに各要素マトリックス単位の演算で処理するように工夫した。

3. 数値解析結果

3.1 解の精度のチェック

帯板要素では構造を分割する要素数 N および、変位関数に含まれる級数項の数 n の両者が解析精度に影響を与える。波板の解析に先立ち、どの程度の N と n を用いれば実用的な許容範囲の解が得られるかの目安を知るために、Batdorf⁶⁾ が Galerkin 法で解析した曲面板のせん断座屈について何通りかの数値

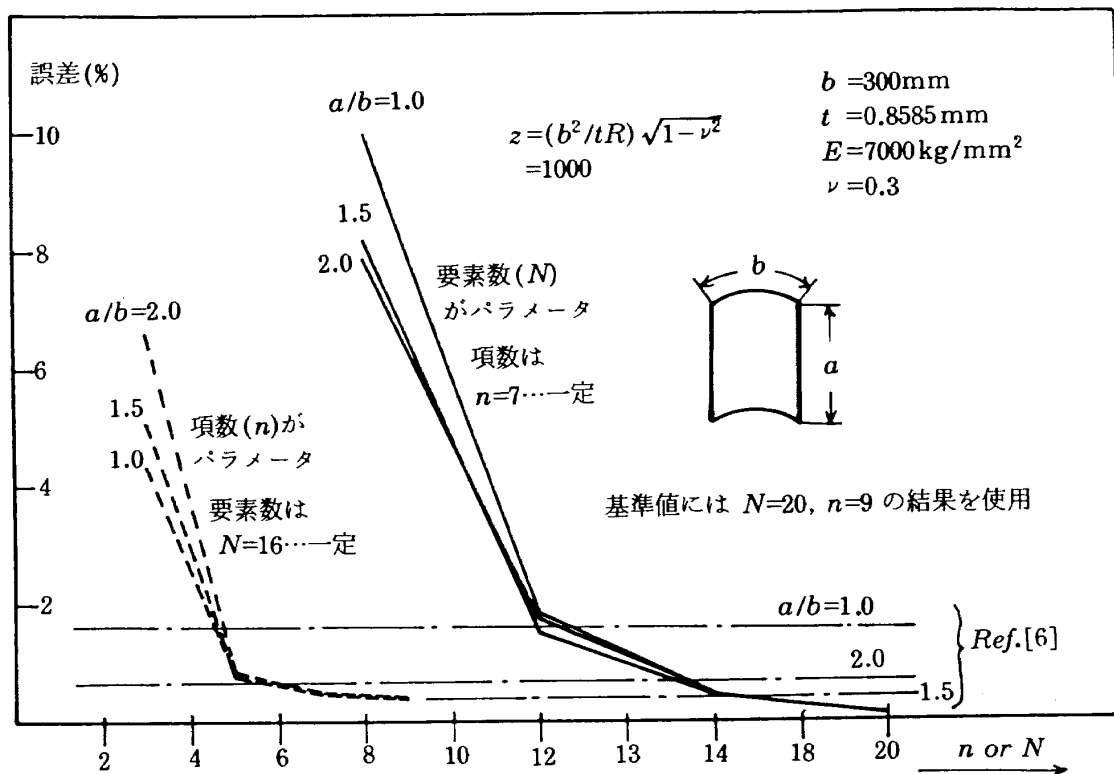


図2 曲面板のせん断座屈解析における収束状況

計算を実施して解の比較を行った。境界条件は、たわみに関して四辺ともに単純支持、面内に関して四辺ともに辺に沿う方向の変位を拘束。計算結果を図2に示す。Batdorfの解析では級数展開の項数が比較的少ないこと、使用している変位とひずみの関係式がSandersの式でないことなどにより、帯板要素の $N=20$ 、 $n=9$ の結果を基準値にとって比較してある。この例題の曲面板は約 180° の開き角を持っているが、要素数 $N=16$ 、級数の項数 $n=7$ 程度をとれば1%程度の差に解が収まることがわかる。

無限幅境界条件

無限幅の板の座屈波は、幅方向に沿って周期的に生じるから、座屈波の周期長で板を区切った場合の両端部(図3のAおよびB)の変形は等しくなる。したがって、一周周期長を解析領域にとり、両端部の節点変位を等しく置くことによって無限幅境界条件とする。ただし、真の周期長を前もって知ることができないから、適当に仮定した周期長で座屈応力を何点か求め、最小座屈応力を内挿によって求める。図3は平板の場合の計算結果であるが、この方法で求めた座屈応力および周期長が理論解と一致することを示す。

波板の場合は変形の周期が波板断面寸法の整数倍になるものと予測されるので、波板の半波長 B の偶

数倍と奇数倍の両者について同様の計算を行って調べた。図4に示すように、半波長の偶数倍を解析領域にとった場合に最小座屈応力が得られている。

3.2 無限幅波板のせん断座屈特性

前述の検討結果に基づき、解析領域 S を変えて最小座屈応力を求める方法で、波板の形状寸法と座屈応力との関係を調べた。ここでは、波板の半波長 B を一定(40mm)とし、波形の扁平率 H/B 、板厚 t 、軸方向長さ L をパラメータにとった。 $H/B=0.3$ の場合の結果を図5に示す。図中の点線は波板を剛性がこれと等価な直交異方性板とみなした解析結果である⁷⁾。波板の圧縮座屈特性⁴⁾と同様に、 L/B が大きい領域では帯板要素を用いたシェル・モデルによる計算結果と、直交異方性板モデルによる計算結果とがほとんど一致している。一方、 L/B が小さくなってゆくと両者の差が顕著に現われ、シェル・モデルの計算結果では応力上昇が頭打ちとなる点が存在する。これは、圧縮座屈特性にも見られたように、波板が直交異方性板モードで座屈する寸法領域とシェル・モードで座屈する領域との遷移点に対応するものである。図中に示すように、 L/B が小さいところでは座屈変形の周期 S が小さく、 L/B が大きくなるに従って S も大きくなっている。

