

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-804

プロペラ型ロータと支持構造の連成による  
空力弾性的不安定についての若干の考察

市川輝雄

1984年4月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# プロペラ型ロータと支持構造の連成による 空力弾性的不安定についての若干の考察\*

市川 輝雄\*\*

## Some Considerations on Aeroelastic Instabilities Caused by Coupling between Propeller-Type Rotor and Its Supporting Structure

Teruo ICHIKAWA

### ABSTRACT

Aeroelastic instabilities caused by the coupling between a rigid rotor and a flexible tower of a horizontal axis wind turbine are considered in this paper. Equations of motion having periodic coefficients are derived with respect to the fixed frame of reference as well as the frame of reference moving with the rotor by assuming an aerodynamic force predicted by the quasi-steady blade element theory. The same equations can be applied to rotors of both downwind and upwind types. It is shown that the equations of motion with respect to an appropriate frame of reference have constant coefficients in cases where either the rotor or the tower stiffness is isotropic. Possible instabilities only in these cases are studied with the help of Routh's criterion. Three kinds of instabilities, that is, the whirl flutter and the divergences of the first and second kinds, are predicted. The last of these is rather new.

### 1. まえがき

本論文は水平軸風車を念頭において、そのロータと塔の運動の連成によって起こり得る空力弾性的不安定現象について検討することを目的とする。単純化した解析モデルを用いることによって、定性的ではあるが、一般性のある結論を引き出すことを主眼とする。水平軸風車のロータ・塔系については既に二、三の解析<sup>1),2)</sup>が行われているが、これらは余りにも煩雑な運動方程式を扱っていて、問題の本質を明らかにし得ていない。いっぽう、航空機のプロ

ペラ・ナセル系の空力弾性問題についての解析<sup>3),4)</sup>がLockheed Electra旅客機の事故<sup>5)</sup>に関連して、1960年代の初めに行われており、これらがこの種の解析の最初のものと思われる。これらは本論文の一部と関連する。

プロペラ型ロータの性質は、よく知られているように、ブレード数が3枚以上であるかまたは2枚であるかによってまったく異なる。ブレード数が3枚以上のロータでは、回転面内の任意の方向の直径に関する慣性モーメントが、ブレードの方位角に関係なく一定であることは容易に確かめられる。また、横風を受けたときの空気力学的モーメントについても同様の性質がある<sup>6)</sup>。すなわち、ブレード数が3枚以上のロータは、慣性的および空気力学的に等方的な

\* 昭和59年2月29日受付

\*\* 機体第一部

ロータであると言える。これに反して、ブレード数が2枚のロータは、慣性モーメントおよび空気力学的モーメントがブレードの方位角によって異なる、すなわち非等力的なロータである。

等方的なロータをもつロータ・支持構造系の運動方程式は、微小変位の範囲内では、定数係数の線形常微分方程式となるから、系の安定性を調べるには、フラッタ解析などでよく知られた手法を用いることができる。これに反して、非等方的なロータを持つ系では、運動方程式は一般に周期係数を持つことになり、上述の手法で安定性を調べることはできない。非等方的なロータを持つ系でも、支持構造の剛性がロータ軸に関して等方的な場合には、ロータと共に回転する座標系を用いると、運動方程式は定数係数となる。

本論文では、非等方的なロータを持つ系に対して、静止座標系および回転座標系による周期係数の運動方程式をそれぞれ導く。ブレードに作用する空気力は、準定常の翼素理論によって求める。水平軸風車には風下型(downwind type)と風上型(upwind type)の別があるが、用いた空気力学理論の範囲内で両者を統一的に扱うことができることを示す。安定性の考察は、いずれかの座標系で運動方程式の係数が定数となる場合のみについて行う。見通しのよい結果を得るため、すべて数式による考察に頼ることとし、これには Routh の安定規準の助けを借りる。

## 記号

$a$	ブレード断面の揚力傾斜
$B_1, B_2, B_3$	式(6)
$c$	ブレードの翼弦長
$c_0$	ブレードの基準翼弦長
$D_1, D_2$	式(20)
$D_3, D_4$	式(36)
$e$	$= x_B/R$
$F_0$	式(28)
$F_1$	式(27)
$F_2$	式(43)
$I_x, I_y, I_z$	慣性モーメント
$I_m$	$= (I_y + I_z)/2$
$\Delta I$	$= (I_z - I_y)/2$

$p_m$	$= \omega_m/\Omega$
$q_i, q'_i, q''_i$ ( $i=0, 1, \dots, 4$ )	固有方程式の係数
$Q_\theta, Q_\psi$	静止座標系による一般空気力
$Q_\theta, Q_\psi$	回転座標系による一般空気力式(9)
$r$	ロータの半径
$R$	ロータの半径
$S_\theta, S_\psi$	支持構造のばね定数
$S_m$	$= (S_\theta + S_\psi)/2$
$\Delta S$	$= (S_\theta - S_\psi)/2$
$t$	時間
$T, T', T''$	試験行列式
$v$	$= V/(\Omega R)$
$V$	風速
$x, y, z$	動座標系の座標
$x_B$	ブレードの軸の $x$ 座標
$X_0, Y_0, Z_0$	静止座標系の座標式(25)
$\gamma$	$= \Delta I/I_m$
$\delta$	$= \Delta S/S_m$
$\epsilon$	$= \Delta S/S_m$
$\theta, \psi$	回転座標系に関する首振り角
$\Theta, \Psi$	静止座標系に関する首振り角
$\kappa$	$= I_x/I_m$
$\rho$	空気の密度
$\tau$	$= \Omega t$
$\Omega$	ロータの回転角速度

## 2. 運動方程式

挽み得る塔によって支持されたロータの運動を記述するには、実際には数個以上の自由度が必要であるが、ここでは図1のように単純化した解析モデルを用いる。すなわちブレード数が2枚で、回転軸まで含めて剛体のロータが、上下および左右に首振り運動することができるように1個のピヴォットで支持されているとする。上下および左右の首振り運動は、それぞれ首振り角に比例した復元モーメントを与えるばねで拘束されているとする。首振り角は微小であると考えるので、ばねのモデルは図1のようなものでよい。ばねによる復元モーメントは、塔やヨー機構などの剛性に基づく復元モーメントのほか、ヴェインの空気力学的復元モーメントをも代表する。

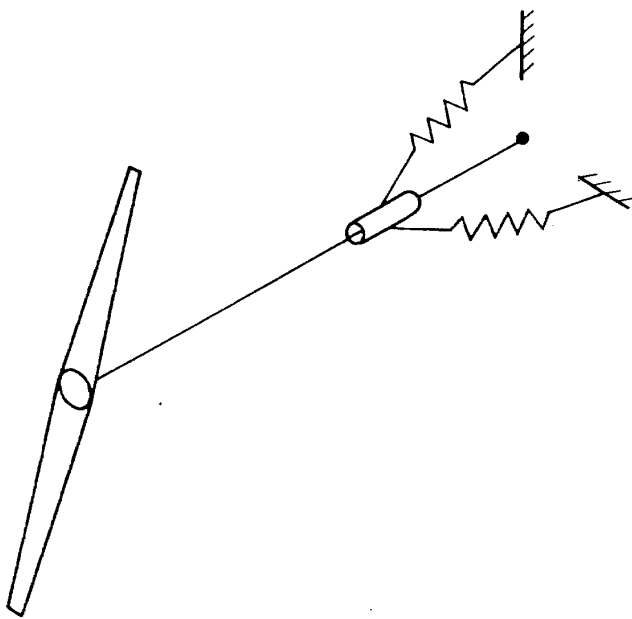


図1 解析モデル

静止直角座標系  $0-X_0Y_0Z_0$  をつぎのように定義する。原点  $0$  をピヴォットの位置にとり、首振りしない状態の回転軸に沿って  $X_0$  軸をとる。  $X_0$  軸は水平であるとする。  $Z_0$  軸を垂直上方に、  $Y_0$  軸を右手系をなすように定める。 つぎに、ロータに固定した動直角座標系  $0-xyz$  を定義する。 この座標系では、  $x$  軸を首振りした回転軸に沿って、  $z$  軸を  $x$  軸とブレードの軸とが定める平面に垂直に、  $y$  軸を右手系をなすようにとる (図2)。

$xyz$  座標系は  $X_0Y_0Z_0$  座標系から、座標軸まわりの回転を3回行うことによって得られる。これはオイラーの角による方法の変形である。回転の系列は幾通りもあるが、ここではつぎの二通りを考える。

(i) まず  $X_0Y_0Z_0$  座標系を  $Y_0$  軸まわりに角  $\theta$  だけ回転して  $X_1Y_1Z_1$  座標系を得、つぎに  $X_1Y_1Z_1$  座標系を  $Z_1$  軸まわりに角  $\psi$  だけ回転して  $XYZ$  座標系を得、最後に  $XYZ$  座標系を  $X$  軸まわりに角  $\Omega t_1$  だけ回転して  $xyz$  座標系を得る (図3)。

(ii) まず  $X_0Y_0Z_0$  座標系を  $X_0$  軸まわりに角  $\Omega t_2$  だけ回転して  $x_0y_0z_0$  座標系を得、つぎに  $x_0y_0z_0$  座標系を  $y_0$  軸まわりに角  $\theta$  だけ回転して  $x_1y_1z_1$  座標系を得、最後に  $x_1y_1z_1$  座標系を  $z_1$  軸まわりに角  $\psi$  だけ回転して  $xyz$  座標系を得る (図4)。

ここで  $\Omega$  はロータの回転角速度で一定とする。  $t_1$ ,  $t_2$  は時間である。  $t_1 = 0$  のとき  $xyz$  は  $XYZ$  に一

