

ISSN 0389-4010

UDC 533.6.015:

533.69.01:

533.69.04:

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-797

非平面翼の最適設計—揚力と翼根曲げモーメントを  
与えた時の最小誘導抵抗—

浅井圭介

1984年1月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 非平面翼の最適設計—揚力と翼根曲げモーメントを 与えた時の最小誘導抵抗—\*

浅井圭介\*\*

## Optimum Design of Nonplanar wings – Minimum Induced Drag for A Given Lift and Wing Root Bending Moment

by

Keisuke ASAI

### ABSTRACT

The objective of the present paper is to discuss the application of nonplanar wings such as Whitcomb's winglet to new subsonic transport airplanes.

A simple numerical method has been developed to calculate the minimum induced drag for a wing of an arbitrary nonplanar configuration, using the Trefftz-plane (far-field) analysis and the Lagrangean multiplier technique. For a series of wing/winglet combinations and several more complex forms such as curved wings, the value of the induced drag efficiency parameter  $1/e$  is evaluated and compared with that of a conventional planar wing. When comparing the induced drag benefits, it is assumed that both wings have the same 'extended' wing planform rather than the 'projected' one. And, to take account of the trade-offs between wing aerodynamic efficiency and wing structural weight, the wing root bending moment as well as the wing total lift are kept constant. With these constraints, the drag performances for both wings could be compared without any ambiguity associated with wing structural weight and wing surface skin friction.

The results obtained show that the minimum induced drag of every nonplanar wing analyzed here is not less than that of a planar wing except in the case of relatively small values of restricted wing root bending moment. Thus, it is concluded that a planar wing is superior to a nonplanar wing from the view point of cruise drag performance.

---

\* 昭和58年11月12日 受付

\*\* 空気力学第2部

## 1. まえがき

70年代後半の石油危機以後、航空会社の直接運航費(DOC)に占める燃料費の割合が急激に増加し、それ以来、航空機のうちでも特に民間輸送機の設計・技術開発において、燃料の経済性と言う要素が最も重要視されるようになって来た。これは空力設計の立場からは、巡航時の揚抗比の改善を画ることになる。

巡航時の航空機に働く空気抵抗は大きく分けて、機体の揚力に余り依存しない形状抗力(主に摩擦抗力からなる)と揚力の自乗に比例する誘導抵抗があるが、前者に対する機体形状の空力的洗練度は、ほぼ飽和した状態であり、境界層制御(LFC)の様な画期的技術の導入以外には、改善の余地は少ない様に思われる。そこで主眼となるのは誘導抵抗の減少である。誘導抵抗は、3次元翼のスパンに渡って(特に翼端部において)下流に放出される後流渦の誘導速度によって生じる抵抗である。現用の垂音速ジェット輸送機では、巡航時の全抵抗の40~50%は誘導抵抗が占めており、その低減は全機の揚抗比の改善に非常に有効であると思われる。

誘導抵抗の減少法については、翼理論の始まった昔から色々な研究が行われている。その中でも最も一般的な方法は、翼の縦横比を大きくすることである。しかし、縦横比を大きくするとそれに伴ない翼の構造重量が増加するので、縦横比を無闇に増大させることは出来ない。民間輸送機の場合、翼の縦横比は通常7~8に限られているのが現状である。

そこで、構造重量の増大を招かずに誘導抵抗を減少させることが肝要となるが、その試みの中で、最近最も成功したものの1つに1974年にNASAのR. T. Whitcomb<sup>(1)</sup>が発表した“Winglet(翼端小翼)”がある。Wingletとは、翼端にはほぼ垂直に取り付けられた小さな翼(図1)のことであるが、従来の所謂“翼端板”とは異なり camber や twist を持ち、揚力面として積極的に横力を発生する。そのため翼端板が高揚力時にしか有効でなかったのに対して、Winglet は巡航時の比較的揚力係数が小さい時の空力効率の改善が大きいと言う特徴を持っている。NASAと米空軍が Boeing KC-135 を用いて行った

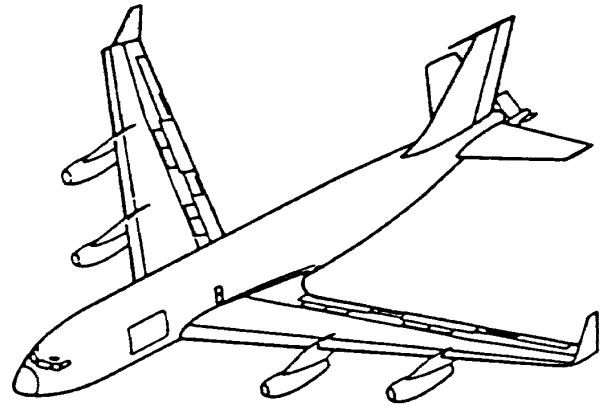


図1 ボーイングKC-135輸送機にWingletを適用した例<sup>(10)</sup>

飛行試験の結果<sup>(2)</sup>では、Wingletを付加することによって、 $C_L = 0.42$ の時に元翼に比して誘導抵抗が7%減少したと言うことであるから、揚抗比の改善に対してWingletは、かなり“有効”であると言うことができる。

しかし、ここで“有効”の意味を明確にしておかなければならない。Wingletを付加すれば翼の長さが延長されることになるので、元翼に比較して誘導抵抗が減少する(有効アスペクト比が増加する)のは言わば当然である。これは翼をスパン方向に延長する所謂“翼端延長”の場合と同じ効果であるから、Wingletの有効性は、元翼との比較ではなく翼端延長との比較の上に論じなければならない。実は、空力効率の改善と言う点から見れば、Wingletよりも翼端延長の方がはるかに効率は良い。しかし、前述の様に、誘導抵抗の大小は、構造上の制限を考慮しないと比較はできない。Wingletも翼端延長も元翼の翼端に新たな揚力面を追加する訳であるから、構造の点からはペナルティを払う(例えば、翼付根曲げモーメントが増加することになる。Wingletが“有効”であると言うのは、この構造上のペナルティが同じ場合に、誘導抵抗の減少が翼端延長よりも大きいと言う意味なのである。Douglas社がDC-10を用いて行った飛行試験の結果<sup>(3)</sup><sup>(4)</sup>では(図2)、主翼付根曲げモーメントの同じ増加量に対して、Wingletは翼端延長の約2倍の空力的改善のあるこ

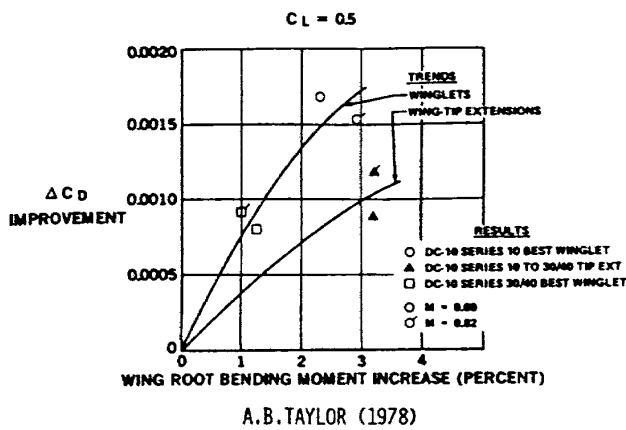


図2 Winglet 及び翼端延長による誘導抵抗の減少と翼根曲げモーメントの増加 (DC-10 飛行試験結果)<sup>(4)</sup>

とが実証されている。

以上の様に、Winglet は既存の翼の改造技術としては大きな成功をおさめ、Gates社のLearjet Longhorn<sup>(5)</sup>を初めとして数多くの実用機に利用されている<sup>(6)~(8)</sup>しかし、改造ではなく新しく翼を設計する場合に、通常の平面翼とWinglet付き翼のどちらが有利であるかは、未だに明らかにはなっていない。この問題に答えるためには、翼を設計する際の空力的改善と構造的制限のTrade-offについて論じる必要がある。現在の翼設計では、空力設計と構造設計は実質的に独立した作業であり、両者の相互作用を積極的に設計に反映させることは少ない。しかし、Winglet付き翼に代表される非平面の翼の設計では、空力と構造を同時に最適化することが重要である。これは、Hackett<sup>(9)</sup>などによっても指摘されていた問題であるが、本報告はこの問題に対する一つの解答を得ることを目的としている。

Ishimitsu<sup>(10)</sup>, Goldhammar<sup>(11)</sup>, Heyson<sup>(12)</sup>等は、揚力面理論を用いてWinglet付き翼の解析を行い、Wingletに関する種々の風洞試験<sup>(13)~(18)</sup>飛行試験<sup>(3)(19)</sup>の結果が実用上十分な精度で予測できることを示した。翼に働く空気力の中でも誘導抵抗については、その値が翼弦方向の圧力分布形状には左右されずスパンに沿っての循環分布にのみ依存することがMunk<sup>(20)</sup>(付録参照)によって証明されている。このため、パラメータ設計や最適設計では、翼を表現する渦系を無限下流の所謂“Trefftz面”に投影して解析を行うことも多い。この場合には、問題の

次元が3次元から2次元に減少するので、解析が非常に簡単化される。

非平面翼の最小誘導抵抗を求める問題について、初めて一般的理論を展開したのは上述のMunkの論文である。彼は、形状と揚力が与えられた時に誘導抵抗が最小となるためにnormal wash(翼面に垂直な方向の誘導速度)が満たすべき条件を求めた(付録参照)。この条件に基づいてFalknerとDarwin<sup>(21)</sup>が翼端板付き翼、Cone<sup>(22)</sup>やLundry<sup>(23)</sup>が一般の非平面翼、Letcher<sup>(24)</sup>がDiamond翼などについて最小誘導抵抗の値とそれを与える最適循環分布を計算している。

彼等の計算の一例を図3(a)に示す。この結果を見ると非平面翼が平面翼に比べて有利な様に思われるが、これは正しくない。図3(a)の比較では翼を水平面に投影した時の投影平面形(又は投影スパン)を固定しているが、これでは平面翼と非平面翼で翼の長さが異なることになる。これは、先程述べたWingletの有効性の議論で言えば、元翼とそれにWingletを付加した翼の性能比較を行う事に相当し、余り意味のあることとは言えない。Wingletの比較すべき相手が元翼ではなく翼端延長した翼であることを頭に置けば、平面翼と非平面翼の誘導抵抗を比較する際には、投影平面形ではなくて翼を水平面に伸展した“伸展平面形”を固定しなければならないことがわかる(図3(b))。

図3(a)の比較でもう一つ不足している点は、翼の構造的制限に対する考慮が全く為されていないことである。平面翼と非平面翼の誘導抵抗の大小を論じるには、両者の構造重量が同一でなければならない。このためには、両者の伸展平面形が同一であるだけでなく、Wingletについての議論から示唆される様に、翼付根の曲げモーメントが同じ大きさでなければならない。翼根曲げモーメントが翼の構造重量の重要な指標となることはGarner<sup>(25)</sup>, Heyson等<sup>(12)</sup>によって指摘されているが、例えば後者の解析では、曲げを受け持つ構造部材の重量と翼根曲げモーメントは、ほぼ比例することが示されている。

以上の議論をまとめると、平面翼と非平面翼の誘導抵抗を比較するには、揚力が同一であるという条件の他に次の2つの条件を課さなければならないこ

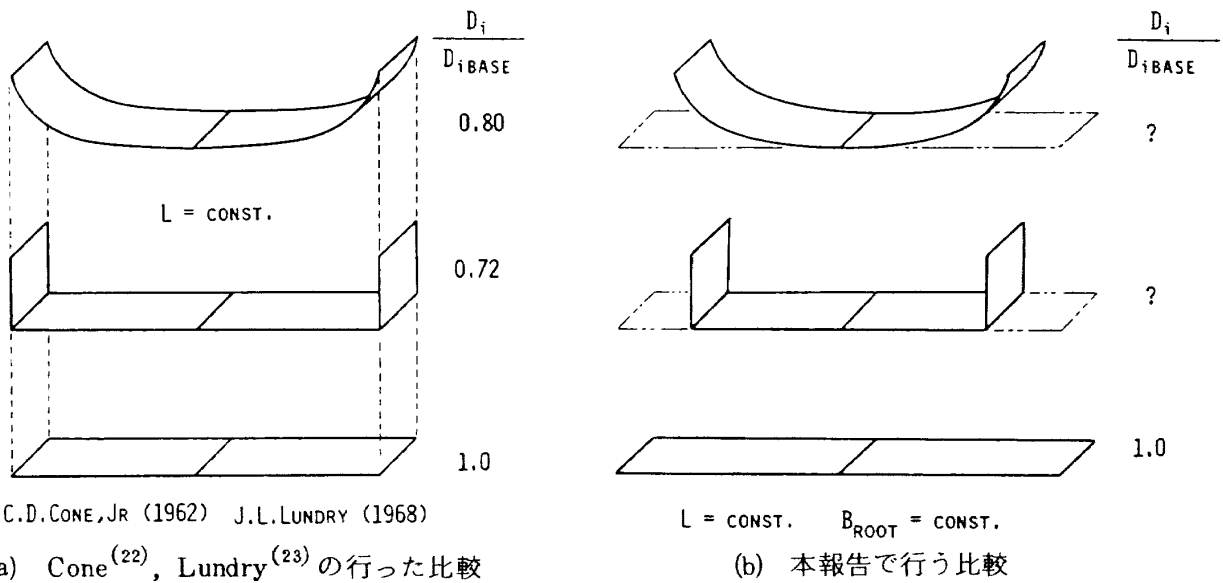


図3 平面翼と非平面翼の誘導抵抗の比較の基準

とになる。(図3(b)参照)

