

ISSN 0389-4010  
UDC 629.783:  
521.312

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-807

地球の人工衛星の軌道運動に関する研究

武内澄夫

1984年5月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 目 次

第1章 緒 論 .....	1
1.1 本研究の目的 .....	1
1.2 従来の諸研究の状況 .....	1
1.3 本研究の特色 .....	2
1.4 本研究の内容 .....	2
第2章 力学系 .....	3
第3章 運動方程式 .....	5
3.1 摂動加速度に関する項が Gauss 形の運動方程式 .....	6
3.2 摂動加速度に関する項が速さを用いて表された運動方程式 .....	6
第4章 各種の作用の表示 .....	7
4.1 摂動関数の時刻および軌道要素による表示式 .....	7
4.1.1 $R_E$ の表示式 .....	7
4.1.2 $R_D$ の表示式 .....	8
4.1.3 $R_R$ の表示式 .....	9
4.2 摂動加速度および楕円軌道における関数の時刻および軌道要素による表示式 ...	10
4.2.1 $P_A$ の表示式 .....	10
4.2.2 $P_T$ および楕円軌道における関数の表示式 .....	11
4.3 赤道面の位置と軌道要素との関係を表す式 .....	12
第5章 軌道要素の変化率 .....	13
5.1 地球の重力 potential の harmonics に基づく力による軌道要素の変化率 .....	13
5.2 月と太陽の引力による軌道要素の変化率 .....	13
5.3 太陽輻射圧に基づく力による軌道要素の変化率 .....	14
5.4 大気の抵抗の力による軌道要素の変化率 .....	14
5.5 微小な推力による軌道要素の変化率 .....	15
5.5.1 摂動加速度に関する項が Gauss 形の運動方程式を用いる場合 .....	15
5.5.2 摂動加速度に関する項が速さを用いて表された運動方程式を用いる場合 ...	16
5.6 赤道面の運動による軌道要素の変化率 .....	17
第6章 軌道要素の変化 .....	20
6.1 一次の摂動に基づく軌道要素の変化 .....	20
6.1.1 地球の重力 potential の harmonics に基づく力による軌道要素の変化 .....	21
6.1.2 月と太陽の引力による軌道要素の変化 .....	25
6.1.3 太陽輻射圧に基づく力による軌道要素の変化 .....	28
6.1.4 大気の抵抗の力による軌道要素の変化 .....	29
6.1.5 微小な推力による軌道要素の変化 .....	33
6.1.6 赤道面の運動による軌道要素の変化 .....	37
6.2 二次の摂動に基づく軌道要素の変化 .....	38
6.2.1 Zonal Harmonics に基づいた力による二次の摂動に基づく軌道要素の 変化率 .....	39

6.2.2	Zonal Harmonics に基づいた力による二次の摂動に基づく軌道要素の 変化 .....	40
第7章	運動の決定 .....	41
7.1	軌道要素 .....	41
7.2	二種の昇交点経度の差 .....	42
第8章	運動を決定する計算 .....	43
8.1	計算に用いる式 .....	43
8.2	計算の例 .....	44
第9章	考 察 .....	44
9.1	評 価 .....	44
9.2	残された諸問題 .....	46
第10章	結 論 .....	47
	謝 辞 .....	47
	引用文献 .....	47
	付録 記号 .....	49

# 地球の人工衛星の軌道運動に関する研究\*

武内 澄夫\*\*

## Theory of the Orbital Motion of an Artificial Earth Satellite

Sumio TAKEUCHI

### ABSTRACT

Considering dominant perturbative influences and coupling effects among them, a unified theory of the orbital motion of an artificial earth satellite is developed. The theory includes very realistic and complex perturbation models and provides analytically a relatively accurate visualization of the effects of the various perturbations.

As the dominating perturbative influences the earth's gravitational perturbations, the luni-solar perturbations, the solar radiation pressure perturbation, the atmospheric drag perturbation, and small perturbing forces provided by the thrusts of propulsion systems are taken into account. As the reference system an intermediate, quasi-inertial reference frame is adopted.

Using the general perturbation method, the complete set of Lagrange's equations for variations of the orbital elements is applied. The equations are expressed by means of the usual form and the Gaussian form. Further, the equations are modified to include the effects of motion of the reference system.

Disturbing functions, perturbing accelerations, and angular elements referred to the adopted system are expressed analytically.

On referring to the expressions of disturbing functions, perturbing accelerations, and angular elements referred to the adopted system, the time rates of change of the orbital elements are derived by use of the equations of motion.

The resulting equations are integrated by the method of linear perturbations to obtain the first order perturbations. The second order perturbations due to the oblateness are obtained by integrating the variation equations derived from Brouwer's satellite theory based on a canonical transformation.

With the use of the variations in the orbital elements the motion of the artificial earth satellite is determined.

## 第 1 章 緒 論

### 1.1 本研究の目的

地球の人工衛星の実際の環境に対応して摂動の原因となる諸作用を一括して取り扱う力学系をとり、

人工衛星の軌道運動を的確に見とおし得ると共に精確に決定できるような理論を確立することにする。

### 1.2 従来の諸研究の状況

天体力学、宇宙航行力学などの分野において人工衛星の軌道運動に対する摂動に関して非常に数多くの研究が行われてきた。これらは枚挙にいとまがな

\* 昭和59年2月29日受付

\*\* 宇宙研究グループ

いが、特に重要なものに関しては紹介されている<sup>1),2)</sup> これらの研究における力学系において人工衛星の軌道運動に対する摂動の原因となる各種の作用としては地球の重力 potential の harmonics に基づく力、月と太陽の引力、太陽輻射圧、大気の抵抗の力、推力、赤道面の運動などが主要なものとしてとられている。次に運動を取り扱う理論は一般摂動理論と特別摂動理論に大別される。そして一般摂動理論においては正準形の運動方程式を用いる方法と軌道要素を変数とする Lagrange 形の運動方程式を用いる方法が最も主要なものとしてとされている。

人工衛星の軌道運動に対する摂動を特別摂動法によって求めれば、運動の決定を極めて精確に行うことは可能である。しかし力学的な挙動に対する見とおしは得られない。一方、人工衛星の軌道運動に対する摂動を一般摂動法によって求めることができれば、この摂動によって力学的な挙動に対する見とおしが得られる。したがって力学的な挙動に対する見とおしの獲得に重点をおく場合には一般摂動法が用いられる。ところでこれまでに人工衛星の軌道運動に関して一般摂動法をとって行われた研究のすべては摂動の原因となる個々の作用を扱うか、あるいは特に選定したいくつかの作用を扱うものであった。したがって実際に重要な、摂動の原因となる諸作用を一括して扱う場合に対しては個々の作用を対象とする諸理論を並列的に用いるの他はなく、そのような研究も行われている<sup>3)</sup> しかしこの場合の諸理論に用いられる運動方程式は何種類もあり、その解法にも各種のものがある。このためこの並列的な理論では摂動の相互作用を十分には取り入れにくい。また求められた摂動には非常に精細な理論に基づく部分と粗雑な理論に基づく部分が存在していた。したがってこのように精粗に関して多様に求められた摂動を加え合わせて運動を決定するという欠点があった。

### 1.3 本研究の特色

以上に示したように人工衛星の実際環境に対応して摂動の原因となる諸作用を一括して扱う一般摂動理論は重要であるにもかかわらず、その確立には非常に労力を要するために従来発表されていなかった。そこで本研究において初めてこのような理論を

確立することにする。ここで Lagrange 形の運動方程式を用いる方法をとれば、摂動の原因となる諸作用を実情に即して表示して理論を進めることが大体において可能である。このために Lagrange 形の運動方程式を一貫して用いる。したがって摂動の相互作用がほぼ完全に取り入れられ、また各種の摂動が比較的に一律な精確さを以て求められている。それゆえにまたこれらの摂動から効率的に運動が決定されている。このようにして従来の諸研究における欠陥を除去した理論が展開されている。

### 1.4 本研究の内容

本研究は理論、計算、考察および結論から構成される。その要点を次に示す。

第2章 力学系において、摂動力として地球の重力 potential の harmonics に基づく力、月と太陽の引力、太陽輻射圧に基づく力、大気の抵抗の力および微小な推力を取り上げた。また基準とする地心赤道座標系の運動を考慮した。そしてこれらの諸作用を一括して取り扱う力学系の構成を論じた。

第3章 運動方程式において、一般摂動法をとり、Lagrange 形の運動方程式の誘導を行った。この運動方程式は摂動関数による項、摂動加速度による項および赤道面の運動による項の三種のものから構成されている。したがって諸作用の取り扱いに対応することが可能な最も広汎なものである。

第4章 各種の作用の表示において、摂動関数を一般項によって表示する式を導き出した。

次に大気の抵抗による摂動加速度の表示を、大気の扁平、地球と共に行う大気回転、Jacchia の 1971 年の大気模型に基づく大気密度の解析的表示から求めた密度の多項式による表現、大気に対する人工衛星の相対速度の表示式における微小量までの考慮などを取り入れて行った。

また微小な推力による摂動加速度は時刻の関数とみなし、これを多項式および周期関数によって表示した。

そして運動方程式における赤道面の運動による項を導くために必要となる赤道面の位置と軌道要素との関係の表示式を日月歳差の三乗と同位の微小数までを考慮して導き出した。

第5章軌道要素の変化率において、以上に求めた摂動関数、摂動加速度および赤道面の位置と軌道要素との関係の表示式を運動方程式に用いて人工衛星の軌道運動に対する摂動の原因となる各種の作用による軌道要素の変化率を求める式を示した。

第6章軌道要素の変化において、軌道要素の変化率を表す式から線形摂動の方法によって一次の摂動に基づく各種の作用による軌道要素の変化および平均近点離角の変化を求める式を導いた。

次に Zonal harmonics に基づく摂動力の作用は特に主要であるので、これに対しては、正準形の運動方程式と正準変換の方法を使用する Brouwer の理論に基づいて導き出された Lagrange 形の運動方程式を用いる方法を取り、線形摂動の方法によって二次の摂動に基づく軌道要素の変化を求める式を導いた。

第7章運動の決定において、以上に求められた一次および二次の摂動に基づく各種の作用による軌道要素の変化および平均近点離角の変化を構成部分としてその和を求めた。そしてこれを諸作用を一括して取り扱った場合の軌道要素の変化および平均近点離角の変化とした。次に運動決定の開始時から任意時刻までの期間を分割し、その各部分である時間を積分区間の幅として以上の変化を求めた。さらにこれらの変化の和を求めた。そしてこれを運動決定の開始時の軌道要素と平均近点離角に加えたものを任意の時刻の軌道要素と平均近点離角として運動を決定した。