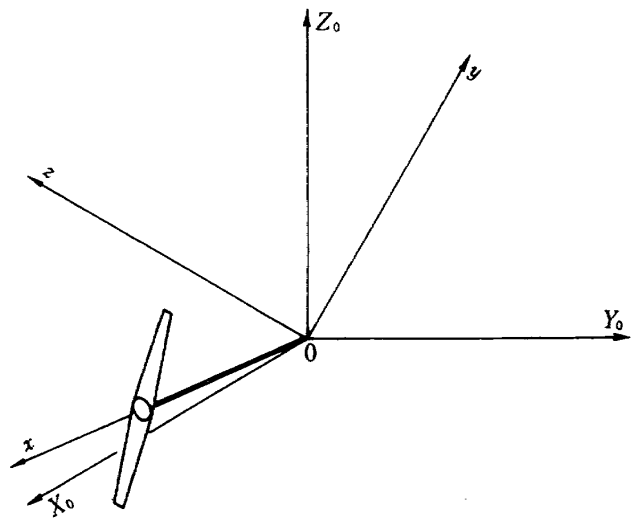


図2 静止および動座標系

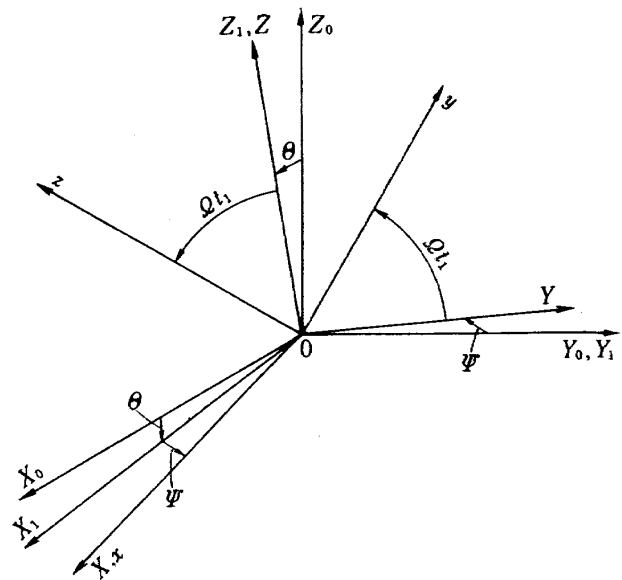


図3 回転の系列(i)

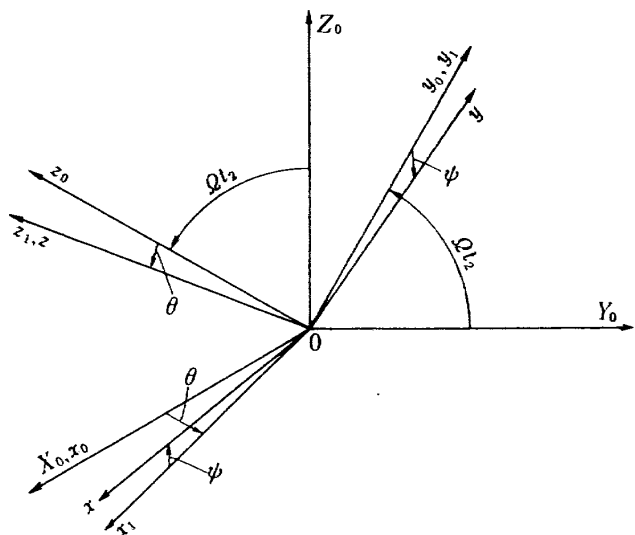
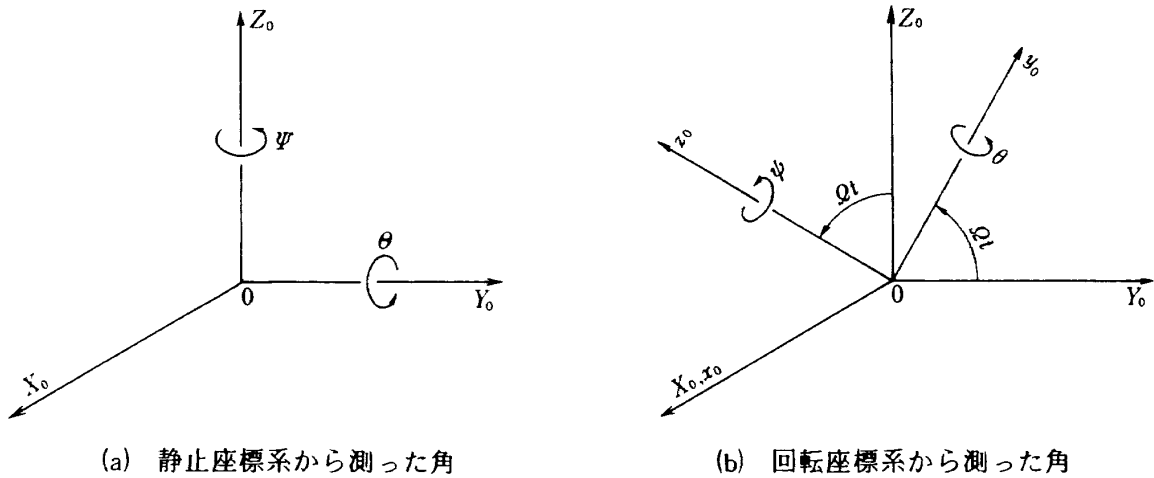


図4 回転の系列(ii)



(a) 静止座標系から測った角

(b) 回転座標系から測った角

図5 微小な首振り角

致し、また  $t_2=0$  のとき  $x_0 y_0 z_0$  は  $X_0 Y_0 Z_0$  に一致していたと考えている。角  $\theta, \psi; \theta, \psi$  は微小であると考えてよい。2次以上の微小量を省略すれば、 $XYZ$  は回転  $\theta$  と  $\psi$  の順序に関係せず、また  $xyz$  は  $\theta$  と  $\psi$  の順序に関係しない。このとき、 $\theta$  と  $\psi$  は共に静止座標系  $X_0 Y_0 Z_0$  から測ったロータの首振り角であり、また  $\theta$  と  $\psi$  は共に回転座標系  $x_0 y_0 z_0$  から測った首振り角であると考えることができる。さらに、付録Aに示すように、 $\Omega t_1 = \Omega t_2 = \Omega t$  とすることができる(図5)。

ラグランジュの運動方程式の一般座標として  $\theta$  と  $\psi$  を選ぶことができるし、また  $\theta$  と  $\psi$  を選ぶこともできる。上に述べた意味において、 $\theta$  と  $\psi$  に関する運動方程式を静止座標系による運動方程式、また  $\theta$  と  $\psi$  に関するものを回転座標系による運動方程式と呼ぶことにする。付録Aに示すように、静止座標系による運動方程式は

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} (I_y + I_z) - \frac{1}{2} (I_z - I_y) \cos 2\Omega t \right\} \ddot{\theta} \\ & + (I_z - I_y) (\sin 2\Omega t) \Omega \dot{\theta} + S_\theta \theta \\ & - \frac{1}{2} (I_z - I_y) (\sin 2\Omega t) \ddot{\psi} \\ & + \left\{ I_x - (I_z - I_y) \cos 2\Omega t \right\} \Omega \dot{\psi} = Q_\theta \\ & - \frac{1}{2} (I_z - I_y) (\sin 2\Omega t) \ddot{\theta} \\ & - \left\{ I_x + (I_z - I_y) \cos 2\Omega t \right\} \Omega \dot{\theta} \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} & + \left\{ \frac{1}{2} (I_y + I_z) + \frac{1}{2} (I_z - I_y) \cos 2\Omega t \right\} \ddot{\psi} \\ & - (I_z - I_y) (\sin 2\Omega t) \Omega \dot{\psi} + S_\psi \psi = Q_\psi \end{aligned} \quad (1b)$$

のように導かれ、また回転座標系による運動方程式は

$$\begin{aligned} & I_y \ddot{\theta} + \left\{ (I_x - I_z) \Omega^2 + \frac{1}{2} (S_\theta + S_\psi) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (S_\theta + S_\psi) \cos 2\Omega t \right\} \theta \\ & - (I_y + I_z - I_x) \Omega \dot{\psi} - \frac{1}{2} (S_\theta - S_\psi) \\ & \cdot (\sin 2\Omega t) \psi = Q_\theta \\ & (I_y + I_z - I_x) \Omega \dot{\theta} - \frac{1}{2} (S_\theta - S_\psi) (\sin 2\Omega t) \theta \\ & + I_z \ddot{\psi} + \left\{ (I_x - I_y) \Omega^2 + \frac{1}{2} (S_\theta + S_\psi) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (S_\theta - S_\psi) \cos 2\Omega t \right\} \psi = Q_\psi \end{aligned} \quad (2a)$$

となる。ここで  $I_x, I_y, I_z$  は、回転軸まで含めたロータの、それぞれ  $x, y, z$  軸に関する慣性モーメントであり、また  $S_\theta, S_\psi$  はそれぞれ首振り角  $\theta, \psi$  に比例する復元モーメントを生ずるばねのばね定数である。( ) は  $t$  による微分を表わす。  $Q_\theta, Q_\psi$  および  $Q_\theta, Q_\psi$  は、ブレードに作用する空気力学的な力に起因する一般力であって、空気力学的一般力あるいは一般空気力と呼ぶことができる。

空気力学的な力として、付録Bに示すように準定

常翼素理論による揚力を用いると、一般空気力はつぎのように表わされる。ただしブレードの軸は回転軸に垂直であるとする。

$$\begin{aligned}
 Q_{\theta} = & -\frac{1}{2} \rho Q^2 R^4 c_0 a \left[ \left\{ e^2 v^2 B_1 + B_3 \right. \right. \\
 & + (e^2 v^2 B_1 - B_3) \cos 2\Omega t \\
 & \left. \left. - 2evB_2 \sin 2\Omega t \right\} \frac{1}{Q} \dot{\theta} \right. \\
 & + v^2 \left\{ evB_1 (1 + \cos 2\Omega t) - B_2 \sin 2\Omega t \right\} \theta \\
 & + \left\{ 2evB_2 \cos 2\Omega t + (e^2 v^2 B_1 - B_3) \right. \\
 & \left. \cdot \sin 2\Omega t \right\} \frac{1}{Q} \dot{\psi} - v^2 \left\{ B_2 (1 - \cos 2\Omega t) \right. \\
 & \left. - evB_1 \sin 2\Omega t \right\} \psi \left. \right] \quad (3a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\psi} = & -\frac{1}{2} \rho Q^2 R^4 c_0 a \left[ \left\{ 2evB_2 \cos 2\Omega t \right. \right. \\
 & + (e^2 v^2 B_1 - B_3) \sin 2\Omega t \left. \right\} \frac{1}{Q} \dot{\theta} \\
 & + v^2 \left\{ B_2 (1 + \cos 2\Omega t) + evB_1 \sin 2\Omega t \right\} \theta \\
 & + \left\{ e^2 v^2 B_1 + B_3 - (e^2 v^2 B_1 - B_3) \cos 2\Omega t \right. \\
 & \left. + 2evB_2 \sin 2\Omega t \right\} \frac{1}{Q} \dot{\psi} \\
 & + v^2 \left\{ evB_1 (1 - \cos 2\Omega t) \right. \\
 & \left. + B_2 \sin 2\Omega t \right\} \psi \left. \right] \quad (3b)
 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
 Q_{\theta} = & -\rho Q^2 R^4 c_0 a ev \left\{ evB_1 \frac{1}{Q} \dot{\theta} \right. \\
 & \left. + (v^2 B_1 + B_2) \theta + B_2 \frac{1}{Q} \dot{\psi} - evB_1 \psi \right\} \quad (4a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\psi} = & -\rho Q^2 R^4 c_0 a \left\{ evB_2 \frac{1}{Q} \dot{\theta} \right. \\
 & \left. + (v^2 B_2 + B_3) \theta + B_3 \frac{1}{Q} \dot{\psi} - evB_2 \psi \right\} \quad (4b)
 \end{aligned}$$

