

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-771

ロケットノズルの性能予測計算法

中橋和博・宮島博
木皿且人・毛呂明夫

1983年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

記 号	1
1. 緒 言	2
2. 性能予測プログラムの構成	3
3. 亜音速部準一次元化学非平衡流の計算	5
3.1 基礎方程式	5
3.2 化学反応式および化学種生成項	6
3.3 数値計算法	7
3.4 計算手順	8
4. スロート部遷音速流の解析	8
5. 超音速部二次元化学非平衡流の計算	10
5.1 基礎方程式	10
5.2 二次元化学非平衡流の数値計算法	10
5.2.1 流体力学方程式の取扱い	10
5.2.2 化学種保存式の取扱い	11
5.2.3 ノズル壁上の境界条件	12
5.2.4 計算手順	15
6. 境界層の計算	15
7. 計算結果	17
7.1 酸素・水素プロペラントエンジン	17
7.2 四酸化窒素・ヒドラジン系エンジン	19
8. む す び	21
参考文献	21
補 遺 A	23
補 遺 B	26

ロケットノズルの性能予測計算法*

中橋和博** 宮島博**
木皿且人** 毛呂明夫**

ABSTRACT

This report describes numerical schemes used in the computer program for nozzle performance predications of liquid rocket engines. The program is a set consisting of the following four programs: a program of one-dimensional equilibrium flow (ODE), a one-dimensional kinetic flow (ODK), a two-dimensional kinetic flow (TDK), and a turbulent boundary layer (TBL). Published programs were utilized for ODE and TBL, but the programs for ODK and TDK were newly developed. In the TDK program, an efficient numerical scheme for a two-dimensional nonequilibrium flow was devised for rocket nozzle flowfields, and is described in detail in this report. Computational results are presented for hydrogen/oxygen and NTO/A-50 propellant engines, showing the utility of the present computer program by comparing it with available experimental data.

記 号		記 号	
A	: ノズル断面積, または(3-15)式 で定義される量	F	: 推力, または(5-27)式で定義さ れる量
a	: 面積比, $=A/A^*$, A^* =スロート面 積	F_l	: l 化学種の自由エネルギー
a_j	: 反応速度定数	f_i	: (3-24)式の右辺, (5-14)式の 右辺, または(5-36)式
B	: (3-15)式で定義される量	G	: (5-27)式で定義される量
b_j	: 反応速度定数	H_{aw}	: 断熱壁エンタルピー, (6-15)式
C_f	: 壁面摩擦係数, (6-6)式	H_w	: 壁面エンタルピー, (6-14)式
C_H	: スタントン数, (6-7)式	H_b	: 淀み点エンタルピー
C_i	: i 化学種の質量分率	h	: 静エンタルピー, (3-6)式
C_p	: 定圧比熱, (3-15)式	h_0	: (6-13)式で定義するエンタルピー
c	: 凍結音速	I	: 比推力
c^*	: スロート部音速	K_j	: 化学平衡定数
		k_{fj}, k_{bj}	: 順および逆反応定数
		M	: 凍結マッハ数, (3-15)式
		M_j	: 第3体反応速度定数, (3-23)式

*昭和58年5月17日受付

**角田支所

m_{jl}	: 第 3 体効率係数	$\bar{\gamma}_E$: (3-31) 式
\dot{m}	: 質量流量	δ	: 境界層速度厚
N	: (5-32) 式で定義	δ^*	: 境界層排除厚
N_r	: 化学反応数	Δ	: 境界層温度厚
N_s	: 化学種数	ϵ_k	: 遷音速展開パラメータ, = $1/(1+R)$
n_j	: 反応速度定数	η	: 変換 r 座標, (5-5) 式
\bar{n}	: 境界層相互干渉指数	θ	: 運動量厚, または $\tan^{-1}(v/u)$
P_r	: プラントル数	λ_j, λ'_j	: (3-18) 式
p	: 圧力	μ	: 粘性係数
p_c	: 燃焼室圧力	ν_{lj}, ν'_{lj}	: 化学反応式内の係数
p_E^*	: 化学平衡流によるスロート面圧力	ξ	: 変換 x 座標, (5-5) 式
\dot{q}_w	: 壁面熱伝達率	ρ	: 密度
R	: 気体定数, (3-6) 式, または無次元曲率半径	ω_i	: 化学種生成項, (3-17) 式
R	: 普遍気体定数	添 字	
R_θ	: 運動量厚によるレイノルズ数 (6-9) 式	*	: スロート値
R_ϕ	: エネルギー厚によるレイノルズ数	∞	: 境界層外縁値
r	: 半径座標		
r^*	: スロート半径		
r_u, r_d	: スロート部の壁面曲率半径		
r_w	: ノズル壁座標		
r'_w	: $= dr_w/dx$		
T	: 温度		
u	: ノズル軸方向速度成分		
u_1, u_2, u_3	: (4-4) 式, または U の成分 (5-7) 式		
V	: $= \sqrt{u^2 + v^2}$, または準一次元流における速度		
v	: ノズル半径方向速度成分		
v_1, v_2, v_3	: (4-4) 式		
W_i	: i 化学種の分子量		
\bar{X}_j	: (3-18) 式		
x	: ノズル軸方向座標		
z	: (4-3) 式		
α	: $= \sin^{-1}(1/M)$, または (2-1) 式内でノズル壁角		
α_i	: (3-28) 式		
$\beta_{i,j}$: (3-28) 式		
γ	: 凍結比熱比, (3-15) 式		
$\bar{\gamma}$: (4-1) 式		

1. 結 言

ロケットエンジンのノズルは、推進薬の熱エネルギーを燃焼生成物の運動エネルギーに変換する装置である。最近の高効率液体ロケットエンジンは、燃焼室圧力の高圧化と同時にノズル開口面積化がますます大きくなる傾向にある(図1)。従って、ノズルはエンジン全体積中に大きな比率を占めるばかりでなく、エンジンの総括的性能に大きな影響を及ぼす。

ロケットノズル流の解析法は1960年代に大きく進歩し、米国においては60年代の終わりには液体ロケットについての標準的手法¹⁾がはじめて決められ、その後逐次改訂がなされている。一方、我国においては、企業が各々のノズル設計計算法を保有しているが、信頼性の高いノズル流の解析方法についてほとんど手がつけられていないのが現状である。この原因には種々考えられるが、最も大きな原因は、我国のロケットエンジン関連の技術は全般的に米国等に比べておくれであり、ノズル以外により容易に性能向上が行ない得る要素があるためであると筆者らは考えている。しかしながら、技術の向上に伴ってノズル性能が問題となることが近い将来に予測される。ロケットノズル流れには基本的に未知な過程

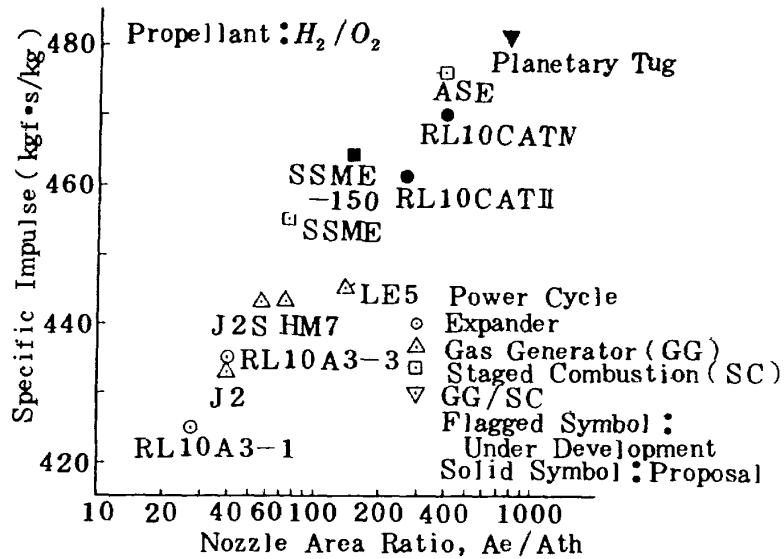


図1 ノズル開口面積比と性能との傾向

は含まれていないが、その性能を精度良く予測するのは容易ではない。

本レポートは、今回我々が開発した液体ロケットエンジンのノズル性能予測プログラムについて、用いた計算手法を詳述し、また計算結果の検討を述べるものである。

2 性能予測プログラムの構成

ロケットノズル流の解析の主要な目的は、比推力におよぼす各種の損失、すなわち、燃焼の不完全による損失、膨張部の有限化学反応速度による損失、ノズル出口面の速度ベクトルが軸方向と異なることによる損失、および摩擦と熱損失などの特性とその大きさを明らかにすることによって、より良い設計に資すること、あるいは、計画中のエンジンが実際に性能の目標値を達成する可能性を大きくすることにある。各損失の大きさは、推力数トン以上のエンジンにおいては表1に示す程度である。ただし、損失の基準は一次元化学平衡流とする。混合比の不均一による損失は、燃焼の安定性、あるいは燃焼室の冷却のためにインジェクタ面において燃料と酸化剤の混合比に分布を持たせるために起こるもので、ノズルの膨張過程で異なる混合比の流管のあいだの混合がほとんど無いことによる損失である。エネルギー発生損失は、燃焼の不完全による損失であり、混合比一定の流管における推進薬の蒸発や混合の不完全によるものである。

表1 ロケット推力室における損失

Process	Typical loss (%)
1. Nonuniform mixture ratio distribution - stream tube	0 - 5
2. Incomplete energy release	1 - 5
3. Two dimensional flow curvature and divergence	0.1 - 3
4. Finite reaction rates, kinetics	0.1 - 10
5. Boundary layer, friction and heat transfer	0.5 - 5

図2に、ノズル性能予測法の構成を示す。この性能評価法は米国で標準的に用いられているJANNAFの方法論¹⁾と基本的に同じである。ここでは簡単のため、燃焼室におけるエネルギー発生効率 η_{ER} が与えられ、混合比の分布は考慮しないものとする。性能予測にはふたつの計算プログラム、二次元化学非平衡流プログラム(TDK)および乱流境界層プログラム(TBL)が基本となっている。TDKは更に、準一次元化学平衡流(ODE)、準一次元化学非平衡流(ODK)、スロート部遷音速流計算プログラム、および超音速膨張部の二次元化学非平衡流(TDK)に分割することができる。これらのプログラムの使用領域を図3に示す。

燃焼室内は、燃焼室圧力および推進薬の入力条件が与えられると、ODEプログラムにより燃焼室温度、化学種組成等が算出される。このODEの計算

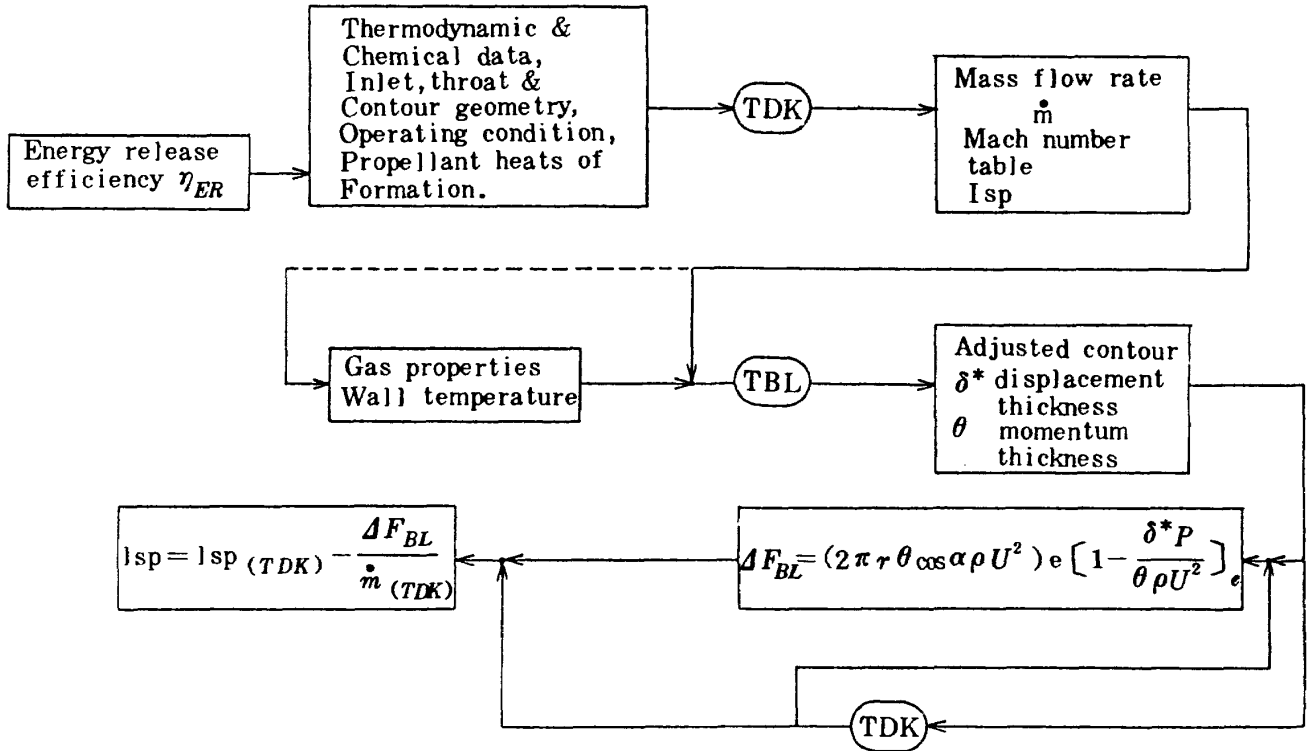


図2 性能評価フローチャート

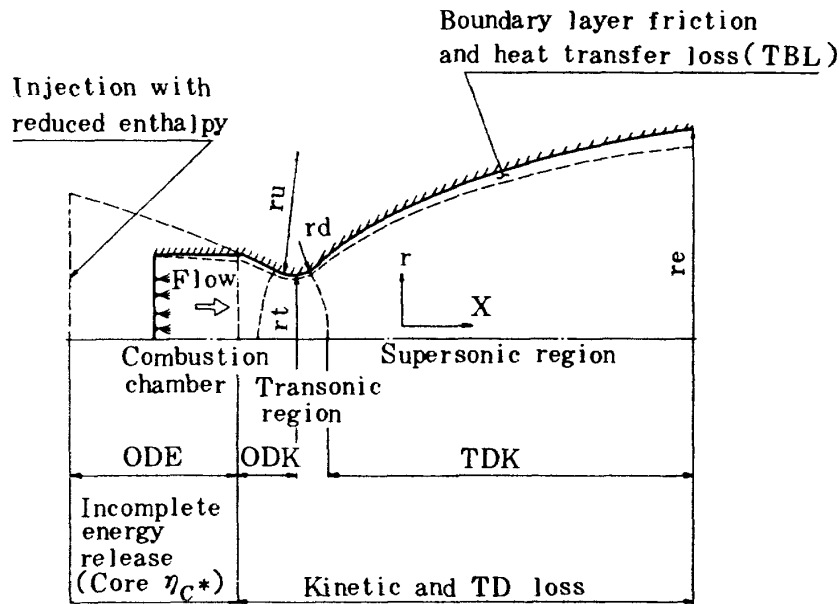


図3 解析領域の分割

では、推進薬は無限に大きな容器中へ噴射され、ノズル入口まで一次元平衡流の膨張をするものとして計算される。燃焼の不完全による効果は、入力生成熱に実際の値より小さな値を入れることによって補正される。