図6には $H/B=0.5$ の場合について同様な計算

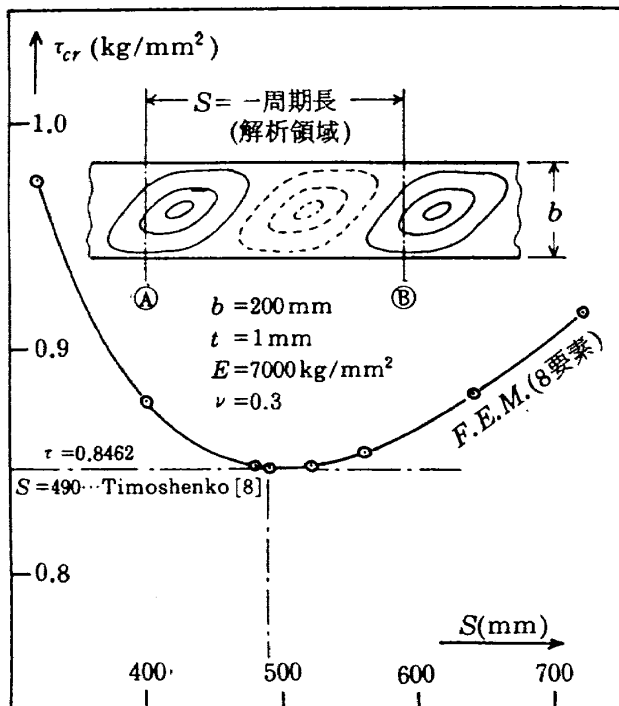


図3 無限幅平板のせん断座屈解析

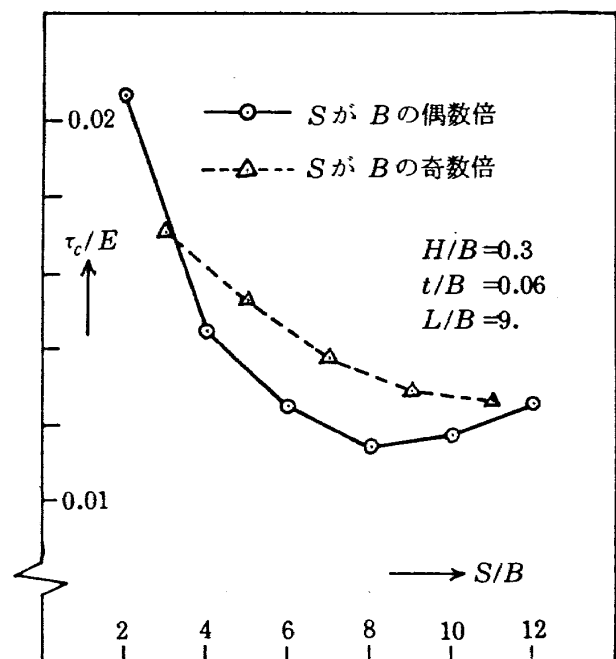


図4 変形周期と座屈応力

結果を示す。一般的傾向は前例と同様であるが、 $H/B = 0.3$ の場合は L/B が 20 以上になるとシェル・モデルと直交異方性板モデルの結果がほぼ同じになるが、これよりも波高の大きい $H/B = 0.5$ の場合には L/B が更に大きくなると両者の結果が同じにならない。

図 7 は $t/B = 0.04$ の場合について、各 H/B に対する座屈応力と L/B との関係調べたものである。遷移点より L/B が大きい直交異方性板モードの領域では、 H/B が大きいほど、つまり波板の波高が高くなるほど座屈応力も高くなるが、シェル・モードの領域ではそれほど顕著な差が生じていない。当然のことではあるが、 $H/B = 0$ の平板の座屈応力は H/B が比較的小さい浅い波板と比べても非常に小さく、波板の効果が大きいことを示している。

図 8 には複合材製桁ウェブに使用される波板の場合について示す。材料はグラファイト/エポキシ系の織物材であり、公称層厚 = 0.4mm を下記のように 6 枚積層したものである。

$/0^\circ - 90^\circ / 45^\circ / 45^\circ / 45^\circ / 45^\circ / 0^\circ - 90^\circ /$

素材 ($0^\circ - 90^\circ$) の弾性係数には次の値を用いた。

$$E_L = E_T = 6100 \text{ kg/mm}^2, \quad G_{LT} = 730 \text{ kg/mm}^2, \\ \nu_{LT} = 0.077$$

この例でも、波板の軸方向長 L が極端に短い場合は、シェル・モデルによる有限要素解析と直交異方性板モデルによる解析結果とが大きく異っており、後者の結果は座屈応力に関して危険側の推定値を与えることを示している。

3.3 有限幅の影響

実際の波板構造は有限幅であるから、次にこの影響を調べるために 4 種類の長方形板について計算を行った。(a) 平板, (b) 直交異方性板, (c) L/B の大きい波板, (d) L/B の小さい波板, の各々に対して細長比が 0.5 ~ 2.0 の範囲で、側辺が $w = 0$ の単純支持の場合の座屈応力を計算し、いずれも無限幅の座屈応力 τ_∞ との比によって整理した。図 9 に結果を示す。ここで特徴的なことは、平板では細長比が小さくなるに従って座屈応力が急激に高くなるが、ここで扱った $H/B = 0.3$ 程度の波板の場合には、シェル・モデルでも直交異方性板モデルでも細長比の変化に対して座屈応力がほとんど変わらないことであ