次に二種の昇交点経度の差を示す式を導いた。

第8章運動を決定する計算において、精確を期すためには、本理論における式を可及的に広範囲にわたって取り上げて計算を実行することを勧めている。

次に前章までの所論によって行われた地球の人工衛星の運動を決定する二種類の計算に関して解説を行った。

第9章考察において、本理論による人工衛星の運動の決定の精度を具体的に示した。そして本理論が、人工衛星の実際の運用をする場合における軌道運動の理論の精度に対する要求に対して、十分に対応できることを示した。

そして次に軌道運動の理論の今後の発展をはかるために残された諸問題を指摘し、これに関して考察

した。

第10章結論において、本研究における理論の成果を要約した。ここで本理論の構成を逐次に示し、この構成に基づいて、人工衛星の運動の決定に対する本理論の適応性を示した。

## 第2章 力学系

時刻系として原子時  $t$  をとる<sup>4)</sup> そしてこれを用いて運動方程式から運動を決定することにする。

次に地心  $O$  を原点とし、1950.0の平均春分点に向けて  $x_S$  軸をとる。また1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく赤経が  $90^\circ$  の点をこの平均赤道上にとり、この点に向けて  $y_S$  軸をとる。このとき右手系直交座標系  $O x_S y_S z_S$  は1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく、地心を原点とし慣性系に対して並進運動のみをする系とみなされる。また座標系  $O x_S y_S z_S$  と同様に瞬時の真の春分点と赤道に基づいて考えられる右手系直交座標系を  $O x_T y_T z_T$  とする。これは瞬時の真の赤道に基づく地心赤道座標系である。以下においては座標系  $O x_T y_T z_T$  を基準とする諸量を用い、座標系  $O x_S y_S z_S$  を基準として運動を決定することにする<sup>5)</sup>

それから人工衛星に作用する外力としては potential から導かれる力とそれ以外の力がある。この potential を人工衛星の単位質量に対して次のように表わす<sup>6)</sup>

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\mu}{r} + R \\ \mu &= G m_E \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

以上において

$\mu$  : 地心重力定数

$r$  : 人工衛星の地心距離

$R$  : 摂動関数

$G$  : 万有引力の定数

$m_E$  : 地球の質量

とする。ここで地球に対する人工衛星の質量を無視してある。またこの potential から導かれる力以外の力による摂動加速度を  $\mathbf{P}$  とする<sup>6)</sup> 次に右手系直交座標系  $O X Y Z$  をとる。ここでこの  $X$  軸の方向、向きを  $O$  に関する人工衛星の位置ベクトルの方向、向きに一致させる。また  $Z$  軸の方向、向きを  $O$  に関する

る人工衛星の角運動量の方向，向きに一致させることにする。そして  $\mathbf{P}$  の  $X, Y, Z$  成分を  $S, T, W$  とする。さらに右手系直交座標系  $O X' Y' Z'$  をとる。ここでこの  $X'$  軸の方向，向きを人工衛星の速度の方向，向きに一致させる。また  $Z'$  軸を  $Z$  軸に一致させる。そして  $\mathbf{P}$  の  $X', Y', Z'$  成分を  $T', N', W'$  とする。

以下においては摂動力として地球の重力potentialの harmonics に基づく力，月の引力，太陽の引力，太陽輻射圧に基づく力，大気の抵抗の力および微小な推力を考える。そしてこれらの摂動力に基づくことをそれぞれ添字の  $E, L, S, R, A, T$  などによって表すことにする。また添字の  $D$  は  $L$  あるいは  $S$  を表すとする。そうすれば次のように表される。

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_E + \mathbf{R}_L + \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_R \quad (2.2)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_A + \mathbf{P}_T \quad (2.3)$$

なお並進運動座標系  $O x_s y_s z_s$  に対する赤道座標系  $O x_T y_T z_T$  の相対運動に基づく軌道要素に対する摂動が存在している。そこでこの相対運動に基づく赤道面の運動に依存することを添字の  $P$  で表すことにする。

この時，次のように表される<sup>7)</sup>

$$\begin{aligned} R_E &= \frac{\mu}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_E}{r}\right)^l P_l^m(\sin \beta) J_{l,m} \cos m(\lambda - \lambda_{l,m}) \\ &= \frac{\mu}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_E}{r}\right)^l P_l^m(\sin \beta) \{ C_{l,m} \cos m \lambda \\ &\quad + S_{l,m} \sin m \lambda \} \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで

$a_E$  : 地球の平均赤道半径

$r, \beta, \lambda$  : 人工衛星の地心距離，地心緯度，地理学的経度

$P_l^m$  : Legendre 陪関数

$J_{l,m}$  : 定数

$\lambda_{l,m}$  : 定数

$C_{l,m}$  : 定数

$S_{l,m}$  : 定数

である。なお  $J_l$  は  $J_{l,0}$  を表わすことにする。

また次のように表される<sup>8)</sup>

$$R_D = \frac{G m_D}{r_D} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_D}\right)^l P_l(\cos \theta_E) \quad (2.5)$$

ここで

$m_D$  : 月あるいは太陽の質量

$r_D$  : 月あるいは太陽の質量中心の地心距離

$\theta_E$  : 地心と人工衛星を結ぶ直線が地心と月あるいは太陽の質量中心を結ぶ直線に対してなす角

$P_l$  : Legendre 関数

である。

次に太陽輻射圧に基づく力としては地球表面からの反射光線によるものを無視して太陽からの直射光線によるもののみをとる。そしてこの輻射圧に基づく力は太陽中心と地心を結ぶ直線の方向の成分のみを持ち，その大きさは人工衛星の運動する空間の領域において太陽からの距離に依存せず一定とする。それから地球の影としては本影のみを考慮する。この本影は地球に接する錐面をなすが，その母線は太陽中心と地心を結ぶ直線に平行であるとみなし，柱面をなすとする。また地球の形状を平均赤道半径を半径とする球とみなす。ここで地心  $O$  を原点として太陽の中心に向けて  $x_0$  軸をとる。このとき次のように表される<sup>9)</sup>

$$R_R = C F x_0 \quad (2.6)$$

ここで

$C$  : 人工衛星が輻射圧の作用下にあるときに 1 となり，その作用下でないときに 0 となる数

$F$  : 太陽輻射圧による摂動加速度の  $x_0$  成分である。

さらに次のように表されるとする<sup>10)</sup>

$$\mathbf{P}_A = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v_r v_r \quad (2.7)$$

ここで人工衛星に関して

$m$  : 質量

$A$  : 断面積

$C_D$  : 抵抗係数

$v_r$  : 大気に相対的な速度

とし，また

$\rho$  : 人工衛星が存在する位置における大気の密度

とする。なお大気は地球と共に運動するとし，大気の地球に対する相対運動を無視する。さらに大気の

抵抗を考える場合には地球の表面は地球に理想的に適合する汎世界回転楕円体をなすとする。したがって人工衛星の高度は人工衛星からこの楕円体へ下した法線によって定義されるとする。

それから  $P_T$  は次式のように  $t$  の関数として与えられるとする<sup>1)</sup>

$$P_T = P_T(t) \quad (2.8)$$

並進運動座標系  $O x_s y_s z_s$  に対する赤道座標系  $O x_T y_T z_T$  の相対運動は一般歳差、黄経の章動および黄道傾角の変化によって表される。そこで以下においては赤道面の位置は日月歳差、黄経の章動および黄道傾角によって規定されることにする<sup>5)</sup>

### 第3章 運動方程式

次のように表す。

$\alpha$  : 1950.0 の平均春分点と平均赤道に基づく瞬時の真の赤道の昇交点の赤経

また赤道座標系  $O x_T y_T z_T$  を基準として考えた人工衛星の接触軌道要素として次のものをとる。

- $a$  : 軌道の半長軸
- $e$  : 軌道の離心率
- $i$  : 瞬時の真の赤道面に対する軌道面の傾斜角

$Q_q$  : 昇交点経度

$\alpha$  に 1950.0 の平均赤道に対する瞬時の真の赤道の昇交点から瞬時の真の赤道に沿って軌道の昇交点までを測った角を加えた角

$\omega$  : 瞬時の真の赤道面から測った近地点引数

$\chi^*$  : 運動決定が行われる時刻  $t(j)$  における平均近点離角

さらに人工衛星の接触軌道要素として次のものをとる。

$Q$  : 昇交点経度

瞬時の真の春分点と赤道に基づいた昇交点の赤経

そうすれば次のように表しうる。

$$Q = Q_q + D \quad (3.1)$$

ここで  $D$  は  $t$  の関数として後に与えられる。

また次のように表す。

$n$  : 平均運動

$T_0$  : 軌道運動の周期

$M$  : 平均近点離角

$f$  : 真近点離角

$E$  : 離心近点離角

ここで次式が成立する。

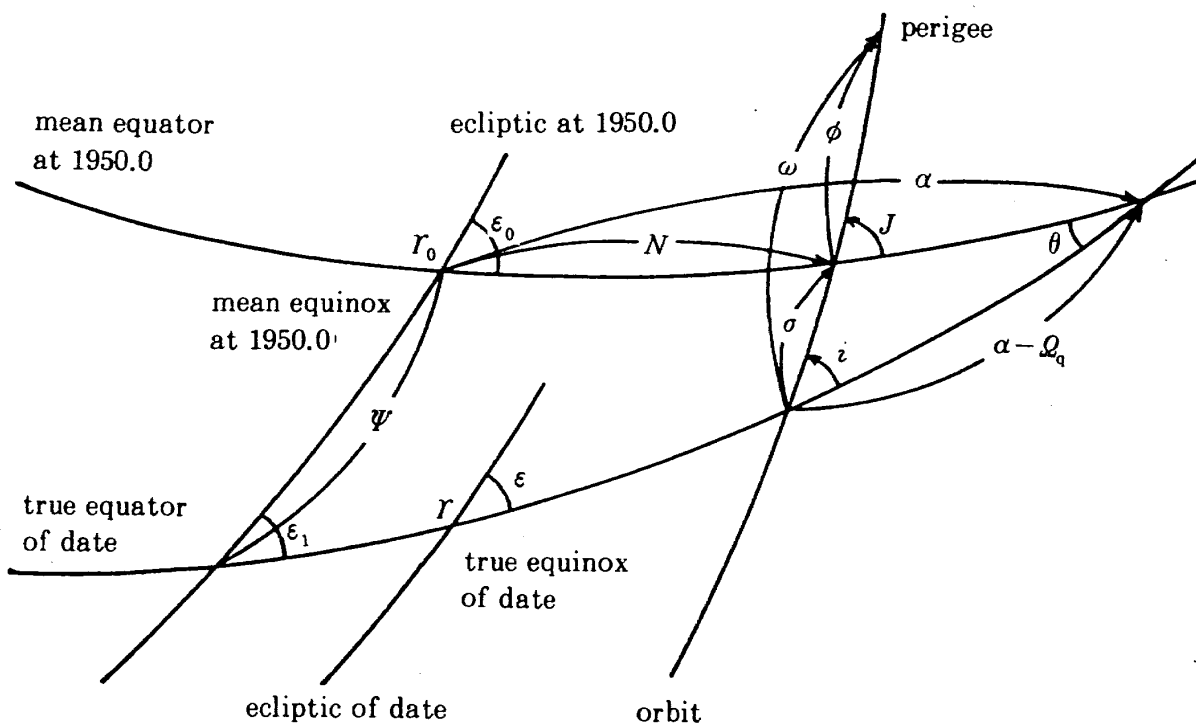


図1 並進運動の System と瞬時の赤道に基づく System



$$\left. \begin{aligned} \mu &= n^2 a^3, \\ M &= \chi^* + \int_{t(j)}^t n dt, \\ T_0 &= \frac{2\pi}{n} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