ここで  $\rho$  は空気密度、 $R$  はロータの半径、 $c_0$  はブレードの基準翼弦長、 $a$  はブレードの断面揚力傾斜で、半径方向に一定であるとする。また  $x_B$  をブレードの軸の  $x$  座標、 $V$  を風速として

$$e = \frac{x_B}{R}, \quad v = \frac{V}{QR} \quad (5)$$

である。 $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  は

$$\left. \begin{aligned}
 B_1 &= \int_0^1 \left( \frac{c}{c_0} \right) \frac{d\eta}{\sqrt{v^2 + \eta^2}} \\
 B_2 &= \int_0^1 \left( \frac{c}{c_0} \right) \frac{\eta^2}{\sqrt{v^2 + \eta^2}} d\eta \\
 B_3 &= \int_0^1 \left( \frac{c}{c_0} \right) \frac{\eta^4}{\sqrt{v^2 + \eta^2}} d\eta
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

で定義される定数で、 $c$  はブレードの断面翼弦長、 $\eta = |y|/R$  である。式(5)において  $V$  は、風下型ロータの場合、すなわち風が正の  $X_0$  軸の向きである場合に  $V > 0$  であり、また風上型ロータの場合すなわち風が負の  $X_0$  軸の向きである場合に  $V < 0$  であるとする。このように風下型と風上型のちがいを単に  $V$  の正負によって表現することができることは興味深い(付録B参照)。

式(1)–(4)において見られるように、静止座標系では慣性項と空気力項の係数が時間の周期関数となる。これに反して回転座標系では剛性項の係数が周期関数となる。

安定性の議論を行うには、方程式を無次元化してパラメタを整理しておくのが便利である。このため

$$\left. \begin{aligned}
 I_m &= \frac{1}{2} (I_y + I_z), \quad \Delta I = \frac{1}{2} (I_z - I_y) \\
 S_m &= \frac{1}{2} (S_{\theta} + S_{\psi}), \quad \Delta S = \frac{1}{2} (S_{\theta} - S_{\psi}) \\
 \delta &= \frac{\Delta I}{I_m}, \quad \kappa = \frac{I_x}{I_m} \\
 \omega_m^2 &= \frac{S_m}{I_m}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta S}{S_m} \\
 p_m &= \frac{\omega_m}{Q}, \quad \tau = Q t \\
 r &= \frac{\rho R^4 c_0 a}{I_m}
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とおき、 $\tau$  による微分を  $()'$  で表わす。そうすると、静止座標系による無次元化した運動方程式は、式(1)、(3)から

$$\begin{aligned}
 (1 - \delta \cos 2\tau) \theta'' + & \left\{ \frac{1}{2} r (e^2 v^2 B_1 + B_3) \right. \\
 & + \frac{1}{2} r (e^2 v^2 B_1 - B_3) \cos 2\tau \\
 & \left. + (2\delta - revB_2) \sin 2\tau \right\} \theta' \\
 & + \left\{ p_m^2 (1 + \varepsilon) + \frac{1}{2} rev^3 B_1 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} r v^2 (e v B_1 \cos 2\tau - B_2 \sin 2\tau) \} \theta \\
& - \delta (\sin 2\tau) \psi'' \\
& + \left\{ \kappa - (2\delta - r e v B_2) \cos 2\tau \right. \\
& + \frac{1}{2} r (e^2 v^2 B_1 - B_3) \sin 2\tau \} \psi' \\
& - \frac{1}{2} r v^2 (B_2 - B_2 \cos 2\tau \\
& - e v B_1 \sin 2\tau) \psi = 0 \quad (10a) \\
& - \delta (\sin 2\tau) \theta'' + \left\{ -\kappa - (2\delta - r e v B_2) \cos 2\tau \right. \\
& + \frac{1}{2} r (e^2 v^2 B_1 - B_3) \sin 2\tau \} \theta' \\
& + \frac{1}{2} r v^2 (B_2 + B_2 \cos 2\tau + e v B_1 \sin 2\tau) \theta \\
& + (1 + \delta \cos 2\tau) \psi'' \\
& + \left\{ \frac{1}{2} r (e^2 v^2 B_1 + B_3) \right. \\
& - \frac{1}{2} r (e^2 v^2 B_1 - B_3) \cos 2\tau \\
& - (2\delta - r e v B_2) \sin 2\tau \} \psi' \\
& + \left\{ p_m^2 (1 - \varepsilon) + \frac{1}{2} r e v^3 B_1 \right. \\
& - \frac{1}{2} r v^2 (e v B_1 \cos 2\tau - B_2 \sin 2\tau) \} \psi = 0 \quad (10b)
\end{aligned}$$

となる。また回転座標系による無次元化した運動方程式は、式(2), (4)から

$$\begin{aligned}
& (1 - \delta) \theta'' + r e^2 v^2 B_1 \theta' + \left\{ p_m^2 - (1 + \delta) + \kappa \right. \\
& + r e v (v^2 B_1 + B_2) + p_m^2 \varepsilon \cos 2\tau \} \theta \\
& - (2 - \kappa - r e v B_2) \psi' - (r e^2 v^2 B_1 \\
& + p_m^2 \varepsilon \sin 2\tau) \psi = 0 \quad (11a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2 - \kappa + r e v B_2) \theta' + \left\{ r (v^2 B_2 + B_3) \right. \\
& - p_m^2 \varepsilon \sin 2\tau \} \theta + (1 + \delta) \psi'' + r B_3 \psi' \\
& + \left\{ p_m^2 - (1 - \delta) + \kappa - r e v B_2 \right. \\
& - p_m^2 \varepsilon \cos 2\tau \} \psi = 0 \quad (11b)
\end{aligned}$$

となる。

### 3. 等方的なロータ

#### 3.1 等価な等方ロータ

はじめにロータが等方的な場合の安定性の考察を、静止座標系による運動方程式を用いて行ってみよう。以下では等方的なロータ、非等方的なロータを簡単に等方ロータ、非等方ロータと呼ぶ。まず、与えられた非等方ロータと等価な等方ロータの概念を導入する。これは後に非等方ロータと等方ロータの比較を行う場合に便利な概念である。

ブレード数が2枚の非等方ロータが与えられたとき、これに対してブレード数が4枚の仮想のロータを考える。この仮想のロータにおいては、ブレードの質量および空気力学的な力の半径方向分布が、もとの非等方ロータのその半分に等しいとし、このロータを等価な等方ロータと呼ぶことにする。空気力学的な力は、ブレードが同じ方位角で、同じ首振り運動をしているときについて比較すべきであることは言うまでもないであろう。

等価な等方ロータでは、まず質量に関するパラメータは、 $I_y = I_z$ であるから  $\Delta I = 0$  であって、 $I_x$  と  $I_m$  はもとの非等方ロータのそれに等しい。したがって  $\delta = 0$  であって、 $\kappa$  はもとのロータのそれに等しい。一般空気力についてはつぎのように考える。等価な等方ロータは、二つの非等方ロータの重ね合わせと考えることができる。第一の非等方ロータは、もとの非等方ロータと同じ方位角で、第二のそれはもとのロータより方位角が  $90^\circ$  小さいとする。このとき、一般空気力への第一のロータの寄与はもとのロータの半分である。第二のロータにおいては、初等的な考察によって、第一のロータにおける首振り角  $\theta$ 、 $\psi$  と同じ役割をするのは、それぞれ  $-\psi$ 、 $\theta$  である。また第二のロータによる  $Y_0$  軸および  $Z_0$  軸に関するモーメントは、それぞれ第一のロータの  $Z_0$  軸および負の  $Y_0$  軸に関するモーメントに対応する。以上によって、等価な等方ロータの一般空気力  $Q_\theta^*$ 、 $Q_\psi^*$  は

$$\left. \begin{aligned}
Q_\theta^* &= \frac{1}{2} \left\{ Q_\theta(\theta, \psi) + Q_\psi(-\psi, \theta) \right\} \\
Q_\psi^* &= \frac{1}{2} \left\{ Q_\psi(\theta, \psi) - Q_\theta(-\psi, \theta) \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (12)$$

のように表わされる。ここで  $Q_\theta(\theta, \psi)$ ,  $Q_\psi(\theta, \psi)$  は式(3)で与えられる  $Q_\theta$ ,  $Q_\psi$  に等しく、また  $Q_\theta(-\psi, \theta)$ ,  $Q_\psi(-\psi, \theta)$  は、式(3)において  $\theta$ ,  $\psi$  をそれぞれ  $-\psi$ ,  $\theta$  で置き換えた  $Q_\theta$ ,  $Q_\psi$  を表わすものとする。

式(10)の静止座標系による運動方程式において、非等方ロータを等価な等方ロータで置き換えると、簡単な定数係数の運動方程式

$$\theta'' + \frac{1}{2} r (e^2 v^2 B_1 + B_3) \theta' + \left\{ p_m^2 (1 + \varepsilon) + \frac{1}{2} r e v^3 B_1 \right\} \theta + \kappa \psi' - \frac{1}{2} r v^2 B_2 \psi = 0 \quad (13a)$$

$$-\kappa \theta' + \frac{1}{2} r v^2 B_2 \theta + \psi'' + \frac{1}{2} r (e^2 v^2 B_1 + B_3) \psi' + \left\{ p_m^2 (1 - \varepsilon) + \frac{1}{2} r e v^3 B_1 \right\} \psi = 0 \quad (13b)$$

が得られる。式(13)は、式(10)において周期係数の項のみを落とした形になっている。式(13)に含まれるパラメータはすべてもとの非等方ロータのそれに等しい。

### 3.2 Routh の安定規準

式(13)のような定数係数の線形齊次微分方程式で記述される系の安定性は、よく知られた方法で調べることができる<sup>7)</sup>。式(13)の解は

$$\theta = \bar{\theta} e^{\lambda t}, \quad \psi = \bar{\psi} e^{\lambda t} \quad (14)$$

の形に書かれる。 $\lambda$  の実部が負のとき解は安定、正のとき不安定である。 $\lambda$  は、 $\bar{\theta} = \bar{\psi} = 0$  以外の解が存在するための条件として得られる固有方程式

$$q_0 \lambda^4 + q_1 \lambda^3 + q_2 \lambda^2 + q_3 \lambda + q_4 = 0 \quad (15)$$