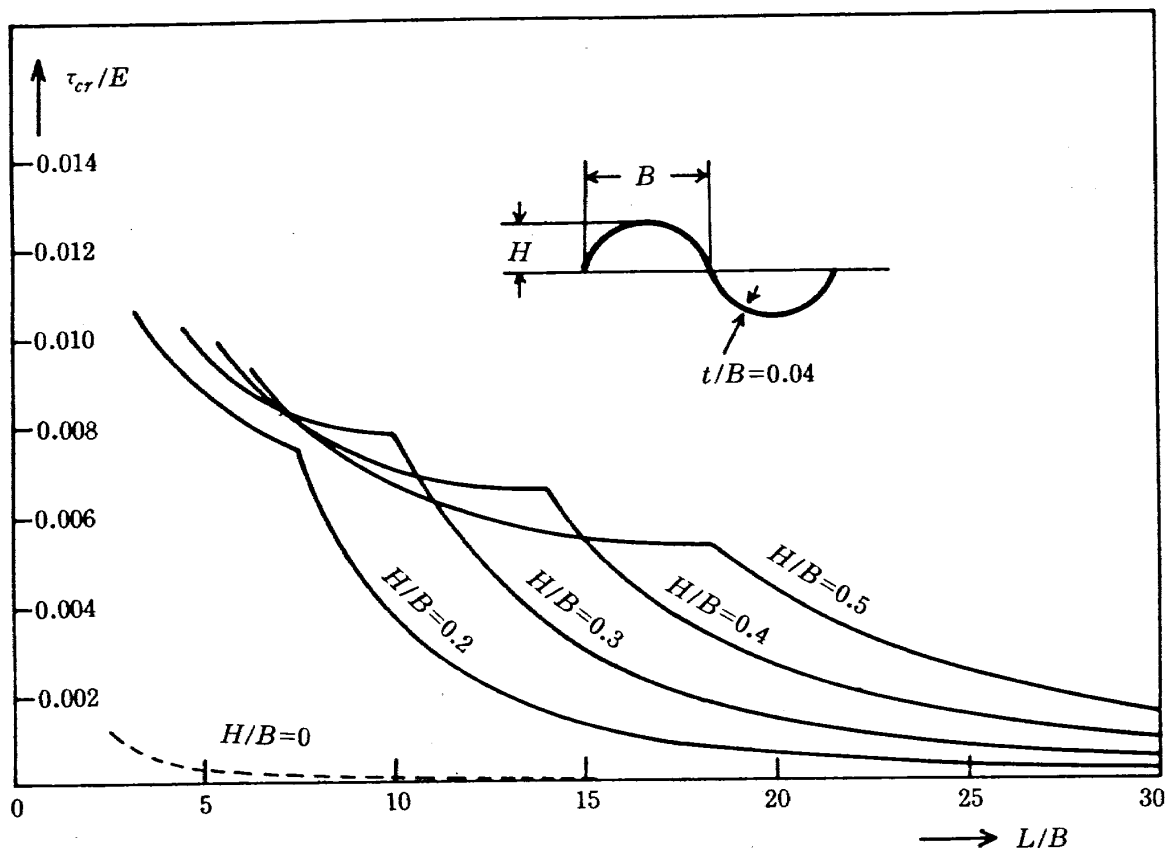


図 7 扁平率 (H/B) と座屈応力の関係

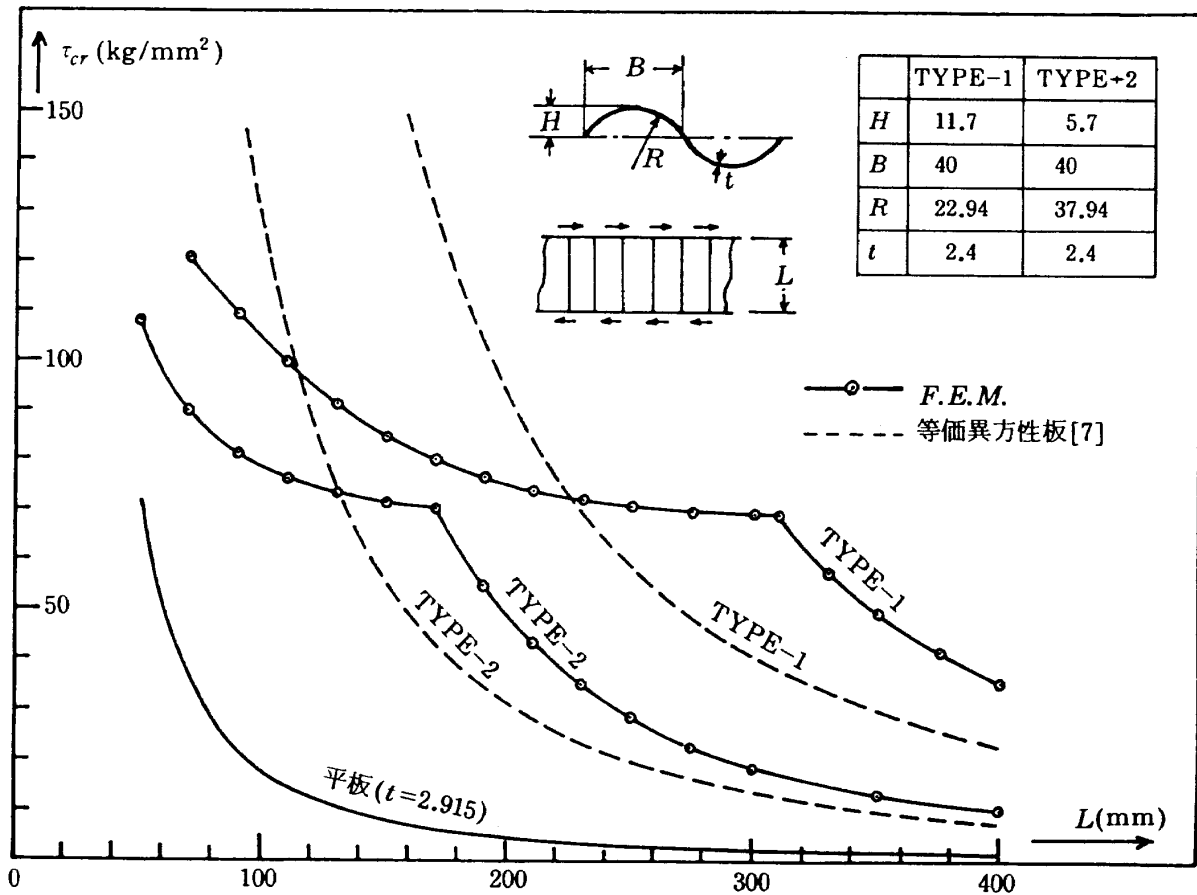


図8 複合材製波板のせん断座屈特性（無限幅）

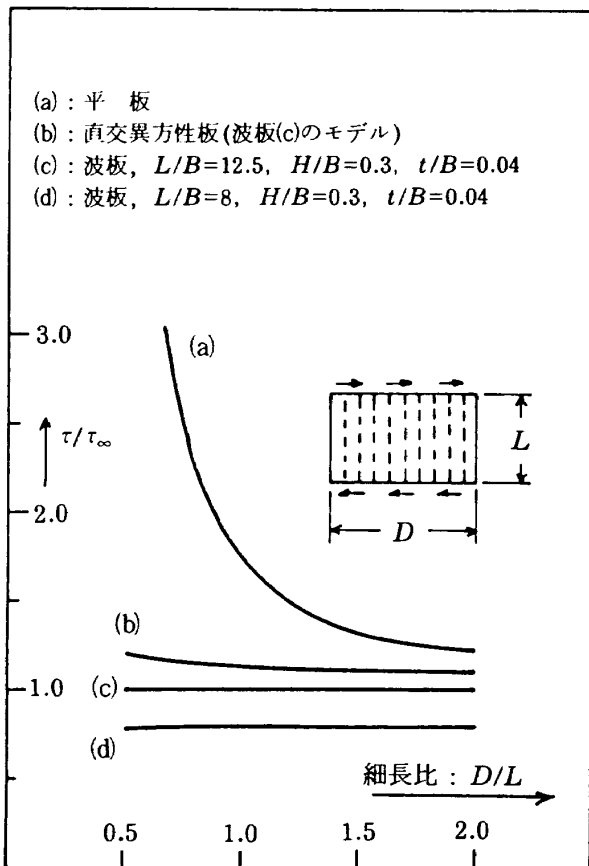


図9 細長比の影響

る。したがって、無限幅の代りに適当な有限幅について計算すれば波板の座屈特性が把握でき、有限要素法などの数値解析には都合がよい。

3.4 最適波板形状寸法に関する検討

これまでに示した解析結果は、波のピッチを一定にして、扁平率、軸方向長さなどの座屈応力への影響を調べたものである。航空機翼の桁構造の設計では、まず桁の高さと荷重が与えられ、強度基準を満たし、かつ最少重量となる波板形状寸法を決定することになる。ここでは、桁ウェブのせん断座屈応力を強度基準にとった場合の複合材製波板ウェブの最適形状がどのようなものになるかを調べてみる。簡単のために、波板ウェブは3.2項で扱ったものと同じ織物材の45°積層だけで構成されているものとする。一層の厚みは公称0.4mmであるが、織物材の±45°積層では板厚方向に均質であるとみなされるから単位板厚(1mm)に関して面内剛性 $[\bar{D}]$ と曲げ剛性 $[D^z]$ を表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 [\bar{D}] &= \begin{pmatrix} 4034 & 2575 & 0 \\ 2575 & 4034 & 0 \\ 0 & 0 & 2832 \end{pmatrix} \\
 [D^*] &= \begin{pmatrix} 336.2 & 214.6 & 0 \\ 214.6 & 336.2 & 0 \\ 0 & 0 & 236.0 \end{pmatrix} \quad (19)
 \end{aligned}$$

板厚を規定した場合

まず最初に、桁の高さ L および板厚 t を一定にして、波の半ピッチ B を変えた場合の座屈応力の傾向を調べた。図 10 は $t = 1.6\text{mm}$ (4枚積層), $L = 200\text{mm}$, 400mm に対する計算結果である。どの扁平率 (H/B) についても各々波の半ピッチ B がある値の時に最大座屈応力を示している。前述の B および t が一定の計算結果 (図 5) では L/B が小さくなるほど座屈応力が高くなることを示したが、 L および t が一定の場合には、 L/B が小ということは B が大であって t/B が小さくなるので、シェル座屈が生じる L/B の小さい領域では座屈応力が逆に低下する。また、 L/B を大きくとるほど B の値は小さくなるので異方性板としての座屈が生じるこの領域ではやはり座屈応力が低下する。このような理由

によって、 L , t , H/B を指定した時に座屈応力が最大になる波の半ピッチ長 B が存在することになる。図 10 では H/B が大きくなるほど最大座屈応力が高くなる傾向を示しているが、 H/B が大きいほど波が深く、波の弧長とピッチとの比も大きくなり桁ウェブの単位長さ当りの体積が増加するから、この図だけからは H/B が大きいほど有利であるとは言えない。弧長とピッチとの比 C は、 $H/B = \alpha$ とおくと次式で表わされる。

$$C = (0.25/\alpha + \alpha) \cdot \tan^{-1}[\alpha / (0.25 - \alpha^2)] \quad (20)$$

たとえば、 $\alpha = 0.2$ で $C = 1.103$, $\alpha = 0.5$ で $C = 1.571$ となる。

座屈応力を規定した場合

桁の高さ L および座屈応力 τ_0 を与えた場合に、この条件を満たす板厚 t を種々の H/B および L/B について計算した。ここでは便宜上、座屈解析プログラムをそのまま使用したので、板厚 t を直接に求めることはできず、何点かの計算値から補間して求めた。すなわち、(i) 適当な板厚 t_1 を与えて対応する座屈応力 τ_1 を計算する。(ii) 線形補間によって規

