

ISSN 0389-4010
UDC 533.6.072:
532.57

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-772

自由流線理論の拡張について

尾形吉和

1983年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

自由流線理論の拡張について*

尾形吉和**

On an Extension of Free Stream-Line Theory

Yoshikazu Ogata

SUMMARY

An extension of the free stream-line theory of the Kirchhoff type is described. The points of extension are essentially the following two: (i) The velocity gradient at the prescribed separation point remains finite. (ii) The velocity along the free stream-line is allowed to vary rather than always being held constant. As a result of the extension, the theory comes to satisfy the necessary conditions of the inviscid external flow compatible with the separated boundary layer and wake.

1. 序 言

剥離はある拡がりをもって時間的変動を伴い起る場合があり、複雑な現象であることは言うまでもない。

実用面から剥離を伴う翼型の特性についての解析をより確かなものにすることは、引続きいろいろな角度から検討されるべき問題であると思われる。

風胴試験は実施されるレイノルズ数に限りがあり、実用のレイノルズ数をカバーできないため推算が必要となるからである。

その計算法は特性の推算という応用上の目的から、専ら剥離を伴う流れ場を非粘性流で模擬する観点に立っている。この観点は剥離流の内部の詳細には触れず、経験上知られるその特徴的な性質をもって、非粘性流をきめる境界条件の一部とすることである。そして現在までに揚力特性の推算はほぼ満足のいくまでに開発整備してきた。その代表例^{1),2)}をいくつか上げることができる。また、抗力やモーメント

についても Gilmer 等³⁾が良好に計算できることを示している。

以上の限りでは模擬の観点は目的に適っており、模擬モデルの妥当性は充分に示されていると言える。

もしモデルの検討と改良の必要が生じたとき、計算法としては模擬の観点を離れて、剥離剪断流とそれを包むポテンシャル流との matching を図った粘性-非粘性の干渉問題として流れを構成する方法を翼型へ適用することも有力である。この場合の非粘性流と自由流線理論との関係について考えてみる。

自由流線理論は本来、bluff な物体で代表されるように、剥離点が確定した物体について適用される。この理論によれば、剥離点は写像の特異点であることに起因して、剥離点における速度勾配の理論値は無限大になる。従って有限なレイノルズ数の流れにおいて、剥離点が未知な任意の物体へ適用する場合、理論上の剥離点と境界層の剥離とは相容れない矛盾を生ずる。

このような意味において自由流線理論は、レイノルズ数無限大の極限における一つの模擬モデルであるとの見方ができる。

この理論を任意物体へ適用することは既に高橋⁴⁾

* 昭和58年6月13日 受付

** 新型航空機研究グループ

によって論じられているが、同様の意味で模擬の範囲に留まっているといえる。

境界層の剥離と適合し得るためには

- (i) 剥離点における速度勾配は無限大にならない、有限値に留まる。

翼面上の剥離域においては静圧は一様流のそれより低いから、圧力の回復を許すためには、

- (ii) 自由流線に沿って速度の変化があってもよい。

但し、速度の変化を伴うからには自由流線と呼ぶには相応しくないであろうから、以降は剥離流線と呼ぶこととする。

以上は自由流線理論を干渉問題における非粘性流となすための必要条件であろう。この条件を満して修正・拡張された流れ⁵⁾について述べる。

2. 自由流線理論の拡張

2.1 複素対数速度

物理面： $z = x + iy$ 、複素速度ポテンシャル： $f(z)$ 、複素速度： $w = df/dz = q e^{-i\theta}$ （但し速度の大きさを q 、速度ベクトルの傾きを θ 、 $q_\infty = 1$ とする）、複素対数速度： $\omega = i \log w = \theta + i \log q$ 、等の記号で書くことにする。

Riemann の写像定理によれば、 z 面は写像面： $\zeta = \xi + i\eta$ の単位円上半円内へ対応関係を図 1 に示すように必ず写像できる。写像函数はしばらく未知のまま描く。

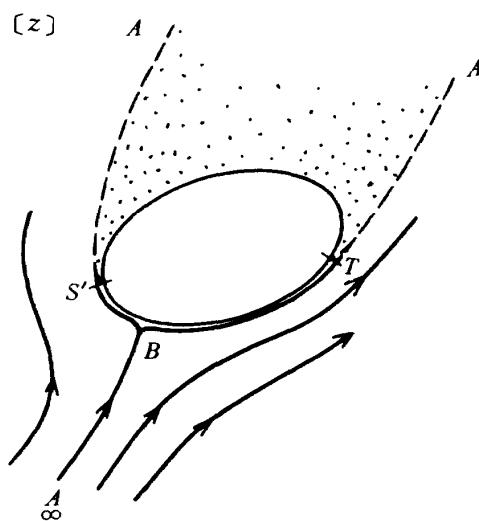


図 1

次に $\omega(\zeta)$ の定義域を鏡像の原理を利用して、上半円内から円内へ拡げることを考える。然るに $\omega(\zeta)$ の虚部 $I_m(\omega) = \log q$ は拡張の条件 (ii) によって、 ζ 面実軸上の各点においては、原点 A (z 面の無限遠点に対応) 以外では 0 になり得ない。そこで、 $\omega(\zeta)$ にベキ級数を重ね合わせ、実軸に沿っては実数值をとるような正則函数 $\varrho(\zeta)$ を新しく定義する。