燃焼室収縮部からは、ODEの計算結果を出発値として、ODKの計算を行なう。この計算は、垂直

速膨張部の流れを算出するとともに、スロート部での化学組成を出して、次のスロート部遷音速解に対する情報を与えるものである。更に、ノズル出口までのODKの計算値は、後述のTDKの計算値との比較から、ノズル性能における二次元損失の算出のためにも用いる。

スロート部遷音速流の解は、Euler方程式の遷音

速近似式に対する級数展開式で与える。この級数解に必要な比熱比の値には、ODKの計算値から算出された平均等エントロピー指数を用いる。

スロート部の解を出発値として始まるTDKの計算は、二次元Euler方程式に化学種保存式を加えた方程式を積分するもので、ノズル性能計算で最も重要な部分である。エンジンの比推力を出すには、図2に示されているようにこのTDK計算を2回行なう。第1回目の計算は、ノズル壁面に沿っての境界層が無いとして行なう計算で、この計算結果およびODKの結果は、次の乱流境界層の計算での境界層外縁条件を与えるのに用いられる。第2回目のTDK計算は、ノズル形状から境界層排除厚分だけ差引いた非粘性コアに関する計算で、ノズル壁面に沿っての静圧分布を算出し、比推力計算に用いられる。

乱流境界層の計算は、ODK計算と同じくノズル収縮部から始め、ノズル壁面に沿っての排除厚 δ^* 、運動量厚 θ 、およびエネルギー厚 ϕ の分布を算出する。排除厚分布は第2回目のTDK計算のための非粘性コアを算出するのに用いられ、またノズル出口面での δ^* 、 θ は、境界層損失を算出するのに用いられる。境界層による損失推力 ΔF_{BL} は、次式により算出する。

$$\Delta F_{BL} = \left[(2\pi r_w \theta \cos \alpha \rho u) \left(1 - \frac{\delta^* p}{\theta \rho u}\right) \right]_{\text{ノズル出口}} \quad (2-1)$$

ここに、 ρ 、 u 、 p の値は、境界層外縁での値であり、また α はここではノズル壁のノズル軸に対する傾き角を意味する。

計算プログラムは、4つの要素プログラムから構成されている。つまり前述の流れ場の分割に対応して、ODE、ODK、TDK、およびTBLプログラムであり、スロート部遷音速解の計算はTDKプログラム内に含まれている。この4つのプログラムの内、ODEプログラムは既に公表されている化学平衡計算用の汎用プログラム²⁾を、当目的に適合するよう部分的に修正して用いた。従って、ODE計算で用いられている計算手法の説明は文献3に譲り、本レポートでは述べない。またTBLプログラムも公表されたもの³⁾を修正して用いており、その説明は基

礎式のみにとどめる。ODK、TDKプログラムについては、新たに開発したものである。特にTDKプログラムの開発に際しては、種々の計算法を検討し、ロケットノズル内の化学非平衡流に効率的な新しい手法を考案した。この計算法は、超音速非粘性流で良く用いられる空間前進衝撃波捕獲差分法⁴⁾をもとに、化学種保存式の取扱いを更に加えた手法であり、第5節に詳述する。

3. 亜音速部準一次元化学非平衡流の計算

3.1 基礎方程式

一次元化学非平衡流計算は、ODEの計算結果を初期条件として燃焼室収縮部から始める。この準一次元近似の計算は、マッハ数が1になる点で方程式が特異性を持つため、これを避けるために流れが超音速になるまでは軸方向の圧力分布を予め指定する手法を用いる。すなわち、ODEの結果をもとに、等エントロピー膨張の関係を用いて軸方向上の各点における圧力および圧力勾配を算出し、それを入力条件として圧力分布指定の方程式の積分を行なう。スロート点は密度と速度の積が最大となる点として定義される。流れが超音速になった点からは、方程式は面積比指定のものを用いて計算を続ける。

非粘性一次元化学非平衡流の方程式を導く際に、以下の仮定を用いる。

- (1) 気体は非粘性である。
- (2) 各成分気体は理想気体である。
- (3) 化学非平衡のみを考え、他の内部自由度は平衡であるとする。

軸方向座標を x として、準一次元流の方程式を書く、

$$\rho V \frac{dC_i}{dx} = \omega_i \quad (3-1)$$

$$\frac{d}{dx} (\rho V a) = 0 \quad (3-2)$$

$$\rho V \frac{dV}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0 \quad (3-3)$$

$$h + \frac{1}{2} V^2 = H_0 \quad (3-4)$$

$$p = \rho R T \quad (3-5)$$

ここに、エンタルピー h およびガス定数 R は各成分気体の値から次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} h &= \sum_{i=1}^{N_s} C_i h_i \\ h_i &= \int_{T_0}^T C_{p_i} dT + h_{i_0} \\ R &= \sum_{i=1}^{N_s} \frac{C_i}{W_i} R \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

以上の方程式を解く際に、スロート上流の亜音速部では $p = p(x)$ を指定して計算し、超音速部では面積 $a = a(x)$ を指定して計算する。

圧力分布を指定した場合、方程式は次のように書き換えられる。

$$\frac{dC_i}{dx} = \frac{\omega_i}{\rho V} \quad (3-7)$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho V} \frac{dp}{dx} \quad (3-8)$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \left[\frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dx} - A \right] \rho \quad (3-9)$$

$$\frac{dT}{dx} = \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} - B \right] T \quad (3-10)$$

また、面積比を指定した場合は、

$$\frac{dC_i}{dx} = \frac{\omega_i}{\rho V} \quad (3-11)$$

$$\frac{dV}{dx} = \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \frac{V}{M^2 - 1} \quad (3-12)$$

$$\frac{dp}{dx} = - \left\{ \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \frac{M^2}{M^2 - 1} + A \right\} \rho \quad (3-13)$$

$$\frac{dT}{dx} = - \left\{ \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \frac{(\gamma-1)M^2}{M^2 - 1} + B \right\} T \quad (3-14)$$

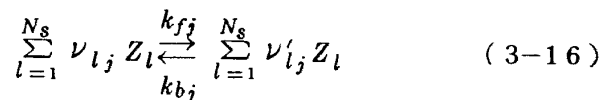
ここに、

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{pV} \left[\sum_{i=1}^{N_s} \omega_i R_i T - \frac{\gamma-1}{\gamma} \sum_{i=1}^{N_s} \omega_i h_i \right] \\ B &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{pV} \sum_{i=1}^{N_s} \omega_i h_i \\ \gamma &= \frac{C_p}{C_p - R} \\ C_p &= \sum_{i=1}^{N_s} C_i C_{p_i} \\ M &= \frac{V}{\sqrt{\gamma R T}} \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

化学種生成項 ω_i 等の化学反応に關与した項の取扱いは、3.2 節に記述されている。

3.2 化学反応式および化学種生成項

化学種保存式で現われる生成項 ω_i は、以下のよりにして算出できる。化学反応式を一般的な形で書くと、第 j 番目の反応については、



ここに、 Z_l は第 l 番目の化学種名を意味する。

総ての反応 (反応数を N_r とする) による、第 i 番目の化学種の生成項は、次の式で書き表わされる。

$$\omega_i = W_i \sum_{j=1}^{N_r} (\nu'_{ij} - \nu_{ij}) \bar{X}_j \quad (3-17)$$

および、

$$\begin{aligned} \bar{X}_j &= M_j \left\{ \rho^{\lambda_j} k_{fj} \prod_{l=1}^{N_s} \left(\frac{C_l}{W_l} \right)^{\nu_{lj}} \right. \\ &\quad \left. - \rho^{\lambda'_j} k_{bj} \prod_{l=1}^{N_s} \left(\frac{C_l}{W_l} \right)^{\nu'_{lj}} \right\} \end{aligned} \quad (3-18)$$

ここに、

$$\lambda_j = \sum_{l=1}^{N_s} \nu_{lj}, \quad \lambda'_j = \sum_{l=1}^{N_s} \nu'_{lj}$$

逆反応速度係数 k_{bj} は Arrhenius の式により、

$$k_{b_j} = a_j T^{-n_j} e^{(-b_j/RT)} \quad (3-19)$$

また、順反応係数 k_{f_j} は、平衡定数 K_j を用いて、

$$k_{f_j} = k_{b_j} K_j \quad (3-20)$$

$$K_j = e^{-\Delta F_j/RT} (RT)^{-\sum_{l=1}^{N_s} (\nu'_{lj} - \nu_{lj})} \quad (3-21)$$

ここに、 ΔF_j は反応過程における自由エネルギーの変化を意味し、

$$\Delta F_j = \sum_{l=1}^{N_s} F_l \nu'_{lj} - \sum_{l=1}^{N_s} F_l \nu_{lj} \quad (3-22)$$

(3-18) 式に現われる M_j は、第3体反応による効果を示し、次式で与えられる。

第3体を伴う反応について：

$$M_j = \sum_{l=1}^{N_s} m_{jl} \left(\frac{C_l}{W_l} \right) \quad (3-23)$$

その他の反応について： $M_j = 1$

ここに、第3体効率係数 m_{jl} は、参照化学種を第3体とした場合の化学反応定数 a_{j_0} に対する、第 l 化学種が第3体の場合の化学反応定数 a_{jl} の比 a_{jl}/a_{j_0} を意味する。

3.3 数値計算法

燃焼室からスロートまでの流れを支配する方程式：(3-1)～(3-5)は、常微分方程式であるから最も標準的な手法としてRunge-Kutta による積分が考えられるが、化学反応が平衡に近い領域においてはこの種の陽的な積分法では積分ステップを非常に小さく取らない限り計算が不安定となる。これは流れの特性時間に比べて化学反応の特性時間がはるかに小さい事に起因する。そのため、これに代わる種々の積分法が試されているが、ここでは陰的な積分法^{5~7)}を用いる。

方程式(3-7)～(3-10)及び(3-11)～(3-14)は以下の形に統一して書く事ができる。

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_{N_s+3}),$$

$$i = 1, 2, \dots, N_s + 3 \quad (3-24)$$

ここに、 $y_1 = V$, $y_2 = \rho$, $y_3 = T$, $y_{3+j} = C_j$ ($j=1, \dots, N_s$) とし、 f_i は(3-7)～(3-10)又は(3-11)～(3-14)の各右辺に対応している。また N_s は化学種の数である。

(3-24) 式の x 微分に対して二次精度の差分近似を施すと、

$$\Delta y_i^{(n+1)} = \frac{1}{2} \Delta x^{(n+1)} (f_i^{(n)} + f_i^{(n+1)}) + O(\Delta x^3) \quad (3-25)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_i^{(n+1)} &= y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)} \\ \Delta x^{(n+1)} &= x^{(n+1)} - x^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

更に $f_i^{(n+1)}$ をテイラー級数で展開すると、

$$f_i^{(n+1)} = f_i^{(n)} + \alpha_i^{(n)} \Delta x^{(n+1)} + \sum_{j=1}^{N_s+3} \beta_{i,j}^{(n)} \Delta y_j^{(n+1)} + O(\Delta x^2) \quad (3-27)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \partial f_i / \partial x \\ \beta_{i,j} &= \partial f_i / \partial y_j \end{aligned} \right\} \quad (3-28)$$

(3-27) 式を(3-25)式に代入し、 Δx の三次の項を無視し、 $\Delta y_i^{(n+1)}$ に関して整理すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2} \Delta x^{(n+1)} \beta_{i,j}^{(n)} \right) \Delta y_i^{(n+1)} \\ & - \frac{1}{2} \Delta x^{(n+1)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_s+3} \beta_{i,j}^{(n)} \Delta y_j^{(n+1)} \\ & = \frac{1}{2} \Delta x^{(n+1)} [2f_i^{(n)} + \alpha_i^{(n)} \Delta x^{(n+1)}] \end{aligned} \quad (3-29)$$

上式中の f_i およびその微係数 $\alpha_i, \beta_{i,j}$ の詳細は補

遺Aに記述する。(3-29)式は $\Delta y_i^{(n+1)}$ ($i=1, \dots, N_s+3$)に関する連立代数方程式であり, これを解くことにより $V^{(n+1)}, \rho^{(n+1)}, T^{(n+1)}, C_i^{(n+1)}$ ($i=1, \dots, N_s$)を得ることができる。

3.4 計算手順

ノズル収縮部直前から始める準一次元化学非平衡流の計算は, ODEプログラムの計算結果を出発値として開始する。ノズルスロート面までの超音速領域は, ノズル軸方向の圧力分布をあらかじめ指定し, (3-7)~(3-10)式を積分する。この圧力分布は, 次の等エントロピー膨張の関係式をもとにして与える⁸⁾

$$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{\bar{\gamma}_{E+1}}{2}\right)^2 (\bar{\gamma}_{E-1})^{-1} \left\{ \frac{2}{\bar{\gamma}_{E-1}} \left[\left(\frac{p}{p_c}\right)^{\frac{\bar{\gamma}_{E-1}}{\bar{\gamma}_E}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p}{p_c}\right)^{\frac{\bar{\gamma}_{E+1}}{2\bar{\gamma}_E}} \quad (3-30)$$