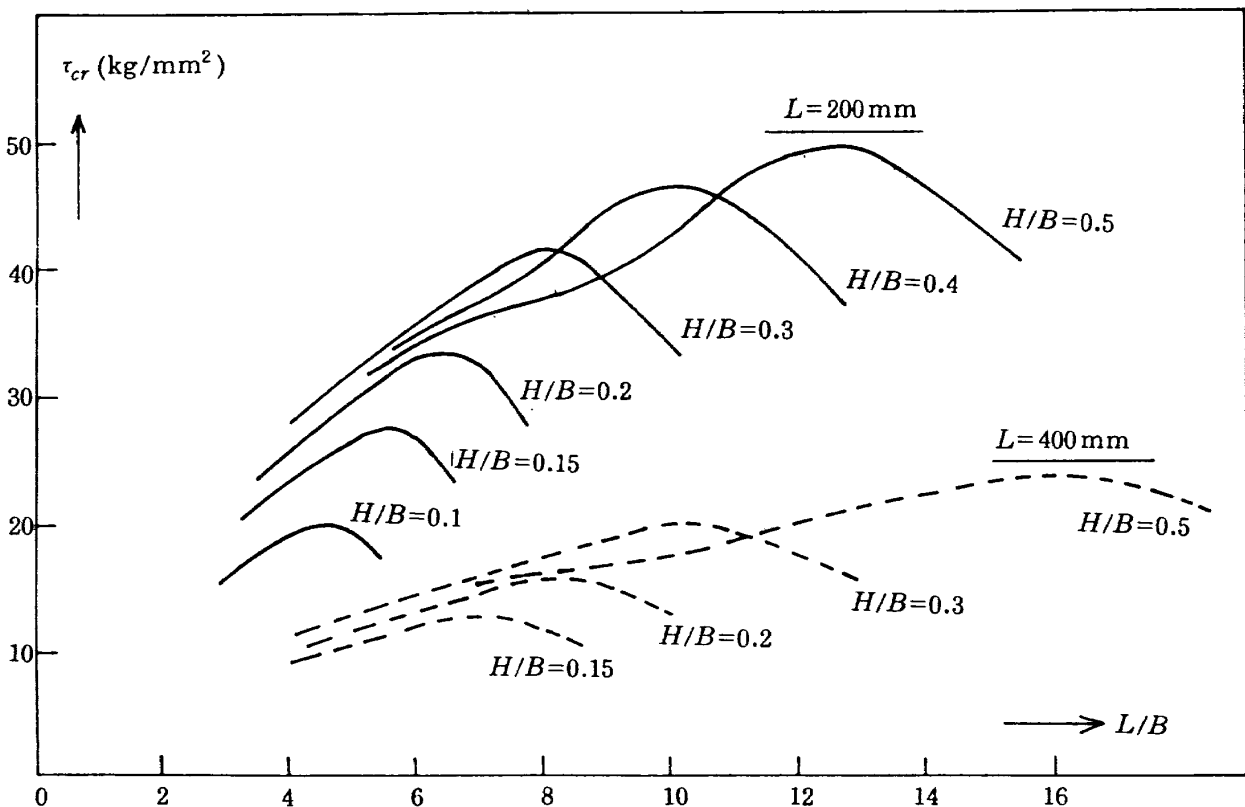


図 10 長さ L を一定にした場合のせん断座屈特性

定座屈応力 τ_0 に対応する板厚の近似値 t_2 を求めて座屈応力 τ_2 を計算する。(iii) 原点 ($t=0, \tau=0$) と点 (t_1, τ_1), (t_2, τ_2) の三点から二次曲線補間を行い、近似値 t_3 を求めて τ_3 を計算する。(iv) τ_0 に近い三点を用いた同様の補間を以後は続ける。板厚の近似値間の差が2%以下になったら計算を終了する。初期値の取り方にもよるが、4回以内の計算でほとんどが収束した。

数値計算は $L=200\text{mm}$ の場合に対して、 $\tau_0=27\text{kg/mm}^2$ および 13.5kg/mm^2 の二通りについて行った。ここで用いた τ_0 の値は実験で得られたせん断破壊強度³⁾ およびその半分の値に対応するものである。

図11および図12にそれぞれ $\tau_0=27\text{kg/mm}^2$ および $\tau_0=13.5\text{kg/mm}^2$ に対する計算結果を示す。図中の実線は規定された応力 τ_0 で座屈する限界板厚を表わしている。 H/B が大きいほど最小板厚が小さ

くなる傾向にあるが、これは前述の図10からも予想された結果である。一方、図中の点線はこの結果を最少重量の観点から、波板を平板とみなした場合の等価板厚として表示したものであって、波板の板厚に式(20)の C の値をかけてある。 $H/B=0.3$ と $H/B=0.4$ はほぼ同程度の重量であり、 $H/B=0.5$ では重量がこれよりも増加し、最適値は H/B が0.3と0.4の間にあることを表わしている。

これらの結果は板厚あるいは加工上の制約をいっさい考慮に入れない場合に対するものであるが、実際には何らかの制約がある。積層構造では板厚が一層の厚みの整数倍あるいは偶数倍になるという制約がある。織物材の一層が約0.4mmであるから、偶数倍の積層では最小0.8mmで0.8mmきざみの板厚しか選択できない。規定応力 $\tau_0=27\text{kg/mm}^2$ の場合は $H/B=0.4$ で $t=0.93\text{mm}$, $L/B=12$ の寸法の波板が最適に近いが、板厚の制約から $t=1.6\text{mm}$