即ち、 (ib_n) を虚数係数として、

$$\varrho(\zeta) = \omega(\zeta) - \sum_{n=1}^{\infty} (ib_n) \zeta^n \quad (1)$$

そして実軸上では、

$$I_m[\varrho(\xi)] = \log q - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \xi^n = 0 \quad (2)$$

下半円への解析接続は、

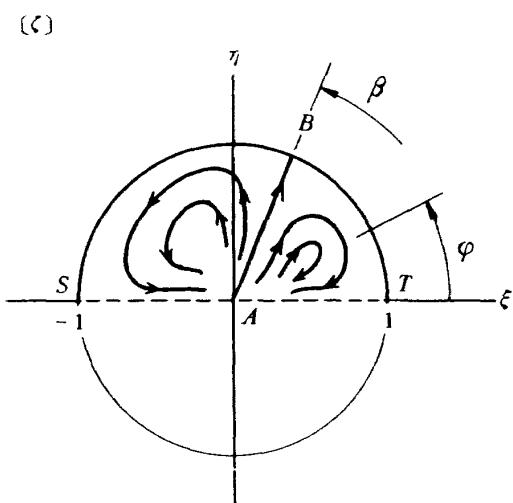
$$\varrho(\zeta) = \overline{\varrho(\bar{\zeta})} \quad (3)$$

である。このような ϱ について、以下自由流線理論が教える思考過程をたどってみよう。

ϱ は(2)式より上半円周上 ($0 \leq \varphi \leq \pi$) において、

$$\begin{aligned} \varrho(\zeta_c) &= \theta(e^{i\varphi}) + \sum b_n \sin n\varphi \\ &\quad + i [\log q(e^{i\varphi}) - \sum b_n \cos n\varphi] \end{aligned} \quad (4)^*$$

である。 ϱ の実部に関する境界値を表式化するために更に次のような $\Theta(\varphi)$ を考える。 Θ は連続な（实用上は後述の(7)式の係数の収束にさしつかえない



注 * 以後は簡単に $\sum = \sum_{n=1}^{\infty}$ と書く。

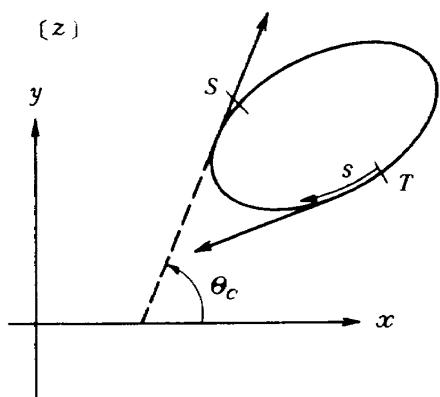


図2

程度は連続な) 2π の周期函数であり、特に φ の区間 $[0, \pi]$ において、

$$\theta = \theta_c \quad (5)$$

とする。ここで θ_c は物理面であらかじめ与えられた物体表面(等価な物体を考えてもよい)に沿った接線ベクトルの x 軸とのなす角を表わし、滑らかであるとする(図2参照)。従って θ_c は点 T より表面に沿った長さ s の函数として与えられたものであり、写像函数が既知となった後 $\theta_c(\varphi)$ と求められる。

よって物体表面*の境界条件は、

$$\theta(e^{i\varphi}) = \begin{cases} \theta - \pi \\ \theta \end{cases} \quad \text{但し } \begin{cases} 0 \leq \varphi < \beta \\ \beta < \varphi \leq \pi \end{cases} \quad (6)$$

である。ここで β は岐点を表わす。

区間 $(\pi, 2\pi)^{**}$ での θ はさて置き、形式的に次式のように書く。

$$\theta = \alpha_0/2 + \sum (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \quad (7)$$

(6), (7)式を(4)式に代入する。ここで ϱ は、実軸上で実数値をとる正則函数であることに注意すれば、

$$\beta_n + b_n = 0 \quad (8)$$

が成り立つ。(もし $\beta_n + b_n \neq 0$ ならば、実軸上で虚部が 0 でないか、正則でないかのいずれかである)

ϱ の定義域を(3)式に従い、上半円内から円内へ拡げると、 φ の区間 $(-\pi, \pi)^{***}$ について(9)式を得る。

$$Re[\varrho_c] = \begin{cases} \alpha_0/2 - \pi \\ \alpha_0/2 \end{cases} + \sum \alpha_n \cos n\varphi \quad (9)$$

$$\text{但し } \begin{cases} |\varphi| < \beta \\ |\varphi| > \beta \end{cases}$$

単位円周上の実部が(9)式で与えられたから、内点における $\varrho(\zeta)$ は Poisson-Schwarz の積分(または Villat の公式)(10)式で得られる。

(iC) を虚の常数として、 $|\zeta| < 1$ について

$$\varrho(\zeta) = iC + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re[\varrho_c] \frac{1 + \zeta e^{-i\varphi}}{1 - \zeta e^{-i\varphi}} d\varphi \quad (10)$$