ここに, A^* はスロート面積であり, p_c は燃焼室圧である。 $\bar{\gamma}_E$ は, ODE計算によるスロート面での圧力 p_E^* をもとに, p_c から p_E^* までの膨張の平均値を次式により算出して用いる。即ち, (3-30)式より,

$$1 = \left(\frac{\bar{\gamma}_{E-1}}{2}\right)^2 (\bar{\gamma}_{E-1})^{-1} \left\{ \frac{2}{\bar{\gamma}_{E-1}} \left[\left(\frac{p_E^*}{p_c}\right)^{\frac{\bar{\gamma}_{E-1}}{\bar{\gamma}_E}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p_E^*}{p_c}\right)^{\frac{\bar{\gamma}_{E+1}}{2\bar{\gamma}_E}} \quad (3-31)$$

この $\bar{\gamma}_E$ に関する方程式は, Newton法による次の繰返し計算式で解くことができる。

$$\bar{\gamma}_E^{(n+1)} = \bar{\gamma}_E^{(n)} + \frac{\left(\frac{2}{\bar{\gamma}_E^{(n)}+1}\right)^{\frac{\bar{\gamma}_E^{(n)}}{\bar{\gamma}_E^{(n)}-1}} \frac{\bar{\gamma}_E^{(n)}}{\bar{\gamma}_E^{(n)}-1} - \frac{p_E^*}{p_c}}{\left(\frac{2}{\bar{\gamma}_E^{(n)}+1}\right)^{\frac{\bar{\gamma}_E^{(n)}}{\bar{\gamma}_E^{(n)}-1}} \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_E^{(n)}-1}\right) \left[\frac{1}{\bar{\gamma}_E^{(n)}-1} \ln\left(\frac{2}{\bar{\gamma}_E^{(n)}+1}\right) + \frac{\bar{\gamma}_E^{(n)}}{\bar{\gamma}_E^{(n)}+1}\right]}$$

ここに, (n) は繰返し回数を意味する。

スロート面は, ρV が最小となる点とし, スロート下流の, マッハ数が指定値(当計算では1.02)を超えた所で, 方程式を形状指定の式(3-11)~(3-14)に変え, 超音速膨張部の計算を行なう。

差分計算における計算ステップ幅 Δx は, 各ステップにおいて質量流量を算出し, その前のステップでの値との相対誤差をチェックする事により決める。

4. スロート部遷音速流の解析

超音速膨張部の初期値として, スロート遷音速流の解が必要となる。この領域の流れは, 解析的^{9~11)}あるいは数值的^{12~13)}に解く手法が種々提案されているが, 実用面而言えばKliegel and Levine¹¹⁾の解析的手法が最も適している。

Kliegel and Levineの解析では, 以下の基本的な仮定を含んでいる。

- (1) スロート部は軸対称非粘性圧縮性流れである。
- (2) 流れは, 軸方向速度が音速に近く, 半径方向速度は十分小さい。
- (3) 気体は熱的熱量的に完全である。

化学反応流にKliegel and Levineの解を適用する際には(3)の仮定を侵さない為に, 更に次の近似を必要とする。

- (4) 気体の等エントロピー指数がスロート領域において一定である。

この(4)の近似は, Kliegel and Levineの解の中に現われる比熱比 γ を, スロート域にわたって平均された等エントロピー指数 $\bar{\gamma}$ で置き換える事を意味する。この $\bar{\gamma}$ は, ODKのスロート域における計算結果の流れ物理量(p, V, T, C)をテーブル化したものから与えられる。

$$\bar{\gamma} = \frac{\ln(p_l/p_1)}{\ln(\rho_l/\rho_1)} \quad (4-1)$$

ここに添字1, l はテーブルの第1番目の値と最終値とを示している。

Kliegel and Levineの解は, 遷音速微小擾乱方程式において, 更に速度成分 $(\bar{u}, \bar{v}) = (u/c^*, v/c^*)$ をスロート壁曲率半径とスロート半径との比 $R = r_c/r^*$ を含んだパラメータ: $\epsilon_k (= 1/(1+R))$

でもって展開して得られる。結果のみ書くと、

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= 1 + \epsilon_k u_1(\bar{r}, z) + \epsilon_k^2 [u_1(\bar{r}, z) \\ &+ u_2(\bar{r}, z)] + \epsilon_k^3 [u_1(\bar{r}, z) \\ &+ 2u_2(\bar{r}, z) + u_3(\bar{r}, z)] \\ \bar{v} &= \left[\frac{\bar{\gamma} + 1}{2} \epsilon_k \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \epsilon_k v_1(\bar{r}, z) \right. \\ &+ \epsilon_k^2 \left[\frac{3}{2} v_1(\bar{r}, z) + v_2(\bar{r}, z) \right] \\ &+ \epsilon_k^3 \left[\frac{15}{8} v_1(\bar{r}, z) + \frac{5}{2} v_2(\bar{r}, z) \right. \\ &\left. \left. + v_3(\bar{r}, z) \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

ここで、 $(\bar{x}, \bar{r}) = (x/r^*, r/r^*)$ であり、また、

$$z = \left[\frac{2}{\bar{\gamma} + 1} \left(\frac{1}{\epsilon_k} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \bar{x} \quad (4-3)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \bar{r}^2 - \frac{1}{4} + z \\ v_1 &= \frac{1}{4} \bar{r}^2 - \frac{1}{4} \bar{r} + \bar{r} z \\ u_2 &= \frac{2\bar{\gamma} + 9}{24} \bar{r}^4 - \frac{4\bar{\gamma} + 15}{24} \bar{r}^2 + \frac{10\bar{\gamma} + 57}{288} \\ &+ z \left(\bar{r}^2 + \frac{5}{8} \right) - \frac{2\bar{\gamma} - 3}{6} z^2 \\ v_2 &= \frac{\bar{\gamma} + 3}{9} \bar{r}^5 - \frac{20\bar{\gamma} + 63}{96} \bar{r}^3 + \frac{28\bar{\gamma} + 93}{288} \bar{r} \\ &+ z \left(\frac{2\bar{\gamma} + 9}{6} \bar{r}^3 - \frac{4\bar{\gamma} + 15}{12} \bar{r} \right) + \bar{r} z^2 \\ u_3 &= \frac{556\bar{\gamma}^2 + 1737\bar{\gamma} + 3069}{10368} \bar{r}^6 \\ &- \frac{388\bar{\gamma}^2 + 1161\bar{\gamma} + 1881}{2304} \bar{r}^4 \\ &+ \frac{304\bar{\gamma}^2 + 831\bar{\gamma} + 1242}{1728} \bar{r}^2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{2708\bar{\gamma}^2 + 7839\bar{\gamma} + 14211}{82944} \\ &+ z \left[\frac{52\bar{\gamma}^2 + 51\bar{\gamma} + 327}{384} \bar{r}^4 \right. \\ &- \frac{52\bar{\gamma}^2 + 75\bar{\gamma} + 279}{192} \bar{r}^2 \\ &\left. + \frac{92\bar{\gamma}^2 + 180\bar{\gamma} + 639}{1152} \right] \\ &+ z^2 \left[-\frac{7\bar{\gamma} - 3}{8} \bar{r}^2 + \frac{13\bar{\gamma} - 27}{48} \right] \\ &+ \frac{4\bar{\gamma}^2 - 57\bar{\gamma} + 27}{144} z^3 \\ v_3 &= \frac{6836\bar{\gamma}^2 + 23031\bar{\gamma} + 30627}{82944} \bar{r}^7 \\ &- \frac{3380\bar{\gamma}^2 + 11391\bar{\gamma} + 15291}{13824} \bar{r}^5 \\ &+ \frac{3424\bar{\gamma}^2 + 11271\bar{\gamma} + 15228}{13824} \bar{r}^3 \\ &- \frac{7100\bar{\gamma}^2 + 22311\bar{\gamma} + 30249}{82944} \bar{r} \\ &+ z \left[\frac{556\bar{\gamma}^2 + 1737\bar{\gamma} + 3069}{1728} \bar{r}^5 \right. \\ &- \frac{388\bar{\gamma}^2 + 1161\bar{\gamma} + 1881}{576} \bar{r}^3 \\ &\left. + \frac{304\bar{\gamma}^2 + 831\bar{\gamma} + 1242}{864} \bar{r} \right] \\ &+ z^2 \left[\frac{52\bar{\gamma}^2 + 51\bar{\gamma} + 327}{192} \bar{r}^3 \right. \\ &- \frac{52\bar{\gamma}^2 + 75\bar{\gamma} + 279}{192} \bar{r} \\ &\left. - z^3 \left[\frac{7\bar{\gamma} - 3}{12} \bar{r} \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

多くのロケットノズルではスロート面を境にその上流の壁面曲率半径 (r_u) と下流のそれ (r_d) とは値が異なるため (第3図), 展開パラメータ $\epsilon_k [= 1/(1+R), R=r_c/r^*]$ 内の r_c の値には上流値 r_u を用いる。

ここに述べたスロート部の計算法による結果は、差分法による数値計算結果と比較され、マッハ数が

1 近く限った所では非常に良く一致することが確認されている。¹³⁾

5 超音速部二次元化学非平衡流の計算

5.1 基礎方程式

スロート下流の超音速膨張部に対する基礎方程式は ODK と同様の仮定の下に、以下のように書ける。

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial r} + \tilde{\mathbf{Z}} = 0 \quad (5-1)$$

ここに、 x , r は第 3 図に示す座標系であり、また、 $\tilde{\mathbf{U}}$, $\tilde{\mathbf{F}}$, $\tilde{\mathbf{Z}}$ は、

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u v \\ \rho u C_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ p + \rho v^2 \\ \rho v C_i \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \rho v / r \\ \rho u v / r \\ \rho v^2 / r \\ \rho v C_i / r - \omega_i \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

更に、エネルギー式は (3-4)、状態方程式は (3-5) で与えられている。

ノズル中心軸上 ($r=0$) では上式は以下の形をとる。

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_c}{\partial x} + \tilde{\mathbf{Z}}_c = 0 \quad (5-3)$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{U}}_c = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ 0 \\ \rho u C_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_c = \begin{bmatrix} \partial(2\rho v) / \partial r \\ \partial(2\rho u v) / \partial r \\ \partial(p + \rho v^2) / \partial r \\ \partial(2\rho v C_i) / \partial r - \omega_i \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

5.2 二次元化学非平衡流の数値計算法

5.1 節に示した方程式は、超音速領域では双曲型偏微分方程式であることから、ノズルスロート部の解を出発値として下流へ順次積分して行くことがで

きる。この数値計算法としては、特性曲線法が最も一般的であるが、当計算コードでは計算効率の良さおよび計算プログラム作成の容易さ等¹⁴⁾から、空間前進差分計算法を用いる。

この計算で最も問題となる点は、二次元化学非平衡流の節でも述べたように、近化学平衡領域においては、非常に短い化学反応時間と、それに比較して長い空力的特性時間との差により、方程式間および方程式内の各項の大きさに極端な違いが生じることである。そのため、現在の解をもとにして次の解を予測的に解く陽的差分法では数値的な不安定をまねく。この不安定性に対処するために、ここでは二つの新しい計算法を開発した。その一つは、化学種保存式を陰的差分法で積分し、他の流体力学方程式については既存の陽的差分法を適用して解くと云う陽陰混成解法であり、5.2.1 節以下に詳述する。他の一つは、陽陰混成解法よりも更に計算時間を短縮するために開発したもので、全方程式を陰に評価して同時に解く手法である。この後者の計算法(半陰的解法)については、既発表の論文¹⁵⁾を参照されたい。

5.2.1 流体力学方程式の取扱い

(5-1)~(5-4) 式の内流体力学方程式(連続の式、 x および r 方向の運動量保存式)は、Mac Cormack の差分式を用いた空間前進陽差分法^{4, 14)}で積分する。

まず、計算領域を矩形領域にするために、次の座標変換を施す。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= r / r_w \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

この変換により(5-1)式は、

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} + \mathbf{Z} = 0 \quad (5-6)$$

ここに、

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = -\frac{r'_w}{r_w} \eta \mathbf{U} + \frac{1}{r_w} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ p + \rho v^2 \end{bmatrix}$$

$$Z = \frac{r'_w}{r_w} U + \frac{1}{r_w \eta} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

および、 $u_1 = \rho u$, $u_2 = p + \rho u^2$, $u_3 = \rho u v$ である。また、中心軸上の式(5-3)は、

$$\frac{\partial U_c}{\partial \xi} + Z_c = 0 \quad (5-8)$$

ここに、

$$U_c = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad Z_c = \frac{2}{r_w} \begin{bmatrix} \partial(\rho v) / \partial \eta \\ \partial(\rho u v) / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

(5-6)式に対してMac Cormack の予測子・修正子法¹⁶⁾を適用すると、以下の式が得られる。

$$U_j^{(\overline{n+1})} = U_j^{(n)} - \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (F_{j+1}^{(n)} - F_j^{(n)}) - \Delta \xi Z_j^{(n)} \quad (5-10)$$

$$U_j^{(\overline{n+1})} = \frac{1}{2} \left\{ U_j^{(n)} + U_j^{(\overline{n+1})} - \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (F_j^{(\overline{n+1})} - F_{j-1}^{(\overline{n+1})}) - \Delta \xi Z_j^{(\overline{n+1})} + D_j^{(n)} \right\} \quad (5-11)$$

ここに、添字 j , n はそれぞれ η , ξ 方向の差分格子位置を示し(第4図), また $D_j^{(n)}$ は4次のダンピング項を意味する。

中心軸上の式(5-8)に対しても同様に以下の差分式を適用する。

$$U_c^{(\overline{n+1})} = U_c^{(n)} - \Delta \xi Z_c^{(n)} \quad (5-12)$$

$$U_c^{(\overline{n+1})} = \frac{1}{2} \left\{ U_c^{(n)} + U_c^{(\overline{n+1})} - \Delta \xi Z_c^{(\overline{n+1})} + D_j^{(n)} \right\} \quad (5-13)$$