(a) 翼の伸展平面形が同一。(これは Trefftz 面解析では翼に沿って測ったスパン長さが同じであることに対応する)

(b) 翼付根部の曲げモーメントの大きさが同じ。この様に構造的制約のもとで空力効率を最適化する問題については平面翼の場合には、R. T. Jones<sup>(26)</sup>、Klein 等<sup>(27)(28)</sup>が揚力と翼根曲げモーメントを制約条件とした時の最小誘導抵抗を、変分法を出発点として解析的に求めている。上述の議論から明らかな様に、我々の目的はこの問題を一般の非平面翼の場合に拡張することである。

ただ、任意の形状の非平面翼を扱うため等角写像に基づく解析的手法は必ずしも適切とは言えないので、ここでは Blackwell<sup>(29)(30)</sup>の Finite-Step 法を改良した数値的方法に依った。誘導抵抗を最小にする最適スパン荷重分布を求める最適化には、Lagrange 未定乗数法を用いた。最小誘導抵抗問題に Lagrange 乗数を用いる手法は Lamar<sup>(31)</sup>、Kuhlmann<sup>(32)(33)</sup>、John de Young<sup>(34)</sup>によっても論じられているが、ここでは最適化問題の定式化の際に制約条件に応じた無次元変数を導入することによって平面翼と非平面翼の優劣を明瞭に示すことができた。

本報告の前半では、最適化問題の定式化などについて概略を述べ、後半では、Winglet 付き翼を始めとして Gull-Wing や Curved-Wing を含む種々の形

状の非平面翼について計算した最小誘導抵抗の値を、平面翼の計算結果と比較する。

記号

- $A, A_{ij}$  : スパン荷重分布と誘導抵抗を結び付ける影響関数。(22)式で定義される。
- $b, b_i$  : スパン荷重分布と翼根曲げモーメントを関係づける影響関数。(21)式で定義される。
- $B$  : 翼根曲げモーメント。
- $c, c_i$  : スパン荷重分布と全揚力とを関係づける影響関数。(20)式で定義される。
- $D$  : 全抵抗。
- $D_i$  : 誘導抵抗。
- $D_0$  : 形状抵抗。
- $1/e$  : スパン効率の逆数。(18)式で定義される。
- $g, g_i$  : スパン荷重分布を表わす無次元ベクトル。(19)式で定義される。
- $H$  : (28)式で定義される関数。
- $L$  : 揚力。
- $l$  : 翼根を原点とし荷重曲線に沿う座標。
- $l_e$  : 翼根から翼端までの翼の長さ。(翼を水平面に投影した時の翼幅とは異なる)
- $N$  : 右翼をパネル分割した時の分割数。
- $q, q_{ij}$  :  $Q$ を無次元化したもの。(8)式。
- $Q, Q_{ij}$  : スパン荷重分布と垂直誘導速度を結びつ

ける影響関数。(8)式で定義される。

$R_+, R_{-1} \dots$ : (10)式。

$r_+, r_{-1} \dots$ :  $R_+, R_{-1} \dots$ を $l_e$ で無次元化したもの。

$\Delta S$  : パネルの半幅。

$U$  : 一様流流速。

$V_n$  : 荷重曲線に垂直方向に誘導される速度。  
(図5参照)

$x, y, z$  : 図4に示される座標系。 $x$ は一様流の向きである。

$y', z', y'', z''$ : (9)式。

$\beta$  : 翼根曲げモーメントの制約を表わすパラメータ。(17)式で定義される。

$\Gamma$  : 循環分布。

$c, c', c''$ :  $z, z', z''$ を $l_e$ で無次元化したもの。

$\eta, \eta', \eta''$ :  $y, y', y''$ を $l_e$ で無次元化したもの。

$\mu_1, \mu_2$  : Lagrange 乗数

$\rho$  : 一様流密度

$\Delta\sigma$  :  $\Delta S$ を $l_e$ で無次元化したもの。

$\phi$  : 上反角分布

添字

$i$  :  $i$  パネルに関する量であることを示す。

$j$  :  $j$  パネルに関する量であることを示す。

$el, pl$  : 平面翼が楕円分布荷重を持つ時の空気力

の値であることを示す。

## 2. 最適化問題の定式化

### 2.1 非平面翼に働く空気力の計算

翼理論では、揚力面は多数の馬蹄渦の集合によって表現される(図4)。翼に作用する空気力は、これらの渦系のうち、翼面に束縛されている渦に作用する力から計算される。

Munk は、馬蹄渦の系に働く力に関する数学的議論から、翼に働く誘導抵抗が、翼後縁から流出する後流渦面を無限下流の Trefftz 面(図4)に投影した荷重曲線に関する線積分によって求められることを示した。この定理によれば、誘導抵抗の値は、翼弦方向の渦の分布には左右されず、スパン方向の循環分布にのみ依存する。

誘導抵抗以外の空気力即ち揚力や翼根曲げモーメントについても、翼面に束縛される渦のうち、スパン方向に軸を持つ渦にのみ注目すると、荷重曲線に関する線積分によって求められる。コード方向に軸を持つ渦(馬蹄渦の随判渦のうち翼面上にある部分)に働く力は、Trefftz 面における解析では求められないが、この力は、隣接する渦に働く力と大部分が打ち消し合う(渦の回転方向が逆)ので、翼のアスペクト比が極端に小さくなければ、その寄与は2次的であると考えられ、全体の空気力を決めるに当っ

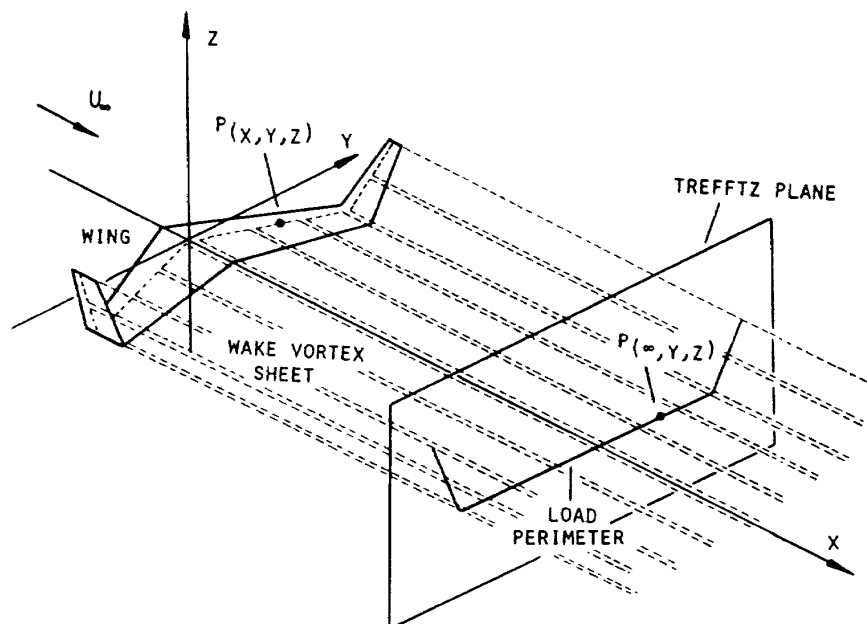


図4 翼を表わす渦モデルと Trefftz 面

ては無視できる。

故に、3次元の複雑な形状の翼に作用する空気力（誘導抵抗、揚力、翼根曲げモーメント）は全て、実際の翼面上における積分のかわりに、Trefftz面における荷重曲線に関する積分を行うことによって求められることがわかる。問題の次元が、3次元から2次元へと減少するので、解析は著しく簡単化される。

図4に示す様に座標系（ $x$ 方向は一様流の向き）を決め、翼は $xz$ 面について左右対称であるとし、荷重曲線に関する積分は全て右翼のみで行うこととする。翼付根を原点として荷重曲線に沿う座標を $l$ として、その位置における循環を $\Gamma(l)$ で表わす。 $\Gamma(l)$ はその断面に働く空気荷重とKutta-Joukowskiの定理で結びつけられており、翼全体に作用する揚力 $L$ 、翼根曲げモーメント $B$ 、誘導抵抗 $D_I$ は次式で表わされる。

$$L = \int_{-l_e}^{l_e} \rho U \Gamma \cos \phi \, dl = \int_0^{l_e} 2 \rho U \Gamma \cos \phi \, dl \quad (1)$$

$$B = \int_0^{l_e} \rho U \Gamma (y \cos \phi + z \sin \phi) \, dl \quad (2)$$

$$D_I = \int_{-l_e}^{l_e} \rho \frac{V_n}{2} \Gamma \, dl = \int_0^{l_e} \rho V_n \Gamma \, dl \quad (3)$$

ここで $l_e$ は翼の長さ（翼に沿って測ったスパン長）であり、 $\int_0^{l_e}$ は右翼に関して翼根から翼端まで翼面に沿って線積分を行うことを示している。 $\rho$ 、 $U$ は各々一様流の密度、流速である。 $\phi = \phi(l)$ は翼の局所上反角を表わす。 $V_n$ は、Trefftz面上で荷重曲線に垂直方向に誘導される速度（normal wash）を表わしている。

(1)(2)(3)の積分を数値的に求めるために、ここではBlackwellのFinite-Step法<sup>(29)(30)</sup>を改良したものをを用いる。この方法では、荷重曲線を有限個のパネルに分割し折線で近似する。そして各パネルの両端に強さが同じで回転方向の反対な渦対を置く（図5）。この渦対は翼面を表現する馬蹄渦の2本の随伴渦に対応し、その強さは翼のそのスパン位置における循環（翼弦方向の和）に相当している（図4参照）。この時、(1)~(3)の積分は次の有限和に置き換えられる。

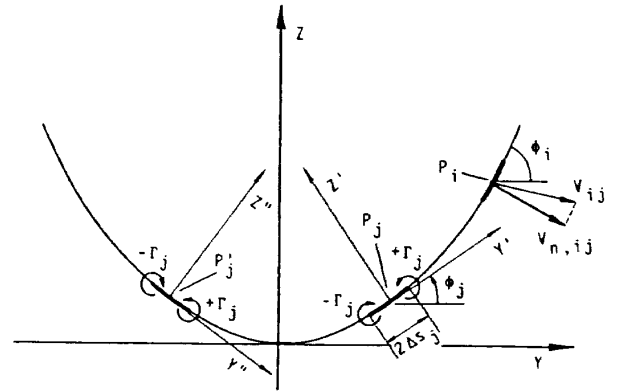


図5 Trefftz面における荷重曲線の離散近似

$$L = 4 \rho U \sum_{i=1}^N \Gamma_i \cos \phi_i \Delta S_i \quad (4)$$

$$B = 2 \rho U \sum_{i=1}^N \Gamma_i (y_i \cos \phi_i + z_i \sin \phi_i) \Delta S_i \quad (5)$$

$$D_I = 2 \rho \sum_{i=1}^N \Gamma_i V_{ni} \Delta S_i \quad (6)$$

ここで、 $N$ は半翼における離散化パネルの数、 $\Delta S_i$ はパネルの半幅である。

(6)式の $V_{ni}$ は、荷重曲線を表わす渦系によって誘導される速度であるから、Biot-Savartの法則を用いれば、次の形に表現できる。

$$V_{ni} = \sum_{j=1}^N Q_{ij} \Gamma_j \quad (7)$$

( $i=1 \sim N$ )