の根である。ここで

$$\begin{aligned} q_0 &= 1 \\ q_1 &= r (e^2 v^2 B_1 + B_3) \\ q_2 &= 2 p_m^2 + r e v^3 B_1 \\ &\quad + \frac{1}{4} r^2 (e^2 v^2 B_1 + B_3)^2 + \kappa^2 \\ q_3 &= r (e^2 v^2 B_1 + B_3) (p_m^2 + \frac{1}{2} r e v^3 B_1) \\ &\quad - \kappa r v^2 B_2 \\ q_4 &= (p_m^2 + \frac{1}{2} r e v^3 B_1)^2 \\ &\quad - p_m^4 \varepsilon^2 + \frac{1}{4} r^2 v^4 B_2^2 \end{aligned} \quad (16)$$

である。

式(15)のすべての根が負の実部を持つための必要かつ十分な条件は Routh の安定規準<sup>7),8)</sup> として知られている。この条件は、 $q_0 > 0$  となるように式(15)を書いたとき、他のすべての係数  $q_1, q_2, q_3, q_4$  および試験行列式

$$T \equiv \begin{vmatrix} q_1 & q_0 & 0 \\ q_3 & q_2 & q_1 \\ 0 & q_4 & q_3 \end{vmatrix} = q_1 q_2 q_3 - q_1^2 q_4 - q_0 q_3^2 \quad (17)$$

が正であることである。式(16)から、 $q_0, q_1$  はつねに正である。風下型ロータでは  $v > 0$  であるから、 $q_2$  と  $q_4$  もつねに正である。 $q_4$  においては、後述するように  $\varepsilon^2 \leq 1$  であるからである。 $q_3$  と、風上型ロータ ( $v < 0$ ) の場合の  $q_2$  と  $q_4$  は、含まれるパラメータの値によっては負となる可能性があるであろう。

いま、パラメータ  $p_m^2$  を変化させて、系が安定な状態から不安定な状態に移る境目、すなわち安定限界を見出すことを考えてみよう。 $p_m^2$  の変化は、 $\varepsilon$  を一定に保つての  $S_m$  の変化と考えるもよいし、あるいは  $V/\Omega$  を一定に保つての  $\Omega$  の変化と考えるもよい。 $p_m^2$  の値が十分大きいとき、系は安定であろう。このとき  $q_2, q_3, q_4$  および  $T$  は正である。 $p_m^2$  を小さくしてゆくと、これらのうちのどれがいちばん早く負になるであろうか。式(16)から、 $q_2 = 0$  のとき  $2 p_m^2 + r e v^3 B_1 < 0$  であるから  $q_3 < 0$  である。すなわち  $q_3$  は  $q_2$  より早く負になる。つぎに式(17)から、 $q_3 = 0$  のとき  $q_4$  と  $T$  のどちらかが負である。すなわち、 $q_4$  と  $T$  のどちらかが  $q_4$  より早く負になる。以上によって、安定から不安定への移行は、 $q_4$  と  $T$  のどちらかが負になるとき起こることがわかる。

### 3.3 第一種のダイバージェンス

$q_4$  が負になるときの不安定は、 $\lambda$  が正の実数である静的な不安定、すなわちある種のダイバージェンスである<sup>7)</sup>。これは、 $q_4 = 0$  のとき、式(15)が  $\lambda = 0$  なる根を持つことからただちにわかる。

$q_4$  は  $p_m^2$  に関する 2 次式であるから

$$q_4 = a_0 p_m^4 + a_1 p_m^2 + a_2 \quad (18)$$

と書くと



$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 - \varepsilon^2 \\ a_1 &= r e v^3 B_1 \\ a_2 &= \frac{1}{4} r^2 v^4 (e^2 v^2 B_1^2 + B_2^2) \end{aligned} \right\} (19)$$

である。式(7)において、 $S_\theta > 0$ とし、また風下型では  $S_\psi \geq 0$ 、風上型では  $S_\psi > 0$  であるとする。そうすると、風下型では  $-1 < \varepsilon \leq 1$ 、風上型では  $-1 < \varepsilon < 1$  である。したがって、風下型 ( $v > 0$ ) では  $a_0 \geq 0$ 、 $a_1 > 0$ 、 $a_2 > 0$  であり、風上型 ( $v < 0$ ) では  $a_0 > 0$ 、 $a_1 < 0$ 、 $a_2 > 0$  である。

まず風上型ロータの場合の安定限界を求めてみよう。 $q_4 < 0$  となるのは  $D_2 < p_m^2 < D_1$  のときであって、

$$D_1, D_2 = \frac{r v^2}{2(1 - \varepsilon^2)} \left\{ -e v B_1 \pm \sqrt{\varepsilon^2 (e^2 v^2 B_1^2 + B_2^2) - B_2^2} \right\} (20)$$

である。複号は  $D_1$  に対して正号、 $D_2$  に対して負号であって、また根号の内部が正であること、すなわち

$$\varepsilon^2 > \frac{B_2^2}{e^2 v^2 B_1^2 + B_2^2} (21)$$

であることが必要である。 $p_m^2 = D_1$  のとき  $T > 0$  ならば、既に行った議論によって、 $D_1$  はこのダイバージェンスの限界であって、 $p_m^2$  が減少して  $D_1$  を通過するとき安定から不安定に移行する。 $D_2$  については、 $p_m^2 = D_2$  のとき  $T > 0$  であれば、 $D_2$  もやはりダイバージェンスの限界であって、 $p_m^2$  が減少して  $D_2$  を通過するとき不安定から安定に移行する。 $p_m^2 = D_1$  あるいは  $p_m^2 = D_2$  のとき  $T < 0$  ならば、 $D_1$  あるいは  $D_2$  はダイバージェンスの限界であることもあり、またそうでないこともあり得る。これを判定するにはさらに立ち入った検討が必要である。明らかなことは、 $D_1, D_2$  以外にこのダイバージェンスの限界は存在しないということである。

$\lambda = 0$  のとき、式(13)の  $\tau$  による微分の項は落ちて、剛性項と静的空気力の項のみとなる。したがって、このダイバージェンスは、空気力のモーメントが支持構造の剛性による復元モーメントに打ち勝つために起こる、通常の意味のダイバージェンスである。後述する別種のダイバージェンスと区別するため、これを第一種のダイバージェンスと呼ぶことにする。文献9)では、これに相当する不安定をワール・ダ

イバージェンス (whirl divergence) と呼んでいる。しかし、 $\bar{\theta}$  と  $\bar{\psi}$  の比は、 $\lambda > 0$  のときでも式(13)から決まる一定値をとるのであって、少くとも線形性が保たれる範囲内ではハブは回転することはないから、ワール・ダイバージェンスの呼び名は適当でないと思われる。また文献3)でもダイバージェンスに言及しているが、文献9)も指摘しているように、これは式(13)において連成項のない場合のものを指していると思われるので注意を要する。

$D_1, D_2$  がともに  $p_m^2$  に関する第一種のダイバージェンスの限界であるとき、 $D_2 < p_m^2 < D_1$  の不安定範囲は、式(8)を用いると

$$I_m \Omega^2 D_2 < S_m < I_m \Omega^2 D_1 (22a)$$

あるいは

$$\frac{S_m}{I_m D_1} < \Omega^2 < \frac{S_m}{I_m D_2} (22b)$$

のように書き直される。式(22a)は、 $\varepsilon =$ 一定の条件の下での  $S_m$  に関する不安定範囲を、また式(22b)は  $V/\Omega =$ 一定の条件の下での  $\Omega^2$  に関する不安定範囲を示す。

式(22)の条件は、はなはだ興味深い。これは支持構造の剛性が、ある程度以上等方に近いとき、第一種のダイバージェンスが起り得ないことを表わしている。これには式(16)の  $q_4$  の第3項が寄与しており、したがって式(13)の運動方程式における空気力学的剛性の連成項の係数が互に異符号であることに関連していることがわかる。

最後に風下型ロータでは、式(18)の係数が正か、正または零であるから、つねに  $q_4 > 0$  であって、第一種のダイバージェンスは起こらない。この結果は直観的な予想と一致する。

### 3.4 ワール・フラッタ

$T$  が負になるときの不安定は、 $\lambda$  が正の実部を持つ複素数であるから、動的な不安定すなわちある種のフラッタである。式(15)の  $\lambda$  に純虚数  $i\mu$  を代入し、実部と虚部に分けると二つの方程式が得られ、 $T$  はこの二つの方程式から  $\mu$  を消去した式の左辺、すなわち二つの方程式の終結式になっている。すなわち  $\lambda$  が純虚数のとき、 $T = 0$  である。

式(16)、(17)から

$$\frac{T}{q_1^2} = b_0 p_m^4 + b_1 p_m^2 + b_2 \quad (23)$$

と書くことができ

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \epsilon^2 \\ b_1 &= \frac{r^2}{4} (e^2 v^2 B_1 + B_3)^2 + \kappa^2 \\ b_2 &= b_1 \left( \frac{1}{2} r e v^3 B_1 - \kappa r - r^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここで

$$r = \frac{v^2 B_2}{e^2 v^2 B_1 + B_3} \quad (25)$$

である。 $b_0, b_1$ はつねに正、 $b_2$ は風上型ではつねに負であるが、風下型では正になることもあるであろう。

$T < 0$ となる $p_m^2$ の範囲を求めてみよう。明らかに $b_2 < 0$ 、すなわち

$$\kappa r + r^2 > \frac{1}{2} r e v^3 B_1 \quad (26)$$

であることが必要である。式(26)が満たされるとき、 $T < 0$ となるのは $p_m^2 < F_1$ のときであって、

$$F_1 = \frac{2F_0}{1 + \sqrt{1 + 4\epsilon^2 F_0 \{ (\tau^2/4)(e^2 v^2 B_1 + B_3)^2 + \kappa^2 \}^{-1}}} \quad (27)$$

ここで

$$\begin{aligned} F_0 &= F_1|_{\epsilon=0} \\ &= \kappa r + r^2 - \frac{1}{2} r e v^3 B_1 \end{aligned} \quad (28)$$

である。 $p_m^2 = F_1$ のとき $q_4 > 0$ ならば、 $F_1$ はこのフラッタの限界であって、 $p_m^2$ が減少して $F_1$ を通過するとき安定から不安定に移行する。 $p_m^2 = F_1$ のとき $q_4 < 0$ ならば、 $F_1$ をフラッタの限界と断定することはできない。しかし、このフラッタの限界が存在すれば、それは $F_1$ で与えられる。

Houboltたち<sup>3)</sup>は、プロペラの場合すなわち風上型に相当する場合についてこのフラッタを研究し、ワール・フラッタ (whirl flutter) と名付けた。ワール・フラッタにおいては、ハブはロータの回転方向と逆向きに旋回する<sup>3)</sup>。式(27), (28)は、式(23)の条件が満たされれば、風下型ロータでもワール・フラッタが起こることを示している(風下型ではつねに $q_4 > 0$ である)。さらに、風上型と風下型とでは式(23)の最右辺の第3項の符号のみが異なる。したがって、