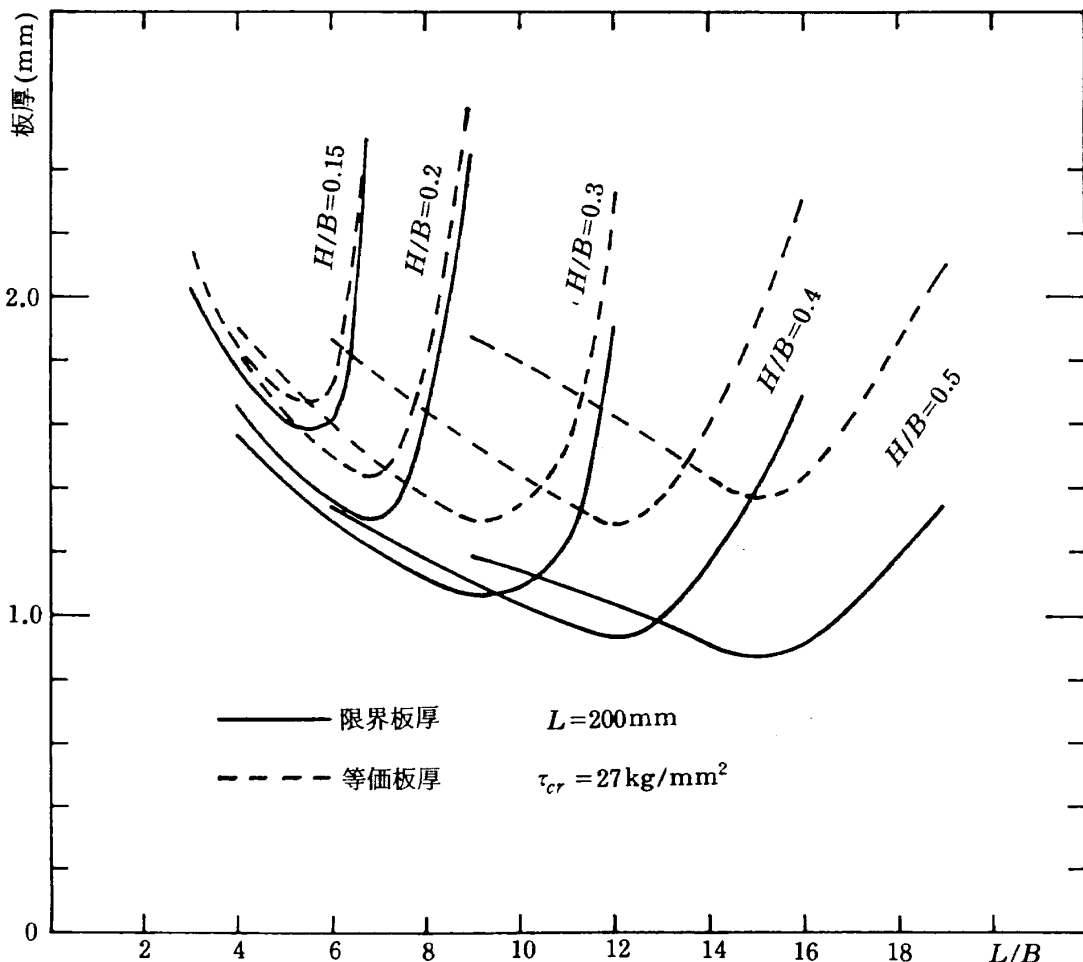


図11 座屈応力を規定した場合の板厚と L/B の関係 ($\tau_{cr}=27\text{kg/mm}^2$)

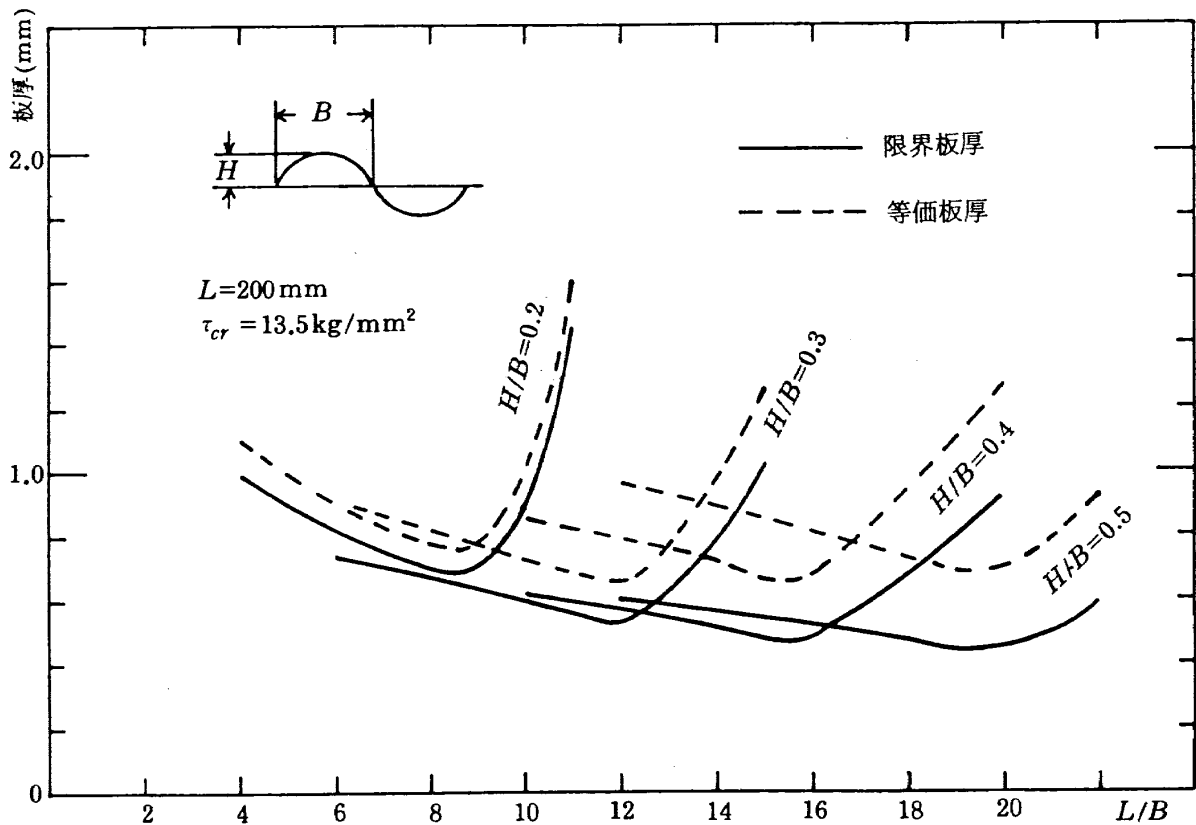


図12 座屈応力を規定した場合の板厚と L/B の関係
($\tau_{cr} = 13.5 \text{ kg/mm}^2$)

にとることになる。この板厚に対しては H/B および L/B の選択幅がかなりあるが、成型加工の点からはなるべく浅い波形が好ましく、かつ重量も軽減されるので $H/B=0.15$ 、 $L/B=5.5$ 程度の波形が選ばれるであろう。同様にして、 $\tau_0 = 13.5 \text{ kg/mm}$ の場合は、 $t = 0.8 \text{ mm}$ 、 $H/B = 0.2$ 、 $L/B = 6 \sim 7$ 程度の形状になる。

一般には、材料の破壊強度と安全率に基づいて τ_0 を定め、外荷重との関係から材料強度を基準にした板厚 t_0 をまず最初に求める。次に、座屈応力 τ_0 に対する板厚 t を前述の要領で求め、 $t > t_0$ ならば t を採用して波板の波形を定める。もし、 $t < t_0$ であるならば t_0 を採用し、 τ_0 で座屈しない範囲でなるべく浅い波形を選ぶ。

ここに示した例は $L = 200 \text{ mm}$ の 45° 積層織物材製ウェブに関するものであるが、同じ τ_0 に対して L と t とは比例関係にあるから、代表的な積層構成比の材料について図11、12のような計算結果を求めておけば、 L と荷重が任意に与えられた場合に対しても波板形状寸法の合理的な設計が行なえる。

4. せん断座屈実験

一般に、薄肉シェル構造の座屈は解析値よりもかなり低い荷重で生じる傾向がある。波板の場合も、桁ウェブのような L/B の小さい形状に対しては同様なことが推測されるので、座屈実験を行って解析結果と比較した。

4.1 供試体製作と実験方法

波板の材料として、円筒シェルの座屈実験⁹⁾で実績のあるポリエステルフィルム（実測値 $0.188 \sim 0.192 \text{ mm}$ ）を使用した。供試体製作の概要を以下に示す。図13に示すように、パンタグラフ型式のアルミ合金製負荷治具に、波板製作用マンドレルを取り付ける。パンタグラフのフランジの内面には波板の形状に合せた溝が切っている。次に、側板に切っている挿入口からフィルムを差し込み、8個のマンドレルの間を通して反対側の側板の挿入口まで送り込む。次に、両側板にフィルムの端部をフィルム押えで固定する。次に温水を満した浅い容器の中に