上式に(9)式を代入して現われる被積分函数のうち、 $\sum \alpha_n \cos n\varphi$ を含む項は、項別積分可能として積分を実行する。 ∞ 点 ($\zeta = 0$)における境界条件、($\theta_\infty \equiv \alpha$, $q_\infty = 1$; $\varrho(0) = \alpha$)を満足する ϱ は、

$$\varrho(\zeta) = \alpha + i \log \frac{1 - e^{-i\beta}\zeta}{1 - e^{i\beta}\zeta} + \sum \alpha_n \zeta^n \quad (11)$$

となり、同時に次の関係があることがわかる。

$$\beta = \alpha_0/2 - \alpha \quad (12)$$

(11)式の左辺を(1)式で書き直すことにより、次の諸関係が導かれる。

(a) 物体表面に対応して

$$\zeta = \zeta_c = e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ について}$$

$$\theta_c = \alpha + \beta - \left\{ \begin{array}{l} \pi \\ 0 \end{array} \right\} + \sum (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \quad (13)$$

$$\text{但し, } \left\{ \begin{array}{l} \varphi < \beta \\ \varphi > \beta \end{array} \right\}$$

$$\log q_c = \frac{|\cos \varphi - \cos \beta|}{1 - \cos(\varphi + \beta)}$$

$$+ \sum (-\beta_n \cos n\varphi + \alpha_n \sin n\varphi) \quad (14)$$

特に点 T においては、 $\varphi = 0$

$$(\theta_c)_T = \alpha + \beta - \pi + \sum \alpha_n \quad (15)$$

$$(q_c)_T = \exp(-\sum \beta_n) \quad (16)$$

点 S においては、 $\varphi = \pi$

注 * 等価物体である場合も考え併せ、以降付着流域と称す。

** 開区間

*** 閉区間の意味で以後使う。

$$(\theta_c)_S = \alpha + \beta + \sum (-1)^n \alpha_n \quad (17)$$

$$(q_c)_S = e x p (-\sum (-1)^n \beta_n) \quad (18)$$

(b) 剥離流線上に対応して(添字 w を付す)

$$\zeta = \xi, -1 \leq \xi \leq 1 \text{について}$$

$$\theta_w = \alpha - 2 \tan^{-1} \frac{\xi \sin \beta}{1 - \xi \cos \beta} + \sum \alpha_n \xi^n \quad (19)$$

$$q_w = e x p (-\sum \beta_n \xi^n) \quad (20)$$

(19)式および(20)式は点 T , 点 S において(a)で記した式と夫々一致することは容易に確かめられる。

2.2 $z \sim \zeta$ の対応

ζ 面における複素速度ポテンシャルは,

$$f(\zeta) = 4\nu [(1/\zeta + \zeta)/2 - \cos \beta]^2 \quad (21)$$

と既にわかっている。⁶⁾ 但し 4ν は写像のスケールに関する量を表わす。

z 面と ζ 面との対応は,

$$dz/d\zeta = df/d\zeta / w = df/d\zeta \cdot e^{i\omega} \quad (22)$$

と微分型で与えられる。(21), (11), および(1)式によって(22)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= 2\nu \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta - e^{-i\beta})^2}{\zeta^3} e^{i(\alpha+2\beta)} \\ &\times e^{i(\beta_n + i\alpha_n)\zeta^n} \end{aligned} \quad (23)$$

上式で $\zeta = \zeta_c = e^{i\varphi}$, ($0 \leq \varphi \leq \pi$) とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{dz_c}{d\varphi} &= 8\nu \sin \varphi [1 - \cos(\varphi + \beta)] e^\tau \\ &\times e^{i(\alpha+\beta+\tau^*)} \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。但し

$$\tau \equiv \sum (\beta_n \cos n\varphi - \alpha_n \sin n\varphi)$$

$$\tau^* \equiv \sum (\beta_n \sin n\varphi + \alpha_n \cos n\varphi)$$

と書いた。

結局 z 面の物体座標 (x_c, y_c) と, ζ 面の上半円周上の φ との対応は(24)式を積分することにより求められる。即ち実部と虚部について,

$$\begin{aligned} x_c &= x_\tau + 8\nu \int_0^\varphi \sin \varphi' [1 - \cos(\varphi' + \beta)] e^{\tau'} \\ &\times \cos(\alpha + \beta + \tau^*) d\varphi' \end{aligned} \quad (25)$$

$$y_c = y_\tau + 8\nu \int_0^\varphi \sin \varphi' [1 - \cos(\varphi' + \beta)] e^{\tau'} \quad (26)$$

$$\times \sin(\alpha + \beta + \tau^*) d\varphi' \quad (26)$$

但し (x_τ, y_τ) は点 T の座標である。

また(24)式の絶対値をとって,

$$\frac{ds}{d\varphi} = 8\nu \sin \varphi [1 - \cos(\varphi + \beta)] e^\tau \quad (27)$$

従って点 T より測った表面に沿った長さ s は,

$$s = 8\nu \int_0^\varphi \sin \varphi' [1 - \cos(\varphi' + \beta)] e^{\tau'} d\varphi' \quad (28)$$

点 S までの全長を ℓ とすれば,

$$\ell = 8\nu \int_0^\pi \sin \varphi [1 - \cos(\varphi + \beta)] e^\tau d\varphi$$

故に写像のスケールは,

$$8\nu = \ell / \int_0^\pi \sin \varphi [1 - \cos(\varphi + \beta)] e^\tau d\varphi \quad (29)$$