(5-10), (5-11)式または(5-12), (5-13)式の解として得られる $U(u_1, u_2, u_3)$ から、

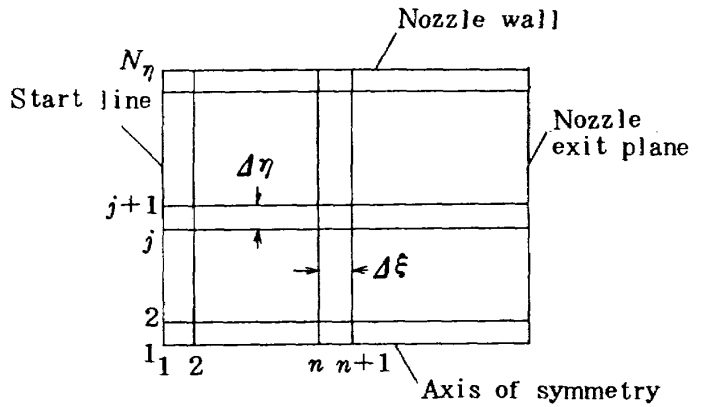


図4 計算面

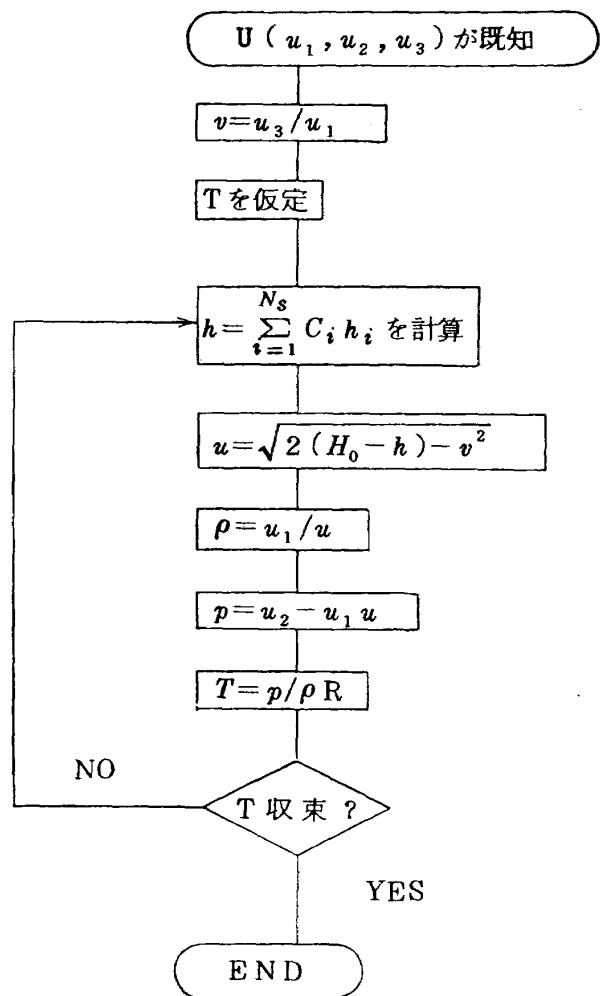


図5 $U(u_1, u_2, u_3)$ の分解法

u, v, p, ρ の物理量を計算する方法は、図5に示す通りである。

5.2.2 化学種保存式の取扱い

流体力学方程式と同様に、化学種保存式に対しても(5-5)式の座標変換を施すと、以下の式が得ら

れる。

$$\frac{\partial C_i}{\partial \xi} = f_i, \quad i = 1, \dots, N_s \quad (5-14)$$

ここに,

$$f_i = \frac{1}{r_w} \left[r_w' \eta - \frac{v}{u} \right] \frac{\partial C_i}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho u} \omega_i \quad (5-15)$$

(5-14)式に対する二次精度陰差分式は, 一次元流の場合と同様にして得られる。まず, ξ 微分に対して差分近似をすると

$$\Delta C_i^{(n+1)} = \frac{1}{2} \Delta \xi \left[f_i^{(n)} + f_i^{(n+1)} \right] \quad (5-16)$$

次に $f_i^{(n+1)}$ をテイラー級数で展開する。

$$\begin{aligned} f_i^{(n+1)} &= f_i^{(n)} + f_{i\xi}^{(n)} \Delta \xi + \sum_{j=1}^{N_s} f_{ic_j}^{(n)} \Delta C_j^{(n+1)} \\ &\quad + f_{ic_i\eta}^{(n)} \Delta C_{i\eta}^{(n+1)} + f_{iu}^{(n)} \Delta u^{(n+1)} \\ &\quad + f_{iv}^{(n)} \Delta v^{(n+1)} + f_{i\rho}^{(n)} \Delta \rho^{(n+1)} \\ &\quad + f_{iT}^{(n)} \Delta T^{(n+1)} \end{aligned} \quad (5-17)$$

更に, 上式右辺内に現われる $\Delta C_{i\eta}^{(n+1)}$ については,

$$\begin{aligned} \Delta C_{i\eta}^{(n+1)} &= C_{i\eta}^{(n+1)} - C_{i\eta}^{(n)} = C_{i\eta\xi}^{(n)} \Delta \xi^{(n+1)} \\ &= f_{i\xi}^{(n)} \Delta \xi^{(n+1)} \end{aligned} \quad (5-18)$$

(5-17), (5-18)式を(5-16)式に代入し, 整理すると,

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2} \Delta \xi^{(n+1)} f_{ic_i}^{(n)} \right) \Delta C_i^{(n+1)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Delta \xi \sum_{j=1}^{N_s} f_{ic_j}^{(n)} \Delta C_j^{(n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \Delta \xi^{(n+1)} \left[2 f_i^{(n)} + (f_{i\xi}^{(n)} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. + f_{ic_i\eta}^{(n)} f_{i\eta}^{(n)} \right) \Delta \xi^{(n+1)} + f_{iu}^{(n)} \Delta u^{(n+1)} \\ &\quad + f_{iv}^{(n)} \Delta v^{(n+1)} + f_{i\rho}^{(n)} \Delta \rho^{(n+1)} \\ &\quad + f_{iT}^{(n)} \Delta T^{(n+1)} \end{aligned} \quad (5-19)$$

式中の微係数 $f_{i\xi}, f_{i\eta}, f_{ic_j}, f_{iu}, f_{iv}, f_{i\rho}, f_{iT}$ については補遺Bに示す。

(5-19)式は $\Delta C_i^{(n+1)}$ に関する N_s 元の連立方程式となる。しかしながら, 右辺に現われる $\Delta u^{(n+1)}, \Delta v^{(n+1)}, \Delta \rho^{(n+1)}, \Delta T^{(n+1)}$ は流体力学方程式の解として与えられるため, 流体力学方程式の解と(5-19)式の解を繰り返し計算によって関係づけなければならない。

5.2.3 ノズル壁上の境界条件

ノズル壁面上の境界条件の取扱いは, 特性曲線の方程式を用いて行なう。(5-1), (5-2)式から特性曲線の方程式は以下の形に導かれる。

(a) ノズル壁に沿って

$$\frac{dr}{dx} = \tan \theta \quad (5-20)$$

$$\frac{1}{2} d(V^2) + \frac{1}{\rho} dp = 0 \quad (5-21)$$

$$\frac{dp}{\gamma p} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{A}{\cos \theta} dx \quad (5-22)$$

$$\frac{\gamma-1}{\gamma p} dp - \frac{dT}{T} = \frac{B}{\cos \theta} dx \quad (5-23)$$

$$dC_i = \frac{\omega_i}{\rho V \cos \theta} dx \quad (5-24)$$

(b) 左行特性曲線に沿って

$$\frac{dr}{dx} = \tan(\theta + \alpha) \quad (5-25)$$

$$\frac{dp}{p} = G \left\{ \left(A - \frac{\sin \theta}{r} \right) F dr - d\theta \right\} \quad (5-26)$$

ここで、 A 、 B 、 M は(3-15)式と同じものであり、

$$\left. \begin{aligned} F &= \cos \theta - \sin \theta \cot(\theta + \alpha) \\ G &= \frac{\gamma}{\sin \alpha \cos \alpha} \\ V &= (u^2 + v^2)^{1/2} \\ \theta &= \tan^{-1}(v/u) \\ \alpha &= \sin^{-1}(1/M) \end{aligned} \right\} \quad (5-27)$$

$$V_3 = \left\{ V_4^2 + \frac{2N}{N-1} \frac{p_4}{\rho_4} \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_4} \right)^{\frac{N-1}{N}} \right] \right\}^{1/2} \quad (5-29)$$

$$\rho_3 = \rho_4 \left(\frac{p_3}{p_4} \right)^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma_4} + \frac{1}{\gamma_3} \right)} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{A_4}{\cos \theta_4} + \frac{A_3}{\cos \theta_3} \right) (x_3 - x_4) \right] \quad (5-30)$$

$$T_3 = T_4 \left(\frac{p_3}{p_4} \right)^{\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_4} + \frac{\gamma_3 - 1}{\gamma_3} \right)} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{B_4}{\cos \theta_4} + \frac{B_3}{\cos \theta_3} \right) (x_3 - x_4) \right] \quad (5-31)$$

上式の内、化学種保存式(5-24)は内部点での取扱いと同様に陰的に解くことが望ましい。それゆえ、この式に対しては二次精度の陰的解析を適用し、他の式、すなわち(5-20)~(5-23)式および(5-25)、(5-26)式については、特性曲線法に基づいた陽な解き方をする。そして両者を繰返し計算によって結合する。

まず、壁面流線に沿っての式(5-20)~(5-23)を図6内の点3と4の間で差分近似すると、

$$r_3 = r_4 + \tan \left[\frac{1}{2} (\theta_4 + \theta_3) \right] (x_3 - x_4) \quad (5-28)$$

ここに

$$N = \ln \left(\frac{p_3}{p_4} \right) / \ln \left(\frac{\rho_3}{\rho_4} \right) \quad (5-32)$$

また、(5-25)、(5-26)式は、

$$r_3 = r_2 + \Delta x_{32} \tan \left[\frac{1}{2} (\theta_2 + \theta_3 + \alpha_2 + \alpha_3) \right] \quad (5-33)$$

$$p_3 = p_2 \exp \left[\frac{1}{2} (A_2 G_2 F_2 + A_3 G_3 F_3) (r_3 - r_2) \right]$$

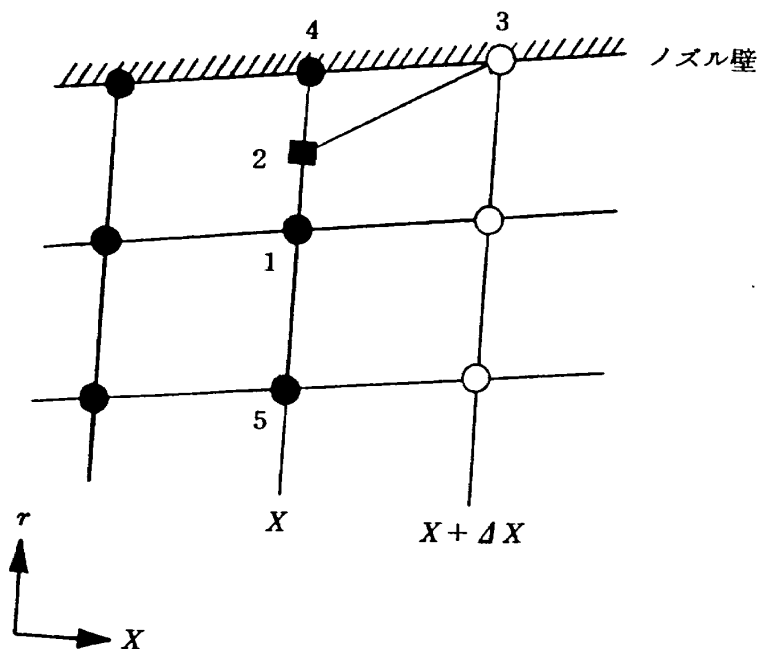


図6 ノズル壁境界の計算格子

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{G_2 F_2 \sin \theta_2}{r_2} + \frac{G_3 F_3 \sin \theta_3}{r_3} \right) (r_3 - r_2) - \frac{1}{2} (G_3 + G_2) (\theta_3 - \theta_2) \quad (5-34)$$

化学種保存式(5-24)は、ノズル壁面に沿って次の様に差分近似できる。

$$\Delta C_i^{(34)} \equiv C_i^{(3)} - C_i^{(4)} = \frac{1}{2} (f_i^{(4)} + f_i^{(3)}) \Delta x^{(34)} + O(\Delta x^3) \quad (5-35)$$

ここに、

$$f_i = \frac{\omega_i}{\rho V \cos \theta} \quad (5-36)$$

また、肩字(3), (4)は、それぞれ図6内の点3, 4での値を意味する。

内部点の取扱いと同様に、 $f_i^{(3)}$ を次の形で評価する。

$$f_i^{(3)} = f_i^{(4)} + f_{i\theta}^{(4)} \Delta \theta^{(34)} + f_{iV}^{(4)} \Delta V^{(34)} + f_{i\rho}^{(4)} \Delta \rho^{(34)} + f_{iT}^{(4)} \Delta T^{(34)} + \sum_{j=1}^{N_s} f_{ic_j}^{(4)} \Delta C_j^{(34)} \quad (5-37)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} f_{i\theta} &= f_i \tan \theta \\ f_{iV} &= -\frac{1}{V} f_i \\ f_{i\rho} &= -\frac{1}{\rho} f_i + \frac{1}{\rho V \cos \theta} \omega_{i\rho} \\ f_{iT} &= \frac{1}{\rho V \cos \theta} \omega_{iT} \\ f_{ic_j} &= \frac{1}{\rho V \cos \theta} \omega_{ic_j} \end{aligned} \right\} \quad (5-38)$$