ここで $Q_{ij}$ は、 $j$ パネルと $z$ 軸に対する鏡像 $j'$ パネルに置かれた単位強さの渦対が、 $i$ パネルの中心 $P_i$ に誘導する垂直速度を表わす影響係数である。図5に示す局所座標を導入すれば、(8)の様に見える。

$$Q_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \left[ \left( \frac{y'_{ij} - \Delta S_j}{R^2_{+ij}} - \frac{y'_{ij} + \Delta S_j}{R^2_{-ij}} \right) \cos(\phi_i - \phi_j) \right. \\ + \left( \frac{z'_{ij}}{R^2_{+ij}} - \frac{z'_{ij}}{R^2_{-ij}} \right) \sin(\phi_i - \phi_j) \\ + \left( \frac{y'_{ij} - \Delta S_j}{R^2_{-ij}} - \frac{y'_{ij} + \Delta S_j}{R^2_{+ij}} \right) \cos(\phi_i + \phi_j) \\ \left. + \left( \frac{z'_{ij}}{R^2_{-ij}} - \frac{z'_{ij}}{R^2_{+ij}} \right) \sin(\phi_i + \phi_j) \right] \quad (8)$$

ここで,

$$y'_{ij} = (y_i - y_j) \cos \phi_j + (z_i - z_j) \sin \phi_j \quad (9a)$$

$$z'_{ij} = -(y_i - y_j) \sin \phi_j + (z_i - z_j) \cos \phi_j \quad (9b)$$

$$y''_{ij} = (y_i + y_j) \cos \phi_j - (z_i - z_j) \sin \phi_j \quad (9c)$$

$$z''_{ij} = (y_i + y_j) \sin \phi_j + (z_i - z_j) \cos \phi_j \quad (9d)$$

$$R^2_{+ij} = (y'_{ij} - \Delta S_j)^2 + z'_{ij}{}^2 \quad (10a)$$

$$R^2_{-ij} = (y'_{ij} + \Delta S_j)^2 + z'_{ij}{}^2 \quad (10b)$$

$$R^2_{+ij} = (y''_{ij} + \Delta S_j)^2 + z''_{ij}{}^2 \quad (10c)$$

$$R^2_{-ij} = (y''_{ij} - \Delta S_j)^2 + z''_{ij}{}^2 \quad (10d)$$

(8)の第1, 2項はjパネルの渦対の寄与を表わしており, 3, 4項はその鏡像の寄与を表わしている。

(7)(8)を用いれば誘導抵抗の式(6)は

$$D_I = 2\rho \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_i Q_{ij} \Gamma_j \Delta S_j \quad (11)$$

という形に書くことが出来る。

## 2.2 最適化問題の定式化

既に1.で述べた様に, 本報告で取扱う最小誘導抵抗問題では, 翼の構造重量に対する制限を含めるために次の3つの制約条件を課す。

- (a) 揚力  $L$  は一定。
- (b) 翼根曲げモーメント  $B$  は一定。
- (c) 翼の長さ  $l_e$  は一定。(伸展平面形一定に対応)

これらの制約条件の下に, 種々の形状の非平面翼について最小誘導抵抗  $D_{I \min}$  を求め, 平面翼の  $D_{I \min}$  と比較する訳であるが, 今, 制約条件より  $l_e$  と  $L$  が固定されているので, これらの量を代表値と考えて空気力の表式や変数を正規化しておく問題が非常に見易い形に整理される。

まず長さの次元を持つ量は全て  $l_e$  で割って無次元化する。例えば,

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_i &= \Delta S_i / l_e, \quad \eta_i = y_i / l_e, \quad \zeta_i = z_i / l_e, \\ r_{+ij} &= R_{+ij} / l_e, \quad r_{-ij} = R_{-ij} / l_e, \quad \dots \quad (12) \end{aligned}$$

次に空気力  $L, B, D_I$ , 誘導垂直速度  $V_n$  を正規化するために次式で定義される量を導入する。

$$L_{el, pl} = L \quad (13)$$

$$B_{el, pl} = \frac{2}{3\pi} l_e L \quad (14)$$

$$D_{Iel, pl} = \frac{L^2}{2\pi \rho U^2 l_e^2} \quad (15)$$

$$V_{nel, pl} = \frac{L}{2\pi \rho U l_e^2} \quad (16)$$

(13)~(16)は, 揚力  $L$ , 長さ  $l_e$  の平面翼が楕円分布荷重 (elliptic loading) を持つ時の  $L, B, D_I, V_n$  を表わしている。これらの量を用いて式(4)(5)(7)(11)を正規化すると,

$$1 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{2l_e \rho U \Gamma_i}{L} \right) 2 \cos \phi_i \Delta \sigma_i \quad (4')$$

$$\begin{aligned} \frac{B}{B_{el, pl}} &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{2l_e \rho U \Gamma_i}{L} \right) \frac{3\pi}{2} (\eta_i \cos \phi_i \\ &\quad + \zeta_i \sin \phi_i) \Delta \sigma_i \quad (5') \end{aligned}$$

$$\frac{V_{ni}}{V_{nel, pl}} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{2l_e \rho U \Gamma_j}{L} \right) q_{ij} \quad (7') \quad (i=1 \sim N)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_I}{D_{Iel, pl}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \frac{2l_e \rho U \Gamma_i}{L} \right) \\ &\quad \pi q_{ij} \Delta \sigma_i \left( \frac{2l_e \rho U \Gamma_j}{L} \right) \quad (11') \end{aligned}$$

(11'), (7')における  $q_{ij}$  は(8)式を無次元したもので,

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \frac{-1}{2\pi} \left[ \left( \frac{\eta'_{ij} - \Delta \sigma_j}{r_{+ij}^2} - \frac{\eta'_{ij} + \Delta \sigma_j}{r_{-ij}^2} \right) \cos(\phi_i - \phi_j) \right. \\ &\quad + \left( \frac{\zeta'_{ij}}{r_{+ij}^2} - \frac{\zeta'_{ij}}{r_{-ij}^2} \right) \sin(\phi_i - \phi_j) \\ &\quad + \left( \frac{\eta''_{ij} - \Delta \sigma_j}{r_{-ij}^2} - \frac{\eta''_{ij} + \Delta \sigma_j}{r_{+ij}^2} \right) \cos(\phi_i + \phi_j) \\ &\quad \left. + \left( \frac{\zeta''_{ij}}{r_{-ij}^2} - \frac{\zeta''_{ij}}{r_{+ij}^2} \right) \sin(\phi_i + \phi_j) \right] \quad (8') \end{aligned}$$

で表わされる。

このうち最適化問題の定式化に用いるのは, (4')(5')(11')式であるが, これらの式をさらに見易くするために, 次式の様に記号を改めて定義し直す。

$$\frac{B}{B_{el, pl}} \stackrel{\text{def}}{=} \beta \quad (17)$$

$$\frac{D_I}{D_{Iel, pl}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{e} \quad (18)$$

$$\frac{2l_e \rho U \Gamma_i}{L} \stackrel{\text{def}}{=} g_i \quad (i=1 \sim N) \quad (19)$$

$$2 \cos \phi_i \Delta \sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} c_i \quad (i=1 \sim N) \quad (20)$$



$$\frac{3\pi}{2}(\eta_i \cos \phi_i + \zeta_i \sin \phi_i) \Delta \sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} b_i \quad (i=1 \sim N) \quad (21)$$

$$\pi q_{ij} \Delta \sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} A_{ij} \quad (i, j=1 \sim N) \quad (22)$$

この時、揚力、翼根曲げモーメント、誘導坑抗に関する表式(4)', (5)', (11)'は各々次の様に簡単化される。

$$1 = \sum_{i=1}^N c_i g_i = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{g} \quad (23)$$

$$\beta = \sum_{i=1}^N b_i g_i = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{g} \quad (24)$$

$$\frac{1}{e} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i A_{ij} g_j = \mathbf{g}^T \mathbf{A} \mathbf{g} \quad (25)$$

ここで  $g_i$  は翼面に沿った循環分布を表わす無次元荷重分布ベクトル、 $c_i$ ,  $b_i$ ,  $A_{ij}$  は各々  $g_i$  と揚力、翼根曲げモーメント、誘導抵抗を結びつける影響関数であり、翼の幾何学形状とパネルの配置のみに依存している。

(23)~(25)の表現を用いて、本節の初めに述べた最小誘導抵抗問題を定式化すると、

制約条件  $\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{g} = 1$   
 $\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{g} = \beta$   
 $g_i \geq 0 \quad (i=1 \sim N)$  のもとで

目的関数  $1/e = \mathbf{g}^T \mathbf{A} \mathbf{g}$  を最小化する  $\mathbf{g}_{\text{OPT}}$  を求めよ。

(26)

と言う問題に帰着する。(26)を見ると、設計揚力  $L$  と翼の長さ  $l_e$  は単なるスケーリング・パラメータに過ぎず最適化には陽に効いて来ないことがわかる。

ここで(18)で定義される  $1/e$  が所謂“スパン効率 (span efficiency)”  $e$  の逆数であることに注意しよう。 $e$  を用いると翼に働く全抵抗  $D$  は、

$$D = D_0 + D_1 = D_0 + \frac{1}{e} \left( \frac{L^2}{2\pi \rho U^2 l_e^2} \right) \quad (27)$$

と書ける。ここで  $D_0$  は形状抵抗であり主として表面摩擦抵抗より成る。(26)の最適化では、伸展平面

形を固定しているので、この  $D_0$  の値は全ての翼を通じてほぼ一定値になると考えられる。故に、(26)の制約条件のもとでは、(27)で変化しうるのは  $1/e$  だけであり、(26)の最適化で最小の  $1/e$  を翼形状と構造的制限  $\beta$  の関数として求めてやれば、平面翼と種々の形状の非平面翼の空力効率の優劣を曖昧さなしに比較できることがわかる。

### 2.3 最適化問題の解法

(26)で表される最適化問題は、制約条件が決定変数  $g_i$  についての1次式であり、目的関数が  $g_i$  についての2次形式であるから、これは非線型計画法の中でも特に二次計画法と呼ばれるものである。二次計画法問題は、Lagrange 未定乗数法を用いれば容易に解くことができる。即ち、 $\mu_1$ ,  $\mu_2$  を Lagrange 乗数として、

$$H(\mathbf{g}; \mu_1, \mu_2) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i A_{ij} g_j - \mu_1 \left( \sum_{i=1}^N c_i g_i - 1 \right) - \mu_2 \left( \sum_{i=1}^N b_i g_i - \beta \right) \quad (28)$$

なる関数  $H$  を導入して、 $H$  について制約条件なしの極値を求めれば良い。 $H$  の極値点になるための必要条件は、

$$\frac{\partial H}{\partial g_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \mu_1} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \mu_2} = 0 \quad (29)$$

$$(i=1 \sim N)$$

であるから、これに(28)を代入すると次の  $N+2$  個の式が得られる。

$$\sum_{j=1}^N (A_{ij} + A_{ji}) g_j - b_i \mu_1 - c_i \mu_2 = 0 \quad (30)$$

$$(i=1 \sim N)$$

$$- \sum_{j=1}^N c_j g_j + 1 = 0 \quad (31)$$

$$- \sum_{j=1}^N b_j g_j + \beta = 0 \quad (32)$$

(30)~(32)を行列の形にまとめ直せば、次の様になる。

$$\begin{pmatrix} 2A_{11} & A_{21}+A_{12} & \dots & A_{N1}+A_{1N} & -c_1 & -b_1 \\ A_{12}+A_{21} & 2A_{22} & & & -c_2 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1i}+A_{i1} & & 2A_{ii} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{1N}+A_{N1} & & & 2A_{NN} & -c_N & -b_N \\ -c_1 & -c_2 & \dots & -c_N & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_2 & \dots & -b_N & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ -\beta \end{pmatrix} \quad (33)$$

(33)は未知数 $g, \mu_1, \mu_2$ の $N+2$ 元連立1次方程式であるから、これを解けば、最適値(極値)を与える $g_{OPT}$ が求められる。(30)~(32)は全て一次独立な一次式であるから、(33)には必ず解がある。又、物理的考察から明らかな様に $g_i \geq 0$ の範囲では、 $g^T A g$ は凸関数となるから、(33)によって求められる極値点は最小点に対応する。