なお次のようにおく。

$$u = \omega + f \quad (3.3)$$

以上から次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial M} &= \frac{\partial R}{\partial \chi^*}, \\ \frac{\partial R}{\partial Q_q} &= \frac{\partial R}{\partial Q} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

運動方程式として赤道座標系  $O x_T y_T z_T$  を基準とする諸量で表された Lagrange 形のものを用いる。これは摂動関数に関する項、摂動加速度に関する項および赤道面の運動に関する項の三種の項から構成される。ここで摂動加速度に関する項には  $S, T, W$  成分で表された Gauss 形と  $T', N', W$  成分で表された速さを用いて表される形のものがあり、そのいずれか一方のものが用いられる。そこで Gauss 形のものを用いる場合と速さを用いて表される形のものを用いる場合の二種類の運動方程式を次に示す。

### 3.1 摂動加速度に関する項が Gauss 形の運動方程式<sup>5)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \chi^*} + \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ eS \sin f + \frac{a(1-e^2)}{r} T \right\}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{na^2 e} \left\{ (1-e^2) \frac{\partial R}{\partial \chi^*} - \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right\} \\ &\quad + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ S \sin f + T(\cos E + \cos f) \right\}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \cot i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \operatorname{cosec} i \frac{\partial R}{\partial Q_q} \right) \\ &\quad + \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} rW \cos u + \frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{dQ_q}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ &\quad + \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} rW \sin u + \frac{\partial Q_q}{\partial t}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ &\quad + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left\{ -S \cos f + \left\{ \frac{r}{a(1-e^2)} + 1 \right\} T \sin f \right\} \\ &\quad - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} rW \sin u + \frac{\partial \omega}{\partial t}, \\ \frac{d\chi^*}{dt} &= -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) \\ &\quad + \frac{1}{nae} \left\{ (1-e^2) \cos f - \frac{2er}{a} \right\} S \\ &\quad - \frac{1}{nae} \left( \frac{r}{a} + 1 - e^2 \right) T \sin f \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

ここで  $\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)$  は  $\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{n=\text{const}}$  を示す。なお座標系

$O x_S y_S z_S$  に対する座標系  $O x_T y_T z_T$  の相対運動を表わす一般歳差、黄経の章動、黄道傾角の変化などの大きさは微小である。そこでこれらを見捨て座標系  $O x_T y_T z_T$  を並進運動座標系とみなす場合がある。この場合には赤道面の運動による軌道要素の変化率は無視され、また  $D$  は一定値をとるとみなされる。したがって(3.1.1)において次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial t} &= \frac{\partial Q_q}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \\ \frac{dQ_q}{dt} &= \frac{dQ}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.2)$$

### 3.2 摂動加速度に関する項が速さを用いて表された運動方程式<sup>5)1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \chi^*} + \frac{2a^2}{\mu} v T', \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{na^2 e} \left\{ (1-e^2) \frac{\partial R}{\partial \chi^*} - \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{v} \left\{ 2(e + \cos f) T' - \frac{r}{a} N' \sin f \right\}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ &\quad + \frac{1}{ev} \left\{ 2T' \sin f + \left( e + \cos f + \frac{e \sin^2 f}{1+e \cos f} \right) N' \right\} \\ &\quad - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} rW \sin u + \frac{\partial \omega}{\partial t}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} = & -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) \\ & - \frac{1}{ev} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos f} \left\{ 2(1+e^2+e \cos f) T' \sin f \right. \\ & \left. + (1-e^2) N' \cos f \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

なお

$v$  : 人工衛星の速度

とする。このとき次のようになる。

$$v = na \frac{\sqrt{1+e^2+2e \cos f}}{\sqrt{1-e^2}} \quad (3.2.2)$$

また  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{dQ_q}{dt}$  は (3.1.1) に示される式と同じになる。それから座標系  $O x_T y_T z_T$  を並進運動座標系とみなす場合には第 3.1 節におけると同様に (3.2.1) において (3.1.2) が成立する。

#### 第 4 章 各種の作用の表示

##### 4.1 摂動関数の時刻および軌道要素による表示式

##### 4.1.1 $R_E$ の表示式

式 (2.4) に示される  $R_E$  は時刻および軌道要素の関数として次のように表される。<sup>12)7)</sup>

$$\begin{aligned} R_E = & \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l,p,q}(e) \\ & \times F_{l,m,p}(i) \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, Q, \theta) \end{aligned} \quad (4.1.1.1)$$

ここで

$\theta$  : グリニジ視恒星時

であり、これは時系に関する諸式によって決定される。<sup>4)</sup>

離心率関数  $G_{l,p,q}(e)$  は次のようになる。

$$G_{l,p,q}(e) = X_{l-2p+q}^{-l-1, l-2p}(e) = X_{2p-l-q}^{-l-1, 2p-1}(e)$$

ここで  $X_{l-2p+q}^{-l-1, l-2p}(e)$  と  $X_{2p-l-q}^{-l-1, 2p-1}(e)$  は Hansen 係数である。Hansen 係数の表示式は Tisserand<sup>13)</sup>, Plummer<sup>14)</sup> などによって与えられている。Tisserand の示す式によって Hansen 係数を表し、これを用いて

$G_{l,p,q}(e)$  と  $dG_{l,p,q}(e)/de$  の表示式を求める。<sup>15)</sup> まず、 $l-2p+q=0$

の場合には次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} G_{l,p,q}(e) = & \frac{1}{(1-e^2)^{l-\frac{1}{2}}} \sum_{p'=0}^{p'-1} \binom{l-1}{2b+l-2p'} \\ & \times \binom{2b+l-2p'}{b} \left(\frac{e}{2}\right)^{2b+l-2p'} \\ p' = p & \quad , \quad \left[ p \leq \frac{l}{2} \right] \\ p' = l-p & \quad , \quad \left[ \frac{l}{2} < p \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.1.1.2)$$

したがって次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} = & (2l-1) \frac{e}{1-e^2} G_{l,p,q}(e) \\ & + \frac{1}{(1-e^2)^{l-\frac{1}{2}}} \sum_{b=0}^{p'-1} \frac{2b+l-2p'}{2} \\ & \times \binom{l-1}{2b+l-2b'} \binom{2b+l-2p'}{b} \left(\frac{e}{2}\right)^{2b+l-2p'-1} \end{aligned} \quad (4.1.1.3)$$

次に

$$l-2p+q \neq 0$$

の場合には次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} G_{l,p,q}(e) = & (-1)^{|q|} (1+r^2)^l r^{|q|} \\ & \sum_{c=0}^{\infty} P_{l,p,q,c} Q_{l,p,q,c} r^{2c} \quad , \\ r = & \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e} \quad , \\ p' = p & \quad , \quad q' = q \quad , \quad \left[ p \leq \frac{l}{2} \right] \quad , \\ p' = l-p & \quad , \quad q' = -q \quad , \quad \left[ \frac{l}{2} < p \right] \quad . \\ P_{l,p,q,c} = & \sum_{d=0}^h \binom{2p'-2l}{h-d} \frac{(-1)^d}{d!} \left\{ \frac{(l-2p'+q')e}{2r} \right\}^d \quad , \\ h = c & \quad , \quad [q' < 0] \quad , \\ h = c+q' & \quad , \quad [0 \leq q'] \quad , \\ Q_{l,p,q,c} = & \sum_{d=0}^h \binom{-2p'}{h-d} \frac{1}{d!} \left\{ \frac{(l-2p'+q')e}{2r} \right\}^d \quad , \\ h = c-q' & \quad , \quad [q' < 0] \quad , \\ h = c & \quad , \quad [0 \leq q'] \quad , \end{aligned} \right\} \quad (4.1.1.4)$$

したがって次のようになる。

$$\frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} = \left( 2l \frac{r}{1+r^2} + |q| \frac{1}{r} \right) \frac{dr}{de} G_{l,p,q}(e)$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{|q|} (1+r^2)^l r^{|q|} \\
 & \times \sum_{c=0}^{\infty} \left( \frac{dP_{l,p,q,c}}{de} Q_{l,p,q,c} r^{2c} \right. \\
 & + P_{l,p,q,c} \frac{dQ_{l,p,q,c}}{de} r^{2c} \\
 & \left. + 2c P_{l,p,q,c} Q_{l,p,q,c} r^{2c-1} \frac{dr}{de} \right), \\
 \frac{dr}{de} &= \frac{r}{e} + \frac{r^2}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{r}{e}, \\
 \frac{dP_{l,p,q,c}}{de} &= \sum_{d=0}^h \binom{2p'-2l}{h-d} \frac{(-1)^d}{d!} \left\{ \frac{(\ell-2p'+q')e^d}{2r} \right\}^d \\
 & \times d \cdot \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{r} \frac{dr}{de} \right), \\
 \frac{dQ_{l,p,q,c}}{de} &= \sum_{d=0}^h \binom{-2p'}{h-d} \frac{1}{d!} \left\{ \frac{(\ell-2p'+q')e^d}{2r} \right\}^d \\
 & \times d \cdot \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{r} \frac{dr}{de} \right)
 \end{aligned} \tag{4.1.1.5}$$

なお Hansen 係数の表示式の一部分が Cayley によって与えられている<sup>16)</sup> そしてこれによって求めた  $G_{l,p,q}(e)$  と  $dG_{l,p,q}(e)/de$  の表示式の一部分も示されている<sup>17)</sup>