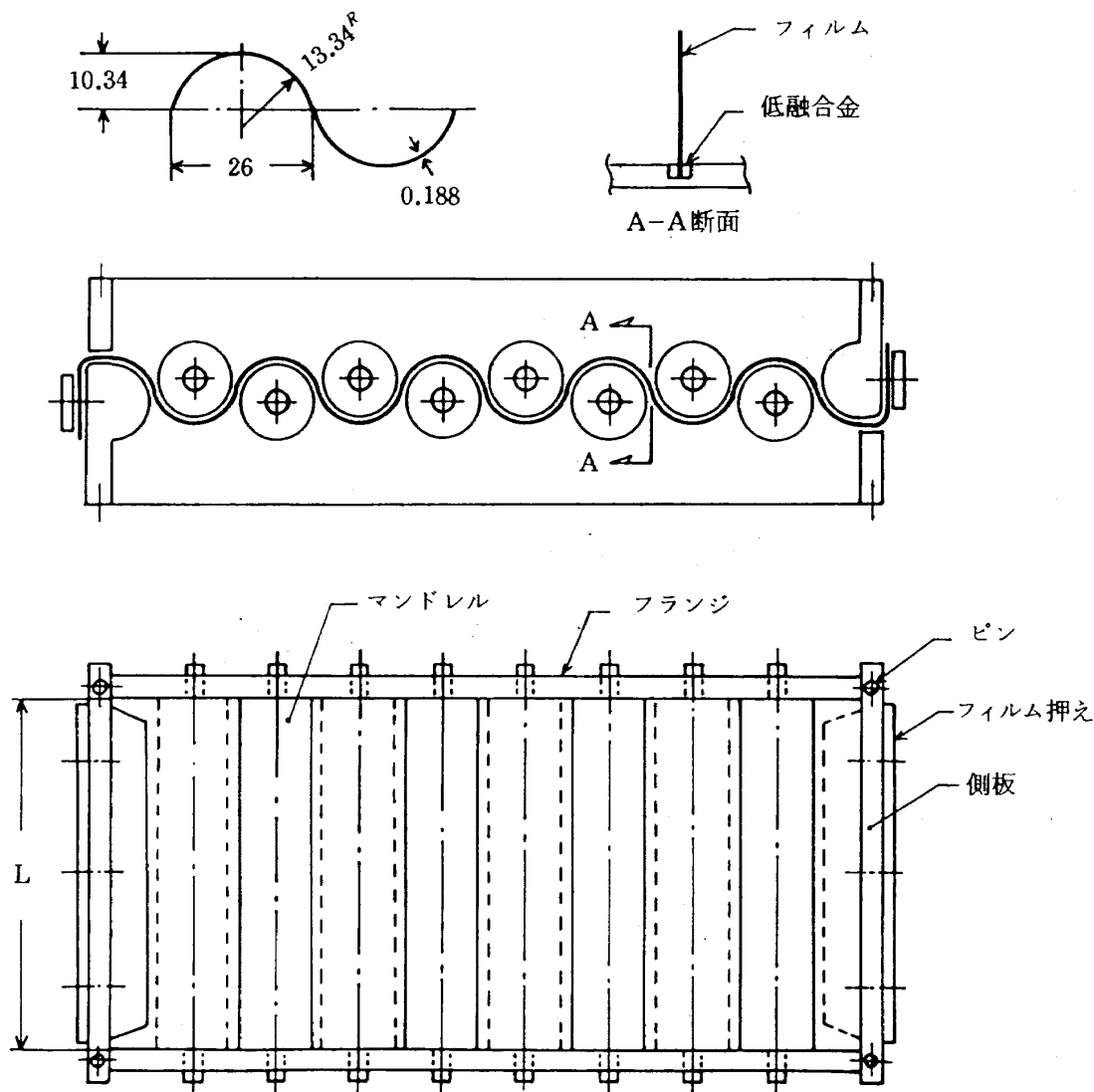


図13 波板製作治具

フランジ部を浸し、融した低融合金（融点約 67°C ）をフランジの溝に流し込み、波板状のフィルムをフランジに固定する。冷却後、マンドレルを取りはずす。

以上の手順で製作した波板を後述の方法で座屈実験した後、低融合金を融かして除去し、波板を取り去ってから再びマンドレルを取り付けて新しい波板を製作する。

波形寸法は共通で長さ（マンドレルの長さ）を100mm、200mm、300mmに変えた三種類の治具を用いて、各三個づつ波板を製作した。波板寸法を図13に示す。供試体の写真を図14に示す。

次に実験方法の概要について述べる。推定座屈荷重が10～20kg程度なので、図15に示すように、小型のスクリージャッキを用いて手で負荷を与

えた。供試体とジャッキを鋼製の定盤にボルトで固定し、両者の間をロードセルを介して連結した、このロードセルは、薄い帯板の裏表にひずみゲージを貼ったもので、あらかじめ較正を行ってある。供試体のせん断変形はダイヤルゲージタイプの変位計で計測し、電圧出力をロードセルからの出力と共にXYレコーダに接続した。準備完了後、ジャッキのハンドルをできるだけゆっくり回し、波板の座屈が生じるまで荷重を増加させてゆき、XYレコーダに記録された荷重-変位曲線から座屈荷重を求めた。

4.2 実験結果と解析結果の検討

図16に実験で得られた荷重-変位曲線の代表例を示す。 $L=200\text{mm}$ および 300mm の波板の場合、最高荷重に達するまでの荷重-変位曲線がほぼ直線