### 3. 計算結果

#### 3.1 精度の検証

2.で述べた数値的手法の精度を検証するために、過去に求められている解析解との比較を行った。まず最小誘導抵抗と最適荷重分布の計算値に対するパネルの分割数 $N$ と分割法(等分割又は cosine 分割)の影響を調べた。計算は曲げモーメントの制限のない場合の平面翼について行った。この場合の最適解は解析的に求められており、荷重分布は楕円分布で $1/e$ の値が1に等しいことは良く知られている。図6を見ると等分割, cosine分割共に、パネル数を増すと厳密解に近づくが、 $N=100$ を越えても著しい改善は見られない。又、cosine分割では翼端付近のパネルが細くなり過ぎ逆に数値誤差が蓄積されるため、等分割に比較して必ずしも良くない。そこで、以下の計算は全て等分割 $N=100$ で行うことにした。こうするとスパン位置が%で指定できるという利点もある。この時の $1/e$ の計算値と厳密解の誤差は0.5%であり(図6)、最適荷重分布形も翼端・翼根付近を除き解析解と完全に一致している(図7)。

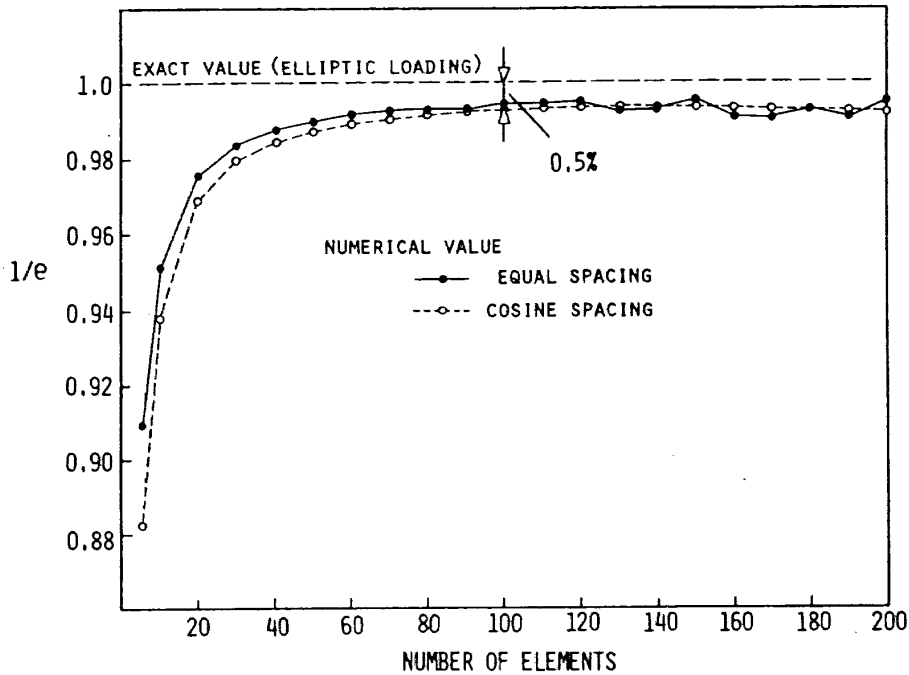


図6 数値最適解の収束性に対するパネル分割数と分割法の影響 (平面翼,  $\beta$ 制約なし)

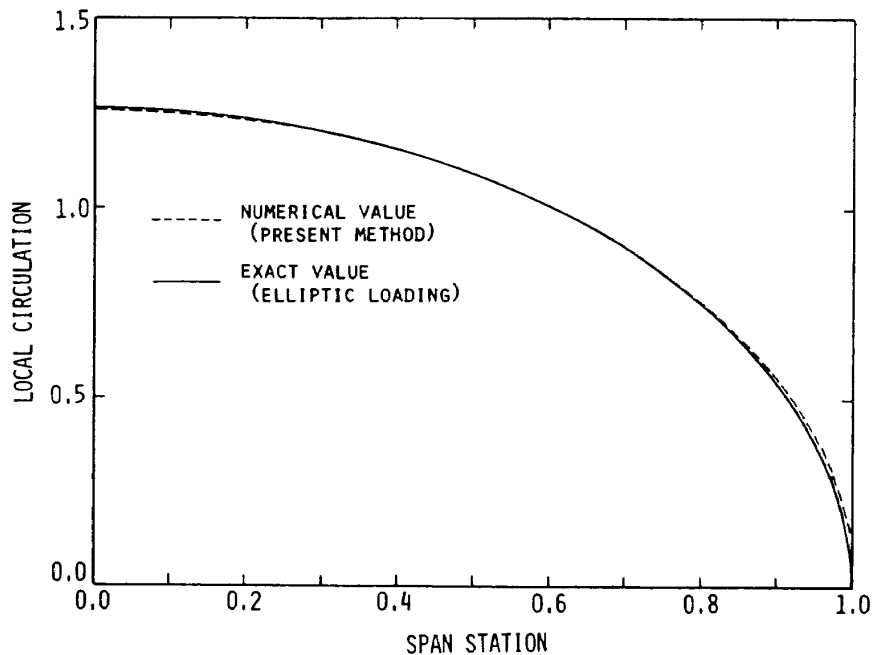


図7 数値最適解と厳密解のスパン荷重分布の比較  
(平面翼,  $\beta$  制約なし,  $N=100$ , 等分割)

次に, 本手法が非平面の翼の計算に適するかどうか調べるために, Lundry<sup>(23)</sup> が翼端板付き翼について求めた解析解との比較を行った。Lundry の解析は, Munk の第3定理(付録参照)に基づき, Schwarz-Christoffel 変換を用いて, 最小誘導抵抗の値を数値積分によって求めるものである。比較の結果を図8に示す。横軸は元翼に対する翼端板の長さの比, 縦軸は元翼と翼端板付き翼のスパン効率の比を表わしている。数値解と厳密解の対応は良く, 誤差は1%以内に抑えられることがわかる。

以上の検証は, 曲げモーメントに対する制約のない場合であったが,  $\beta$  に制限を課した場合の最適化がうまく行か確認するために, R.T. Jones<sup>(26)</sup> が平面翼について解析した結果との比較を行った(図9)。彼は, 揚力と翼根曲げモーメントを一定の値に保ちながら, 翼のスパンを変化させて, その時の最小誘導抵抗の値の変化を調べた。図の横軸は, 基準となる翼とのスパン長さの比, 縦軸は, 最小誘導抵抗の大きさの比を示している。厳密解と我々の数値解は, ほとんど完全に一致している。

これらの検証結果から, 本手法によって, 翼根曲げモーメントの制限のある場合の非平面翼の最小誘

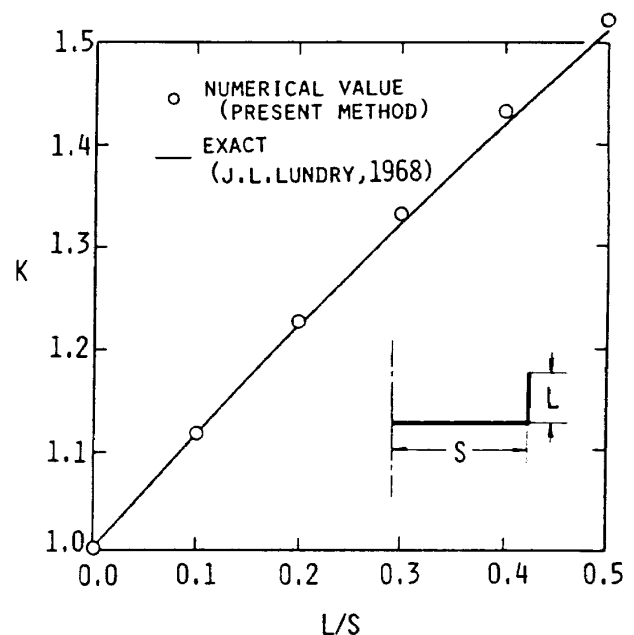


図8 翼端板付き翼の最小誘導抵抗の数値解と厳密解の比較

導抵抗の値が, 比較的良好な精度(厳密解との誤差1%以内)で求められるものと判断できる。

### 3.2 計算結果

本報告の目的とする所は, 同じ長さ, 同じ揚力, 同じ翼根曲げモーメントを持つ平面翼と非平面翼の

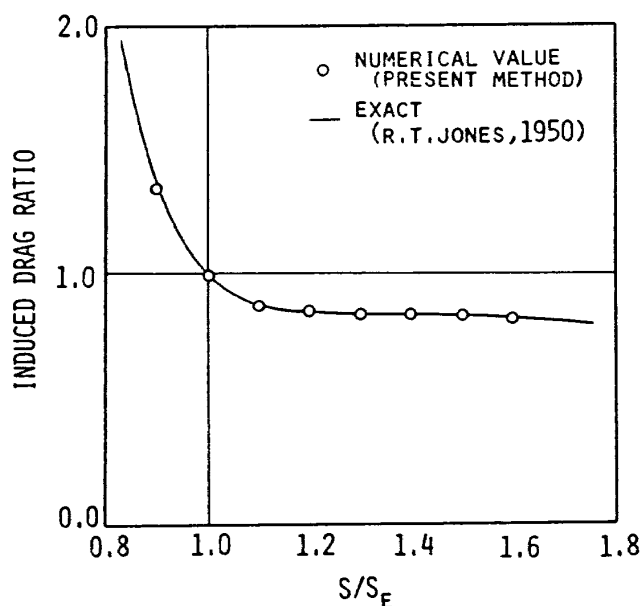


図9 翼根曲げモーメントを固定した時の平面翼の最小誘導抵抗の数値解と厳密解の比較

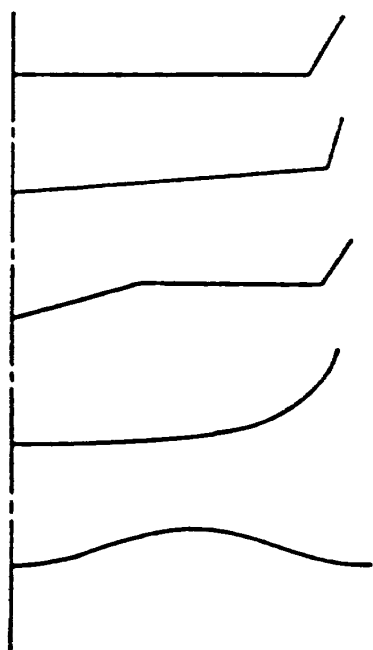


図10 解析の対象となった種々の形状の非平面翼

最小誘導抵抗を比較することである。そこで、図10に示す様々な形状をした非平面翼について、 $\beta$ の値をパラメトリックに変化させて、 $1/l_e$ の最適値を翼形状と $\beta$ の関数として求める。解析の対象となった翼形状の詳細(図10)について記すと、

(a) 平面翼+Winglet

Wingletの長さは、翼長さ $l_e$ の10, 15, 20, 25%に採る。その各々についてWingletの上反角を $0^\circ \sim$

$90^\circ$ まで $15^\circ$ 刻みで変化させた。

(b) 上反角 $5^\circ$ を持つ翼+Winglet

Wingletの長さは $l_e$ の15%, Wingletの上反角は $-90^\circ \sim +90^\circ$ まで $15^\circ$ 刻み、及び $+5^\circ$ の場合も計算した。

(c) Gull Wing + Winglet

翼根から翼長さ $l_e$ の15%までは上反角 $15^\circ$ , それ以後85%までは上反角なし, 翼端に15%長さのWingletを持つ。Wingletの上反角は $-90^\circ \sim +90^\circ$ まで $15^\circ$ 刻みに変化させた。

(d) Curved Wing (Type A)

上反角 $\phi = \phi(l)$ の分布を次式で与えた。

$$\phi = \frac{\pi}{2} \left( \frac{l}{l_e} \right)^{2P} \quad [\text{rad}]$$

( $P = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ )

(e) Curved Wing (Type B)

上反角 $\phi = \phi(l)$ の分布を次式で与えた。

$$\phi = \frac{\pi}{P} \sin \left( 2\pi \frac{l}{l_e} \right)$$

( $P = 10, 11, 12$ )