傾斜角関数  $F_{l,m,p}(i)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 F_{l,m,p}(i) &= \sum_u \frac{(2l-2u)!}{u!(l-u)!(l-m-2u)! 2^{2l-2u}} \\
 & \times \sin^{l-m-2u} i \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \cos^v i \\
 & \times \sum_w \binom{l-m-2u+v}{w} \binom{m-v}{p-u-w} (-1)^{w-k_F} \\
 0 \leq u &\leq \min(p, l-p, k_F), \\
 \max(0, p-u-m+v) &\leq w \leq p-u \\
 & - \{m - \min(l-p-u, m)\} \\
 & + \min\{v, m - \min(l-p-u, m)\}, \\
 k_F &= \left\lfloor \frac{1}{2} (l-m) \right\rfloor
 \end{aligned} \tag{4.1.1.6}$$

ここで  $\lfloor \ \rfloor$  は整数部分を示す。したがって次のようになる。

$$\frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} = \sum_u \frac{(2l-2u)!}{u!(l-u)!(l-m-2u)! 2^{2l-2u}} \times \sin^{l-m-2u-1} i$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \sum_{v=0}^m \left\{ (\ell-m-2u) \binom{m}{v} \cos^{v+1} i \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - v \binom{m}{v} \sin^2 i \cos^{v-1} i \right\} \right. \\
 & \times \sum_w \binom{l-m-2u+v}{w} \binom{m-v}{p-u-w} (-1)^{w-k_F} \left. \right]
 \end{aligned} \tag{4.1.1.7}$$

なお  $F_{l,m,p}(i)$  と  $dF_{l,m,p}(i)/di$  の表示式の一部分が示されている<sup>17)</sup>

また次のようになる。

$$\begin{aligned}
 T_{l,m,p,q}(\omega, M, Q, \theta) &= (\ell-2p)\omega + (\ell-2p+q)M + m(Q-\theta) \\
 & - m\lambda_{l,m} - \left\{ 1 - (-1)^{l-m} \right\} \frac{\pi}{4}
 \end{aligned} \tag{4.1.1.8}$$

#### 4.1.2 $R_D$ の表示式

月あるいは太陽の軌道要素として

$a_D$  : 軌道の半長軸

$e_D$  : 軌道の離心率

$i_D$  : 瞬時の真の赤道面に対する軌道面の傾斜角

$Q_D$  : 昇交点経度

瞬時の真の春分点と赤道に基づいた昇交点の赤経

$\omega_D$  : 瞬時の真の赤道面から測った近地点引数

とし、また

$M_D$  : 平均近点離角

とする。そうすれば式(2.5)に示される  $R_D$  は時刻および軌道要素の関数として次のように表される<sup>18) 8)</sup>

$$\begin{aligned}
 R_D &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{m_D} \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \kappa_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\
 & \times H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) \\
 & \times \cos T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, Q, \omega_D, M_D, Q_D)
 \end{aligned} \tag{4.1.2.1}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
 \kappa_0 &= 1, \\
 \kappa_m &= 2, \quad \{m \neq 0\}
 \end{aligned} \right\} \tag{4.1.2.2}$$

である。

離心率関数  $H_{l,p,q}(e)$  は次のようになる。

$$H_{l,p,q}(e) = X_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e) = X_{2p-l-q}^{l,2p-l}(e)$$

ここで  $X_{l-2p+q}^{l, l-2p}(e)$  と  $X_{2p-1-q}^{l, 2p-2}(e)$  は Hansen 係数である。Hansen 係数の表示式は Tisserand<sup>13)</sup> Plummer<sup>14)</sup> などによって与えられている。Tisserand の示す式によって Hansen 係数を表し、これを用いて  $H_{l,p,q}(e)$  と  $dH_{l,p,q}(e)/de$  の表示式を求める。まず

$$l - 2p + q = 0$$

の場合には次のようになる。

$$H_{l,p,q}(e) = \frac{(-r)^{l-2p'}}{(1+r^2)^{l+1}} \binom{2l+1-2p'}{l-2p'} \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l+1}{k} \binom{2p'+1}{k} \frac{r^{2k}}{\binom{l-2p'+k}{k}},$$

$$r = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e},$$

$$p' = p \quad \left[ p \leq \frac{l}{2} \right],$$

$$p' = l-p \quad \left[ \frac{l}{2} < p \right]$$

(4.1.2.3)

したがって次のようになる。

$$\frac{dH_{l,p,q}(e)}{de} = \binom{2l+1-2p'}{l-2p'} \frac{(-r)^{l-2p'}}{(1+r^2)^{l+1}} \times \left\{ \frac{l-2p'}{r} - \frac{2(l+1)r}{1+r^2} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l+1}{k} \binom{2p'+1}{k} \frac{r^{2k}}{\binom{l-2p'+k}{k}} + \sum_{k=0}^{\infty} 2k \binom{l+1}{k} \binom{2p'+1}{k} \frac{r^{2k-1}}{\binom{l-2p'+k}{k}}$$

(4.1.2.4)

次に

$$l - 2p + q \neq 0$$

の場合は短周期項となる。なお Hansen 係数の表示式の一部が Cayley によって与えられている<sup>16)</sup> としてこれによって求めた  $H_{l,p,q}(e)$  と  $dH_{l,p,q}(e)/de$  の表示式の一部も示されている<sup>8)</sup>

また次のようになる。

$$T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, Q, \omega_D, M_D, Q_D) = (l-2p)\omega + (l-2p+q)M - (l-2h)\omega_D - (l-2h+j)M_D + m(Q-Q_D)$$

(4.1.2.5)

以上において月あるいは太陽の軌道要素と平均近点離角が与えられることを要する。これらの諸量は

天体暦に示されている平均軌道要素を用いて求められる<sup>8)</sup>

#### 4.1.3 $R_R$ の表示式

式(2.6)に示される  $R_R$  は時刻および軌道要素の関数として次のように表される<sup>9)</sup>

$$R_R = C F a \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 \{ C_l^{1,1}(e) + (2u-3)S_l^{1,1}(e) \} \times L_{v,w}(i, \varepsilon) \cos T_{l,u,v,w}(\omega, M, Q, \lambda_S)$$

(4.1.3.1)

ここで

$\varepsilon$  : 瞬時の真の黄道傾角

$\lambda_S$  : 太陽の黄経

である。

次のようになる。

$$C_0^{1,1}(e) = X_0^{1,1}(e)$$

$$C_l^{1,1}(e) = X_l^{1,1}(e) + X_{-l}^{1,1}(e), \quad [l \neq 0],$$

$$S_0^{1,1}(e) = 0$$

$$S_l^{1,1}(e) = X_l^{1,1}(e) - X_{-l}^{1,1}(e), \quad [l \neq 0]$$

ここで  $X_l^{1,1}(e)$  と  $X_{-l}^{1,1}(e)$  は Hansen 係数である。Hansen 係数の表示式は Tisserand<sup>13)</sup> Plummer<sup>14)</sup> などによって与えられている。また  $C_0^{1,1}$ ,  $C_l^{1,1}$ ,  $S_l^{1,1}$  などは  $\frac{\sin E}{\cos E}$  の  $M$  による展開式の係数によっても与えられる。これらは次のようになる<sup>6)</sup>

$$\left. \begin{aligned} C_0^{1,1}(e) &= -\frac{3}{2}e, \\ C_l^{1,1}(e) &= \frac{2}{l} J_l'(le), \\ S_l^{1,1}(e) &= \frac{2}{l} \frac{1}{e} \sqrt{1-e^2} J_l(le) \end{aligned} \right\} (4.1.3.2)$$

ここで  $J_l(le)$  は  $l$  次の第一種の Bessel 関数である。したがって次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC_0^{1,1}(e)}{de} &= -\frac{3}{2}, \\ \frac{dC_l^{1,1}(e)}{de} &= 2J_l''(le), \\ \frac{dS_l^{1,1}(e)}{de} &= \frac{2}{l} \left( -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right) J_l(le) + \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} J_l'(le) \end{aligned} \right\} (4.1.3.3)$$

なお Hansen 係数,  $C_i^{1,1}(e)$ ,  $S_i^{1,1}(e)$  などの表示式の一部が Cayley によって与えられている<sup>10)</sup> としてこれによって求めた  $C_i^{1,1}(e)$ ,  $S_i^{1,1}(e)$ ,  $dC_i^{1,1}(e)/de$ ,  $dS_i^{1,1}(e)/de$  などの表示式の一部も示されている<sup>9)</sup>。また次のようになる。

$$L_{v,w}(i, \epsilon) = \frac{1}{8\{2 + \{1 - (-1)^v\}\}} \\ \times \{ \{1 - (-1)^v\} + \{1 + (-1)^v\} \sin i + 2(v-2) \cos i \} \\ \times \{ \{1 - (-1)^v\} + \{1 + (-1)^v\} (3-2w) \sin \epsilon \\ + 2(v-2)(3-2w) \cos \epsilon \} \quad (4.1.3.4)$$

したがって次のようになる。

$$\frac{dL_{v,w}(i, \epsilon)}{di} = \frac{1}{8\{2 + \{1 - (-1)^v\}\}} \\ \times \{ \{1 + (-1)^v\} \cos i - 2(v-2) \sin i \} \\ \times \{ \{1 - (-1)^v\} + \{1 + (-1)^v\} (3-2w) \sin \epsilon \\ + 2(v-2)(3-2w) \cos \epsilon \} \quad (4.1.3.5)$$

また次のようになる。

$$T_{l,u,v,w}(\omega, M, Q, \lambda_s) = \omega + l(2u-3)M \\ + (v-2)Q + (2w-3)\lambda_s \quad (4.1.3.6)$$

以上において瞬時の真の黄道傾角と太陽の黄経が与えられていることを要する。これらをそれぞれ平均黄道傾角と太陽の平均黄経とみなすことにする。そうすればこれらは天体暦によって求められる<sup>9)</sup>。

次に人工衛星が地球の本影に出入する時刻は,  $t_{(j)}$  において軌道面上にある地球の影の輪郭と軌道との交点を定め,  $t_{(j)}$  から人工衛星がこの交点を通過する時刻までに経過する時間を  $t_{(j)}$  に加えた時刻として決定される。この際に  $t_{(j)}$  からこの出入する時刻までの間における地球に相対的な太陽の位置の変化および接触楕円の変化を共に無視することにする。このようにして  $t_{(j)}$  以後に軌道を  $N$  周し終わってから  $N+1$  周し終わるまでの間に影に入る時刻  $t_e^{(N)}$  と影から出る時刻  $t_d^{(N)}$  は代数的に求められる<sup>9)</sup>。

## 4.2 摂動加速度および楕円軌道における関数の時刻および軌道要素による表示式

### 4.2.1 $P_A$ の表示式<sup>10)</sup>

式(2.7)に示される  $P_A$  の  $X, Y, Z$  成分は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} S_A &= -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v_r v_{rx}, \\ T_A &= -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v_r v_{ry}, \\ W_A &= -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v_r v_{rz} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.1.1)$$