となる。但し積分変数 φ' に関する積分で τ' , τ^* は, $\tau(\varphi')$, $\tau^*(\varphi')$ を意味する。

次に剥離流線の座標 (x_w, y_w) については, (23) 式で $\zeta = \xi$ とおき, 同様にして(30)~(32)式を得る。

点 $S(x_s, y_s)$ よりの流線 ($-1 \leq \xi < 0$) に関して

$$\begin{aligned} x_w &= x_s + 2\nu \int_{-1}^{\xi} \frac{(\xi'^2 - 1)}{\xi'^3} e^{\sigma'} [L' \cos(\alpha + \sigma')] \\ &+ M' \sin(\alpha + \sigma') d\xi' \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} y_w &= y_s + 2\nu \int_{-1}^{\xi} \frac{(\xi'^2 - 1)}{\xi'^3} e^{\sigma'} [L' \sin(\alpha + \sigma')] \\ &- M' \cos(\alpha + \sigma') d\xi' \end{aligned} \quad (31)$$

点 T よりの流線 ($0 < \xi \leq 1$) に関しては,

$$\begin{aligned} x_w &= x_\tau - 2\nu \int_1^{\xi} \frac{(1 - \xi'^2)}{\xi'^3} e^{\sigma'} [L' \cos(\alpha + \sigma')] \\ &+ M' \sin(\alpha + \sigma') d\xi' \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} y_w &= y_\tau - 2\nu \int_1^{\xi} \frac{(1 - \xi'^2)}{\xi'^3} e^{\sigma'} [L' \sin(\alpha + \sigma')] \\ &- M' \cos(\alpha + \sigma') d\xi' \end{aligned} \quad (33)$$

但し上式で,

$$\begin{aligned}\rho &\equiv \sum \beta_n \xi^n \\ \sigma &\equiv \sum \alpha_n \xi^n \\ L &\equiv 1 - \xi^2 - 2\xi \cos \beta (1 - \xi \cos \beta) \\ M &\equiv 2\xi \sin \beta (1 - \xi \cos \beta)\end{aligned}$$

とした。そして ρ' 等は $\rho(\xi')$ 等を表わす。

2.3 剥離点における速度勾配および流線曲率

物体表面に沿った速度の勾配は、 $(\frac{dq_c}{d\varphi}) / (\frac{ds}{d\varphi})$ として(14)式の微分と(27)式とから得られる。点 S に関しては $\varphi = \pi$ とおいて次式になる。

$$\left(\frac{1}{q_c} \frac{dq_c}{ds} \right)_s = \left[\frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} + \sum (-1)^n n \alpha_n \right] / \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)_s$$

上式の分母である(27)式の $\sin \varphi \rightarrow 0$ より明らかのように点 S は 1 位の極である。拡張の条件(i)によって有限値に留まるためには分子を単純に 0 とおくことにより、

$$\sin \beta / (1 + \cos \beta) + \sum (-1)^n n \alpha_n = 0 \quad (34)$$

であることが必要である。

点 T についても全く同様に

$$-\sin \beta / (1 - \cos \beta) + \sum n \alpha_n = 0 \quad (35)$$

を必要とする。(34),(35)両式の差或いは和をとることにより、 n の奇数番目の或いは偶数番目の係数に関するものとに分けて整理できる。即ち、

$$\sum (2n-1) \alpha_{2n-1} = \operatorname{cosec} \beta \quad (36)$$

$$\sum 2n \alpha_{2n} = \cot \beta \quad (37)$$

流線の曲率と速度勾配とは正則函数の実部と虚部との関係にあるから、流線曲率もまた有限値に留まり、曲率半径は 0 とはならない。流線曲率については(13)式の微分と(27)式を用いて、点 S および点 T に関して速度勾配の場合と全く同様に考えると次の二式が導かれる。

$$\sum (2n-1) \beta_{2n-1} = 0 \quad (38)$$

$$\sum 2n \beta_{2n} = 0 \quad (39)$$

結局(7)式で表わした Θ の Fourier 係数に要求される条件の一つは(36)～(39)式である。

2.4 $\Theta(\varphi)$ について

Θ の形式的な表示は(7)式であった。具体的に既

知となった Θ をきめる条件は、先ず φ の $[0, \pi]$ において(5)式を満すことと(36)～(39)式が成立することである。 $(\pi, 2\pi)$ における Θ は、剥離点より後流の境界条件に依存するはずであるから任意性を残しておく。

以上から Θ を次のように考える。

$$\Theta = C_0/2 + \sum C_n \cos n\varphi + F(\varphi) \quad (40)$$

ここで、上式右辺の最初の二項は(5)式を満すため、 $[0, \pi]$ で付着流域の境界条件として与えられた Θ_c を余弦級数で(正弦級数は一般に $\varphi = 0, \pi$ で不連続を生じるから)、 $[0, 2\pi]$ へ展開したものである。

故に

$$C_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Theta_c d\varphi, \quad C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Theta_c \cos n\varphi d\varphi \quad (41)$$

従って(40)式の $F(\varphi)$ は(36)～(39)式を満足させるために導入したもので、 $[0, \pi]$ では恒等的に $F(\varphi) = 0$ 、 $(\pi, 2\pi)$ では任意(勿論調和、もともと Θ は連続な周期函数としたからこの性質はもつものとする)である。