これらの形状の翼と平面翼の最小誘導抵抗の大小を論じる前に、計算された最適荷重分布の一例を示しておこう。図11(a)~(d)は、各々上反角 $0^\circ$ (平面翼)、 $30^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$ の20% Winglet付き翼について、翼根曲げモーメントの制約を色々に変化させた場合の最適荷重分布と垂直誘導速度分布を図示したものである。図に破線で示したものが、曲げモーメントの制限がない場合の最適値で、実線はその時より $\beta$ の値が小さい場合、一点鎖線は大きい場合を表わす。図中に示した $\beta$ 、 $1/l_e$ の数值は、小数点下3桁で切り捨ててある。

図11(a)は平面翼の場合に相当する。破線が楕円分布の場合で、吹き降ろしが全スパンを通じて一定になっているのがわかる。R. T. Jones<sup>(26)</sup>は、 $\beta$ に制約条件が課せられる場合には、吹き降ろし分布がスパンに沿って直線的に変化することを変分を用いて解析的に導いたが、図はこの状況を良く表わしている。

Wingletが上反角を持つ場合(図11(b)~(d))には、上反角の急変する部分で垂直誘導速度の計算値に若干の振動が生じるが、誘導抵抗などの計算値には特

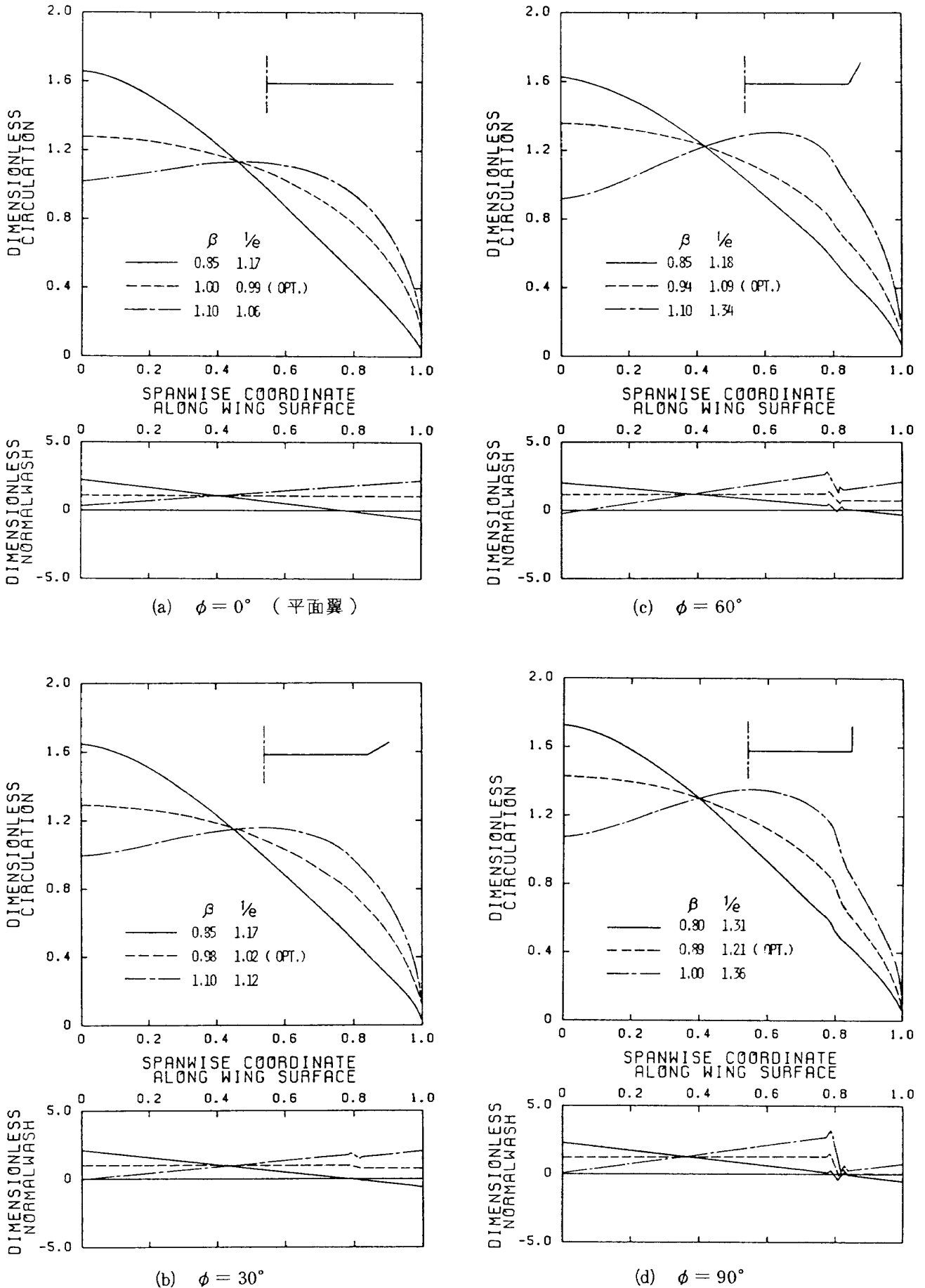


図 11 種々の  $\beta$  の値に対する最適荷重分布とその時の垂直誘導速度分布：  
平面翼 + 20% Winglet の場合

に悪影響は及ぼさない。Munkの第3定理(付録)によれば $\beta$ に制限のない場合、垂直誘導速度の値は $\cos \phi$ に比例する。例えば図11(d)の破線を見れば、 $\phi=0^\circ$ の部分では垂直誘導速度の値が一定であり、 $\phi=90^\circ$ の所では0になっているから、数値最適解がMunkの定理と矛盾していないことがわかる。

図12, 13, 14, 15は他の形状の翼についての計算値を示したものである。全般的には図11とほぼ同様の傾向を示している。 $\beta$ の値が小さくなるに従い(即ち曲げモーメントの制限がきつくなるに従い),翼端部で荷重分布は瘦せ、垂直誘導速度が吹き上げ気味になることがわかる。 $\beta$ の値をさらに小さくすると翼端部に負の揚力を発生する部分が現われるが、この時には曲げモーメントが最大となる位置が翼端部から内翼部に移動するので、構造的制約として $\beta$ を固定した最適化は最早意味を持たない。

さて、本来の目的である平面翼との比較を行って見よう。そのために、横軸に翼根曲げモーメントの制限を表わすパラメータ $\beta$ 、縦軸に最小誘導抵抗を

表わすパラメータ $1/e$ をとり、種々の形状の翼について計算された値をプロットし、平面翼の特性と比較する。

図16(a)~(d)は、各々10, 15, 20, 25% Winglet付き平面翼の最小誘導抵抗を示したものである。図中の破線は各形状に対する最小点を結んだ軌跡で、 $\beta$ の制約を課せなかった場合の最適値に相当する。これらの図を見ると明らかな様に、ほぼ全ての $\beta$ の値に対して、平面翼即ち $\phi=0^\circ$ の場合の誘導抵抗が最も小さいことがわかる。一般に、平面翼に形状に近いものほど抵抗の値は小さくなる。 $\beta$ の値が0.8以下の所では、非平面翼の方がやや有利になるが、平面翼との差はごく僅かであるから優劣の比較はあまり意味を持たない。 $\beta$ の値が小さい所では、 $1/e$ の最適値は翼形状の変化に対して極めて鈍感になる。これは、Winglet付き翼だけでなく一般のCurved Wingの結果についても言える。

図17(a)(b)は、 $5^\circ$ 上反角を持つ翼に15% Wingletが(a)では上向き、(b)では下向きに)付けられた場

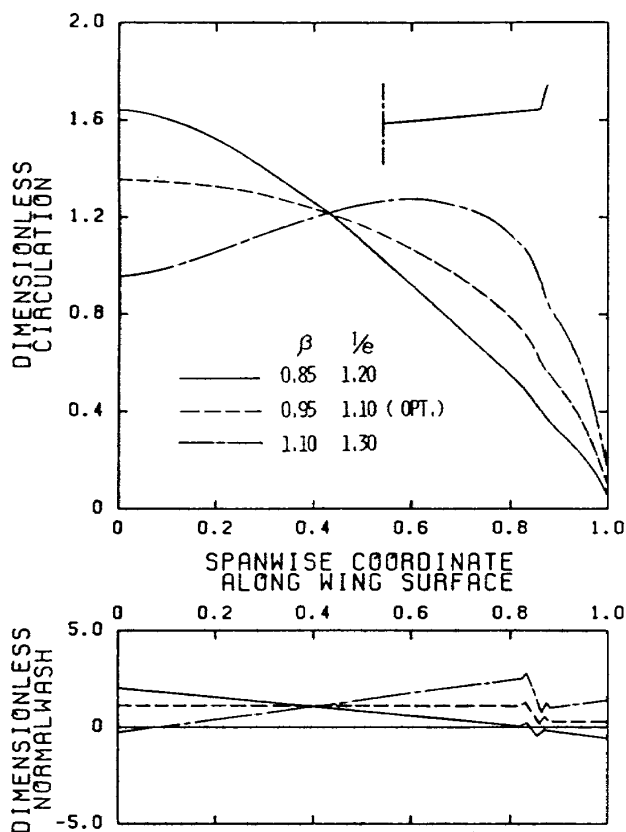


図12 種々の $\beta$ の値に対する最適荷重分布とその時の垂直誘導速度分布：上反角 $5^\circ$ 付き翼+15% Winglet ( $\phi=75^\circ$ )の場合

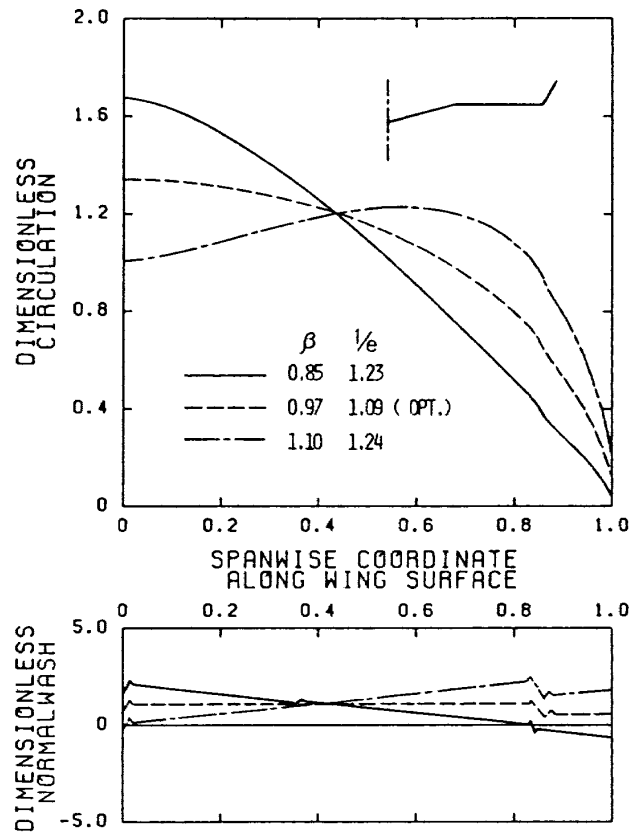


図13 種々の $\beta$ の値に対する最適荷重分布とその時の垂直誘導速度分布：Gull-Wing+15% Winglet ( $\phi=60^\circ$ )の場合