ここで  $v_{rx}, v_{ry}, v_{rz}$  は  $\mathbf{v}_r$  の  $X, Y, Z$  成分を示す。 $\rho$  は  $t$  の関数であり, 多項式として次のように表されるとする。

$$\rho = \sum_{k=0}^q C_k t^k \quad (4.2.1.2)$$

ここで  $t_{(j)}$  以後にいくつかの  $t$  をとり, その各時刻に人工衛星が存在する位置において大気密度を求める。そしてこの密度を関数近似するように  $C_k$  を決定する。この際に人工衛星の存在する位置は  $t_{(j)}$  における接触軌道要素にその後の摂動を加えて求められる軌道要素から決定される位置ベクトルによって定められる<sup>19)</sup> とする。そしてこの摂動としては最も主要である主問題における摂動のみを考慮することにする。また大気密度は, 静的な大気モデルに基づく基礎的な密度を求め, これにさらに密度の変化を加えたものによって表されるとする。そしてこの基礎的な密度としては Jacchia の 1971 年の大気モデルに基づいて解析的表示によって求められるものを用いる<sup>20)</sup> また密度の変化としては地磁気活動による変化, 半年周の変化, 季節と緯度による変化およびヘリウムの数密度の変化に基づく変化などを考慮して決定されるものを用いる<sup>21) 20)</sup> ことにする。なおこの基礎的な密度および密度の変化を求める際に人工衛星の瞬時の真の赤道に基づく地心赤道座標, 赤経, 測地学的緯度および高度, 太陽の赤経および赤緯ならびに黄道傾角が必要となる。これらは楕円軌道と直交座標に関する諸式, 汎世界回転楕円体における測地学的緯度と高度に関する諸式および天体暦によって求められる<sup>22) 20)</sup>。

次に

$\boldsymbol{\nu}$  : 地球のその自転軸まわりの回転ベクトル  
 $\mathbf{r}$  : 人工衛星の地心  $O$  に関する位置ベクトル

とすれば次のようになる。

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}$$

この  $X, Y, Z$  成分は楕円運動に関する諸式を用い

れば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} v_{rx} &= \frac{nae \sin f}{\sqrt{1-e^2}}, \\ v_{ry} &= \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{r} - \nu r \cos i, \\ v_{rz} &= \nu r \sin i \cos u \end{aligned} \right\} (4.2.1.3)$$

またこれらの成分を用い、さらに楕円運動に関する諸式を用い、 $\nu/n$  および  $e$  に関してその三乗までを考慮することにすれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \tau, \\ \tau &= \sigma_0 + \sigma_1 \cos f + \sigma_2 \cos^2 f + \sigma_3 \cos^3 f \\ &\quad + \sigma_4 \sin f \cos f + \sigma_5 \sin f \cos^2 f, \\ \sigma_0 &= 1 - \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i + \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i \\ &\quad + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n}\right)^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \sin^2 i \cos i \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{\nu}{n} e^2 (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i \left\{1 + \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i\right\} \cos 2\omega, \\ \sigma_1 &= e \left\{1 - 3 \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 (1-e^2)^3 \left(5 \cos^2 i + \frac{1}{2} \sin^2 i\right) - \frac{1}{2} e^2 \left. \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 e (1-e^2)^3 \sin^2 i \cos 2\omega, \\ \sigma_2 &= -\frac{1}{2} e \left\{e + 11 \frac{\nu}{n} e (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i \left\{1 + \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i\right\} \\ &\quad \times \cos 2\omega, \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} e^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 e (1-e^2)^3 \sin^2 i \cos 2\omega, \\ \sigma_4 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i \left\{1 + \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i\right\} \\ &\quad \times \sin 2\omega, \\ \sigma_5 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 e (1-e^2)^3 \sin^2 i \left\{1 + \frac{5}{2} \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i\right\} \\ &\quad \times \sin 2\omega \end{aligned} \right\} (4.2.1.4)$$

なお  $C_D A/m$  は一般には時間の経過と共に変化する量であるが、ここでは運動方程式の積分区間において一定値をとるとみなすことにする。

#### 4.2.2 $P_T$ および楕円軌道における関数の表示式<sup>11)</sup>

式(2.8)に示される  $P_T$  の成分  $S_T, T_T, W_T, T'_T, N'_T$  などのそれぞれを代表して  $A_T$  で表すとき、 $A_T$  は次のように表されるとする。

$$A_T = A_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{Tk} t^k + a_{A_{Tk}} \cos kt + b_{A_{Tk}} \sin kt) \quad (4.2.2.1)$$

ここで  $A_{T0}, A_{Tk}, a_{A_{Tk}}, b_{A_{Tk}}$  などは定数とする。

$E$  に関して次式が成立する。

$$\cos E = A_{1,0}(e) + \sum_{l=1}^{\infty} A_{1,l}(e) \cos lM,$$

$$A_{1,0}(e) = -\frac{1}{2} e,$$

$$\begin{aligned} A_{1,l}(e) &= \frac{1}{l} \{J_{l-1}(le) - J_{l+1}(le)\} \\ &= \frac{2}{l^2} \frac{d}{de} J_l(le) \end{aligned}$$

(4.2.2.2)

ここで  $J_l(le)$  は  $l$  次の第一種の Bessel 関数である。

次に  $v$  と  $1/v$  は次のようになる。

$$v = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} F_T,$$

$$F_T = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{s,q}(e) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{p,s,q}(e) \cos pf,$$

$$C_{s,q}(e) = \frac{1}{2^{2s}} \binom{2s-2q}{s-q} (-1)^{2s-2q-1} \frac{\{(4s-4q)+2q-3\}!!}{2^q (2s-2q)! q!} e^{2s},$$

$$\begin{aligned} C_{p,s,q}(e) &= \frac{1}{2^{p-1+2s-2q}} \binom{p+2s-2q}{s-q} (-1)^{p+2s-q-1} \\ &\quad \times \frac{(2p+4s-2q-3)!!}{2^q (p+2s-2q)! q!} e^{p+2s}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} F'_T,$$

$$F'_T = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \cos pf,$$

$$C'_{s,q}(e) = (-4s+2q+1) C_{s,q}(e),$$

$$C'_{p,s,q}(e) = (-2p-4s+2q+1) C_{p,s,q}(e)$$

(4.2.2.3)

また次のようになる。

$$\frac{e \sin^2 f}{1 + e \cos f} = \frac{1}{2} \frac{e}{1 - e^2} \frac{r}{a} (1 - \cos 2f) \tag{4.2.2.4}$$

さらに次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^q \cos pf &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l^{q,p}(e) \cos lM, \\ \left(\frac{r}{a}\right)^q \sin pf &= \sum_{l=0}^{\infty} S_l^{q,p}(e) \sin lM, \\ C_0^{q,p}(e) &= X_0^{q,p}(e) \\ C_l^{q,p}(e) &= X_l^{q,p}(e) + X_{-l}^{q,p}(e), \quad [l \neq 0], \\ S_0^{q,p}(e) &= 0, \\ S_l^{q,p}(e) &= X_l^{q,p}(e) - X_{-l}^{q,p}(e), \quad [l \neq 0] \end{aligned} \right\} \tag{4.2.2.5}$$

ここで  $X_l^{q,p}(e)$  と  $X_{-l}^{q,p}$  は Hansen 係数である。Hansen 係数の表示式は Tisserand<sup>13)</sup>, Plummer<sup>14)</sup> などによって与えられている。Plummer の示す式によって Hansen 係数を表すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} X_l^{q,p}(e) &= (1+r^2)^{-q-1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(l e) X_{l,s}^{q,p} \\ X_{l,s}^{q,p} &= H(p-q-1, -p-q-1, 1, r^2) \\ &\quad [l-s-p=0], \\ X_{l,s}^{q,p} &= (-r)^{l-s-p} \binom{q+1-p}{l-s-p} \\ &\quad \times H(l-s-q-1, -p-q-1, l-s-p+1, r^2), \\ &\quad [l-s-p > 0], \\ X_{l,s}^{q,p} &= (-r)^{-l+s+p} \binom{q+1+p}{-l+s+p} \\ &\quad \times H(-l+s-q-1, p-q-1, -l+s+p+1, r^2), \\ &\quad [l-s-p < 0], \\ r &= \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e} \end{aligned} \right\} \tag{4.2.2.6}$$

ここで H は超幾何関数を表す。なお Hansen 係数,  $C_l^{q,p}(e)$ ,  $S_l^{q,p}(e)$  などの表示式の一部分が Cayley<sup>16)</sup> によって与えられている。

4.3 赤道面の位置と軌道要素との関係を表す式<sup>5)</sup>

並進運動座標系  $O x_s y_s z_s$  を基準として考えた人工衛星の接触軌道要素として次のものを考える。

$J$  : 1950.0 の平均赤道面に対する軌道面の傾斜角

$N$  : 昇交点経度  
1950.0 の平均春分点と平均赤道に基づいた昇交点の赤経

$\phi$  : 1950.0 の平均赤道から測った近地点引数  
また次の量をとる。

$\theta$  : 1950.0 の平均赤道と瞬時の真の赤道のなす角

$\theta$  の数値は微小であり、現在の値は概略において  $10^{-3}$  の程度である。このとき  $\alpha$  および  $\theta$  によって瞬時の赤道面の位置を表すことができる。運動方程式 (3.1.1) あるいは (3.2.1) によれば赤道面の運動によって変化する軌道要素は  $i$ ,  $\Omega_q$  および  $\omega$  である。そしてこの三軌道要素が赤道面の位置にどのように依存するかを表す式は、 $\theta$  の三乗と同位の微小数までを考慮すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} i &= J - \sin \theta \cos(\alpha - N) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cot J \sin^2 \theta \sin^2(\alpha - N) \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \cot^2 J \sin^2(\alpha - N) \cos(\alpha - N) \right. \\ &\quad \quad \left. - \frac{1}{6} \cos^3(\alpha - N) \right\} \sin^3 \theta, \\ \Omega_q &= N - \cot J \sin \theta \sin(\alpha - N) \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} + \cot^2 J \right) \sin^2 \theta \sin(\alpha - N) \cos(\alpha - N) \\ &\quad + \frac{1}{\sin^3 J} \left\{ \frac{1}{3} \cos^3 J \sin^3(\alpha - N) \right. \\ &\quad \quad \left. - \frac{1}{2} (\cos J + \cos^3 J) \sin(\alpha - N) \right. \\ &\quad \quad \left. \times \cos^2(\alpha - N) \right\} \sin^3 \theta, \\ \omega &= \phi + \frac{1}{\sin J} \sin \theta \sin(\alpha - N) \\ &\quad + \frac{\cos J}{\sin^2 J} \sin^2 \theta \sin(\alpha - N) \cos(\alpha - N) \\ &\quad - \frac{1}{\sin^3 J} \left\{ \left( \frac{1}{2} \cos^2 J - \frac{1}{6} \right) \sin^3(\alpha - N) \right. \end{aligned} \right\}$$

$$-\frac{1}{2}(1+\cos^2 J)\sin(\alpha-N)\cos^2(\alpha-N)\sin^3 \theta \quad (4.3.1)$$