である。また Δ は点4から3までの増分を意味する。

(5-37)式を(5-35)式に代入し、 $\Delta C_j^{(34)}$ について整理すると、

$$\Delta C_i^{(34)} - \frac{1}{2} \Delta x^{(34)} \sum_{j=1}^{N_s} f_{ic_j}^{(4)} \Delta C_j^{(34)} = \frac{1}{2} \{ 2f_i^{(4)} + f_{i\theta}^{(4)} \Delta \theta^{(34)} + f_{iV}^{(4)} \Delta V^{(34)} + f_{i\rho}^{(4)} \Delta \rho^{(34)} + f_{iT}^{(4)} \Delta T^{(34)} \} \quad (5-39)$$

この $\Delta C_j^{(34)}$ に関する N_s 元の連立方程式を解く事により、 $C_j^{(3)}$ は、

$$C_j^{(3)} = C_j^{(4)} + \Delta C_j^{(34)} \quad (5-40)$$

として求められる。

以上の計算手順は図7に示す。まず点3での V, p, T, C_j を、点1または点4の値で近似し、それをもとに繰返し計算を始める。

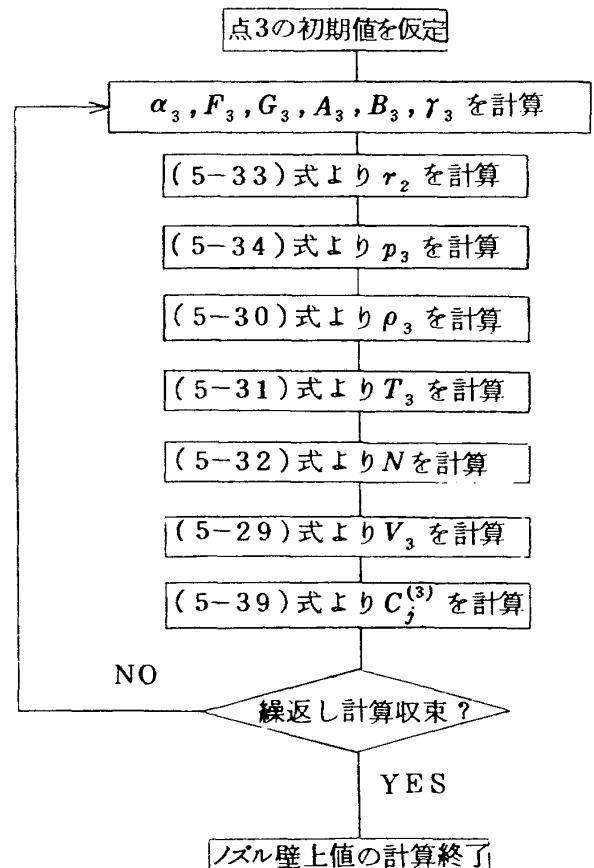


図7 ノズル壁境界の計算手順

5.2.4 計算手順

超音速部の計算は、スロート部の遷音速解を出発値として、下流へ順次積分して行く。出発値は、マッハ数が一定な線上で与えられる。多くのロケットノズルでは、スロート面を境にその上流の壁面曲率半径(r_u)と下流のそれ(r_d)とは値が異なるため(第3図)、展開パラメータ $\epsilon_k [=1/(R+1)]$ 内の R の値には上流値 r_u/r^* を用いなければならない。このために、 r_d の影響領域では遷音速解が有効でなくなり、超音速部計算の出発値の与え方に注意が必要である。当計算では、この出発値の与え方を以下のようにした。即ち、判断条件($x > 0$ かつ $M > M_{start}$)を満たさない差分格子点では、その値を遷音速解(4-2)式で評価し、判断条件を満たす点では、差分形で与えると云う手法を用いる。出発マッハ数 M_{start} はスロート面($x=0$)における壁面上のマッハ数と関係するが、当計算では1.05の値を用いた。

ノズル軸方向の各計算面(ξ =一定の面)にお

る計算手順を図8に示す。軸方向の計算ステップ幅 $\Delta \xi$ は、CFL条件により、次の式で与えられる。

$$\Delta \xi \leq r_w \Delta \eta \frac{u^2 - c^2}{|uv| + (u^2 + v^2 - c^2)^{1/2}} \quad (5-41)$$

6. 境界層の計算

ノズル壁面に沿っての境界層の計算は、参考文献3に記述されたTBLプログラムを若干修正して用いる。このプログラムは、境界層積分式による計算法を用いている。詳細については文献^{4, 17)}に譲るが、以下にその概略を述べる。

境界層方程式の積分式は、運動量厚 θ およびエネルギー厚 ϕ に対する方程式として次のように与えられる。

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} \left[1 + \left(\frac{dr_w}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} - \theta \left[\frac{1 + \frac{\delta^*}{\theta}}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{1}{\rho_\infty U_\infty} \frac{d(\rho_\infty U_\infty)}{dx} + \frac{1}{r_w} \frac{dr_w}{dx} \right] \quad (6-1)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = C_H \left[\frac{H_{aw} - H_w}{H_0 - H_w} \right] \left[1 + \left(\frac{dr_w}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} - \phi \left[\frac{1}{\rho_\infty U_\infty} \frac{d(\rho_\infty U_\infty)}{dx} + \frac{1}{r_w} \frac{dr_w}{dx} + \frac{1}{H_0 - H_w} \frac{d(H_0 - H_w)}{dx} \right] \quad (6-2)$$

ここに、排除厚 δ^* 、運動量厚 θ 、およびエネルギー厚 ϕ は次式で定義される。

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty} \right) dy \quad (6-3)$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy \quad (6-4)$$

$$\phi = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty} \left(1 - \frac{h_0 - H_w}{H_0 - H_w} \right) dy \quad (6-5)$$

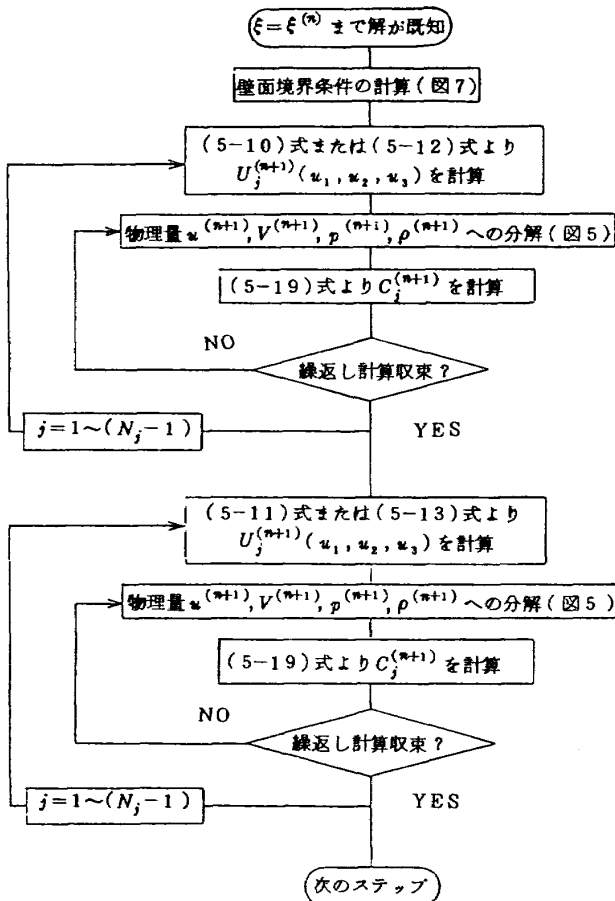


図8 二次元化学非平衡流の計算手順

(6-1), (6-2)式内の壁面摩擦係数 C_f およびスタントン数 C_H の定義は次式で与えられる。

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty U_\infty^2} \quad (6-6)$$

$$C_H = \frac{q_w}{\rho_\infty U_\infty (H_{aw} - H_w)} \quad (6-7)$$

C_f に関しては Coles¹⁸⁾ の一定圧力分布上の乱流境界層の測定値をもとに、次のように与える¹⁷⁾

(i) $R_\theta < 425$ のとき,

$$C_f = \frac{0.009896}{C_f R_\theta^{0.562}}$$

(ii) $425 \leq R_\theta \leq 29000$ のとき

Coles の実験値 (表 2) より内挿

(iii) $R_\theta > 29000$ のとき

$$\left(\frac{2}{C_f}\right)^{\frac{1}{2}} = 2.44 \ln \left[\frac{C_f R_\theta}{C_f \left(3.81 - \frac{25.104}{(2/C_f)^{1/2}} \right)} \right] + 7.68 \quad (6-8)$$

ここに、運動量厚 θ に基づいたレイノルズ数の定義は、

$$R_\theta = \frac{\rho_\infty U_\infty \theta}{\mu_\infty} \quad (6-9)$$

C_H に対しては、プラントル数と C_f , および θ と ϕ の差による補正を含んだ次式を用いる¹⁷⁾

$$C_H = \frac{\frac{C_f(R_\theta)}{2} \left(\frac{\phi}{\theta}\right)^{\tilde{n}}}{1 - 5 \left[\frac{C_f(R_\theta)}{2} \right]^{1/2} \left[1 - P_r + \ln \left(\frac{6}{5P_r + 1} \right) \right]} \quad (6-10)$$

ここに \tilde{n} は境界層相互干渉指数である。

境界層内における速度およびエンタルピー分布は、次の巾乗則で与えられるものとする。

表 2 C_f と R_θ の関係 (Coles の実験値)

C_f	R_θ
0.00590	425
0.00524	590
0.00464	855
0.00426	1150
0.00398	1450
0.00363	2050
0.00340	2650
0.00308	4150
0.00290	5650
0.00269	8600
0.00255	11500
0.00246	14500
0.00238	17500
0.00227	23500
0.00219	29000

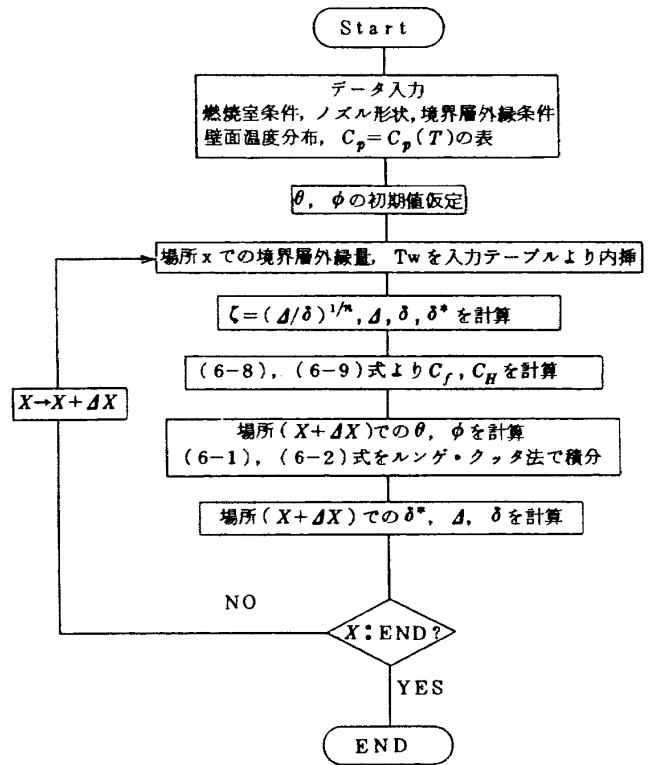


図 9 境界層の計算手順

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{for } y \leq \delta \quad (6-11)$$

$$\frac{h_0 - H_w}{H_0 - H_w} = \left(\frac{y}{\Delta}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{for } y \leq \Delta \quad (6-21)$$

ここに

$$h_0 = \frac{u^2}{2} + \int_0^T C_p dT \quad (6-13)$$

$$H_w = \int_0^{T_w} C_p dT \quad (6-14)$$

断熱壁エンタルピー H_{aw} は次式で与える。

$$\frac{H_{aw}}{H_0} = \frac{H_\infty + (P_r)^{\frac{1}{3}} \frac{U_\infty^2}{2}}{H_\infty + \frac{U_\infty^2}{2}} \quad (6-15)$$

計算のフローチャートを図9に示す。境界層の計算は、ODK計算と同様にノズル収縮部直前から始める。境界層外縁条件、 $C_p = C_p(T)$ のテーブル等はODK, TDKの計算結果より与えられる。境界層計算スタート時の θ と ϕ の初期値は、その下流の計算結果に余り影響を与えない¹⁷⁾ことから、十分小さな値を与える。

7. 計算結果

7.1 酸素・水素プロペラントエンジン

酸素・水素をプロペラントとするエンジンは、図1にも示したように今日多く見られる。また、その化学反応に関するデータも比較的良く分っている事から、性能予測プログラムのチェックには適している。

まず、燃焼室圧 3.43MPa (35kg/cm²)、ノズル開口比 140、推力 4000N 級の小型酸素水素エンジン¹⁹⁾ についての結果を、図10～図12に示す。このエンジンの形状、およびTDK計算によるノズル内の等マッハ線図(境界層排除厚効果は考慮なし)を図10に示す。この計算に用いた化学反応式および反応速度定数は、表3に示す通りである。⁸⁾6種の化学種(H, H₂, H₂O, O, O₂, OH)による8反応を考慮している。