$\epsilon = 0$ のときすなわち支持構造の剛性が等方的であるときには、風上型が風下型よりも不安定範囲が大きい。

$F_1$ が $p_m^2$ に関するワール・フラッタの限界であるとき、 $p_m^2 < F_1$ の不安定範囲は

$$S_m < I_m Q^2 F_1 \quad (29)$$

あるいは

$$Q_2 > \frac{S_m}{I_m F_1} \quad (30)$$

のように書き直される。

式(27)から、 $\epsilon^2$ が小さいほど、すなわち支持構造の剛性が等方に近いほど、ワール・フラッタの不安定範囲が大きいことがわかる。これは、文献3)の風上型ロータについての計算例によって得られた結果を裏付けているばかりでなく、風下型でも同様であることを示すものである。文献3)の計算例はまた、 $\epsilon = 0$ のとき、ロータの張り出し(ピヴォットとハブの距離)が小さいほど不安定範囲が大きいことを示している。式(25), (26)によれば、風上型ロータでは、張り出しを表わすパラメタ $e$ の $r$ への影響がこれに寄与していることがわかる。さらに風下型ロータでは、式(26)の第3項もこれを助長する方向に作用する。式(25)の $r$ は、式(13)の運動方程式における空気学的剛性の連成項の係数の絶対値と、空気学的減衰の直接項の係数との比になっている。空気学的剛性の連成項の係数が、第一種のダイバージェンスでは不安定範囲をせばめる作用をしたのに反し、ワール・フラッタでは不安定に対して本質的な寄与をすることは興味深いことである。

## 4. 等方的な支持構造

### 4.1 固有方程式

運動方程式の係数が定数となるもう一つの場合は、支持構造の剛性が等方的、すなわち $\epsilon = 0$ の場合である。式(11)の回転座標系による運動方程式において、 $\epsilon = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \theta'' + r e^2 v^2 B_1 \theta' \\ + \{ p_m^2 - (1 + \delta) + \kappa + r e v (v^2 B_1 + B_2) \} \theta \\ - (2 - \kappa - r e v B_2) \psi' - r e^2 v^2 B_1 \psi = 0 \end{aligned} \quad (31a)$$

$$\begin{aligned}
& (2-\kappa+revB_2)\theta' + r(v^2B_2+B_3)\theta \\
& + (1+\delta)\psi'' + rB_3\psi' \\
& + \{p_m^2 - (1-\delta) + \kappa - revB_2\}\psi = 0
\end{aligned} \quad (31b)$$

となる。式(31)の解を

$$\theta = \bar{\theta} e^{\lambda r}, \quad \psi = \bar{\psi} e^{\lambda r} \quad (32)$$

と書いて、固有方程式

$$q_0'\lambda^4 + q_1'\lambda^3 + q_2'\lambda^2 + q_3'\lambda + q_4' = 0 \quad (33)$$

を作ると

$$\left. \begin{aligned}
q_0' &= 1 - \delta^2 \\
q_1' &= r \{ (1+\delta)e^2v^2B_1 + (1-\delta)B_3 \\
q_2' &= 2p_m^2 + \frac{1}{2} \{ (2-\kappa)^2 + \kappa^2 - 4\delta^2 \} \\
& + rev \{ (1+\delta)v^2B_1 + 2\delta B_2 \} \\
& + (rev)^2 (B_1B_3 - B_2^2) \\
q_3' &= r \{ (e^2v^2B_1 + B_3)p_m^2 + (1+\delta)e^2v^2B_1 \\
& + (1-\delta)B_3 + (2-\kappa)v^2B_2 \\
& + rev^3 (B_1B_3 - B_2^2) \} \\
q_4' &= (p_m^2 + \kappa - 1)^2 + rev^3 B_1 (p_m^2 + \kappa - 1) \\
& - \delta^2 + \delta rev (v^2B_1 + 2B_2) \\
& + (rev)^2 (B_1B_3 - B_2^2)
\end{aligned} \right\} \quad (34)$$

である。

係数  $q_0'$ ,  $q_1'$ , ...,  $q_4'$  の正負を見てみよう。そのため、これに含まれる項  $\delta$ ,  $1-\delta$ ,  $2-\kappa$ ,  $\kappa^2 - 4\delta^2$ ,  $B_1B_3 - B_2^2$  の正負をまず調べておく。 $\delta$ ,  $\kappa$  に含まれる慣性モーメントは、回転軸まで含めたロータの質量要素を  $dm$  として

$$\left. \begin{aligned}
I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\
I_y &= \int (x^2 + z^2) dm \\
I_z &= \int (x^2 + y^2) dm
\end{aligned} \right\} \quad (35)$$

で定義される。図 2, 式(7), (8), (35)によって,  $0 < \Delta I < I_m$ ,  $2\Delta I < I_x < 2I_m$ , すなわち  $0 < \delta < 1$ ,  $2\delta < \kappa < 2$  であることがわかる。したがって  $\delta$ ,  $1-\delta$ ,  $2-\kappa$ ,  $\kappa^2 - 4\delta^2$  はいずれも正である。つぎに式(6)の積分にシュワルツの不等式<sup>10)</sup>を適用すると  $B_1B_3 - B_2^2 > 0$  であることがわかる。以上によって,  $q_0'$ ,  $q_1'$  はつねに正である。風下型ロータでは  $q_2'$ ,  $q_3'$  もつねに正である。 $q_4'$  と, 風上型ロータの場合の  $q_2'$ ,  $q_3'$  は, パラメタの値によっては負となる可能性があ

るであろう。

等方的なロータの場合と同様に, 系が安定な状態から  $p_m^2$  を変化させるときの安定限界の考察を, Routh の安定規準によって行うことにする。風下型ロータでは, はじめて不安定が生ずるのは, 明らかに  $q_4'$  または  $T' = q_1'q_2'q_3' - (q_1')^2q_4' - q_0'(q_3')^2$  が負になるときである。風上型ロータにおいても,  $q_2' = 0$  あるいは  $q_3' = 0$  のとき  $q_4'$  と  $T'$  のどちらかが負でなければならないから, やはり  $q_4'$  または  $T'$  が負となるときはじめて不安定になる。

#### 4.2 第二種のダイバージェンス

$q_4'$  が負になるときの不安定は, 回転座標系から見たダイバージェンスであって, すでに考察した第一種のダイバージェンスとは異なる。これを第二種のダイバージェンスと呼ぶことにする。

$q_4' < 0$  となるのは  $D_4 < p_m^2 < D_3$  のときであって,

$$\begin{aligned}
D_3, D_4 &= 1 - \kappa - \frac{1}{2} rev^3 B_1 \\
& \pm \left[ \delta^2 - \delta rev (v^2 B_1 + 2B_2) \right. \\
& \left. + (rev)^2 \left\{ \frac{1}{4} v^4 B_1^2 - (B_1 B_3 - B_2^2) \right\} \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \quad (36)$$

である。複号は  $D_3$  に対して正号,  $D_4$  に対して負号であって, また角括弧の内部が正であること, すなわち

$$\frac{\delta}{rev} > \frac{1}{2} v^2 B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 (v^2 B_2 + B_3)} \quad (37a)$$

あるいは

$$\frac{\delta}{rev} < \frac{1}{2} v^2 B_1 + B_2 - \sqrt{B_1 (v^2 B_2 + B_3)} \quad (37b)$$

であることが必要である。 $p_m^2 = D_3$  あるいは  $p_m^2 = D_4$  のとき  $T' > 0$  ならば,  $D_3$  あるいは  $D_4$  は第二種のダイバージェンスの限界である。風上型と風下型とでは, 式(36)の右辺の第 3 項の符号と角括弧内の第 2 項の符号が異なるのみである。したがって  $D_3$ ,  $D_4$  が安定限界であるとき, 風上型は風下型にくらべて, 不安定範囲が広く, また不安定範囲の中心も  $p_m^2$  の大きい方にずれることがわかる。

第二種のダイバージェンスは回転座標系から見たダイバージェンスであるから, ハブはロータの回転

速度と同じ速度で同じ方向に旋回する。したがってこの不安定はワール・ダイバージェンスと呼ぶのにはなはだふさわしいと思われるが、既に述べたように第一種のダイバージェンスを誤ってこの名で呼んだ例があり、混乱を生じ易いのでこの呼名は用いないことにする。

既に考察した第一種のダイバージェンスとワール・フラッタでは、いずれも空気力が本質的な役割を演じていることを見た。この事実は、仮想的に空気力が作用しない場合を考えればさらにはっきりわかる。すなわち  $r=0$  の場合を考えると、式(18), (19)から  $q_4 \geq 0$  であることがわかる。また式(16)から  $q_1 = q_3 = 0$  であるから  $T = 0$  である。したがって、空気力が作用しない場合には、第一種のダイバージェンスもワール・フラッタも起こらない。第二種のダイバージェンスではどうであろうか。

$r=0$  のとき

$$1 - \delta - \kappa < p_m^2 < 1 + \delta - \kappa \quad (38)$$

ならば  $q_4 < 0$  となる。また式(34)から、 $q_1' = q_3' = 0$  であるから  $T' = 0$  である。したがって、式(38)の最左辺および最右辺は、それらが正ならば安定限界を与える。実際、式(7), (8)によって  $1 + \delta - \kappa = (I_z - I_x) / I_m$  であって、これは式(35), 図2によって通常正であるといえる。すなわち、空気力が作用しない場合、第二種のダイバージェンスが起こる  $p_m^2$  の範囲が必ず存在することがわかる。この事は、第二種のダイバージェンスでは、空気力は本質的な役割を演じていないことを示している。

式(31a), (31b)から、 $r=0$  のとき、直接剛性項の係数が0となる時が、式(38)の二つの限界に相当することがわかる。すなわち  $p_m^2 = 1 + \delta - \kappa$  および  $p_m^2 = 1 - \delta - \kappa$  の条件は、それぞれ  $y$  軸および  $z$  軸に関する遠心力のモーメントが剛性による復元モーメントに等しくなった状態を表わすと考えられる。このような事情は、曲げ剛性が等方的でない回転軸の自励振動<sup>11)</sup>と似ている。

式(38)を書き直して

$$(I_y - I_x) \Omega^2 < S < (I_z - I_x) \Omega^2 \quad (39a)$$

あるいは

$$\frac{S}{I_z - I_x} < \Omega^2 < \frac{S}{I_y - I_x} \quad (39b)$$

の形とすることができる。支持構造の剛性は等方的であるから  $S_m$  のかわりに  $S$  と書いてある。 $I_y < I_x$  ば、 $S$  に関する不安定範囲に下限はなく、また  $V/\Omega =$ 一定の条件の下での  $\Omega^2$  に関する不安定範囲に上限はないことになる。