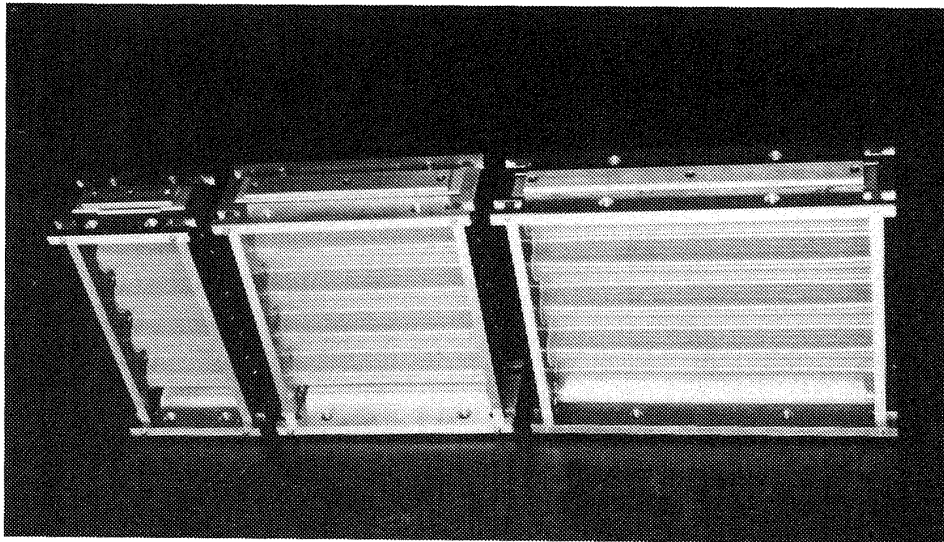


図 14 実験に用いた供試体

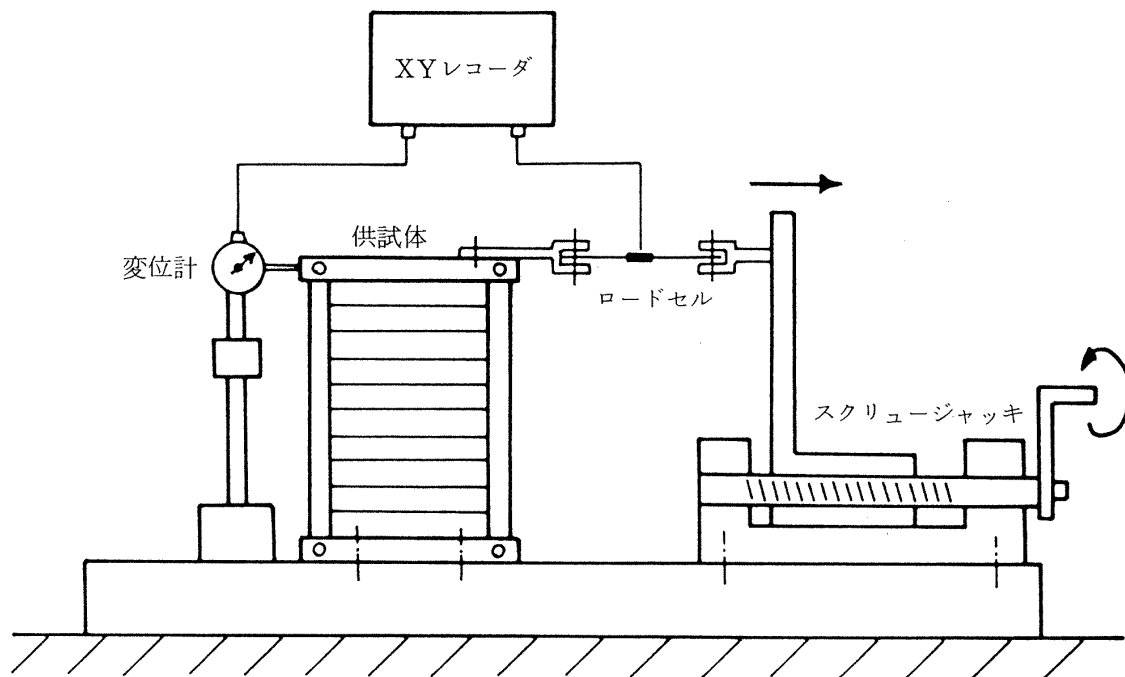


図 15 座屈実験装置

であり、座屈後は急激に荷重が低下している。これは、円筒シェルの軸圧縮座屈の場合⁹⁾とほとんど同じ傾向である。 $L = 100\text{mm}$ の波板の実験結果も類
似の傾向を示しているが、座屈荷重に達する少し前
から荷重の増加がわずかながら鈍化している。

各供試体の座屈荷重および平均座屈応力を表 1 に
示す。座屈変形の様子を図 17 に示す。

次に、解析結果との比較について述べる。前述の

帯板要素を用い、波の1半波長当り18要素に分割
し、級数展開の項数は $n = 7$ にとった。側縁の境界
条件は、 $w = 0$ だけの単純支持とした。実験に用い
たポリエステルフィルムの縦弾性係数 E は、ロール
方向とこれに直交した方向とで若干の違いがあるが、
文献9)の例と同様に平均値として $E = 540\text{kg/mm}^2$
の値を使用し、ポアソン比 $\nu = 0.3$ の等方性材料と
みなした。板厚には 0.188mm の公称値を用いた。

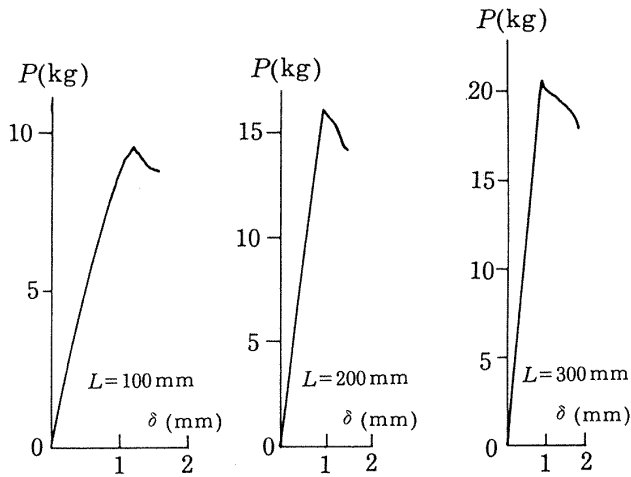
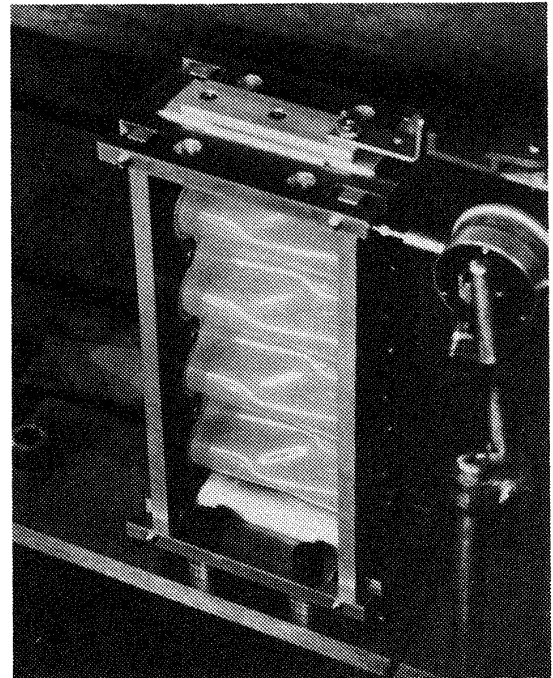


図 16 荷重-変位曲線

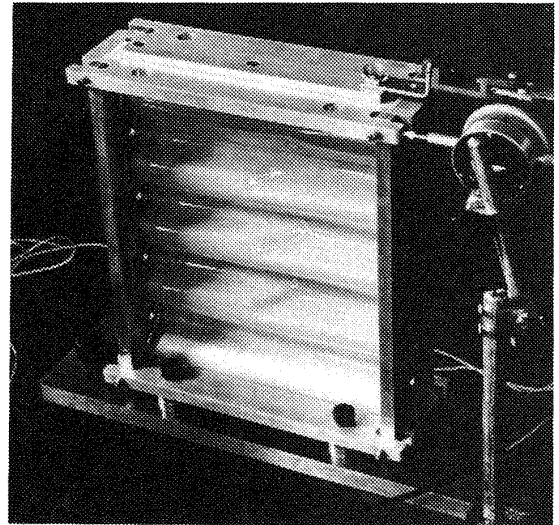
表 1 波板のせん断座屈実験結果

長さ L (mm)	座屈荷重 P (kg)	平均座屈応力 τ_{cr} (kg/mm ²)
100	10.8	0.575
	9.58	0.509
	10.2	0.543
200	16.2	0.431
	17.7	0.471
	16.5	0.438
300	20.6	0.365
	19.9	0.353
	20.7	0.367

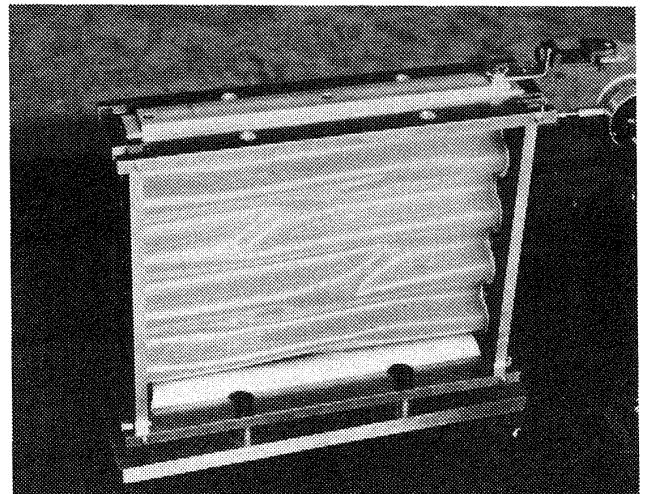
実験では波板と比べて非常に剛性の高いパンタグラフの変形によって波板にせん断応力を生じさせたが、板の断面が円弧であること及びパンタグラフ支持部での境界条件の影響で応力分布は一様にはならない。一般的な有限要素解析で初期応力分布を求めてから座屈解析を行うこともできるが、前節までに示したような系統的にパラメータを変えた数値解析には不向きである。そこで次の二通りの初期応力分布を与えて座屈解析を行った。一つは、一様な応力分布 τ_0 を与える場合であって、これは前節までの解析に採用した条件と同じ仮定である。もう一つは、図 18 に示すように、波板の弧に沿って $\tau_0^* \cdot \cos(\theta)$ の分布で初期応力を与える場合であって、今回の実験に用いた波形の場合は図中の実線で示す分布となる。また、図中の点線は、実験を模した有限要素解