図11は、ノズル壁面に沿っての静圧分布を実験

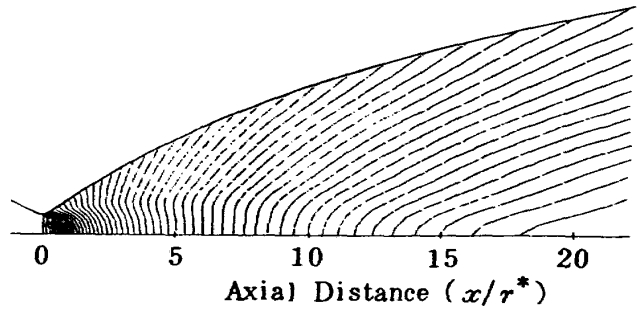


図10 小型酸素・水素エンジンのノズル形状および等マッハ線図

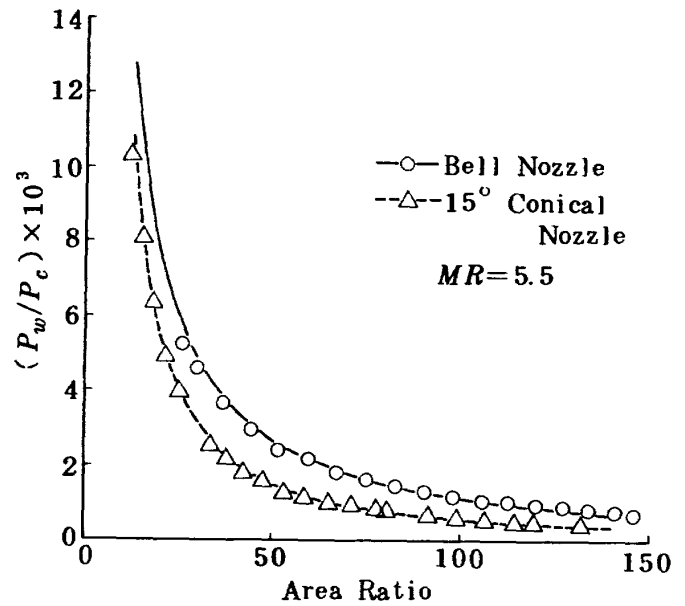


図11 ノズル壁に沿っての静圧分布の比較

値と比較したもので、図10のベルノズル、および同じスロート径と開口比の15°コニカルノズルの結果を示す。そして、図12はノズル性能の予測値(真空比推力)を実験値と比較したものである。この図で、一番上の線はODEの計算結果を示し、2番目の線はODKの結果である。ODEとODKの差は化学非平衡による損失(KL=Kinetic Loss)

表3 水素・酸素の化学反応式および反応速度定数

No.	reaction	reaction rate
1	O + O + M = O ₂ + M	$k_f = 1.2 \times 10^{17} T^{-1}$
2	H + H + M = H ₂ + M	$k_f = 6.4 \times 10^{17} T^{-1}$
3	H + OH + M = H ₂ O + M	$k_f = 7.5 \times 10^{23} T^{-2.6}$
4	O + H + M = OH + M	$k_f = 4.0 \times 10^{18} T^{-1}$
5	H ₂ + OH = H + H ₂ O	$k_f = 2.19 \times 10^{13} \exp(-5150/RT)$
6	OH + OH = O + H ₂ O	$k_f = 5.75 \times 10^{12} \exp(-780/RT)$
7	H + OH = O + H ₂	$k_f = 7.33 \times 10^{12} \exp(-7300/RT)$
8	O + OH = H + O ₂	$k_f = 1.3 \times 10^{13}$

と見なせる。三番目の線はTDK(境界層無し)の結果であり、これとODKとの差は二次元損失(TDL=Two-Dimensional Loss)の指標となる。四番目の線は、境界層排除厚補正をしたTDK結果から、更に境界層損失(BLL=Boundary Layer Loss)を

差引いた結果であり、そして最も下の線は、TDK-TBLの結果から燃焼室内での損失(ERL=Energy Release Loss)を引いた最終予測値(Delivered ISP)である。ERLの算出方法としては、二つの方法を試みた。その一つは、燃焼室内への入力エンタルピーを下げて、 c^* 値を実験のそれと合わせ方法であり、他の一つは単純に実験値の

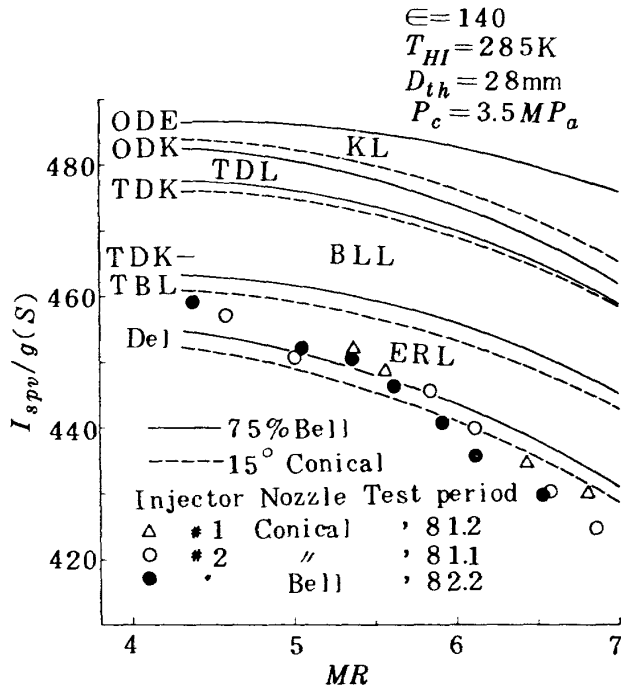


図12 予測真空比推力の実験値との比較 (開口比140, 低推力水冷却エンジン)

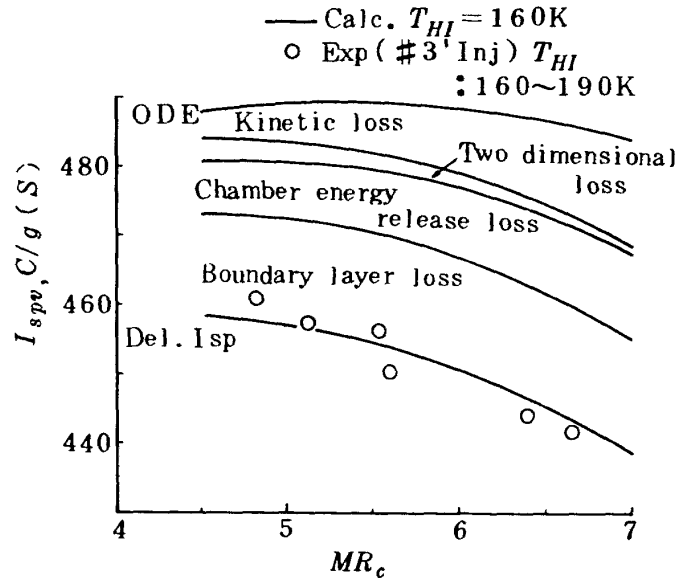


図13 予測真空比推力の実験値との比較 (開口比300, 低推力水素冷却エンジン)

表4 LE5エンジンの結果

TEST NO	Tb (sec)	Fv (ton)	Pc (kg/cm ² a)	Wt (kg/sec)	C* (m/sec)	MR		Ispv (sec)	
						E/G	M/C	Exp	Cal
KH031H	40	10.51	36.8	23.45	2229	5.47	6.04	448.2	446.3
KH032H	40	8.61	30.4	19.10	2260	5.16	5.66	450.5	449.7
KH033H	40	9.37	32.9	21.03	2218	5.65	6.17	445.8	446.6
KH034H	40	10.83	38.5	23.99	2288	4.86	5.33	451.7	450.9
KH035H	40	10.79	37.7	24.22	2210	5.78	6.38	445.4	446.1
KH036H	60	9.88	35.1	21.90	2278	4.94	5.42	451.3	450.3
KH037H	60	10.53	36.7	23.66	2199	5.91	6.45	445.0	444.9
KH038H	162	10.28	36.1	23.00	2229	5.52	6.10	447.0	447.3
KH039H	370	10.30	36.1	23.02	2227	5.50	6.07	447.7	447.0
KH040H	100	10.27	36.1	22.93	2232	5.48	6.02	448.0	446.2
KH041H	100	10.30	36.1	23.53	2231	5.48	6.02	448.1	447.5
KH042H	100	10.43	34.1	20.83	2226	5.34	4.70	453.0	451.5

c^* 効率を TDK-TBL 結果に掛ける方法である。しかし、前者の方法は、 c^* 効率が悪いエンジンでは ERL が過度に大きくなり過ぎる傾向があるため²⁰⁾、本レポート内の計算結果は、総て後者の方法を用いている。

さて、図 12 で予測値と実験値を比較してみると、実験値の方が混合比依存性が少し大き目に出ている。この原因としては、燃焼室内の未反応物の影響を挙げられるかも知れない。²¹⁾つまり、このエンジンでは c^* 効率が余り良くないために、燃焼室内での未反応物がスロート下流で反応するメカニズムによる影響である。この問題については、更に検討する必要がある。

図 13 は、前例と同レベルのエンジンで、開口比が 300 のノズルの実験値²²⁾との比較である。チャンバー形状、スロート径は前例と同じであるが、インジェクターは改良されたものを用いている。

表 4 は、現在我国で開発中の H1 ロケット第 2 段エンジンに関する性能値の比較である。このエンジンは、推力 10 トン級で、開口比 140、ノズル形状は最初の例のノズルをほぼ 5 倍スケールアップしたものである。このエンジンの比推力算出には、タービン排気およびダンプ冷却による影響を加味する必要があり、当計算例では次式を用いた。

$$I_{SP} = \frac{I_{MC} \dot{m}_{MC} + I_{TE} \dot{m}_{TE} + I_{DC} \dot{m}_{DC}}{\dot{m}_{MC} + \dot{m}_{TE} + \dot{m}_{DC}} \quad (7-1)$$

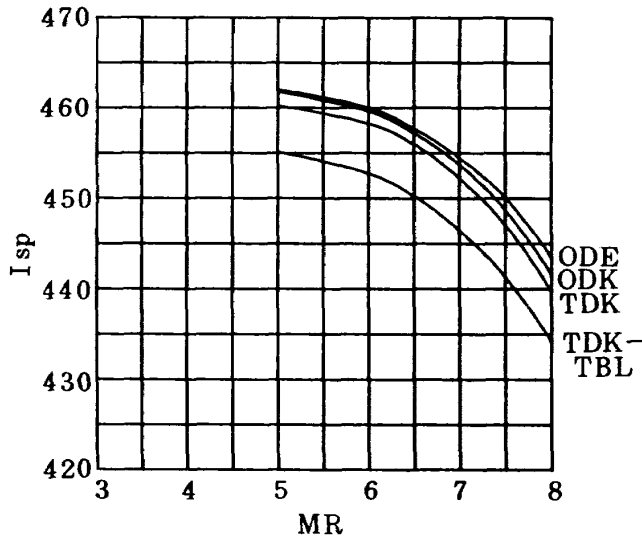


図 14 高圧ブースターエンジンの計算例

ここに、 I_{MC} 、 I_{TE} 、 I_{DC} は、主推力室、タービン排気、およびダンプ冷却の比推力値を意味し、また \dot{m} は質量流量である。

図 14 は、高燃焼圧酸素水素エンジンで、海面上推力 60 トン級のブースターエンジンを想定した計算である。このエンジンの場合、燃焼圧が高いために化学損失が非常に小さく、またノズル形状も 91 % ベルに設計されるため、二次元損失も小さい。

7.2 四酸化窒素・ヒドラジン系エンジン

図 15 ~ 図 17 は、四酸化二窒素とエアロジン 50 (NTO/A-50) をプロペラントとしたエンジンの計算例である。表 5 には計算に用いた化学反応データ⁸⁾を示す。12 の化学種に対して、24 の化学反応を考慮している。

まず、N-1 ロケットの第 2 段として用いられた推力 5.5 トンの LE-3 エンジンの実験値²³⁾との比較を図 15 に示す。このエンジンでは c^* 効率が 92 % と非常に悪く、計算値との比較の対象としては余り良いデータではないが、結果は計算値の方がやや低目の値を示している。

次に、アポロ計画の際に米国にて研究開発されたエンジンの実験データ²⁴⁾との比較を図 16、図 17 に示す。まず図 16 は開口比 40 のノズルである。燃焼圧は 7 kg/cm² と低いために、化学損失が大きな

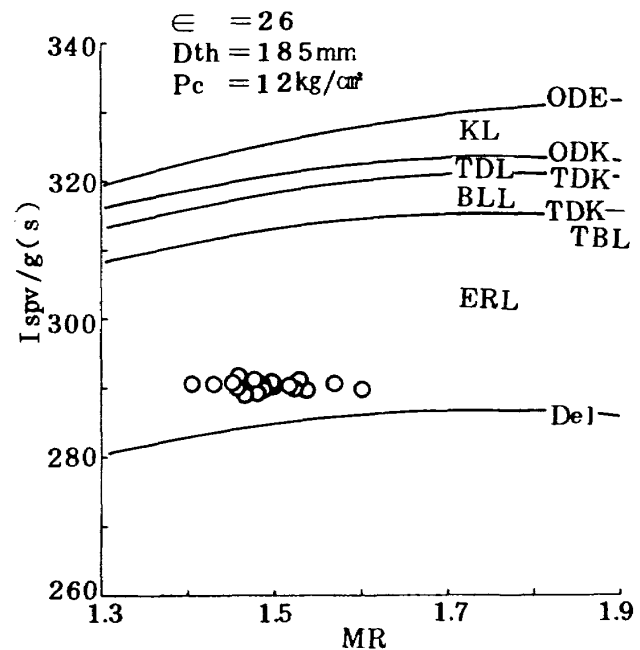


図 15 LE-3 エンジンの予測真空比推力と実験値

表5 NTO/A50の化学反応式および反応速度定数

No.	reaction	reaction rate
1	$H + OH + M = H_2O + M$	$k_f = 7.5 \times 10^{23} T^{-2.6}$
2	$O + H + M = OH + M$	$k_f = 4.0 \times 10^{18} T^{-1}$
3	$O + O + M = O_2 + M$	$k_f = 1.2 \times 10^{17} T^{-1}$
4	$H + H + M = H_2 + M$	$k_f = 6.4 \times 10^{17} T^{-1}$
5	$CO_2 + M = O + CO + M$	$k_f = 2.7 \times 10^{32} T^{-4.5} \exp(-127555/RT)$
6	$C + O + M = CO + M$	$k_f = 3.0 \times 10^{16} T^{-.5}$
7	$N + N + M = N_2 + M$	$k_f = 1.0 \times 10^{18} T^{-1}$
8	$N + O + M = NO + M$	$k_f = 6.4 \times 10^{16} T^{-.5}$
9	$H_2 + OH = H + H_2O$	$k_f = 2.19 \times 10^{13} \exp(-5150/RT)$
10	$OH + OH = O + H_2O$	$k_f = 5.75 \times 10^{12} \exp(-780/RT)$
11	$H + OH = O + H_2$	$k_f = 7.33 \times 10^{12} \exp(-7300/RT)$
12	$O + OH = H + O_2$	$k_f = 1.3 \times 10^{13}$
13	$OH + CO = H + CO_2$	$k_f = 5.6 \times 10^{11} \exp(-1080/RT)$
14	$O_2 + CO = O + CO_2$	$k_f = 8.85 \times 10^9 T^{.656} \exp(-45920/RT)$
15	$OH + OH = H_2 + O_2$	$k_f = 1.41 \times 10^{13} T^{-.01} \exp(-49264/RT)$
16	$NO + NO = N_2 + O_2$	$k_f = 1.0 \times 10^{13} \exp(-79490/RT)$
17	$N + NO = O + N_2$	$k_f = 3.1 \times 10^{13} \exp(-334/RT)$
18	$N + O_2 = O + NO$	$k_f = 6.43 \times 10^9 T^1 \exp(-6250/RT)$
19	$CO_2 + C = CO + CO$	$k_f = 1.1 \times 10^{11} T^{.5} \exp(-6995/RT)$
20	$C + OH = CO + H$	$k_f = 5.3 \times 10^{11} T^{.5} \exp(-5628/RT)$
21	$C + NO = CO + N$	$k_f = 5.3 \times 10^{11} T^{.5} \exp(-8303/RT)$
22	$CO_2 + N = CO + NO$	$k_f = 1.1 \times 10^{11} T^{.5} \exp(-59618/RT)$
23	$C + O_2 = CO + O$	$k_f = 5.3 \times 10^{11} T^{.5} \exp(-6552/RT)$
24	$N + OH = NO + H$	$k_f = 5.3 \times 10^{11} T^{.5} \exp(-5628/RT)$