式(37)の条件にもどって考えてみよう。式(37a)の右辺はつねに正であるから、風上型ロータはこの条件を満足し得ない。式(37b)の右辺が正ならば風上型ロータはつねにこの条件を満足し、負ならば風下型ロータはこの条件を満足し得ない。式(37b)の右辺が負の場合を考えると、風下型では  $\delta / (rev)$  が式(37a)の右辺より小さいとき、また風上型では  $\delta / (re|v|)$  が式(37b)の右辺の絶対値より小さいとき、 $p_m^2$  の不安定範囲は消えることになる。これはロータの慣性モーメントがある程度以上等方に近いとき、あるいはロータの張り出しがある程度以上大きいとき、第二種のダイバージェンスが起こらないことを表わしており、第一種のダイバージェンスにおける式(21)の条件に対応している。

### 4.3 非等方ロータのワール・フラッタ

$T' \equiv q_1' q_2' q_3' - (q_1')^2 q_4' - q_0' (q_3')^2$  が負になるときの不安定は動的な不安定であって、これはロータが非等方的で支持構造の剛性が等方的な場合のワール・フラッタと呼ぶべき現象であろう。しかし  $T' < 0$  となる  $p_m^2$  の範囲を定める式ははなはだ煩雑になって、それから意味のある結果を引き出すことは困難であるからここには書かない。もちろん数値的に安定限界を求めることは容易であるが、それは本論文の目的ではない。ここでは慣性的にのみ非等方的で、空気力学的には等方的な仮想のロータの場合について考察するに留める。

空気力学的に等価な等方ロータの場合の運動方程式を得るには、3.1節における類似の考えによって、一般空気力を式(4)の  $Q_\theta, Q_\psi$  のかわりに

$$\left. \begin{aligned} Q_\theta^* &= \frac{1}{2} \{ Q_\theta(\theta, \psi) + Q_\psi(-\psi, \theta) \} \\ Q_\psi^* &= \frac{1}{2} \{ Q_\psi(\theta, \psi) - Q_\theta(-\psi, \theta) \} \end{aligned} \right\} (40)$$

で置き換えればよい。そうすると式(31)のかわりに

$$(1 - \delta) \theta'' + \frac{1}{2} \tau (e^2 v^2 B_1 + B_3) \theta'$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ p_m^2 - (1 + \delta) + \kappa + \frac{1}{2} r e v^3 B_1 \right\} \theta \\
 & - (2 - \kappa) \psi' - \frac{1}{2} r (e^2 v^2 B_1 \\
 & + v^2 B_2 + B_3) \psi = 0 \quad (41a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (2 - \kappa) \theta' + \frac{1}{2} r (e^2 v^2 B_1 + v^2 B_2 + B_3) \theta \\
 & + (1 + \delta) \psi'' + \frac{1}{2} r (e^2 v^2 B_1 + B_3) \psi' \\
 & + \left\{ p_m^2 - (1 - \delta) + \kappa + \frac{1}{2} r e v^3 B_1 \right\} \psi = 0 \quad (41b)
 \end{aligned}$$

となる。式(41)は慣性的には非等方的で、空気力学的には等方的なロータの場合の運動方程式であって、 $\delta = 0$  とすれば慣性的にも等方的となる。式(3)と式(41)を比較すると、後者では  $\delta$  の項を除いて、式(41a)と式(41b)の直接項の係数は互に等しく、また連成項の係数は符号のみが異なることがわかる。これは等方的なロータの場合の特徴であって、実は静止座標系による運動方程式の式(13)でも、 $\epsilon$  の項を除いてそうなっている。

式(41)の固有方程式の係数を  $q_0''$ ,  $q_1''$ , ...,  $q_4''$  とすると

$$\left. \begin{aligned}
 q_0'' &= 1 - \delta^2 \\
 q_1'' &= r (e^2 v^2 B_1 + B_3) \\
 q_2'' &= 2 p_m^2 + \frac{1}{2} \left\{ (2 - \kappa)^2 + \kappa^2 - 4 \delta^2 \right\} \\
 & \quad + r e v^3 B_1 + \frac{1}{4} r^2 (e^2 v^2 B_1 + B_3)^2 \\
 q_3'' &= r \left\{ (e^2 v^2 B_1 + B_3) (p_m^2 + 1 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} r e v^3 B_1) + (2 - \kappa) v^2 B_2 \right\} \\
 q_4'' &= (p_m^2 + \kappa - 1 + \frac{1}{2} r e v^3 B_1)^2 - \delta^2 \\
 & \quad + \frac{1}{4} r^2 (e^2 v^2 B_1 + v^2 B_2 + B_3)^2
 \end{aligned} \right\} (42)$$

となる。 $T'' = q_1'' q_2'' q_3'' - (q_1'')^2 q_4'' - q_0'' (q_3'')^2 < 0$  となるのは  $p_m^2 < F_2$  のときであって、

$$F_2 = \frac{2 \{ F_0 - \delta^2 A^{-1} (r^2 + 2r - F_0)^2 \}}{1 + 2 \delta^2 A^{-1} (r^2 + 2r - F_0)} \quad (43)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 4 \delta^2 A^{-1} (r^2 + 2r)}}$$

ここで  $F_0$  は式(8)で与えられ、また  $A$  は

$$A = \frac{1}{4} r^2 (e^2 v^2 B_1 + B_3)^2 + (2 - \kappa)^2 \quad (44)$$

である。 $\delta = 0$  のとき、明らかに  $F_2 = F_0$  となる。これは当然そうでなければならない。

風下型ロータでは、式(43)において  $r^2 + 2r - F_0 = (1/2) r e v^3 B_1 + (2 - \kappa) r > 0$  であって、右辺の分母は 2 より大きい。分子は  $2F_0$  より小さいから、結局  $F_2 < F_0$  であることがわかる。すなわち  $T'' < 0$  となる  $p_m^2$  の範囲は  $\delta = 0$  のときよりも狭い。この結果は、 $T < 0$  となる  $p_m^2$  の範囲が  $\epsilon = 0$  のとき最大になるという 3.4 節の結果に対応している。風上型ロータでは一概に言えない。

空気力学的にも非等方的なロータの場合にも同様の事が言えるであろうか。簡単な計算例に対する数値的検討の結果によると答は否であって、しかも不安定範囲の増大は、風下型でも風上型でもかなり大幅であると思われる。詳細については別の機会に検討することとしたい。

## 5. む す び

水平軸風車によって代表されるような、プロペラ型ロータとその支持構造の連成によって起こり得る空力弾性的不安定現象を、運動方程式の係数が定数になる場合について数式による検討を行い、定性的ではあるが一般性のあるつぎの結果を得た。

(1) 不安定現象としてワール・フラッタ、第一種および第二種のダイバージェンスが起こり得る。

(2) ワール・フラッタと第一種のダイバージェンスでは空気力が本質的な役割を演ずるのに反し、第二種のダイバージェンスでは慣性力が本質的な役割を演ずる。

(3) ワール・フラッタでは支持構造の剛性が小さいか、あるいはロータの回転速度が大きいときに起こるのに反して、第一種および第二種のダイバージェンスは一般に剛性あるいは回転速度のある範囲で起こる。

(4) 等方ロータのワール・フラッタは風下型ロータでも起こり得る。支持構造の剛性が等方的であるとき、不安定範囲は風下型より風上型が大きい。風下型ロータでは、支持構造の剛性が等方的で、ロータが慣性的にのみ非等方的な場合の不安定範囲は、

等方ロータの場合のそれよりも狭い。

(5) 等方ロータの第一種のダイバージェンスは風下型では起こらない。支持構造の剛性が等方に近いとき、このダイバージェンスは起こらない。

(6) 支持構造の剛性が等方的な場合の第二種のダイバージェンスの不安定範囲は、風下型より風上型が大きい。ロータの慣性モーメントが等方に近いとき、あるいはロータの張り出しが大きいとき、このダイバージェンスは起こらない。

数値的検討、および運動方程式が周期係数をもつ場合の考察については本論文では触れなかった。これらは他の機会にゆずる。

### 参 考 文 献

- 1) Chopra, I : Nonlinear Dynamic Response of Wind Turbine Rotors, NASA TM-78324, 1977.
- 2) Warmbrodt, W and Friedmann, P. : Coupled Rotor/Tower Aeroelastic Analysis of Large Horizontal Axis Wind Turbines, AIAA J., Vol.18, No.9, 1980, pp.1118-1124.
- 3) Houbolt, J. C. and Reed, W. H., III : Propeller-Nacelle Whirl Flutter, J. Aerospace Sci., Vol.29, No.3, 1962, pp.333-346.
- 4) Reed, W. H., III and Bland, S. R. : An Analytical Treatment of Aircraft Propeller Precession Instability, NASA TN D-659, 1961.
- 5) O'Neil, P. : Brilliant Detection in Jet-Age Mystery—How a Scientific Team Found Cause of the Electra Crashes, Life, July 25, 1960.
- 6) Ribner, H. S. : Propellers in Yaw, NACA Rep. No.820, 1945.
- 7) Fung, Y. C. : An Introduction to the Theory of Aeroelasticity, Dover Pub., Inc., New York, 1969, pp.201-204.
- 8) Frazer, R. A. and Duncan, W. J. : The Flutter of Aeroplane Wings, ARC R. & M. No. 1155, 1928, pp.32-36.
- 9) Loewy, R. G. : Review of Rotary-Wing V/STOL Dynamic and Aeroelastic Problems, Journal of the American Helicopter Society, Vol.14, No.3, July, 1969, pp.3-23.
- 10) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信 : 数学公式 I, 岩波書店, 1956, p.58.
- 11) Bolotin, V. V. : The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, Inc., 1964, pp.130-132.
- 12) Reissner, E : Boundary Value Problems in Aerodynamics of Lifting Surfaces in Non-Uniform Motion, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol.5, No.9, Sep., 1949, pp.825-850.