なお

$\sigma$  : 軌道に沿って測った 1950.0 の平均赤道と瞬時の真の赤道の角距離

とすれば

$$\sigma = \omega - \phi \quad (4.3.2)$$

である。

### 第 5 章 軌道要素の変化率

$a, e, i, \Omega_q, \omega, \chi^*$ などをそれぞれ  $El_1, El_2, El_3, El_4, El_5, El_6$  などによって表し、これらを代表する表示を  $El_k$  とする。そうすれば次式は諸作用下における軌道要素の変化率を代表的に示すことになる。

$$\begin{aligned} \frac{dEl_k}{dt} = & \left( \frac{dEl_k}{dt} \right)_E + \left( \frac{dEl_k}{dt} \right)_L + \left( \frac{dEl_k}{dt} \right)_S + \left( \frac{dEl_k}{dt} \right)_R \\ & + \left( \frac{dEl_k}{dt} \right)_A + \left( \frac{dEl_k}{dt} \right)_T + \left( \frac{dEl_k}{dt} \right)_P \end{aligned} \quad (5.1)$$

この右辺の各項を順次に以下に求めることにする。

#### 5.1 地球の重力potentialのharmonicsに基づく力による軌道要素の変化率

$(dEl_k/dt)_E$  は (3.1.1) および (4.1.1.1) から (4.1.8) までの諸式によって時刻および軌道要素の関数として求められ、次のようになる<sup>7)</sup>

$$\begin{aligned} \left( \frac{da}{dt} \right)_E = & -\frac{2\mu}{na} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} (l-2p+q) J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \\ & \times G_{l,p,q}(e) F_{l,m,p}(i) \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta), \\ \left( \frac{de}{dt} \right)_E = & \frac{\mu}{na^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \\ & \times G_{l,p,q}(e) \{-(l-2p+q)(1-e^2) + (l-2p)\sqrt{1-e^2}\} \\ & \times F_{l,m,p}(i) \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta), \\ \left( \frac{di}{dt} \right)_E = & \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \\ & \times G_{l,p,q}(e) F_{l,m,p}(i) \{-(l-2p) \cot i \\ & + m \operatorname{cosec} i\} \end{aligned}$$

$$\times \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta),$$

$$\left( \frac{d\Omega_q}{dt} \right)_E = \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}}$$

$$\times G_{l,p,q}(e) \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di}$$

$$\times \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta),$$

$$\left( \frac{d\omega}{dt} \right)_E = \frac{\mu}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}}$$

$$\times \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} F_{l,m,p}(i) \right.$$

$$\left. - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} G_{l,p,q}(e) \times \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} \right\}$$

$$\times \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta),$$

$$\left( \frac{d\chi^*}{dt} \right)_E = \frac{\mu}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}}$$

$$\times \left\{ -\frac{1-e^2}{e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + 2(l+1) G_{l,p,q}(e) \right\}$$

$$\times F_{l,m,p}(i) \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta)$$

$$(5.1.1)$$

#### 5.2 月と太陽の引力による軌道要素の変化率

$(dEl_k/dt)_D$  は (3.1.1) および (4.1.2.1) から (4.1.2.5) までの諸式によって時刻および軌道要素の関数として求められ、次のようになる<sup>8)</sup>

$$\begin{aligned} \left( \frac{da}{dt} \right)_D = & -2Gm_D \frac{1}{na} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \\ & \times \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \kappa_m (l-2p+q) \frac{a^l}{a_D^{l+1}} H_{l,p,q}(e) \\ & \times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) \\ & \times \sin T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D), \\ \left( \frac{de}{dt} \right)_D = & Gm_D \frac{1}{na^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \\ & \times \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \kappa_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} H_{l,p,q}(e) \\ & \times \{-(l-2p+q)(1-e^2) + (l-2p)\sqrt{1-e^2}\} \\ & \times G_{l,h,j}(e) F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \times \sin T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, Q, \omega_D, M_D, Q_D), \\
 \left(\frac{di}{dt}\right)_D &= G m_D \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \\
 & \times \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \kappa_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\
 & \times F_{l,m,p}(i) \{- (l-2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i\} \\
 & \times F_{l,m,h}(i_D) \sin T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, Q, \\
 & \qquad \qquad \qquad \omega_D, M_D, Q_D), \\
 \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_D &= G m_D \frac{1}{n a \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \\
 & \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \kappa_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\
 & \times \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} F_{l,m,p}(i_D) \\
 & \times \cos T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, Q, \omega_D, M_D, Q_D), \\
 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_D &= G m_D \frac{1}{n a^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \\
 & \times \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \kappa_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \\
 & \times \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dH_{l,p,q}(e)}{de} F_{l,m,p}(i) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} H_{l,p,q}(e) \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} \right\} \\
 & \times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,h}(i_D) \\
 & \times \cos T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, Q, \omega_D, M_D, Q_D), \\
 \left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_D &= -G m_D \frac{1}{n a^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \\
 & \times \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \kappa_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \\
 & \times \left\{ \frac{1-e^2}{e} \frac{dH_{l,p,q}(e)}{de} + 2l H_{l,p,q}(e) \right\} \\
 & \times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) \\
 & \times \cos T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, Q, \omega_D, M_D, Q_D) \tag{5.2.1}
 \end{aligned}$$

5.3 太陽輻射圧に基づく力による軌道要素の変化率

( $dEl_k/dt$ )<sub>R</sub> は (3.1.1) および (4.1.3.1) から (4.1.3.6) までの諸式によって時刻および軌道要素の関数

として求められ、次のようになる<sup>9)</sup>

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{da}{dt}\right)_R &= -\frac{2CF}{n} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 l(2u-3) \\
 & \times \{C_l^{1,1}(e) + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} L_{v,w}(i, \epsilon) \\
 & \times \sin T_{l,u,v,w}(\omega, M, Q, \lambda_S), \\
 \left(\frac{de}{dt}\right)_R &= \frac{CF}{n a e} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 \{-l(2u-3)(1-e^2) + \sqrt{1-e^2}\} \\
 & \times \{C_l^{1,1}(e) + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} L_{v,w}(i, \epsilon) \\
 & \times \sin T_{l,u,v,w}(\omega, M, Q, \lambda_S), \\
 \left(\frac{di}{dt}\right)_R &= \frac{CF}{n a \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 \{C_l^{1,1}(e) + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} \\
 & \times \{-\cot i + (v-2) \operatorname{cosec} i\} L_{v,w}(i, \epsilon) \\
 & \times \sin T_{l,u,v,w}(\omega, M, Q, \lambda_S), \\
 \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_R &= \frac{CF}{n a \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 \{C_l^{1,1}(e) \\
 & + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} \\
 & \times \frac{dL_{v,w}(i, \epsilon)}{di} \cos T_{l,u,v,w}(\omega, M, Q, \lambda_S), \\
 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_R &= \frac{CF}{n a} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left\{ \frac{dC_l^{1,1}(e)}{de} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (2u-3) \frac{dS_l^{1,1}(e)}{de} \right\} \right. \\
 & \quad \left. \times L_{v,w}(i, \epsilon) - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} \{C_l^{1,1}(e) + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} \right. \\
 & \quad \left. \times \frac{dL_{v,w}(i, \epsilon)}{di} \right\} \\
 & \times \cos T_{l,u,v,w}(\omega, M, Q, \lambda_S), \\
 \left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_R &= -\frac{CF}{n a} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 \\
 & \times \left\{ \frac{1-e^2}{e} \left\{ \frac{dC_l^{1,1}(e)}{de} + (2u-3) \frac{dS_l^{1,1}(e)}{de} \right\} \right. \\
 & \quad \left. + 2 \{C_l^{1,1}(e) + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} \right\} L_{v,w}(i, \epsilon) \\
 & \times \cos T_{l,u,v,w}(\omega, M, Q, \lambda_S) \tag{5.3.1}
 \end{aligned}$$

5.4 大気の抵抗の力による軌道要素の変化率

( $dEl_k/dt$ )<sub>A</sub> は (3.1.1) および (4.2.1.1) から (4.2.

1.4)までの諸式によって時刻および軌道要素の関数として求められ、次のようになる<sup>10)</sup>

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{da}{dt}\right)_A &= -\sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \sqrt{a} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{e^2}{(1-e^2)^2} \sin^2 f + \sqrt{1-e^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{\nu}{n} \cos i \right\} \tau, \\
 \left(\frac{de}{dt}\right)_A &= -\frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \frac{1}{\sqrt{a}} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin^2 f + \sqrt{1-e^2} \frac{a}{r} (\cos E + \cos f) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\nu}{n} \cos i \frac{r}{a} (\cos E + \cos f) \right\} \tau, \\
 \left(\frac{di}{dt}\right)_A &= -\frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \\
 &\quad \times \frac{\nu}{n} \frac{\sin i}{\sqrt{a} (1-e^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^2(\omega+f) \tau, \\
 \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_A &= -\frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \\
 &\quad \times \frac{\nu}{n} \frac{1}{\sqrt{a} (1-e^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin(\omega+f) \cos(\omega+f) \tau, \\
 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_A &= \frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \frac{1}{\sqrt{a}} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \cos f - \frac{1}{e\sqrt{1-e^2}} \sin f \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{n} \frac{\cos i}{e(1-e^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{a}{r} \sin f \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{n} \frac{\cos i}{e} \frac{r}{a} \sin f \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{n} \frac{\cos i}{1-e^2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin(\omega+f) \cos(\omega+f) \right\} \tau, \\
 \left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_A &= -\frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \rho \frac{1}{\sqrt{a}} \\
 &\quad \times \left\{ \sin f \cos f - \frac{2e}{1-e^2} \frac{r}{a} \sin f - \frac{1}{e} \sin f \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{n} \frac{\cos i}{e\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f - \frac{1-e^2}{e} \frac{a}{r} \sin f \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{n} \frac{\sqrt{1-e^2} \cos i}{e} \frac{r}{a} \sin f \right\} \tau
 \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

## 5.5 微小な推力による軌道要素の変化率

### 5.5.1 摂動加速度に関する項がGauss形の運動方程式を用いる場合

$(dE_k/dt)_T$ は(3.1.1), (4.2.2.1), (4.2.2.2), (4.2.2.5)および(4.2.2.6)の諸式によって時刻および軌道要素の関数として求められ、次のようになる<sup>11)</sup>