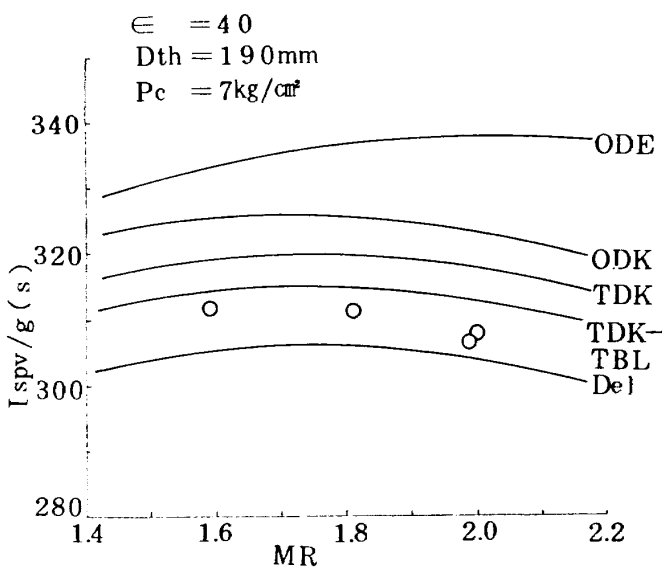


図16 開口比40のエンジンの予測真空比推力と実験値

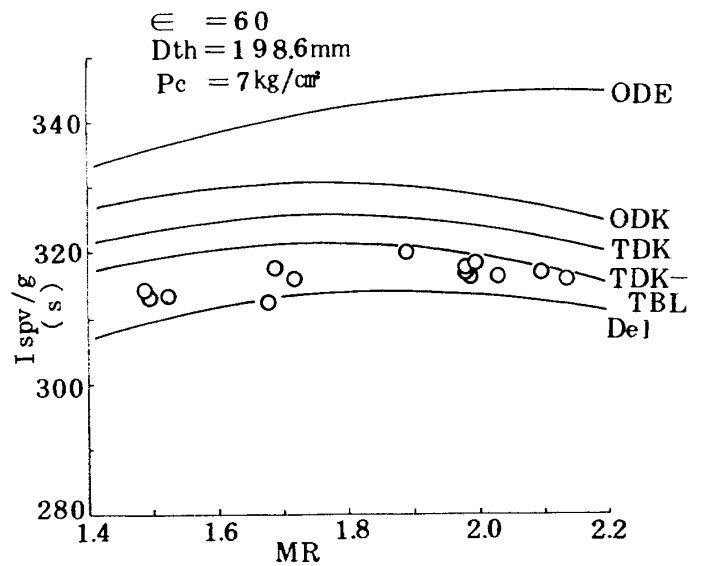


図17 開口比60のエンジンの予測真空比推力と実験値

割合を占めている。図17は開口比60のノズルであり、両者とも予測値はやや低めの値を出しているものの、混合比依存性は傾向的に良く合っている。

8. むすび

本論文では、液体ロケットエンジンのノズル内の流れを計算する手法を示した。ノズル性能算出のためのこの計算は、4つのステップ(ODE, ODK, TDK, TBL)から構成されており、本論内では特に二次元化学非平衡流の計算法について詳述した。この計算法は、流体力学方程式については空間前進衝撃波捕獲差分法に類した取扱いをし、他方化学種保存式は二次精度の陰差分法を適用したものである。

計算結果と実験値との比較では、おおむね良い一致をしている。しかし、以下の検討課題がまだ残されているようである。

- (1) 化学反応データの検討
- (2) 燃焼室内の損失(不完全混合, 不完全燃焼等による)の評価
- (3) 乱流境界層の計算の精度向上

(1)については、より新しいデータの収集、計算値における各反応データ値の感受性チェック等が今後必要である。(2)の問題は非常に困難な問題ではあるが、全損失中に占める割合が大きいために、何らかの信頼しうる評価法が検討されなければならない。まだ(3)についても、比較的小推力でかつ大きな開口比のノズルでは境界層損失が他に比較して大きくなるために、予測値の精度向上には欠かせない。

本論文は、ノズル性能評価のための一つの道具を提供したものである。この道具はまだ改良の余地があるものの、新しいエンジンを開発するための道具としては有用であると信ずる。それゆえに多くの人々に使われ、それにより更に信頼性の高い道具にして行きたいと思っている。

参考文献

- 1) Powell, W.B.; Current Status of the ICRPG Liquid Propellant Thrust Chamber Performance Evaluation Methodology, AIAA Paper 69-468, 1969.
- 2) Gordon, S. and McBride, B.J.; Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions, Rocket Performance, Incident and Reflected Shocks, and Chapman-Jouguet Detonations., NASA SP-273, 1971.
- 3) Omori, S., Gross, K.W., and Krebsbach, A.; Wall Temperature Distribution Calculation for a Rocket Nozzle Contour., NASA TN D-6825, 1972.
- 4) Kutler, P., Reinhardt, W.A., and Warming, R.F.; Multishocked, Three-Dimensional Supersonic Flowfields with Real Gas Effects., AIAA J. Vol 11, No. 5, pp. 657-664, 1973.
- 5) Lomax, H. and Bailey, H.E.; A Critical Analysis of Various Numerical Integration Methods for Computing the Flow of a Gas in Chemical Nonequilibrium., NASA TN D-4109, 1967.
- 6) Tyson, T.J. and Kliegel, J.R.; An Implicit Integration Procedure for Chemical Kinetics., AIAA Paper 68-180, 1968.
- 7) Bittker, D.A. and Scullin, V.J.; General Chemical Kinetics Computer Program for Static and Flow Reactions, with Application to Combustion and Shock-Tube Kinetics., NASA TN D-6586, 1972.
- 8) Nickerson, G.R., Coats, D.E. and Bartz, J.L.; The Two-Dimensional Kinetic (TDK) Reference Computer Program: Engineering and Programming Manual, NASA-CR-152999, 1977.
- 9) Sauer, R.; General Characteristics of the Flow Through Nozzles at Near Critical Speeds, NACA TM 1147 (1947).
- 10) Hall, I.M.; Transonic Flow in Two-Dimensional and Axially Symmetric Nozzles., Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. XV, Pt. 4, pp. 487-508, 1962.
- 11) Kliegel, J.R. and Levine, J.N.; Transonic Flow in Small Throat Radius of Curvature

- Nozzles, AIAA J., Vol. 7, No. 7, pp. 1375-1378, 1969.
- 12) Stiles, R.J. and Hoffman, J.D.; Analysis of Steady, Two-Dimensional, Chemically Reacting Nonequilibrium Flow by an Unsteady, Asymptotically Consistent Technique, AIAA Paper 81-1432, 1981.
- 13) Nakahashi, K.; Computation of Two-Dimensional, Transonic, Chemically Reacting Nonequilibrium Flow in a Rocket Nozzle., to be appeared in Institute of Space and Aeronautics Science Report, 1983.
- 14) 中橋和博, 毛呂明夫, 宮島博; 高膨張ロケットノズル内の流れの計算について, NAL TR-634, 1980.
- 15) Nakahashi, K.; An Implicit Finite Difference Method for Chemical Nonequilibrium Flow Through an Axisymmetric Supersonic Nozzle., 8th ICNMF, Lecture Notes in Physics, Vol. 170, pp. 390-395, 1982, or NAL TR-705T, 1982.
- 16) MacCormack, R.W.; The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering., AIAA Paper 69-354, 1969.
- 17) Bartz, D.R.; Turbulent Boundary-Layer Heat transfer from Rapidly Accelerating Flow of Rocket Combustion Gases and of Heated Air., Advance in Heat Transfer Vol. 2, 1965.
- 18) Coles, D.E.; The Turbulent Boundary Layer in a Compressible Fluid, Report No. AD-285-651.
- 19) Miyajima, H., et al.; Performance of a Small LO_2/H_2 Thrust Chamber with High Area Ratio Nozzle., Proc. 13th Intn. Symp on Space Sci. & Tech., Tokyo, 1982 AGNE Pub. Inc., 1982.
- 20) Pieper, J.L., Dean, L.E., and Valentine, R.S., Effects of Chamber Energy Release Efficiency upon Nozzle Performance., J. Spacecraft Vol. 4, No. 5 pp 700-702, 1967.
- 21) Adams, D.M., Theoretical Assessment of Some Combustion and Expansion Problems in Rocket Motors., J. Spacecraft, Vol. 5, No. 2, pp. 173-178, 1968.
- 22) Miyajima, H., et al.; Performance of a Low Thrust LO_2/LH_2 Engine with a 300: 1 Area Ratio Nozzle., AIAA Paper 83-1313, 1983.
- 23) 大塚貞吉, 他; Nロケット第2段用LE-3型エンジンの高空性能試験, NAL TM-364, 1978.
- 24) Aukerman, C.A. and Trout, A.M., Experimental Rocket Performance of Apollo Storable Propellants in Engines with Large Area Ratio Nozzles., NASA TN D-3566, 1966.

補遺 A 式(3-29)内の $f_i, \alpha_i, \beta_{i,j}$ について

1) 圧力分布指定の場合

$$f_1 = \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho V} \frac{dp}{dx} \quad (A-1)$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho V} \frac{d^2 p}{dx^2} \quad (A-2)$$

$$\beta_{1,1} = \frac{\partial f_1}{\partial V} = -\frac{1}{V} f_1 \quad (A-3)$$

$$\beta_{1,2} = \frac{\partial f_1}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} f_1 \quad (A-4)$$

$$\beta_{1,3} = \frac{\partial f_1}{\partial T} = 0 \quad (A-5)$$

$$\beta_{1,3+j} = \frac{\partial f_1}{\partial C_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N_s \quad (A-6)$$

$$f_2 = \frac{d\rho}{dx} = \left[\frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dx} - A \right] \rho \quad (A-7)$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{\gamma p^2} \left[p \frac{d^2 p}{dx^2} - \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 \right] \rho \quad (A-8)$$

$$\beta_{2,1} = \frac{\partial f_2}{\partial V} = -\frac{\partial A}{\partial V} \rho \quad (A-9)$$

$$\beta_{2,2} = \frac{\partial f_2}{\partial \rho} = -\frac{\partial A}{\partial \rho} \rho + \frac{1}{\rho} f_2 \quad (A-10)$$

$$\beta_{2,3} = \frac{\partial f_2}{\partial T} = -\frac{\partial A}{\partial T} \rho - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial T} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} \rho \quad (A-11)$$

$$\beta_{2,3+j} = \frac{\partial f_2}{\partial C_j} = -\frac{\partial A}{\partial C_j} \rho - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial C_j} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} \rho, \quad j = 1, \dots, N_s \quad (A-12)$$

$$f_3 = \frac{dT}{dx} = \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} - B \right] T \quad (A-13)$$

$$\alpha_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p^2} \left[p \frac{d^2 p}{dx^2} - \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 \right] T \quad (A-14)$$

$$\beta_{3,1} = \frac{\partial f_3}{\partial V} = -\frac{\partial B}{\partial V} T \quad (A-15)$$

$$\beta_{3,2} = \frac{\partial f_3}{\partial \rho} = -\frac{\partial B}{\partial \rho} T \quad (A-16)$$

$$\beta_{3,3} = \frac{\partial f_3}{\partial T} = \frac{1}{T} f_3 + T \left\{ \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial T} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} - \frac{\partial B}{\partial T} \right\} \quad (A-17)$$

$$\beta_{3,3+j} = \frac{\partial f_3}{\partial C_j} = \left\{ \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial C_j} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} - \frac{\partial B}{\partial C_j} \right\} T, \quad j = 1, \dots, N_s \quad (A-18)$$

$$f_{3+i} = \frac{dC_i}{dx} = \frac{\omega_i}{\rho V}, \quad i = 1, \dots, N_s \quad (A-19)$$

$$\alpha_{3+i} = \frac{\partial f_{3+i}}{\partial x} = 0 \quad (A-20)$$

$$\beta_{3+i,1} = \frac{\partial f_{3+i}}{\partial V} = -\frac{1}{V} f_{3+i} \quad (A-21)$$

$$\beta_{3+i,2} = \frac{\partial f_{3+i}}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} f_{3+i} + \frac{1}{\rho V} \frac{\partial \omega_i}{\partial \rho} \quad (A-22)$$

$$\beta_{3+i,3} = \frac{\partial f_{3+i}}{\partial T} = \frac{1}{\rho V} \frac{\partial \omega_i}{\partial T} \quad (A-23)$$

$$\beta_{3+i,3+j} = \frac{\partial f_{3+i}}{\partial C_j} = \frac{1}{\rho V} \frac{\partial \omega_i}{\partial C_j}, \quad j = 1, \dots, N_s \quad (A-24)$$