付録 A 運動方程式の導出

$X_0Y_0Z_0$  座標系から  $xyz$  座標系への変換を行列の形で

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (A1)$$

と書く。ここで  $\Gamma$  は座標変換の行列である。 $\Gamma$  は座標軸まわりの 3 回の回転の系列で表わされる。いま基本的な回転の行列

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_\xi(\phi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\ \Gamma_\eta(\phi) &= \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \\ \Gamma_\zeta(\phi) &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (A2)$$

を定義すると、図 3 の回転の系列によれば

$$\Gamma = \Gamma_\xi(\Omega t_1) \Gamma_\zeta(\Psi) \Gamma_\eta(\Theta) \quad (A3)$$

と表わされ、また図 4 の回転の系列によれば

$$\Gamma = \Gamma_\zeta(\psi) \Gamma_\eta(\theta) \Gamma_\xi(\Omega t_2) \quad (A4)$$

と表わされる。 $\Theta, \Psi, \theta, \psi \ll 1$  と考えてよいから、2 次以上の微小量を省略すると、式 (A3), (A4) はそれぞれ

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \psi \\ -\psi \cos\Omega t_1 + \theta \sin\Omega t_1 & \cos\Omega t_1 \\ \psi \sin\Omega t_1 + \theta \cos\Omega t_1 & -\sin\Omega t_1 \\ -\theta & \\ \sin\Omega t_1 & \\ \cos\Omega t_1 & \end{bmatrix} \quad (A5)$$

および

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \psi \cos\Omega t_2 + \theta \sin\Omega t_2 \\ -\psi & \cos\Omega t_2 \\ \theta & -\sin\Omega t_2 \\ \psi \sin\Omega t_2 - \theta \cos\Omega t_2 & \\ \sin\Omega t_2 & \\ \cos\Omega t_2 & \end{bmatrix} \quad (A6)$$

となる。式 (A5), (A6) から

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta \cos\Omega t - \psi \sin\Omega t \\ \psi &= \theta \sin\Omega t + \psi \cos\Omega t \end{aligned} \right\} (A7a)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta \cos\Omega t + \psi \sin\Omega t \\ \psi &= -\theta \sin\Omega t + \psi \cos\Omega t \end{aligned} \right\} (A7b)$$

の関係があることがわかる。ここで  $\Omega t_1 = \Omega t_2 = \Omega t$  と書いてある。式 (A7) は図 5 の変換を表わしている。

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, 2) \quad (A8)$$

において、運動のエネルギー  $K$  は

$$K = \frac{1}{2} \{ I_x(\Omega + \omega_x)^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 \} \quad (A9)$$

と書かれる。ここで  $\Omega + \omega_x, \omega_y, \omega_z$  は、ロータの回転軸まわりの回転およびピヴットまわりの首振りに基づく角速度の、 $x, y, z$  方向の成分である。支持構造に貯えられたひずみエネルギー  $U$  は

$$U = \frac{1}{2} (S_\theta \theta^2 + S_\psi \psi^2) \quad (A10)$$

と書かれる。式 (A9) に含まれる  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  の表式は、それぞれ図 3 および図 4 に対応した形で求める。

まず図 3 の回転の系列では

$$\begin{bmatrix} \Omega + \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (A11)$$

と書くことができる。ここで  $A_1$  は方向余弦の行列で、その第 1, 2, 3 列はそれぞれ  $Y_0 (Y_1), Z_1 (Z), X(x)$  軸の  $x, y, z$  軸に対する方向余弦である。 $Y_1$  および  $Z_1$  軸の方向余弦はそれぞれ、回転の行列の積  $\Gamma_\xi(\Omega t_1) \Gamma_\zeta(\Psi)$  の第 2 および第 3 列で与えられるから

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sin\Psi & 0 & 1 \\ \cos\Psi \cos\Omega t_1 & \sin\Omega t_1 & 0 \\ -\cos\Psi \sin\Omega t_1 & \cos\Omega t_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (A12)$$

である。 $\dot{\theta}, \dot{\psi}$  を  $\theta, \psi$  と同じオーダーの 1 次の微小量と考えると、 $\omega_y, \omega_z$  も 1 次の微小量であって、2 次以上の微小量を省略することができる。このとき  $\Omega t_1 = \Omega t$  と書いてよい。 $\omega_x$  は 2 次の微小量とな

るが、式(A9)における $(\Omega + \omega_x)^2$ は $2\Omega\omega_x$ の項を含むから、これを $\omega_y^2$ 、 $\omega_z^2$ に対して省略することはできない。したがって $\omega_x$ は3次以上の微小量を省略する。そうすると

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta}\psi \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cos \Omega t + \dot{\psi} \sin \Omega t \\ \omega_z &= -\dot{\theta} \sin \Omega t + \dot{\psi} \cos \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (A13)$$

となる。

つぎに図4の回転の系列では

$$\begin{bmatrix} \Omega + \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} \Omega \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (A14)$$

と書くことができる。ここで行列 $A_2$ の第1, 2, 3列はそれぞれ $X_0(x_0)$ ,  $y_0(y_1)$ ,  $z_1(z)$ 軸の $x, y, z$ 軸に対する方向余弦である。 $x_0$ および $y_0$ 軸の方向余弦はそれぞれ、 $\Gamma_z(\psi)\Gamma_\eta(\theta)$ の第1および2列で与えられるから

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A15)$$

である。図3の場合と同様の考察によって、 $\omega_x$ は3次以上、 $\omega_y$ と $\omega_z$ は2次以上の微小量を省略すると

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= -\frac{\Omega}{2}(\theta^2 + \psi^2) + \dot{\theta}\psi \\ \omega_y &= -\Omega\psi + \dot{\theta} \\ \omega_z &= \Omega\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (A16)$$

となる。

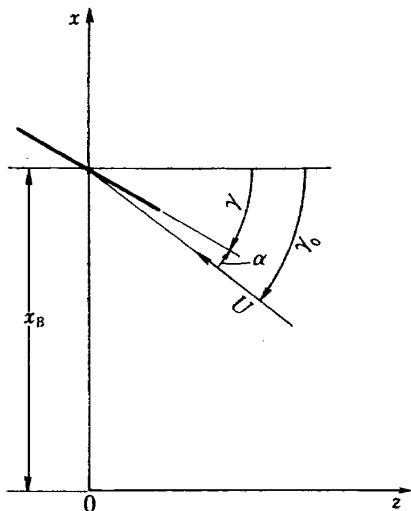
式(A8)の一般座標 $q_i$ として $\theta$ と $\psi$ を選ぶことにすると、式(A9), (A13), (A10)を用いて、静止座標系による運動方程式、式(1)が得られる。また一般座標として $\theta$ と $\psi$ を選ぶ場合には、式(A9), (A16), (A10), (A7a)を用いると、回転座標系による運動方程式、式(2)が得られる。いずれの場合にも、式(A9)の $(\Omega + \omega_x)^2$ に含まれる $\omega_x^2$ の項は省略する。

### 付録B 一般空気力の導出

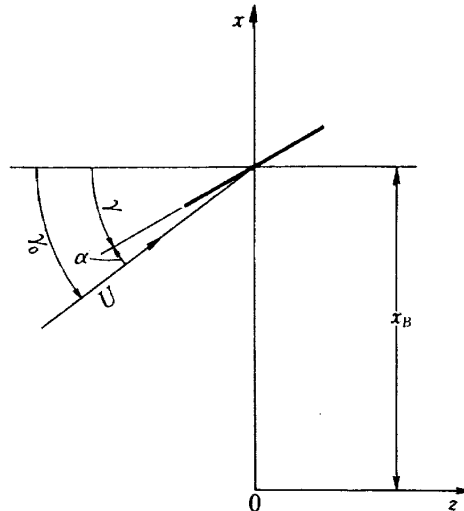
準定常の翼素理論を用いて一般空気力の表式を求める。この理論ではブレードの各断面は、有効迎角の各瞬間値に対応して、それがあたかも定常状態の迎角であるかのような揚力を生ずると考える。断面のモーメントの寄与は小さいので省略する。定常状態すなわち首振りしない状態のブレードの断面を $y$ 軸の負の方向に向かって見ると、風下型では図B1、風上型では図B2のようになる。図B1, B2において $U$ はじょう乱を受けない流れの、ブレード断面に相対的な速度、 $\alpha$ は定常状態の迎え角、 $\gamma$ はブレード断面の取付け角で、これらは $|y|$ の関数である。厚さも反りもないブレード断面を考えると、断面の方程式は

$$\begin{aligned} F(x, y, z) & \\ & \equiv (\text{sgn} V)(x - x_B) \cos \gamma + (\text{sgn} y) z \sin \gamma = 0 \end{aligned} \quad (B1)$$

と書くことができる。ここで風速 $V$ は、風下型のと



(a)  $y > 0$



(b)  $y < 0$

図B1 風下型ロータのブレード断面(定常状態)



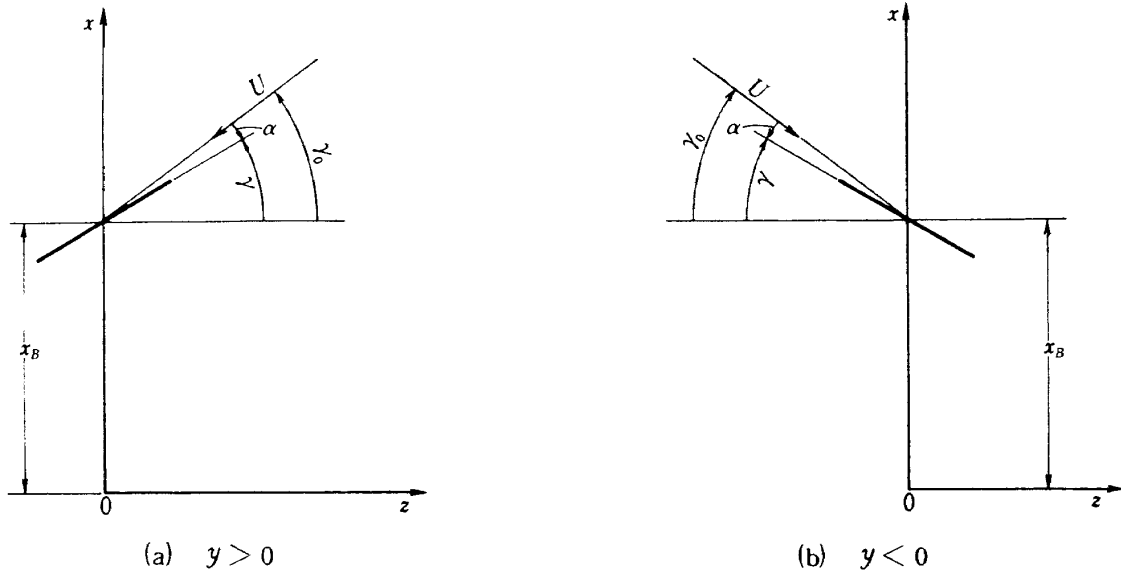


図 B 2 風上型ロータのブレード断面 (定常状態)

き正, 風上型るとき負である。

準定常の翼素理論による断面揚力  $l$  は

$$l = \frac{1}{2} \rho U^2 c_a \alpha_e \quad (B2)$$

で与えられる。ここで  $\alpha_e$  は断面の有効迎角で,

$$\alpha_e = -\frac{w_n|_{z=0}}{U} \quad (B3)$$

のように定義してよいであろう。  $w_n$  はブレード断面によって誘起されるじょう乱流れの断面上の速度の、断面の背面に立つ法線方向の成分である。これはつぎのようにして求められる。

流体粒子の  $X_0Y_0Z_0$  座標系および  $xyz$  座標系に相対的な速度をそれぞれベクトル  $\mathbf{u}$  および  $\mathbf{u}_r$  で表わすと