以上のような $F(\varphi)$ を次のようにして作る。

$$\left. \begin{aligned} G(\varphi) &= H(\varphi) & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ G(\varphi) &= -H(\varphi) & \pi < \varphi < 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

の関係にある G, H を用いて

$$F(\varphi) = G(\varphi) - H(\varphi) \quad (43)$$

とする。

G, H に不連続を生じないため、 $\varphi = 0, \pi, 2\pi$ においては、 $G = H = 0$ 。その他連続性の要求は適当に設けるものとする。結局 G と H は互に偶函数と奇函数の関係にあればよいから、一方を正弦級数で表わせば他方は(42)の関係により余弦級数としてきることになる。

H を正弦級数で表わすことにし、その係数を B_N で書く。 H の成分 H_i, H_j について

$$\left. \begin{aligned} H_i(\varphi) &= \sum B_{2n-1}^{(i)} \sin(2n-1)\varphi & i = 1, 3, 5, \dots \\ H_j(\varphi) &= \sum B_{2n}^{(j)} \sin 2n\varphi & j = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

注 * 以下同様に使用する。

** 全 上

但し、添字 i, j は N が奇数のみの級数に関するものと、偶数のみの級数に関するものとを区別するためつけた。

これに対して G を

$$\left. \begin{aligned} G_i(\varphi) &= A_0^{(i)} / 2 + \sum A_{2n}^{(i)} \cos 2n\varphi \\ G_j(\varphi) &= \sum A_{2n-1}^{(j)} \cos(2n-1)\varphi \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

と書くとき、係数 A_N は(42)式の関係によって、

$$\left. \begin{aligned} A_0^{(i)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi H_i(\varphi) d\varphi \\ A_{2n}^{(i)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi H_i(\varphi) \cos 2n\varphi d\varphi \\ A_{2n-1}^{(j)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi H_j(\varphi) \cos(2n-1)\varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

と定まる。

そして λ_i, λ_j を未知定数として

$$\left. \begin{aligned} F(\varphi) &= \sum_i \lambda_i [G_i(\varphi) - H_i(\varphi)] \\ &\quad + \sum_j \lambda_j [G_j(\varphi) - H_j(\varphi)] \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

のように作られる。 i, j の総数は流れをきめる条件の数に応じて考えればよい。 B_N の具体的な選択については後述する。

(40)式の $F(\varphi)$ に(47), (44), (45)式を代入して(7)式の各項と比較すれば、次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= C_0 + \sum_i \lambda_i A_0^{(i)} \\ \alpha_{2n-1} &= C_{2n-1} + \sum_j \lambda_j A_{2n-1}^{(j)} \\ \alpha_{2n} &= C_{2n} + \sum_i \lambda_i A_{2n}^{(i)} \\ -\beta_{2n-1} &= \sum_i \lambda_i B_{2n-1}^{(i)} \\ -\beta_{2n} &= \sum_j \lambda_j B_{2n}^{(j)} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

β は(12)式より

$$\beta = (C_0 + \sum_i \lambda_i A_0^{(i)}) / 2 - \alpha \quad (49)$$

速度勾配有限の条件(36), (37)式は

$$\left. \begin{aligned} \sum_j [\lambda_j \sum (2n-1) A_{2n-1}^{(j)}] &= \operatorname{cosec} \beta \\ -\sum (2n-1) C_{2n-1} & \\ \sum_i [\lambda_i \sum (2n) A_{2n}^{(i)}] &= \cot \beta - \sum 2n C_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

流線曲率有限の条件(38), (39)式は

$$\left. \begin{aligned} \sum_i [\lambda_i \sum (2n-1) B_{2n-1}^{(i)}] &= 0 \\ \sum_j [\lambda_j \sum 2n B_{2n}^{(j)}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

となる。

さて拡張の条件(i)は(50), (51)式の形で満足される。 θ_c, q_c に関する(13), (14)式等は(48)式によって A_N, B_N で書き換えられる。また A_N は(46)式によって B_N に対して定まる。ここで正弦級数の係数である B_N について考えてみる。

(44)式のように書けるためには勿論 $\sum B_N$ が存在すること。(46)式は項別積分可能として実行されるから $\{B_N\}$ は一様に収束すること。(51)式は $\sum N B_N$ が計算できる必要があることを示している。(50)式の $\sum N A_N$ は二重級数の和として求め得るよう $\{B_N\}$ は絶対収束すること。これらの要求は $F(\varphi)$ が調和函数であることと相反しない。

また剝離点での速度勾配は、 $\sum N^2 B_N$ の項を含んでいることを考慮し、数値計算に際しては無限級数の和を有限項で近似する必要が起ることも考え、 $H(\varphi)$ の連続性を

$$H = H' = H'' = 0 \quad (\varphi = 0, \pi)$$

とし、三次導函数までは滑らかであることを保証する。但し' は φ に関する微分を表わす。

以上のような $H(\varphi), G(\varphi)$ の例を付録に示す。本文の数値計算例ではこれを使用した。

ここで $F(\varphi)$ の意味するところをまとめると次のようになる。 $F(\varphi)$ は(36)~(39)式を満足させるため導入したことは前述した。即ち(a)剝離点において、速度勾配および流線曲率を有限値に留め置く役割をもっている。 $[0, \pi]$ では恒等的に $F \equiv 0$ としたから、(b)付着域の境界条件に無関係である。また $F(\varphi)$ は A_N, B_N で表わされるから、(48), (49)式によって $\alpha_N, \beta_N, \alpha_0, \beta$ に影響する。しかしこの影響は(1), (11)式を考えれば無限遠 ($\zeta = 0$) に及ばない。故に