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{da}{dt}\right)_T &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \\
 &\quad \times \left[ e \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) D_S(S_T, lM) \right. \\
 &\quad \left. + (1-e^2) C_0^{-1,0}(e) \left\{ T_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (T_{Tk} t^k \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + a_{T_k} \cos kt + b_{T_k} \sin kt) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + (1-e^2) \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{-1,0}(e) D_C(T_T, lM) \right] \\
 \left(\frac{de}{dt}\right)_T &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \\
 &\quad \times \left[ \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) D_S(S_T, lM) \right. \\
 &\quad \left. + \{A_{1,0}(e) + C_0^{0,1}(e)\} \left\{ T_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (T_{Tk} t^k \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + a_{T_k} \cos kt + b_{T_k} \sin kt) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \{A_{1,l}(e) + C_l^{0,1}(e)\} D_C(T_T, lM) \right], \\
 \left(\frac{di}{dt}\right)_T &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) + S_l^{1,1}(e)\} D_C(W_T, \omega + lM) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) - S_l^{1,1}(e)\} D_C(W_T, \omega - lM) \right], \\
 \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_T &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2} \sin i} \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) + S_l^{1,1}(e)\} D_S(W_T, \omega + lM) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) - S_l^{1,1}(e)\} D_S(W_T, \omega - lM) \right], \\
 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_T &= -\left(\frac{dQ}{dt}\right)_T \cos i + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \\
 &\quad \times \left[ -C_0^{0,1}(e) \left\{ S_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (S_{Tk} t^k + a_{S_k} \cos kt \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + b_{S_k} \sin kt) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,1}(e) D_C(S_T, lM) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-e^2} S_l^{1,1}(e) + S_l^{0,1}(e) \right\} D_S(T_T, lM) \right], \\
 \left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_T &= -\sqrt{1-e^2} \left\{ \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_T \cos i + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_T \right\} \\
 &\quad - \frac{2}{na} \left[ C_0^{1,0}(e) \left\{ S_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (S_{Tk} t^k + a_{S_k} \cos kt \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_{S_T k} \sin kt \} \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{1,0}(e) D_C(S_T, LM) \} , \\
D_S(A_T, \alpha_\nu) = & A_{T0} \sin \alpha_\nu \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \{ A_{Tk} t^k \sin \alpha_\nu \\
& + \frac{1}{2} a_{A_T k} \{ \sin(\alpha_\nu + kt) + \sin(\alpha_\nu - kt) \\
& - \frac{1}{2} b_{A_T k} \{ \cos(\alpha_\nu + kt) - \cos(\alpha_\nu - kt) \} \} , \\
D_C(A_T, \alpha_\nu) = & A_{T0} \cos \alpha_\nu \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \{ A_{Tk} t^k \cos \alpha_\nu \\
& + \frac{1}{2} a_{A_T k} \{ \cos(\alpha_\nu + kt) + \cos(\alpha_\nu - kt) \} \\
& + \frac{1}{2} b_{A_T k} \{ \sin(\alpha_\nu + kt) - \sin(\alpha_\nu - kt) \} \} \\
& (5.5.1.1)
\end{aligned}$$

### 5.5.2 摂動加速度に関する項が速さを用いて表された運動方程式を用いる場合

$(dE/dt)_T$  は (3.2.1), (4.2.2.1), (4.2.2.3), (4.2.2.4), (4.2.2.5) および (4.2.2.6) の諸式によって時刻および軌道要素の関数として求められ, 次のようになる<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}
\left(\frac{da}{dt}\right)_T = & \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \\
& \times \left[ \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{s,q}(e) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{p,s,q}(e) C_0^{0,p}(e) \right\} \right. \\
& \times \left\{ T_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (T'_{Tk} t^k + a_{T'_{Tk}} \cos kt + b_{T'_{Tk}} \sin kt) \right\} \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{p,s,q}(e) \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,p}(e) D_C(T'_T, LM) \} \\
\left(\frac{de}{dt}\right)_T = & \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \\
& \times \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \left\{ 2 \{ e + C_0^{0,p}(e) \} \right. \right. \\
& \times \left\{ T'_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (T'_{Tk} t^k + a_{T'_{Tk}} \cos kt + b_{T'_{Tk}} \sin kt) \right\} \\
& + 2 \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,1}(e) D_C(T'_T, LM)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{1,1}(e) D_S(N'_T, LM) \} \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \\
& \times \left\{ \left\{ 2e C_0^{0,p}(e) + C_0^{0,p+1}(e) + C_0^{0,p-1}(e) \right\} \right. \\
& \times \left\{ T'_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (T'_{Tk} t^k + a_{T'_{Tk}} \cos kt + b_{T'_{Tk}} \sin kt) \right\} \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ 2e C_l^{0,p}(e) + C_l^{0,p+1}(e) + C_l^{0,p-1}(e) \right\} \\
& \times D_C(T'_T, LM) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ S_l^{1,p+1}(e) - S_l^{1,p-1}(e) \right\} \\
& \times D_S(N'_T, LM) \} \} \\
\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_T = & - \left(\frac{dQ}{dt}\right)_T \cos i + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \\
& \times \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \right. \\
& \times \left[ \left\{ 2 \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) D_S(T'_T, LM) \right. \right. \\
& + \left\{ e + C_0^{0,1}(e) + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_0^{1,0}(e) - C_0^{1,2}(e) \} \right\} \\
& \times \left\{ N'_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (N'_{Tk} t^k + a_{N'_{Tk}} \cos kt + b_{N'_{Tk}} \sin kt) \right\} \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ C_l^{0,1}(e) + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_l^{1,0}(e) - C_l^{1,2}(e) \} \right\} \\
& \times D_C(N'_T, LM) \} \} \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \\
& \times \left[ \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ S_l^{0,p+1}(e) - S_l^{0,p-1}(e) \right\} D_S(T'_T, LM) \right. \\
& + \left\{ e C_0^{0,p}(e) + \frac{1}{2} \{ C_0^{0,p+1}(e) + C_0^{0,p-1}(e) \} \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \left\{ C_0^{1,p}(e) - \frac{1}{2} \{ C_0^{1,p+2}(e) + C_0^{1,p-2}(e) \} \right\} \} \} \\
& + \left\{ N'_{T0} + \sum_{k=1}^{\infty} (N'_{Tk} t^k + a_{N'_{Tk}} \cos kt + b_{N'_{Tk}} \sin kt) \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \left[ e C_l^{0,p}(e) + \frac{1}{2} \{ C_l^{0,p+1}(e) + C_l^{0,p-1}(e) \} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_l^{1,p}(e) - \frac{1}{2} \{ C_l^{1,p+1}(e) + C_l^{1,p-2}(e) \} \} \right] \right] \\ \times D_C(N_T', \ell M) \Big] ,$$

$$\left( \frac{d\lambda^*}{dt} \right)_T = -\sqrt{1-e^2} \left\{ \left( \frac{dQ}{dt} \right)_T \cos i + \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_T \right\} \\ - \frac{2}{na} \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \right. \\ \times \left[ e \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{j,1}(e) D_S(T_T', \ell M) \right. \\ \left. - \{ C_0^{1,0}(e) + e C_0^{1,1}(e) \} \right. \\ \left. \times \left[ N_{T_0}' + \sum_{k=1}^{\infty} (N_{T_k}' t^k + a_{N_{T_k}'} \cos kt \right. \right. \\ \left. \left. + b_{N_{T_k}'} \sin kt) \right] \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^{\infty} \{ C_l^{1,0}(e) + e C_l^{1,1}(e) \} D_C(N_T', \ell M) \right] \\ + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \\ \times \left[ \frac{1}{2} e \sum_{l=1}^{\infty} \{ S_l^{1,p+1}(e) - S_l^{1,p-1}(e) \} D_S(T_T', \ell M) \right. \\ \left. - \{ C_0^{1,p}(e) + \frac{1}{2} e \{ C_0^{1,p+1}(e) + C_0^{1,p-1}(e) \} \} \right. \\ \left. \times \left[ N_{T_0}' + \sum_{k=1}^{\infty} (N_{T_k}' t^k + a_{N_{T_k}'} \cos kt \right. \right. \\ \left. \left. + b_{N_{T_k}'} \sin kt) \right] \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^{\infty} \left[ C_l^{1,p}(e) + \frac{1}{2} e \{ C_l^{1,p+1}(e) + C_l^{1,p-1}(e) \} \right] \right. \\ \left. \times D_C(N_T', \ell M) \right] \Big] \Big] \\ (5.5.2.1)$$

ここで  $\left( \frac{di}{dt} \right)_T$  と  $\left( \frac{dQ_q}{dt} \right)_T$  は (5.5.1.1) に示される式と同じである。

## 5.6 赤道面の運動による軌道要素の変化率

$\left( \frac{dEl_k}{dt} \right)_P$  は (3.1.1) あるいは (3.2.1) のいずれかおよび (4.3.1) の二式によって時刻の関数である  $\alpha$  と  $\theta$  ならびに軌道要素の関数として導き出される。ここで  $\sin \theta$ ,  $d\theta/dt$  に関しての一次、二次および三

次の式を因数とする項をそれぞれ添字の I, II および III によって示すことにする。このとき I, II および III を添字とする項の大きさはそれぞれ  $10^{-7}$ ,  $10^{-11}$  および  $10^{-13}$  をこえぬ程度となる。