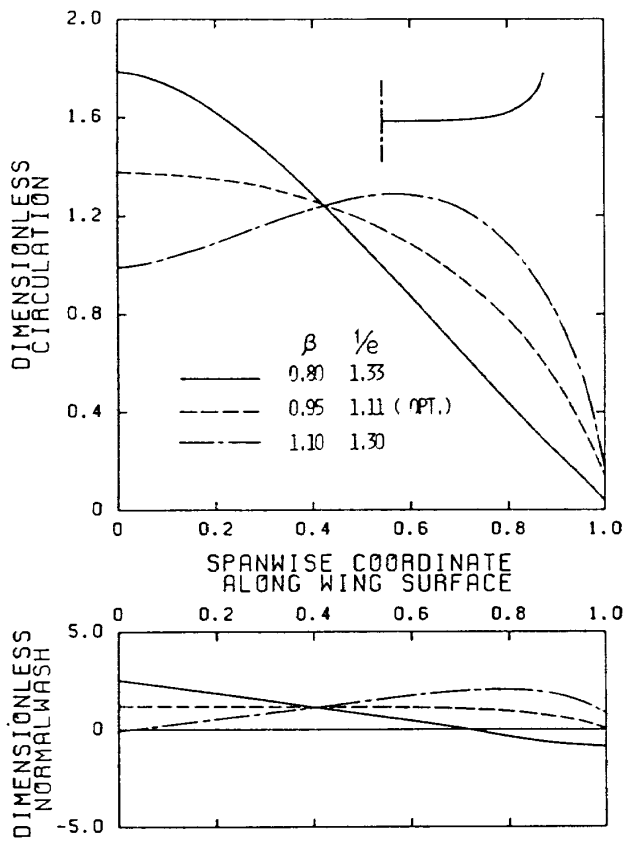


図 14 種々の  $\beta$  の値に対する最適荷重分布とその時の垂直誘導速度分布：Curved Wing (Type A) の場合

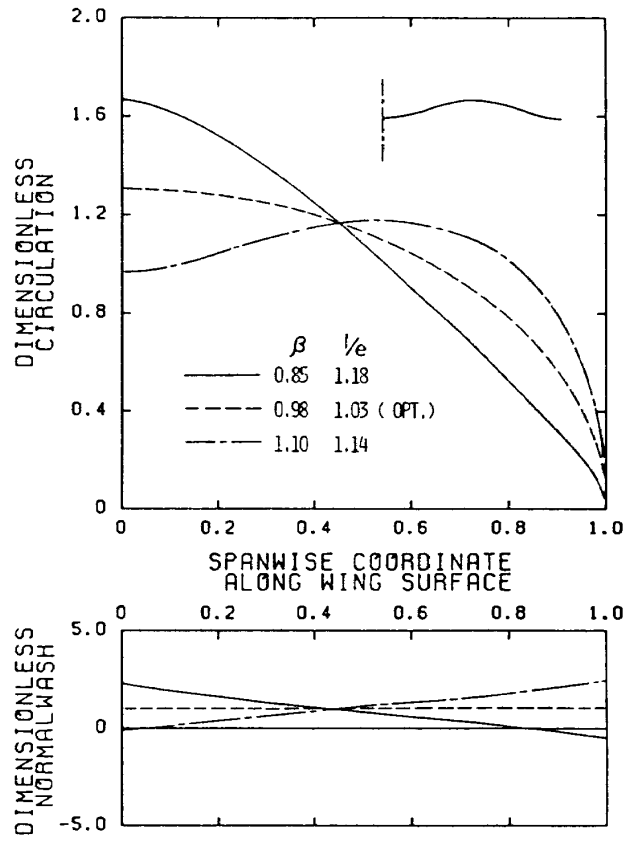


図 15 種々の  $\beta$  の値に対する最適荷重分布とその時の垂直誘導速度分布：Curved Wing (Type B) の場合

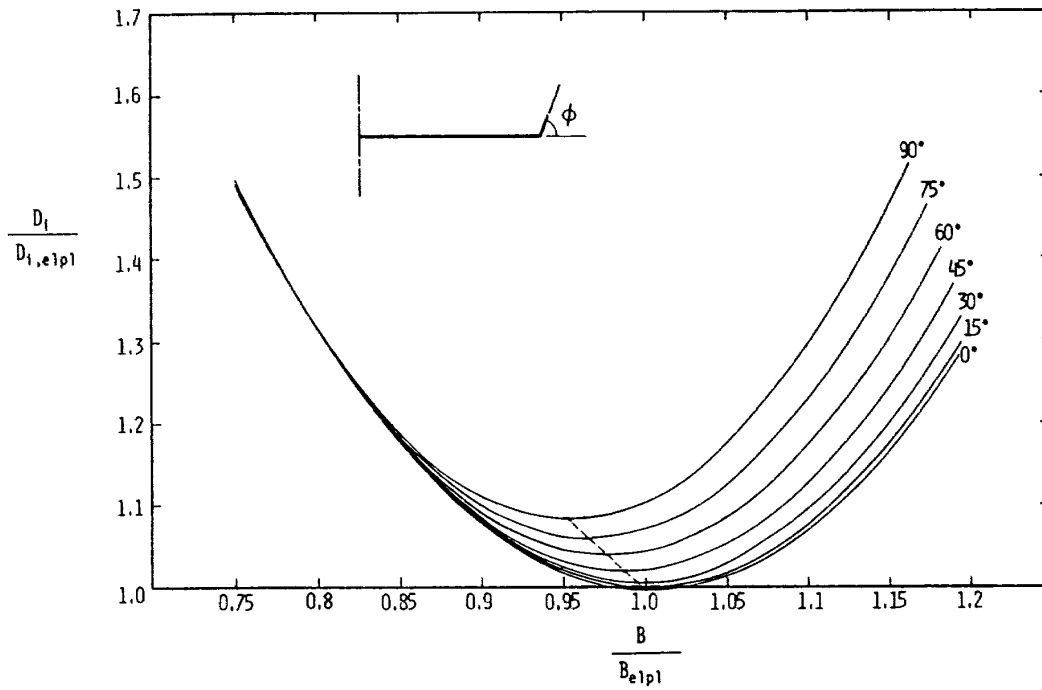
合であるが、この時も、 $\beta$ の大部分の値に対して直線翼の方が抵抗が小さくなる。ただ図17(b)を見ると、 $\beta$ が0.85より小さい所では、下向きWingletを付けた翼が直線翼よりも抵抗が約3%近く小さくなる事がわかる。

一般に、上反角を持つ翼にWingletを付ける場合を考えると、上向きWingletよりも下向きWingletの方が、翼付根からWingletまでの距離が短くなる。これは、翼根曲げモーメントの点から見れば、Wingletに働く荷重のモーメント・アームの長さが短くなることを表わしている。このために、 $\beta$ の値が比較的小さい時、即ち翼根曲げモーメントの制限がきつい場合には、上向きWingletより下向きWingletの方が有利(翼が下反角を持つ場合にはこの逆)になるものと考えられる。

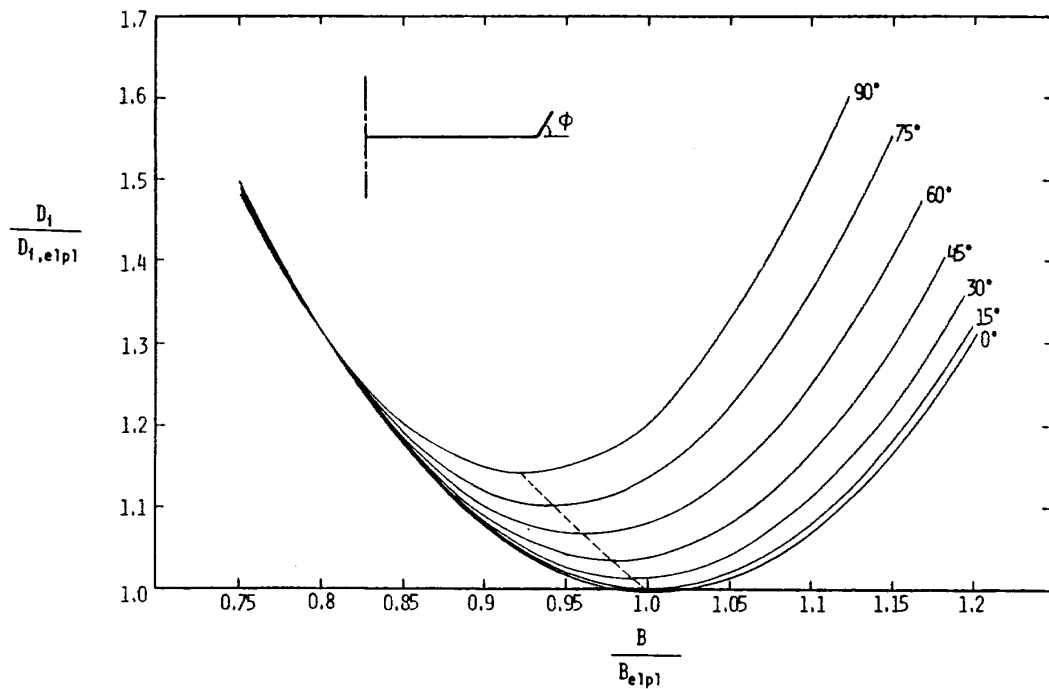
この傾向は、図18の15°上反角付きのGull Wingの場合に一層ははっきりする。翼端部を水平( $\phi=0^\circ$ )にした翼に比較して、上向き90°にWingletを付けた翼では決して誘導抵抗が小さくなることはないが、

下向き90°にWingletを付けた場合には、 $\beta$ が0.85より小さい所で最大5~6%も誘導抵抗が小さくなる。例えば水上機などではGull Wingを採用したものが比較的良く見受けられるが、このような場合には下向きWingletを用いるのが有利になると考えられる。しかし、この場合でも完全な平面翼と比較すると(図18)、全ての $\beta$ に対してGull Wingの方が劣っている。

図19は、Curved Wingについての比較を示したものである。この場合の結果も、Winglet付き翼に対する結果とほぼ同様になったが、傾向的には直線で構成された翼よりは特性が良い(平面翼に近い)と言える。Type Aに比較してType Bの方が抵抗が小さくなったのは、Gull Wingに下向きWingletを付けた場合の特性が良かったのと同じ理由に依ると思われる。即ち、Type Bの翼はType Aに比較して、外翼部のモーメント・アームが短くなるので、翼根曲げモーメントに対する制限が緩和され、全体的に誘導抵抗が小さくなったものと考えられる。