(a) $L = 100$ mm



(b) $L = 200$ mm



(c) $L = 300$ mm

図 17 波板の座屈変形

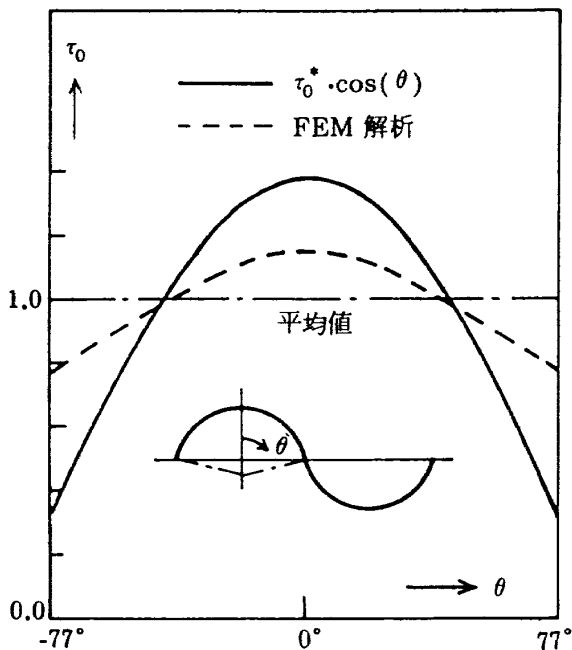


図 18 初期応力分布

析から得られた平均的な応力分布であって、仮定した分布よりもゆるやかな分布になっている。

上記の二通りの初期応力分布に対する座屈解析結果を実験結果と共に図 19 に示す。図中の実線は τ_0 が一様な場合であり、点線は $\cos(\theta)$ の応力分布を仮定した場合である。後者の場合の座屈応力は分布応力の平均値を基準にして表わしてある。波板の軸方向長さ L の小さい領域では一様応力分布の座屈応力の方が $\cos(\theta)$ の分布を仮定した座屈応力よりも高く、 L の大きい領域ではこれと逆の傾向になっている。実際の応力分布に対する結果は両者の中間に入るものと考えられる。

一方、実験結果と比べてみると、 $L = 200, 300$ mm に関しては解析値と良く一致していると言える。 $L = 100$ mm の場合は解析値の 85 ~ 75 % 程度の低い値を示している。円筒シェルの捩り座屈においては実験値が理論値と比べて同程度低めに得られることが多く、シェルとしての座屈モードが優勢になる短い波板では初期不整の影響が顕著に表われることを考慮すれば、本研究の計算結果はせん断座屈特性を正しく評価していると思われる。

5. ま と め

翼桁ウェブに用いられているような、波形寸法と

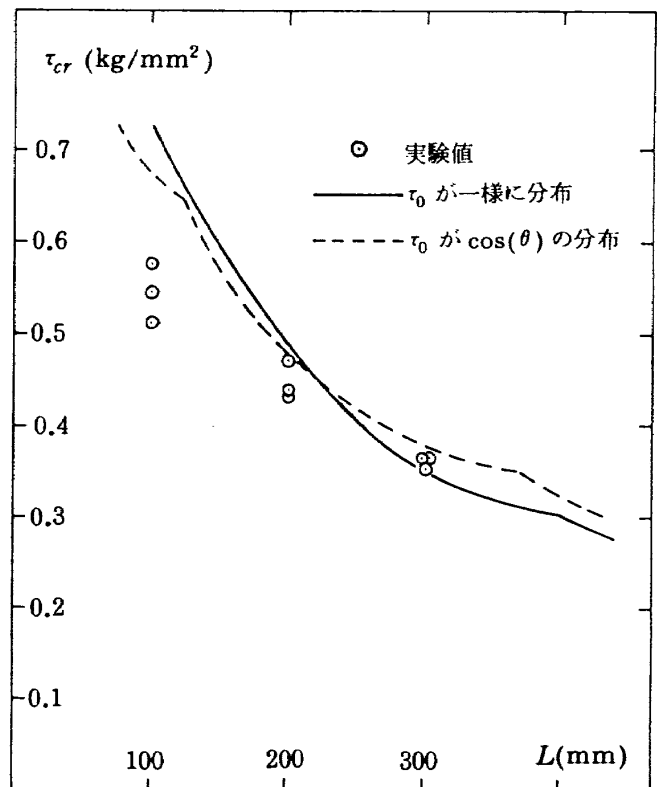


図 19 せん断座屈応力の実験値と解析値の比較

比べて軸方向の寸法が比較的短い波板のせん断座屈特性を、有限要素解析および実験によって調べることにより、次のような結論を得た。

(1) 波のピッチおよび板厚が一定の無限幅波板では、軸方向長さが十分に大きければ、波板と剛性が等価な直交異方性板のせん断座屈応力と、波板をシェルとして扱った有限要素解析の結果とは一致するが、ある程度長さが短くなると急激に両者の差が増大する。短い波板では後者の座屈応力が前者の座屈応力の数分の一程度となり、直交異方性板モデルによる座屈応力の推定は危険である。

(2) 側縁部が単純支持された有限幅波板のせん断座屈応力は、全体寸法の細長比に影響されずほぼ一定であり、無限幅波板の座屈応力に近い。

(3) 桁ウェブの場合に、桁の高さを一定にして波のピッチを変えてゆくと、せん断座屈応力が最大となるピッチ幅が存在する。逆に、桁の高さと許容応力を規定すると最小板厚が得られる。これらの値は波形の扁平率に関係するので、扁平率をパラメータにとった計算を行えば、板厚の制約などを考慮して最少重量の波板寸法が決定できる。

(4) 解析結果の検証の目的で実施したポリエステ

ルフィルム製波板のせん断座屈実験結果は、一番短かい場合を除けば解析値との一致が良好であった。短かい波板ではシェルとしての性質が顕著であり、初期不整などの影響が大きく現われたようで、一番短かい波板の実験値は解析値の85～75%程度であった。したがって、波板の設計の際には解析値をこの程度割引いて評価する方が安全である。

参 考 文 献

- 1) Shideler, J.L., Bohon, H.L., and Greene, B.E., Evaluation of Bead-stiffened Metal Panels, *Journal of Spacecraft*, Vol.13, No.3, March 1976, pp.144-149
- 2) Weinberger, R.A. et al., U.S. Navy Certification of Composite Wings for the F-18 and Advanced Harrier Aircraft, AIAA/ASME 18th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, San Diego, Calif.,
- 3) 炭素繊維複合材 (CFRP) 桁/リブ要素模型試験, 航空宇宙技術研究所報告 TR-663, 1981年 4月
- 4) 三本木茂夫, 波板の圧縮座屈特性の解析, 航空宇宙技術研究所報告 TR-604, 1980年 4月
- 5) Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, 1971
- 6) Batdorf, S.B., Stein, M., and Schildcrout, M., *Critical Shear Stress of Curved Rectangular Panels*, NACA TN 1947
- 7) 強度設計データブック, 裳華房, 昭和37年, pp.521
- 8) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961, pp.382
- 9) Toda, S., Experimental Investigation on the Effect of Elliptic Cutout on the Buckling of Cylindrical Shells Loaded by Axial Compression, *Transaction of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol.23, No.60, 1980
- 10) 例えば, Donnell, L.H., *Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion*, NACA Rept. 479, 1933.

航空宇宙技術研究所報告 759号

昭和58年5月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川2-27-12