(c)無限遠の境界条件と無関係である。(19),(20)式および(30)～(33)式が $\alpha_N, \beta_N, \alpha_0, \beta$ を含んでいることから知られるように、(d)剥離域との境界条件に依存している。

以上のことから、 $F(\varphi)$ は剥離域の境界条件を満すべき要素 F_k の重ね合せとして表わされ、しかも全体として剥離点の速度勾配・流線曲率を有限に留めおくものとして求められる。

3. 数値計算

前述したところにより自由流線理論は干渉問題における非粘性流としての必要条件を満して拡張された。

剥離点より後流の境界条件にも触れない限り必要充分ではないことは言うまでもない。以上の必要条件までを満した流れを考えて、これについて解法の手順を次に述べる。この流れは付着流域をもち境界層の剥離を許容した一つの流れモデルである。剥離点は境界層との適合性を考えて計算上求めることができたが、計算すること自体は剥離規範の選択という応用上の関心を除いてはその必要性は薄い。その位置は適当に仮定したものとする。

(47)式 $F(\varphi)$ の λ_i, λ_j の個数は流れをきめる条件式の数に応じてとる。いまの場合には必要条件としての(50),(51)式である。付録の $H(\varphi)$ は(51)式を各項毎に満すよう $\{N B_N\}$ を選んで作成したから、この $H(\varphi)$ を用いるときは λ_i, λ_j 夫々1個宛で構成され(50)式より次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\cot \beta - \sum 2n C_{2n}}{\sum 2n A_{2n}^{(1)}} \\ \lambda_2 &= \frac{\operatorname{cosec} \beta - \sum (2n-1) C_{2n-1}}{\sum (2n-1) A_{2n-1}^{(2)}} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

但し、

$$F(\varphi) = \lambda_1 [G_1(\varphi) - H_1(\varphi)] + \lambda_2 [G_2(\varphi) - H_2(\varphi)]$$

3.1 計算手順

(1) z 面の物体形状は $(m, x_{cm}, y_{cm}, s_m, \theta_{cm}, l)$ と与えられている。(図1の $T-S$ を m 個に分割する)

- (2) $\varphi_m \rightarrow s_m$ の対応を最初は適当に仮定する。
- (3) (41)式により C_0, C_n を計算する。
- (4) λ_1, λ_2 が未知のときは $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ として、(49)式より β を求める。
- (5) (52)式より λ_1, λ_2 を求める。
- (6) (4), (5)を繰返し λ_1, λ_2 の収束値を得る。
- (7) (48), (29)より ν を求める。
- (8) (28)式より $\varphi_m \rightarrow s_m$ の対応を計算し、(2)を修正する。このとき分点の個数(m の総数)に応じて $0 < \kappa < 1$ である緩和パラメータ的なものを経験的に用いると良く収束する。
- (9) (4)～(8)を反復繰返して $s(\varphi_m)$ が定まる。
- (10) 速度分布(14)式、剥離流線の形(30)～(33)式等が計算できる。

3.2 計算例

NACA 4412について圧力係数 C_p と剥離流線の形の計算例を図3および図4に示す。

図中、 C_p の矢印は計算で仮定した剥離位置を表わし、計算値は矢印より上流では翼面上、下流では剥離流線に沿った値を示す。測定値はすべて翼面上の値で文献⁷⁾による。(翼面上の剥離域において自由流線条件の実現が曖昧なデータとして文献⁷⁾を引用した)

図3の迎角は17.3°で後縁付近に剥離を生じている場合で、図4の迎角は22.1°で剥離は前縁近くに達している場合である。

計算された流れは必要充分な流れの第0近似ともみなされる。図3、図4のわずか二例の計算から判断するには早計に過ぎるかもしれないが、注目される点は測定値との比較において、更に近似を進めるため剥離点より後流の境界条件を考慮に入れることの影響は、図4では大きく、図3では小さいに違いないという点である。もしそうであれば、図3では剥離域の状態は重要でないし、図4では逆に重要であるということになる。換言すれば、剥離域が翼面後半部分に限られているとき、翼型によっては速度一定である自由流線条件の実現が曖昧な場合がある。しかし、剥離域が流れに対して占める割合は小さいので、及ぼす影響も小さい。剥離が前縁近くまで達すると、自由流線条件は比較的よく実現される。そ