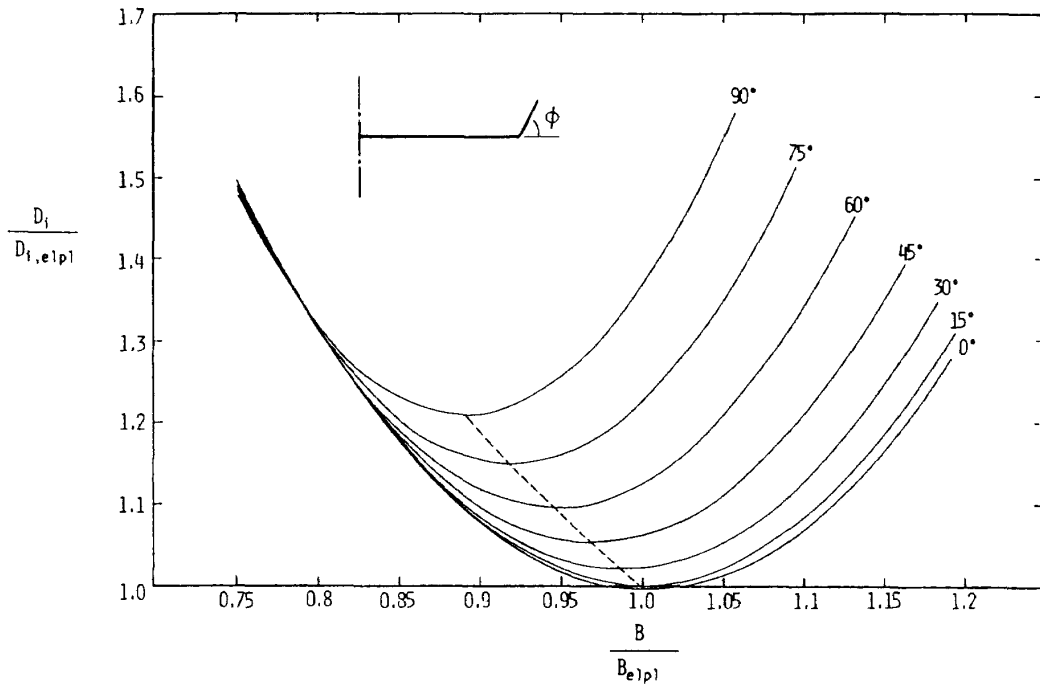
(a) 10% Winglet の場合



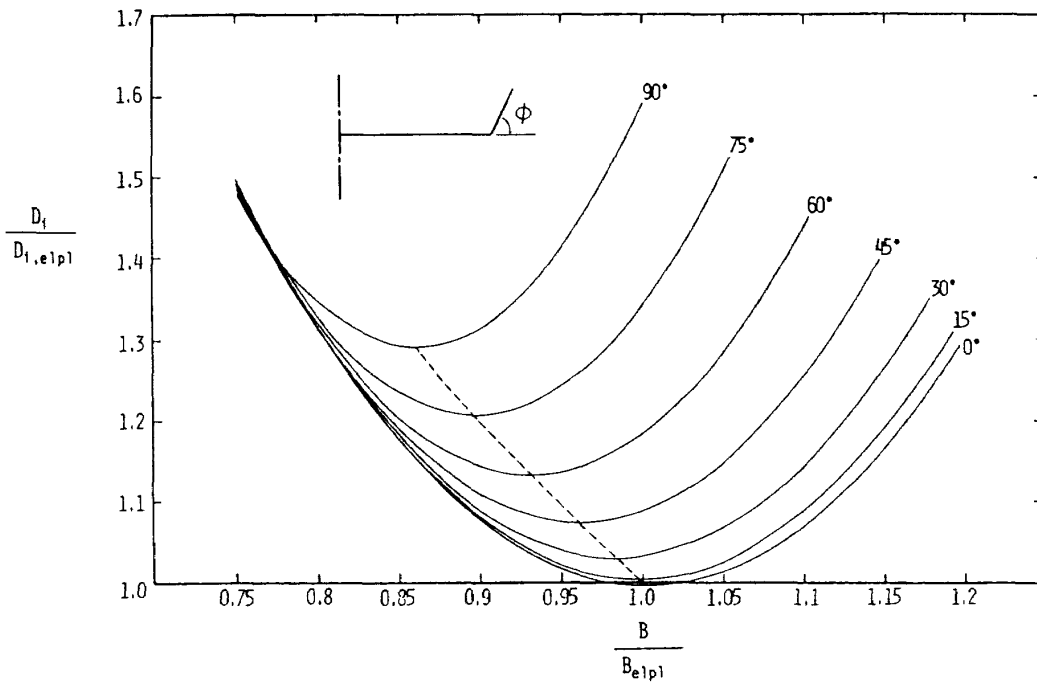
(b) 15% Winglet の場合

図 16 Winglet 付き翼と平面翼の最小誘導抵抗の比較



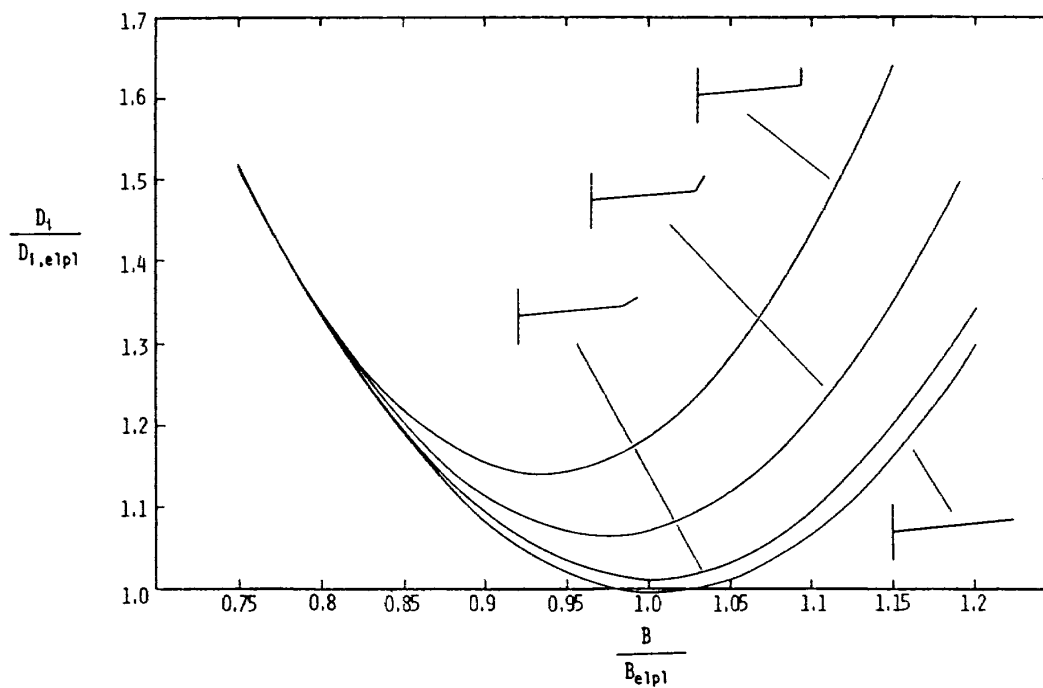


(c) 20% Winglet の場合

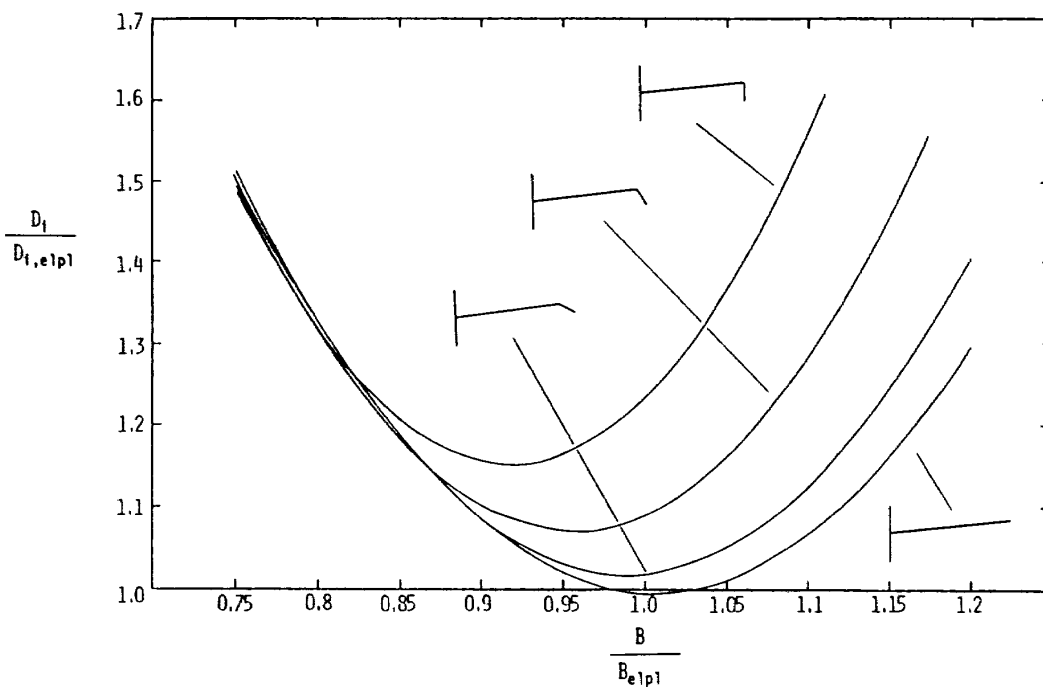


(d) 25% Winglet の場合

図 16 Winglet 付き翼と平面翼の最小誘導抵抗の比較 (つづき)



(a) 上向きWingletの場合



(b) 下向きWingletの場合

図 17 5°上反角を持つ翼+15% Winglet の  
最小誘導抵抗の比較

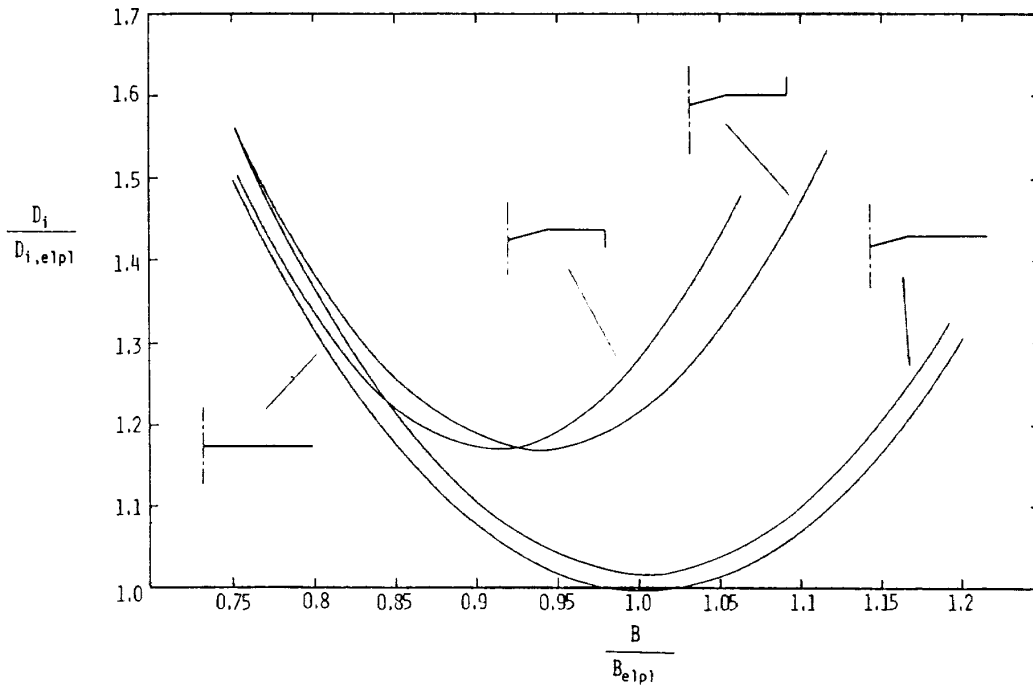


図 18 Gull-Wing + 15% Winglet と平面翼の最小誘導抵抗の比較

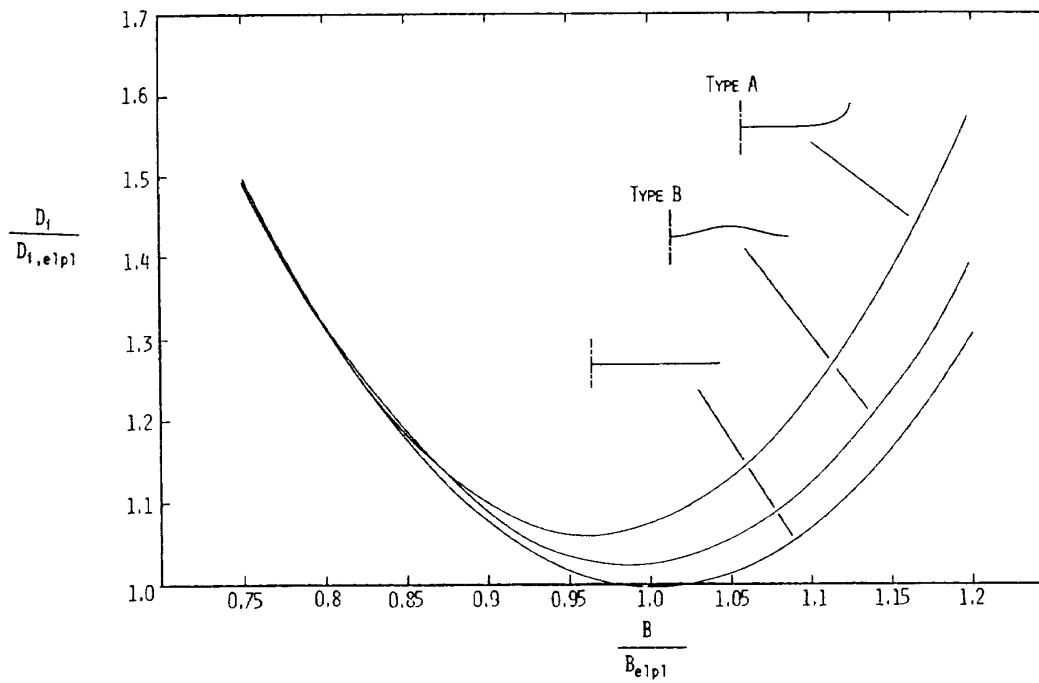


図 19 Curved Wing と平面翼の最小誘導抵抗の比較

#### 4. 結果と考察

以上の結果を総合すると、 $\beta$ の値が小さい場合を除けば、非平面翼の最小誘導抵抗は平面翼のものよりも常に大きくなる。 $\beta$ の値を1に比較して極端に小さくすると、例えば矩形翼などでは振り下げがきつくなり過ぎて構造上・工作上的困難が伴う。故に、一般に翼を新たに設計する場合には、 $\beta$ の値を0.85以下に採ることはまず有り得ないと考えられるので、非平面翼よりも平面翼の方が優れていると結論することができる。

しかし、これで非平面翼を否定してしまうのは早計であろう。何故なら、上記の結果が巡航状態を設計点に選んだ時の最適化の帰結であるからである。実際の翼の構造設計の際に critical になる荷重は、巡航時の荷重ではなく運動荷重や突風荷重である。平面翼の場合振り下げが小さければ、機体のピッチ角の変化に対して翼の荷重分布はほぼ“相似的”に変化する。故に、運動時や突風時の荷重を求めるには、巡航時の荷重に適当な荷重係数 (ex. 2.5) をかけてやれば良い。即ち、この場合には、設計点で翼根曲げモーメントを制限した最適化は正当化される。