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (B4)$$

の関係がある。<sup>12)</sup>ここで  $\boldsymbol{\omega}$  は  $xyz$  座標系の角速度のベクトル,  $\mathbf{r}$  は流体粒子の位置ベクトルである。このとき, 流れがブレード断面に接する条件は

$$(\mathbf{u}_r \cdot \nabla F)|_{r=0} \equiv \{(\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla F\}|_{r=0} = 0 \quad (B5)$$

と書かれる。<sup>12)</sup> $\mathbf{u}$  をじょう乱のない流れの速度  $\mathbf{u}_0$  と, じょう乱流れの速度  $\mathbf{u}_i$  とに分けて

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_i \quad (B6)$$

と書くと, 式 (B5) によって

$$w_n|_{z=0} \equiv \left( \mathbf{u}_i \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right) \Big|_{z=0}^{x=x_B}$$

$$= \left\{ (-\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right\} \Big|_{z=0}^{x=x_B} \quad (B7)$$

となる。

式 (B7) の具体的な形を求めてみよう。  $X_0$  軸方向および  $x, y, z$  軸方向の単位ベクトルを  $\mathbf{I}_0$  および  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  と書くと, じょう乱のない流れの速度は,  $X_0$  軸方向の風速  $V$  のみであるから

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= V \mathbf{I}_0 \\ &= V \{ (\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} \} \end{aligned} \quad (B8)$$

である。  $\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{i}, \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{j}, \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{k}$  は式 (A5) あるいは (A6) の行列の第 1 列で与えられるから

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{i} &= 1 \\ \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{j} &= \theta \sin \Omega t - \Psi \cos \Omega t = -\psi \\ \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{k} &= \theta \cos \Omega t + \Psi \sin \Omega t = \theta \end{aligned} \right\} \quad (B9)$$

である。角速度のベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  は

$$\boldsymbol{\omega} = (\Omega + \omega_x) \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad (B10)$$

と書かれる。  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  は式 (A13) あるいは (A16) で与えられるが, ここでは 2 次の微小量を省略して

$$\left. \begin{aligned} \Omega + \omega_x &= \Omega \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cos \Omega t + \dot{\Psi} \sin \Omega t \\ &= \dot{\theta} - \Omega \psi \\ \omega_z &= -\dot{\theta} \sin \Omega t + \dot{\Psi} \cos \Omega t \\ &= \dot{\psi} + \Omega \theta \end{aligned} \right\} \quad (B11)$$

とする。  $\nabla F$  は式 (B1) から

$$\nabla F = (\text{sgn}V)(\cos\tau)\mathbf{i} + (\text{sgn}y)(\sin\tau)\mathbf{k} \quad (\text{B12})$$

となる。このとき明らかに

$$|\nabla F| = 1 \quad (\text{B13})$$

である。定常状態の迎角  $\alpha$  を小さいと考えているので、式 (B12) の  $\cos\tau$ ,  $\sin\tau$  は、図 B1, B2 を参照して

$$\left. \begin{aligned} \cos\tau &= \cos(\tau_0 - \alpha) \\ &\approx \cos\tau_0 + \alpha \sin\tau_0 \\ \sin\tau &= \sin(\tau_0 - \alpha) \\ &\approx \sin\tau_0 - \alpha \cos\tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B14})$$

と書ける。式 (B8) - (B14) によって

$$\begin{aligned} w_n|_{z=0} &= -|V| \cos\tau_0 + \Omega|y| \sin\tau_0 \\ &\quad - \alpha(|V| \sin\tau_0 + \Omega|y| \cos\tau_0) \\ &\quad - (\text{sgn}V)\omega_z y \cos\tau_0 \\ &\quad - (\text{sgn}y)\{V(\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{k}) + \omega_y x_B\} \sin\tau_0 \end{aligned} \quad (\text{B15})$$

が得られる。ただし  $\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{k}$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  は一般座標の選び方に依存するので、このままの形にしておく。

式 (B15) はもう少し簡単な形になる。定常状態の迎え角が 0 で、首振り運動もないとき、じょう乱のない流れが実現されていると考え、このとき式 (B15) において  $w_n|_{z=0} = \alpha = \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{k} = \omega_y = \omega_z = 0$  であるから

$$-|V| \cos\tau_0 + \Omega|y| \sin\tau_0 = 0 \quad (\text{B16})$$

でなければならない。  $0 < \tau_0 < \pi/2$  であるから  $\sin\tau_0 > 0$ ,  $\cos\tau_0 > 0$  であって、式 (B16) が成立するとき

$$\left. \begin{aligned} \sin\tau_0 &= \frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (\Omega y)^2}} \\ \cos\tau_0 &= \frac{\Omega|y|}{\sqrt{V^2 + (\Omega y)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B17})$$

である。このとき式 (B15) の右辺第 3 項の ( ) 内は

$$|V| \sin\tau_0 + \Omega|y| \cos\tau_0 = \sqrt{V^2 + (\Omega y)^2} \quad (\text{B18})$$

となる。さらに定常状態を考えると、式 (B3) において  $\alpha_e = \alpha$ , すなわち  $w_n|_{z=0} = -U\alpha$  であって、かつ  $\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{k} = \omega_y = \omega_z = 0$  であるから、式 (B15), (B18) によって

$$\sqrt{V^2 + (\Omega y)^2} = U \quad (\text{B19})$$

でなければならない。以上によって結局

$$\begin{aligned} w_n|_{z=0} &= -U\alpha \\ &\quad - \frac{(\text{sgn}V)(\text{sgn}y)}{U} \left[ \Omega y^2 \omega_z \right. \\ &\quad \left. + V\{V(\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{k}) + \omega_y x_B\} \right] \end{aligned} \quad (\text{B20})$$

の形となる。

式 (B2), (B3), (B20), (B9), (B11) によって断面揚力が知られる。つぎに為すべきことは断面揚力のなす仮想仕事の表式を求めることである。このため仮想角度変位のベクトル

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\varphi} &= (\delta\theta)\mathbf{j} + (\delta\psi)\mathbf{k} \\ &= (\delta\theta \cos\Omega t + \delta\psi \sin\Omega t)\mathbf{j} \\ &\quad + (-\delta\theta \sin\Omega t + \delta\psi \cos\Omega t)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{B21})$$

を考える。断面揚力も、ブレード断面上の  $x = x_B$ ,  $z = 0$  の点に作用するとしてよいであろう。 $\delta\boldsymbol{\varphi}$  なる仮想角度変位によるこの点の変位の、断面の背面に立つ法線の方向の成分を  $\delta\zeta$  とすると、式 (B13) を参照して

$$\begin{aligned} \delta\zeta &= \left\{ (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla F \right\} \Big|_{z=0}^{x=x_B} \\ &= \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla F) \Big|_{z=0}^{x=x_B} \end{aligned} \quad (\text{B22})$$

である。ここでは  $\mathbf{r}$  はブレード断面上の点の位置ベクトルである。このとき断面揚力のなす、ロータ全体の仮想仕事は

$$\delta W = \int_{-R}^R l(\delta\zeta) dy \quad (\text{B23})$$

によって与えられる。

式 (B12), (B14), (B17), (B19) を用いると、式 (B22) は

$$\begin{aligned} \delta\zeta &= -\frac{1}{U} \left\{ (\text{sgn}y)x_B(|V| - \Omega|y|\alpha)\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{j} \right. \\ &\quad \left. + (\text{sgn}V)y(\Omega|y| + |V|\alpha)\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{k} \right\} \\ &\approx -\frac{(\text{sgn}V)(\text{sgn}y)}{U} \left\{ Vx_B(\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{j}) \right. \\ &\quad \left. + \Omega y^2(\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{k}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B24})$$

となる。最右辺では、 $\alpha$  を含む項を他の項にくらべて小さいと考えて省略してある。式 (B2), (B3), (B20), (B24) を用いて  $l(\delta\zeta)$  を求めることができる。ここで  $l(\delta\zeta)$  の各項の  $y$  に関する偶奇性をしらべておく。このとき  $\alpha$ ,  $c$ ,  $U$  は  $y$  に関して偶関数であることに注意する。式 (B24) によって、 $\delta\zeta$  は  $y$  に関して奇関数である。式 (B20) の  $w_n|_{z=0}$  は  $\alpha$  を含む第 1 項のみ偶関数で、他は奇関数である。し

たがって  $l(\delta\zeta)$  においては,  $\alpha$  を含む項のみ  $y$  に関して奇関数となるから, 式 (B23) の積分ではこの項は消える。他の項は積分区間を  $(0, R)$  とすることができるから

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{-\rho a} = & V^2 x_B \{ V(\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{k}) \\ & + \omega_y x_B \} (\delta\varphi \cdot \mathbf{j}) \int_0^R \frac{c}{U} dy \\ & + VQ [\omega_z x_B (\delta\varphi \cdot \mathbf{j}) + \{ V(\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{k}) \\ & + \omega_y x_B \} (\delta\varphi \cdot \mathbf{k}) ] \int_0^R \frac{c}{U} y^2 dy \\ & + Q^2 \omega_z (\delta\varphi \cdot \mathbf{k}) \int_0^R \frac{c}{U} y^4 dy \quad (\text{B25}) \end{aligned}$$

が得られる。式 (B25) に含まれる積分は, 式(6)の定義を用いると

$$\left. \begin{aligned} \int_0^R \frac{c}{U} dy &= \frac{c_0}{Q} B_1 \\ \int_0^R \frac{c}{U} y^2 dy &= \frac{c_0 R^2}{Q} B_2 \\ \int_0^R \frac{c}{U} y^4 dy &= \frac{c_0 R^4}{Q} B_3 \end{aligned} \right\} (\text{B26})$$

と書くことができる。

式 (B25) は一般座標の選び方に関係なく成立する。同式に含まれる  $\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{k}$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ,  $\delta\varphi \cdot \mathbf{j}$ ,  $\delta\varphi \cdot \mathbf{k}$  に式 (B9), (B11), (B21) から得られる形を代入すれば, それぞれの一般座標を選んだ場合の  $\delta W$  が求められる。いっぽう

$$\begin{aligned} \delta W &= Q_\theta \delta\theta + Q_\psi \delta\psi \\ &= Q_\theta \delta\theta + Q_\psi \delta\psi \quad (\text{B27}) \end{aligned}$$

であるから, 上のようにして求めた  $\delta W$  と比較することによって, 式(3)および(4)の  $Q_\theta$ ,  $Q_\psi$  および  $Q_\theta$ ,  $Q_\psi$  が得られる。式(3), (4)には定常迎角  $\alpha$  は含まれていないが, これを考慮しなかったのではなく, 上の議論のようにしてその影響が無くなったのである。

---

## 航空宇宙技術研究所報告804号

昭和59年4月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 三興印刷  
東京都新宿区信濃町12 三河ビル

---

Printed in Japan