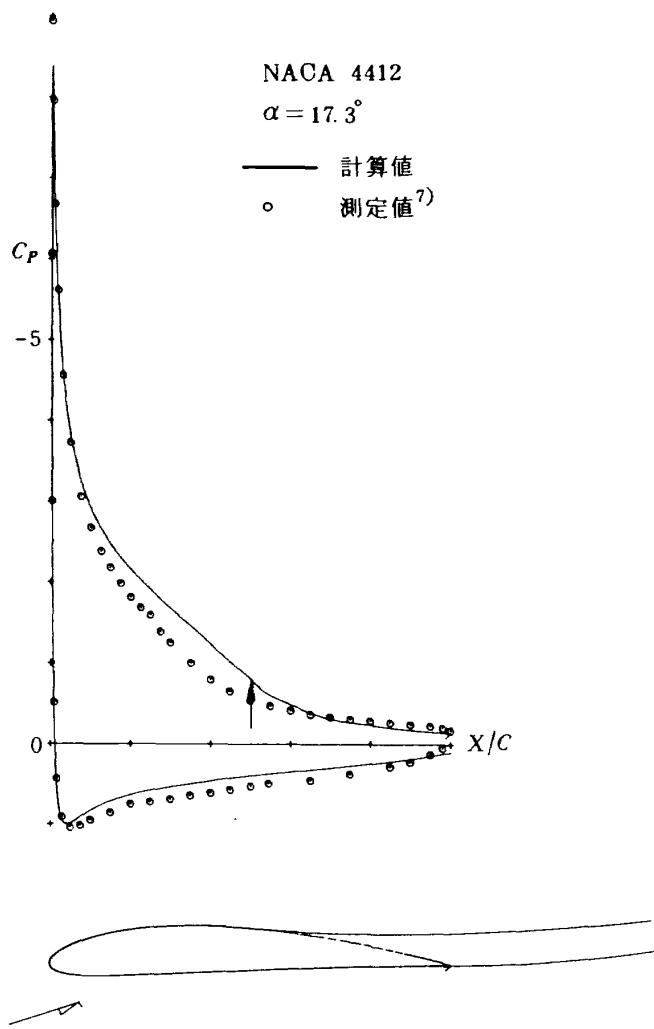


図 3

して剥離域が占める割合も大きくなるから及ぼす影響も大きいのであろう。いずれの場合も、経験上通常用いられている剥離域のモデルとして翼面上では自由流線条件が実現されるとすることは良い近似を与えていているに違いない。

このモデルが良い近似である以上、剥離点より背後の物体の形状は問われることになる。

本文では剥離点の速度勾配を有限とした。これが 0 でない限り一定速度は剥離点速度より小さいはずであるからその大きさや、或いは背後の形状が問題にされるような特別のとき、粘性-非粘性干渉の観点からの解析も要求される。

4. 結語

模擬の観点からの自由流線理論では剥離点の圧力勾配は無限大になる。従って境界層理論によれば既にその上流で剥離を生じていることになり、両者は

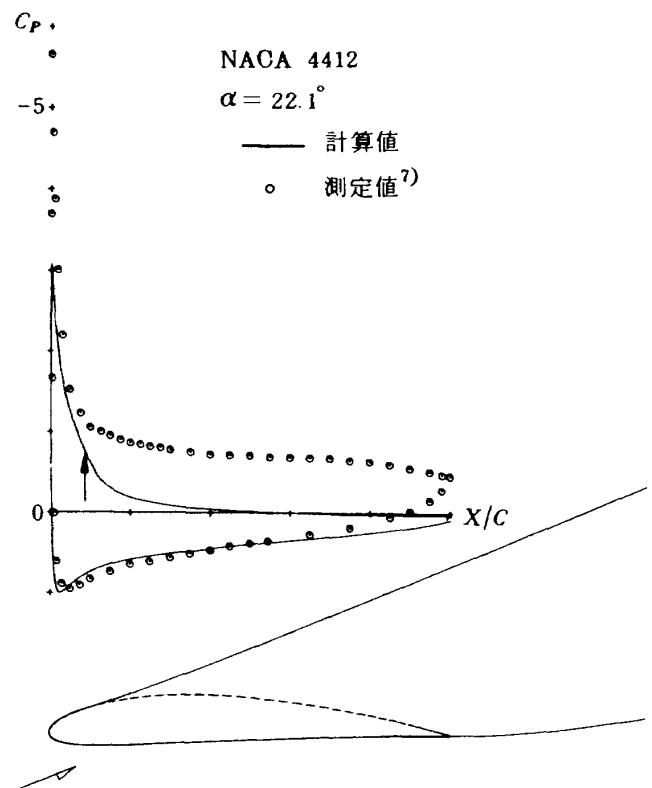


図 4

同時に起り得ない。

この理論を任意物体へ適用するには、この矛盾をなくする必要がある。そのために、次の二つの条件

- (i) 剥離点の速度勾配は有限値に留る
- (ii) 自由流線に沿って速度の変化があってもよいを満足するように、自由流線理論を修正拡張した。

その結果導かれた解析解は二つの解を重ね合わせた形で表わされる。

一つは無限遠と付着流域の境界条件を満す解である。他の一つは、剥離点の速度勾配と流線曲率を有限値に留め、且つ、剥離剪断域の境界条件を満す役割をもつ解であり、付着流域や無限遠点には影響を及ぼさない。

計算例によれば、計算値は最初の解と二番目の解のうち前半の役割のみを課したものとでできる流れであるが、翼型では剥離が後縁付近に限られている場合、剥離域の境界条件は厳密に考えても大差がないであろうことを傾向としてうかがえる。