しかし、非平面性の強い翼の場合には、この議論は必ずしも正しくない。何故なら、機体のピッチ角を増加しても上反角の大きい部分の局所迎角はほとんど変化せず、荷重分布の変化が相似的ではなくなるからである。例えば  $90^\circ$  に立った翼端板なら、機体のピッチ角が変化しても翼端板の幾何学的迎角は不変である (図20)。

実際には、この効果に誘導速度による迎角が付加されるので断定的なことは言えないが、非平面翼のこの特徴を利用できれば、翼端付近の局所荷重が高迎角時に大きく増大することを防げる可能性がある。これは上昇時や突風を受けた時の翼根部曲げモーメントを緩和させる (荷重係数を減少させる) ことになるから、近年注目されている “Aeroelastic Tailoring” や “Active Maneuver Load Control” などと同様に、非平面翼の特性が荷重制御技術 (Wing Load Alleviation) として論じられることになる。

故に、非平面翼に関してより実際的な最適化を考えるには、高迎角時 (Off-Design点) における構造

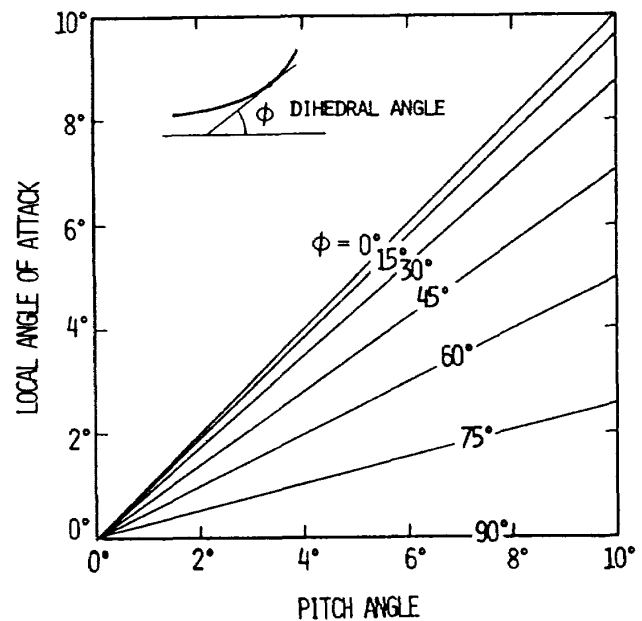


図20 翼のPitch角と局所迎角の関係

的制限のもとに、低迎角時 (Design点) の誘導抵抗を最小化する必要がある。このためには、翼のピッチ角を変化させた時の空気荷重の変化を調べなくてはならないが、これは Trefftz 面を用いる解析では行えない。何故なら Trefftz 面解析では、スパン方向の循環分布と空気力が結び付けられているだけであり、ある姿勢に置かれた翼の循環分布がどうなるかについての情報を得ることはできないからである。翼の形状と姿勢から翼に働く空気力を求めるには、揚力面理論やパネル法を用いる必要がある。又、最適化問題の解法も、Off-Design 点の計算を含むため、Lagrange 乗数法ではなく反復型の非線形計画法を用いる必要がある。

この様なより実際的な最適化問題の定式化については現在検討を進めている。非平面翼の Wing Load Alleviation としての可能性についてはまだ思考実験の域を出ないが、NASAが行った Winglet 付翼の風試結果を見ると、 $C_L$ の増加に連れて翼根曲げモーメントの増加の割合が抑えられることを示すデータもあり<sup>(1)(2)</sup>高荷重時の構造的制約条件と巡航時の  $L/D$  特性の最適化をうまく適合させてやれば、平面翼より有利な非平面翼を設計することも可能かもしれない。

## 5. 謝 辞

本報告の全般に渡って有益な議論及び助言をしてくださった遷音速機研究室の神谷信彦室長に、心から感謝の意を表します。

### 参 考 文 献

- 1) R.T. Whitcomb: A Design Approach and Selected Wind-Tunnel Results at High Subsonic Speeds for Wing-Tip Mounted Winglets, NASA TN D-8260, 1976.
- 2) L.C. Montoya: KC-135 Winglet Flight Results, NASA CP-2172, 1981, pp.145-156
- 3) R.D. Gilkey: Design and Wind Tunnel Tests of Winglets on a DC-10 Wing, NASA CR-3119, 1979.
- 4) A.B. Taylor: Winglet and Long-Duct Nacelle Aerodynamic Development for DC-10 Derivatives, NASA CP-2036, Part II, 1978, pp.609-623.
- 5) P.T. Reynolds: The Learjet Longhorn Series-The First Jets with Winglets, SAE Paper 790581, 1979.
- 6) L.M. Mead, C. Coppi and J. Strakosch: The Grumman Aerospace and Gulfstream American Gulfstream III Case Study in Aircraft Design, AIAA Professional Study Series, 1980.
- 7) I. Darel, Y. Eliraz and Y. Barnett: Winglets Development at Israel Aircraft Industries, ICAS Paper 80-12.5, 1980.
- 8) R.V. Gifford and C.P. van Dam: The Design Integration of Wingtip Devices for Light General Aviation Aircraft, ICAS Paper 82-1.4.4, 1982.
- 9) J.E. Hackett: Vortex Drag Reduction by Aft-Mounted Diffusing Vanes, ICAS Paper 80-13.4, 1980.
- 10) K.K. Ishimitsu: Aerodynamic Design and Analysis of Winglets, AIAA Paper 76-940, 1976.
- 11) M.I. Goldhammer: A Lifting Surface Theory for the Analysis of Nonplanar Lifting Systems, AIAA Paper 76-16, 1976.
- 12) H.H. Heyson, G.D. Riebe and C.L. Fulton: Theoretical Parametric Study of the Relative Advantages of Winglets and Wing-Tip Extensions, NASA TP-1020, 1977.
- 13) S.G. Flechner and P.F. Jacobs: Experimental Results of Winglets on First, Second, and Third Generation Jet Transports, NASA CP-2036, Part II, 1978, pp.553-569.
- 14) S.G. Flechner, P.F. Jacobs and R.T. Whitcomb: A High Subsonic Speed Wind-Tunnel Investigation of Winglets on a Representative Second-Generation Jet Transport Wing, NASA TN D-8264, 1976.
- 15) P.F. Jacobs, S.G. Flechner and L.C. Montoya: Effect of Winglets on a First-Generation Jet Transport Wing. I-Longitudinal Aerodynamic Characteristics of a Semispan Model at Subsonic Speeds, NASA TN D-8473, 1977.
- 16) L.C. Montoya, S.G. Flechner and P.F. Jacobs: Effect of Winglets on a First-Generation Jet Transport Wing. II-Pressure and Spanwise Load Distributions for a Semispan Model at High Subsonic Speeds, NASA TN D-8474, 1977.
- 17) L.C. Montoya, P.F. Jacobs and S.G. Flechner: Effect of Winglets on a First-Generation Jet Transport Wing. III-Pressure and Spanwise Load Distributions for a Semispan Model

- at Mach 0.30, NASA TN D-8478, 1977.
- 18) 久保田弘敏, 新井 勲, 松坂正芳他: 低速における翼端板の効果に関する風洞実験, 日本航空宇宙学会誌(投稿中)
- 19) 堀之内芝, 猪野寛二: FA300におけるウイングレットの研究, 第17回飛行機シンポジウム講演集, 1979, pp. 96-99.
- 20) M.M. Munk: The Minimum Induced Drag of Airfoils, NACA Report No. 121, 1921.
- 21) V.M. Falkner and C. Darwin: The Design of Minimum Drag Tip Fins, A.R.C. R & M No. 2279, 1945.
- 22) C.D. Cone, Jr.: The Theory of Induced Lift and Minimum Induced Drag of Nonplanar Lifting Systems, NASA TR R-139, 1962.
- 23) J.L. Lundry: A Numerical Solution for the Minimum Induced Drag, and the Corresponding Loading, of Nonplanar Wings, NASA CR-1218, 1968.
- 24) J.S. Letcher Jr.: V-Wings and Diamond Ring-Wings of Minimum Induced Drag, J. Aircraft, vol. 9, No. 8, Aug. 1972, pp. 605-606.
- 25) H.C. Garner: Some Remarks on Vortex Drag and Its Spanwise Distribution in Incompressible Flow, the Aeronautical J., vol. 72, July 1968, pp. 623-625.
- 26) R.T. Jones: The Spanwise Distribution of Lift for Minimum Induced Drag of Wings Having a Given Lift and a Given Bending Moment: NACA TN-2249, 1950.
- 27) A. Klein and S.P. Viswanathan: Minimum Induced Drag of Wings with Given Lift and Root-Bending Moment, ZAMP, vol. 24, Dec. 1973, pp. 886-892.
- 28) A. Klein and S.P. Viswanathan: Approximate Solution for Minimum Induced Drag of Wings with Given Structural Weight, J. Aircraft, vol. 12, Feb. 1975, pp. 124-126.
- 29) J.A. Blackwell, Jr.: Numerical Method to Calculate the Induced Drag or Optimum Loading for Arbitrary Nonplanar Aircraft, NASA SP-405, 1976, pp. 49-70.
- 30) J.A. Blackwell, Jr.: A Finite-step Method for Calculation of Theoretical Load Distributions for Arbitrary Lifting-Surface Arrangements at Subsonic Speeds, NASA TN D-5335, July 1969.
- 31) J.E. Lamar: A Vortex-Lattice Method for the Mean Camber Shapes of Trimmed Noncoplanar Planforms with Minimum Vortex Drag, NASA TN D-8090, 1976.
- 32) J.M. Kuhlman: Higher Order Farfield Drag Minimization for a Subcritical Wing Design Code, J. Aircraft, vol. 17, No. 9, Sep. 1980, pp. 648-655.
- 33) J.M. Kuhlman: Numerical Optimization Techniques for Bound Circulation for Minimum Induced Drag of Nonplanar Wings: Basic Formulations, NASA CR-3154, 1979.
- 34) J. DeYoung: Minimization Theory of Induced Drag Subject to Constraint Conditions, NASA CR-3140, 1979.

## 付録 Munk の定理

Munk は文献 20 の中で、馬蹄渦の系に作用する空気力についての数学的議論から、任意の形式の翼に働く誘導抵抗に関する次の 3 つの重要な定理を得た。

(1) 第一定理 (Stagger Theorem として知られる)

翼弦方向の循環分布は、誘導抵抗には無関係である。即ち、任意の揚力系に作用する全誘導抵抗は、スパン方向の循環分布が一定に保たれる限り、一様流方向に渦系を任意に移動しても、その値は変化しない。例えば、翼弦方向の圧力分布や Sweep-Angle は、誘導抵抗の計算値に全く影響しない。又、Prandtl-Glauert 方程式に従う線型理論の範囲では、圧縮性も影響しない。

(2) 第二定理

任意の揚力系に作用する全誘導抵抗は、後流渦面を無限下流の所謂 "Trefftz Plane" に投影した荷重曲線上に誘導される速度場を用いて計算すること

ができる (本文図 4 参照)。即ち、

$$D_i = \int_c \rho \frac{V_n}{2} \Gamma dl$$

ここに  $V_n = V_n(l)$  は、荷重曲線に垂直方向に誘導される速度で、 $\Gamma = \Gamma(l)$  は、揚力系の循環分布を表わす。 $\int_c$  は荷重曲線に沿った線積分を表わす。

(3) 第三定理

任意の上反角分布  $\phi = \phi(l)$  を持つ非平面翼では、垂直誘導速度  $V_n$  が、その点における上反角の余弦  $\cos \phi$  に比例する時に、誘導抵抗の値が最小となる。例えば、平面翼では、 $V_n = \text{const.}$  即ち吹き降ろしが全スパンで一定となる時 (楕円荷重分布に相当) に、誘導抵抗が最小となる。比例定数の値は、翼に働く揚力の大きさから決定される。

以上の 3 つの定理は、後流渦面が変形せず、一様流方向に真直ぐに無限下流まで延びていると仮定する限り、任意の揚力系に適用することができる。

---

## 航空宇宙技術研究所報告797号

昭和59年1月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) 千182  
印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山5-6-17

---



Printed in Japan