2) ノズル形状指定の場合

$$f_1 = \frac{dV}{dx} = \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \frac{V}{M^2 - 1} \quad (A-25)$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \left[a \frac{d^2 a}{dx^2} - \left(\frac{da}{dx} \right)^2 \right] \frac{V}{M^2 - 1} \quad (\text{A-35})$$

$$\beta_{1,1} = \frac{\partial f_1}{\partial V} = -\frac{\partial A}{\partial V} \frac{V}{M^2 - 1} + \frac{1}{V} f_1 - \frac{1}{M^2 - 1} f_1 \frac{\partial M^2}{\partial V} \quad (\text{A-26})$$

$$\beta_{1,2} = \frac{\partial f_1}{\partial \rho} = -\frac{\partial A}{\partial \rho} \frac{V}{M^2 - 1} \quad (\text{A-27})$$

$$\beta_{1,3} = \frac{\partial f_1}{\partial T} = -\frac{\partial A}{\partial T} \frac{V}{M^2 - 1} - \frac{1}{M^2 - 1} f_1 \frac{\partial M^2}{\partial T} \quad (\text{A-28})$$

$$\beta_{1,3+j} = \frac{\partial f_1}{\partial C_j} = -\frac{\partial A}{\partial C_j} \frac{V}{M^2 - 1} - \frac{1}{M^2 - 1} f_1 \frac{\partial M^2}{\partial C_j}, \quad j=1, \dots, N_s \quad (\text{A-29})$$

$$f_2 = \frac{d\rho}{dx} = -\left\{ \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \frac{M^2}{M^2 - 1} + A \right\} \rho \quad (\text{A-30})$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{1}{a^2} \left[a \frac{d^2 a}{dx^2} - \left(\frac{da}{dx} \right)^2 \right] \frac{M^2}{M^2 - 1} \rho \quad (\text{A-31})$$

$$\beta_{2,1} = \frac{\partial f_2}{\partial V} = \left\{ \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\partial A}{\partial V} + \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \frac{1}{(M^2 - 1)^2} \frac{\partial M^2}{\partial V} \right\} \rho \quad (\text{A-32})$$

$$\beta_{2,2} = \frac{\partial f_2}{\partial \rho} = \frac{\rho}{M^2 - 1} \frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} f_2 \quad (\text{A-33})$$

$$\beta_{2,3} = \frac{\partial f_2}{\partial T} = \left\{ \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\partial A}{\partial T} + \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \frac{1}{(M^2 - 1)^2} \frac{\partial M^2}{\partial T} \right\} \rho \quad (\text{A-34})$$

$$\beta_{2,3+j} = \frac{\partial f_2}{\partial C_j} = \left\{ \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\partial A}{\partial C_j} + \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \frac{1}{(M^2 - 1)^2} \frac{\partial M^2}{\partial C_j} \right\} \rho, \quad j=1, \dots, N_s \quad (\text{A-35})$$

$$f_3 = \frac{dT}{dx} = -\left\{ \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \frac{(\gamma - 1) M^2}{M^2 - 1} + B \right\} T \quad (\text{A-36})$$

$$\alpha_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x} = -\frac{1}{a} \left[\frac{d^2 a}{dx^2} - \frac{1}{a} \left(\frac{da}{dx} \right)^2 \right] \frac{(\gamma - 1) M^2}{M^2 - 1} T \quad (\text{A-37})$$

$$\beta_{3,1} = \frac{\partial f_3}{\partial V} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial V} \frac{(\gamma - 1) M^2}{M^2 - 1} + \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \frac{(\gamma - 1)}{(M^2 - 1)^2} \frac{\partial M^2}{\partial V} - \frac{\partial B}{\partial V} \right\} T \quad (\text{A-38})$$

$$\beta_{3,2} = \frac{\partial f_3}{\partial \rho} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial \rho} \frac{(\gamma - 1) M^2}{M^2 - 1} - \frac{\partial B}{\partial \rho} \right\} T \quad (\text{A-39})$$

$$\beta_{3,3} = \frac{\partial f_3}{\partial T} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial T} \frac{(\gamma - 1) M^2}{M^2 - 1} - \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \left[\frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial \gamma}{\partial T} - \frac{(\gamma - 1)}{(M^2 - 1)^2} \frac{\partial M^2}{\partial T} \right] - \frac{\partial B}{\partial T} \right\} T + \frac{1}{T} f_3 \quad (\text{A-40})$$

$$\beta_{3,3+j} = \frac{\partial f_3}{\partial C_j} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial C_j} \frac{(\gamma - 1) M^2}{M^2 - 1} - \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dx} - A \right] \left[\frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial \gamma}{\partial C_j} \right] \right\} T + \frac{1}{T} f_3 \quad (\text{A-41})$$

$$-\left. \left. \frac{(\gamma-1)}{(M^2-1)^2} \frac{\partial M^2}{\partial C_j} \right] - \frac{\partial B}{\partial C_j} \right\} T, \quad j=1, \dots, N_s \quad (A-42)$$

$$f_{3+i} = \frac{dC_i}{dx} = \frac{\omega_i}{\rho V}, \quad j=1, \dots, N_s \quad (A-43)$$

$$\alpha_{3+i} = \frac{\partial f_{3+i}}{\partial x} = 0 \quad (A-44)$$

$$\beta_{3+i,1} = \frac{\partial f_{3+i}}{\partial V} = -\frac{1}{V} f_{3+i} \quad (A-45)$$

$$\beta_{3+i,2} = \frac{\partial f}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} f_{3+i} + \frac{1}{\rho V} \frac{\partial \omega_i}{\partial \rho} \quad (A-46)$$

$$\beta_{3+i,3} = \frac{\partial f}{\partial T} = \frac{1}{\rho V} \frac{\partial \omega_i}{\partial T} \quad (A-47)$$

$$\beta_{3+i,3+j} = \frac{\partial f}{\partial C_j} = \frac{1}{\rho V} \frac{\partial \omega_i}{\partial C_j}, \quad j=1, \dots, N_s \quad (A-48)$$

3) 化学種生成項の微係数

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial y_l} = W_i \sum_{j=1}^{N_r} (\nu'_{ij} - \nu_{ij}) \frac{\partial \bar{X}_j}{\partial y_l} \quad (A-49)$$

ここで、 $y_l = \rho, T$ または、 $C_k (k=1, \dots, N_s)$ 。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{X}_j}{\partial \rho} = M_j \left\{ \lambda_j \rho^{\lambda_j-1} k_{fj} \prod_{l=1}^{N_s} \left(\frac{C_l}{W_l} \right)^{\nu_{lj}} \right. \\ \left. - \lambda'_j \rho^{\lambda'_j-1} k_{bj} \prod_{l=1}^{N_s} \left(\frac{C_l}{W_l} \right)^{\nu'_{lj}} \right\} \end{aligned} \quad (A-50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{X}_j}{\partial T} = M_j \left\{ \rho^{\lambda_j} \frac{dk_{fj}}{dT} \prod_{l=1}^{N_s} \left(\frac{C_l}{W_l} \right)^{\nu_{lj}} \right. \\ \left. - \lambda'_j \rho^{\lambda'_j-1} \frac{dk_{bj}}{dT} \prod_{l=1}^{N_s} \left(\frac{C_l}{W_l} \right)^{\nu'_{lj}} \right\} \end{aligned} \quad (A-51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{X}_j}{\partial C_k} = M_j \left\{ \rho^{\lambda_j} k_{fj} \cdot \nu_{kj} \left(\frac{C_k}{W_k} \right)^{\nu_{kj}-1} \prod_{l=1, l \neq k}^{N_s} \left(\frac{C_l}{W_l} \right)^{\nu_{lj}} \right. \\ \left. - \rho^{\lambda'_j} k_{bj} \nu'_{kj} \left(\frac{C_k}{W_k} \right)^{\nu'_{kj}-1} \prod_{l=1, l \neq k}^{N_s} \left(\frac{C_l}{W_l} \right)^{\nu'_{lj}} \right\} \\ + \frac{\bar{X}_j}{M_j} \frac{dM_j}{dC_k} \end{aligned} \quad (A-52)$$

$$\frac{dk_{bj}}{dT} = k_{bj} \left\{ -\frac{n_j}{T} + \frac{b_j}{RT^2} \right\} \quad (A-53)$$

$$\frac{dk_{fj}}{dT} = k_{bj} \frac{dK_j}{dT} + K_j \frac{dk_{bj}}{dT} \quad (A-54)$$

$$\frac{dK_j}{dT} = \frac{1}{T} \left[\frac{\Delta h_j}{RT} - (\lambda'_j - \lambda_j) \right] K_j \quad (A-55)$$

4) その他の微係数

γ : (3-15)式

$$\frac{\partial \gamma}{\partial V} = \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = 0 \quad (A-56)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} = -\gamma(\gamma-1) \frac{1}{C_p} \sum_i C_i \frac{\partial C_{pi}}{\partial T} \quad (A-57)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial C_j} = -\gamma(\gamma-1) \left\{ \frac{1}{C_p} C_{pj} - \frac{1}{R} R_j \right\} \quad (A-58)$$

M : (3-15)式

$$\frac{\partial M}{\partial V} = \frac{M}{V} \quad (A-59)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \rho} = 0 \quad (A-60)$$

$$\frac{\partial M}{\partial T} = -\frac{M}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial T} + \frac{1}{T} \right) \quad (A-61)$$

$$\frac{\partial M}{\partial C_j} = -\frac{M}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial C_j} + \frac{R_j}{R} \right) \quad (A-62)$$

$$A = S_1 - B : (3-15) \text{ 式}$$

$$\frac{\partial A}{\partial V} = \frac{\partial S_1}{\partial V} - \frac{\partial B}{\partial V} \quad (\text{A-63})$$

$$\frac{\partial A}{\partial \rho} = \frac{\partial S_1}{\partial \rho} - \frac{\partial B}{\partial \rho} \quad (\text{A-64})$$

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{\partial S_1}{\partial T} - \frac{\partial B}{\partial T} \quad (\text{A-65})$$

$$\frac{\partial A}{\partial C_j} = \frac{\partial S_1}{\partial C_j} - \frac{\partial B}{\partial C_j}, \quad j = 1, \dots, N_s \quad (\text{A-66})$$

$$B = \frac{\gamma-1}{\gamma} S_2 : (3-15) \text{ 式}$$

$$\frac{\partial B}{\partial V} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial S_2}{\partial V} \quad (\text{A-67})$$

$$\frac{\partial B}{\partial \rho} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial S_2}{\partial \rho} \quad (\text{A-68})$$

$$\frac{\partial B}{\partial T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial S_2}{\partial T} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial T} S_2 \quad (\text{A-69})$$

$$\frac{\partial B}{\partial C_j} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial S_2}{\partial C_j} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial C_j} S_2, \quad j = 1, \dots, N_s \quad (\text{A-70})$$

$$S_1 = \frac{1}{pV} \sum_{i=1}^{N_s} \omega_i R_i T = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{N_s} f_{3+i} R_i \quad (\text{A-71})$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = 0 \quad (\text{A-72})$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial V} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{N_s} \beta_{3+i,1} R_i \quad (\text{A-73})$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \rho} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{N_s} \beta_{3+i,2} R_i \quad (\text{A-74})$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial T} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{N_s} \beta_{3+i,3} R_i \quad (\text{A-75})$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial C_j} = \frac{1}{R} \left\{ \sum_{i=1}^{N_s} \beta_{3+i,3+j} R_i - R_j S_1 \right\}, \quad j = 1, \dots, N_s \quad (\text{A-76})$$

$$S_2 = \frac{1}{pV} \sum_{i=1}^{N_s} \omega_i h_i = \frac{1}{RT} \sum_{i=1}^{N_s} f_{3+i} h_i \quad (\text{A-77})$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} = 0 \quad (\text{A-78})$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial V} = \frac{1}{RT} \sum_{i=1}^{N_s} \beta_{3+i,1} h_i \quad (\text{A-79})$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial \rho} = \frac{1}{RT} \sum_{i=1}^{N_s} \beta_{3+i,2} h_i \quad (\text{A-80})$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial T} = \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{N_s} (\beta_{3+i,3} h_i + f_{3+i} C_{pi}) - S_2 \right\} \quad (\text{A-81})$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial C_j} = \frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N_s} \beta_{3+i,3+j} h_i - R_j S_2 \right\}, \quad j = 1, \dots, N_s \quad (\text{A-82})$$

補遺 B (5-19) 式内の微係数

$$f_{i_3} = \frac{1}{r_w} \left[r_w'' \eta - \frac{r_w''}{r_w} \left(r_w' \eta - \frac{v}{u} \right) \right] C_{i_7} \quad (\text{B-1})$$

$$f_{i_u} = \frac{v}{r_w u^2} \frac{\partial C_i}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho u^2} \omega_i \quad (\text{B-2})$$

$$f_{i_v} = -\frac{1}{r_w u} \frac{\partial C_i}{\partial \eta} \quad (\text{B-3})$$

$$f_{i_\rho} = \frac{1}{\rho u} \left[\omega_{i_\rho} - \frac{\omega_i}{\rho} \right] \quad (\text{B-4})$$

$$f_{i_T} = \frac{1}{\rho u} \omega_{i_T} \quad (\text{B-5})$$

$$f_{i_{C_j}} = \frac{1}{\rho u} \omega_{i_{C_j}} \quad (\text{B-6})$$

$$f_{i c_i \eta} = \frac{1}{r_w} \left[r_w' \eta - \frac{v}{u} \right] \quad (\text{B-7})$$

上式中に現われる $\omega_{i\rho}$, ω_{iT} , ω_{ic_j} は、補遺Aに示されているものと同じである。

航空宇宙技術研究所報告 771号

昭和58年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社実業公報社
東京都千代田区九段南4-2-12