流れを一意的にきめるには剥離域の境界条件も当然満さなければならない。剥離が拡がったときそれ

が増々重要であることは計算例も示している。この境界条件は模擬の観点からは適切なモデルを用いることであり、干渉の観点からは剥離流の解析と連立することである。

この剥離域の境界条件を満すことは二番目の解を一意的にきめることであり、それは他の境界条件とは無関係に付加的である。剥離域の境界条件が指定された後、本文で述べた $F(\varphi)$ の要素を重ね合わせることにより、逐次反復するやり方で、近似的に満すことが可能であると考える。

参考文献

- 1) Henderson, M. L. ; A Solution to the 2-D Separated Wake Modeling Problem and Its Use to Predict $C_{L\max}$ of Arbitrary Airfoil Sections, AIAA Paper No. 78-156, (1978)
- 2) 林 正徳, 速藤栄一; 剥離を伴った多要素翼型の性能計算法, 日本航空学会誌, 第 27 卷, 第 304 号 (1979) pp. 242 - 250
- 3) Gilmer, B. R. and Bristow, D. R. ; Analysis of Stalled Airfoils by Simultaneous Perturbations to Viscous and Inviscid Equations, AIAA J. Vol. 20, No. 9 (1982) pp. 1160 - 1166
- 4) 高橋 伸; 任意物体まわりの自由流線理論, 航技研報告, TR-247, (1971)
- 5) 尾形吉和; 自由流線理論の拡張について, 第 14 回流力講演集 (1981), pp. 302 - 305
- 6) 例えば, 今井 功; 流体力学(前編), 裳華房 (1973) pp. 246
- 7) Pinkerton, R. M. ; Calculated and Measured Pressure Distributions Over the Midspan Section of the N. A. C. A. 4412 Airfoil, NACA Rep. No. 563

付 錄

函数列 $\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ は $\{B_N\}$ の条件を満しているから、これらの一次結合で表わすことができる。

$$H_i(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1}^{(i)} \sin(2n-1)\varphi \quad (i=1, 3, 5 \dots)$$

の係数 $B_{2n-1}^{(i)}$ を,

$$B_{2n-1}^{(i)} = \frac{(-1)^{n-1} x_i^{2n-1}}{(2n-1)!} + \kappa_i \frac{(-1)^n y_i^{2n}}{(2n)!}$$

とおく。 $H_i(\varphi)$ に要求する連続性は,

$$H_i'(0) = x_i \cos x_i + \kappa_i (1 - \cos y_i - y_i \sin y_i) = 0$$

$$H_i''(0) = x_i [(x_i^2 - 1) \cos x_i + 3x_i \sin x_i]$$

$$+ \kappa_i [\cos y_i + (1 - y_i^2) y_i \sin y_i - 1] = 0$$

である。

(x_i, y_i, κ_i) は、上の二式を満す組の中から適当に選ばれる。

$$H_j(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n}^{(j)} \sin 2n\varphi \quad (j=2, 4, 6 \dots)$$

の係数 $B_{2n}^{(j)}$ についても同様に、

$$B_{2n}^{(j)} = \frac{(-1)^{n-1} x_j^{2n-1}}{(2n-1)!} + \kappa_j \frac{(-1)^n y_j^{2n}}{(2n)!}$$

$$H_j'(0) = x_j \cos x_j + \sin x_j - \kappa_j y_j \sin y_j = 0$$

$$H_j''(0) = (x_j^2 - 1) x_j \cos x_j + (6x_j^2 - 1) \sin x_j$$

$$+ \kappa_j [3y_j^2 \cos y_j + (1 - y_j^2) y_j \sin y_j] = 0$$

である。ここで、 $H_i'(0) = H_j'(0) = 0$ であることは亦、(51)式を満して $B_{2n-1}^{(i)}, B_{2n}^{(j)}$ を選んだことを意味している。

以上の $H_i(\varphi), H_j(\varphi)$ に対して(46)式は次のように求められる。

$$A_0^{(i)} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m-1}^{(i)}}{(2m-1)}$$

$$A_{2n}^{(i)} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1) B_{2m-1}^{(i)}}{(2m+2n-1)(2m-2n-1)}$$

$$A_{2n-1}^{(j)} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m B_{2m}^{(j)}}{(2m+2n-1)(2m-2n+1)}$$

選ばれた (x_k, y_k, κ_k) についての結果を表 1 に

表 1

k	x_k	y_k	κ_k	$\Sigma B_N^{(k)}$	$\Sigma N \cdot B_N^{(k)}$	$\Sigma N' A_{N'}^{(k)}$	$A_0^{(k)}$
1	1.5708	2.3311	0.8064	-0.3622	0	0.4011	-0.6661
2	2.0288	3.1416	0.8052	-0.7134	0	0.9100	0
3	2.5245	3.2086	0.9306	-1.2804	0	1.3820	-2.3989
4	3.0223	3.8392	1.1684	-1.9448	0	2.3859	0

$k = i$ のとき, $N = 2n - 1$, $N' = 2n$ 但し $i = 1, 3, 5 \dots$

$k = j$ のとき, $N = 2n$, $N' = 2n - 1$ 但し $j = 2, 4, 6 \dots$

示した。本文の数値計算は $k = 1, 2$ を用いた。使用した函数列以外に $\{B_N\}$ の条件を満すものを用いればよいかから、作り方は他にも考えられる。

航空宇宙技術研究所報告772号

昭和58年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武藏野三鷹(0422)47-5911(大代表) 〒182
印刷所 株式会社共進
東京都杉並区久我山5-6-17