次の諸量をとる。

$\Psi$ : 1950.0 における黄道に沿って測った 1950.0

の平均赤道と瞬時の真の赤道との角距離

$\epsilon_0$ : 1950.0 における平均赤道に基づく平均黄道傾角

$\epsilon_1$ : 瞬時の真の赤道に対する 1950.0 における黄道の傾角

このとき  $\alpha$  および  $\theta$  を  $\Psi$ ,  $\epsilon_0$  および  $\epsilon_1$  で置き換えることができる。そうすれば、上に導き出される  $(dEl_k/dt)_P$  は、時刻の関数である  $\Psi$ ,  $\epsilon_0$  および  $\epsilon_1$  ならびに軌道要素の関数として求められ、次のようになる<sup>5)</sup>

$$\left( \frac{di}{dt} \right)_P = \frac{\partial i}{\partial t} = D_{iI} + D_{iII} + D_{iIII} ,$$

$$\left( \frac{dQ_q}{dt} \right)_P = \frac{\partial Q_q}{\partial t} = D_{Q_qI} + D_{Q_qII} + D_{Q_qIII} ,$$

$$\left( \frac{d\omega}{dt} \right)_P = \frac{\partial \omega}{\partial t} = D_{\omega I} + D_{\omega II} + D_{\omega III} ,$$

$$D_{iI} = -T_3 \sin Q_q - T_4 \cos Q_q ,$$

$$D_{iII} = 0 ,$$

$$D_{iIII} = -\frac{1}{2}(T_1^2 + T_2^2)(T_7 \sin Q_q + T_8 \cos Q_q),$$

$$D_{Q_qI} = -\cot i (T_3 \cos Q_q - T_4 \sin Q_q) ,$$

$$D_{Q_qII} = \frac{1}{2} (T_2 T_3 - T_1 T_4) ,$$

$$D_{Q_qIII} = -\frac{1}{2} \cot i (T_7 \cos Q_q - T_8 \sin Q_q)$$

$$\times \{ T_1^2 + T_2^2 - 3(T_1 \sin Q_q + T_2 \cos Q_q)^2 \}$$

$$- \frac{1}{2} \cot i (T_5 \sin Q_q + T_6 \cos Q_q)$$

$$\times \{ T_1^2 + T_2^2 - 3(T_1 \cos Q_q - T_2 \sin Q_q)^2 \},$$

$$D_{\omega I} = \frac{1}{\sin i} (T_3 \cos Q_q - T_4 \sin Q_q) ,$$

$$D_{\omega II} = 0 ,$$

$$D_{\omega III} = \frac{1}{2 \sin i} (T_1^2 + T_2^2)(T_7 \cos Q_q - T_8 \sin Q_q),$$

$$T_1 = \{ \sin \epsilon_0 + \cos \epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_0) \} \sin \Psi ,$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (1 - \cos \Psi), \\
T_3 &= \left\{ \cos \varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \right\} \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Psi \\
&\quad + \left\{ \sin \varepsilon_0 + \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \right\} \frac{d\Psi}{dt} \cos \Psi, \\
T_4 &= -\left\{ \sin^2 \varepsilon_0 + \cos^2 \varepsilon_0 \cos \Psi \right. \\
&\quad \left. + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) (1 - \cos \Psi) \right\} \frac{d\varepsilon_1}{dt} \\
&\quad + \cos \varepsilon_0 \left\{ \sin \varepsilon_0 + \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \right\} \frac{d\Psi}{dt} \sin \Psi, \\
T_5 &= -\frac{1}{\sin \varepsilon_0} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\Psi}{dt} \sum_{j=0}^{jm} \frac{(2j-1)!!}{j! 2^j} \cos^{2j+1} \Psi \\
&\quad + \frac{1}{2} \cos \varepsilon_0 \frac{d\Psi}{dt} \sin \Psi \cos \Psi + \sin \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \\
&\quad - \frac{\cos^2 \varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \Psi - \cos \varepsilon_0 \frac{d\Psi}{dt} \sin \Psi, \\
T_6 &= \frac{1}{\sin \varepsilon_0} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 \frac{d\Psi}{dt} \sum_{j=0}^{jm} \cos^{2j+1} \Psi \\
&\quad - \frac{1}{2} \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\Psi}{dt} \cos \Psi \\
&\quad - \sin \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sum_{j=0}^{jm} \frac{(2j-1)!! \cos^{2j} \Psi}{j! 2^j} \\
&\quad + \frac{\cos^2 \varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sum_{j=0}^{jm} \frac{(2j-1)!! \cos^{2j+1} \Psi}{j! 2^j} \\
&\quad + \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\Psi}{dt} \\
&\quad + \frac{1}{4} \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 \frac{d\Psi}{dt} \sin^2 \Psi \cos \Psi \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Psi \\
&\quad - \frac{1}{2} \cos^3 \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Psi \cos \Psi \\
&\quad - \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 \frac{d\Psi}{dt} (1 - \cos \Psi) \\
T_7 &= T_3 - T_6 \\
T_8 &= T_4 + T_5
\end{aligned}$$

(5.6.1)

ここで  $\cos^{2j+1} \Psi$  あるいは  $\cos^{2j} \Psi$  を因数とする項において  $j m$  は無限大である。しかしこれらの項は比較的小さいので  $j m$  をあまり大きくする必要はない。なお  $\theta$  と  $\Psi$  はほぼ同位の微小な数である。

特に(5.6.1)の最初の三式において右辺の第二項までをとることにすれば(5.6.1)は次のようになる<sup>5)</sup>

$$\begin{aligned}
\frac{\partial i}{\partial t} &= D_{iI} + D_{iII} \quad , \\
\frac{\partial \Omega_a}{\partial t} &= D_{\Omega_a I} + D_{\Omega_a II} \quad , \\
\frac{\partial \omega}{\partial t} &= D_{\omega I} + D_{\omega II} \quad , \\
D_{iI} &= -\left\{ \cos \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Psi \sin \Omega_a \right. \\
&\quad - \sin \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Psi \sin \Omega_a \\
&\quad + \sin \varepsilon_0 \frac{d\Psi}{dt} \cos \Psi \sin \Omega_a \\
&\quad + \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\Psi}{dt} \cos \Psi \sin \Omega_a \\
&\quad - \sin^2 \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \Omega_a \\
&\quad - \cos^2 \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \Psi \cos \Omega_a \\
&\quad \left. - \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \Omega_a \right. \\
&\quad + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \Psi \cos \Omega_a \\
&\quad + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\Psi}{dt} \sin \Psi \cos \Omega_a \\
&\quad \left. + \cos^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\Psi}{dt} \sin \Psi \cos \Omega_a \right\} \quad , \\
D_{iII} &= 0 \quad , \\
D_{\Omega_a I} &= -\cot i \left\{ \cos \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Psi \cos \Omega_a \right. \\
&\quad - \sin \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Psi \cos \Omega_a \\
&\quad + \sin \varepsilon_0 \frac{d\Psi}{dt} \cos \Psi \cos \Omega_a \\
&\quad + \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\Psi}{dt} \cos \Psi \cos \Omega_a \\
&\quad + \sin^2 \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Omega_a \\
&\quad \left. + \cos^2 \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \Psi \sin \Omega_a \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Omega_a \\
& - \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \Psi \sin \Omega_a \\
& - \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\Psi}{dt} \sin \Psi \sin \Omega_a \\
& - \cos^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\Psi}{dt} \sin \Psi \sin \Omega_a \}, \\
D_{\Omega_q II} = & \frac{1}{2} \left\{ (-\cos \varepsilon_0 + \sin^2 \varepsilon_0) (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Psi \right. \\
& - \sin^3 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\Psi}{dt} \cos \Psi \\
& + \sin \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Psi \\
& + \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\Psi}{dt} \cos \Psi \\
& + \cos^3 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \Psi \cos \Psi \\
& - \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\Psi}{dt} \cos^2 \Psi \\
& - \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\Psi}{dt} \cos^2 \Psi \\
& - \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\Psi}{dt} \sin^2 \Psi \\
& \left. - 2 \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\Psi}{dt} \sin^2 \Psi \right\}, \\
D_{\omega I} = & - \frac{1}{\cot i \sin i} D_{\Omega_q I} \\
D_{\omega II} = & 0
\end{aligned} \tag{5.6.1'}$$

ただし上式において  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2$  を因数にもつ項は特に微小<sup>(注)</sup>なので省略してある。

次の諸量をとる。

$\Psi_m$ : 1950.0からの日月歳差

$\Delta\Psi$ : 黄経の章動の長周期部分

$d\Psi$ : 黄経の章動の短周期部分

$\varepsilon_m$ : 瞬時の平均赤道に基づく平均黄道傾角

$\Delta\varepsilon$ : 黄道傾角の章動の長周期部分

$d\varepsilon$ : 黄道傾角の章動の短周期部分

これらに関して次の式が成立する。

$$\Psi = \Psi_m + \Delta\Psi + d\Psi$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \Delta\varepsilon + d\varepsilon$$

ここで次のようにみなすことにする。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon$$

このとき次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_1 - \varepsilon_0 &= (\varepsilon_m - \varepsilon_0) + \sum_{k=2}^{k_m} p_k S_R \cos R_k, \\
\Psi &= \Psi_m + \sum_{l=2}^{l_m} q_l S_R \sin S_l
\end{aligned} \right\} \tag{5.6.2}$$

以上において  $\varepsilon_m$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $p_k$ ,  $R_k$ ,  $\Psi_m$ ,  $q_l$  および  $S_l$  は天体暦<sup>22)</sup>に表示されている。この  $p_k$  および  $q_l$  は角の秒を単位として与えられ,  $R_k$  および  $S_l$  は太陽と月の位置に関する量である。また次のようになる。

$$S_R = \frac{\pi}{3600 \times 180} \frac{\text{rad}}{\text{arc sec}}$$

(5.6.2) の  $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$  および (5.6.2) から求められる  $\varepsilon_1$  と  $\Psi$  の変化率を次のように表すことにする。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 - \varepsilon_0 &= \sum_{k'=1}^{k_m} P_{k'} \cos R_{k'}, \\
P_{k'} &= \varepsilon_m - \varepsilon_0, \quad R_{k'} = 0, \\
P_{k'} &= p_{k'} S_R, \quad R_{k'} = R_{k'}, \quad (k'=2, 3, \dots, k_m)
\end{aligned}$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \sum_{k=1}^{k_m} P_k \sin R_k,$$

$$P_1 = \frac{d\varepsilon_m}{dt}, \quad R_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$P_k = -p_k S_R \dot{R}_k, \quad (k=2, 3, \dots, k_m)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \sum_{l=1}^{l_m} Q_l \cos S_l,$$

$$Q_1 = \frac{d\Psi_m}{dt}, \quad S_1 = 0,$$

$$Q_l = q_l S_R \dot{S}_l, \quad (l=2, 3, \dots, l_m) \tag{5.6.3}$$

ここで  $\dot{R}_k$  および  $\dot{S}_l$  はそれぞれ  $R_k$  および  $S_l$  の変化率である。なお  $R_{k'}$  の変化率を  $\dot{R}_{k'}$  とし,  $p_k$  と  $q_l$  の

(注) 現在において大略  $10^{-17} \sim 10^{-14}$  rad/day の程度となる。

並進運動座標系  $O x_s y_s z_s$  に対する赤道座標系  $O x_T y_T z_T$  の相対運動によって極めて徐々に変化する。

変化率は微小である故にこれらを見捨ててある。(5.6.1)に(5.6.3)を代入すれば  $(dEl_k/dt)_P$  は時刻の関数である日月歳差, 黄経の章動, 平均黄道傾角および黄道傾角の章動ならびに軌道要素の関数として求められることになる<sup>5)</sup>

### 第 6 章 軌道要素の変化

#### 6.1 一次の摂動に基づく軌道要素の変化

(5.1)に各作用による軌道要素の変化率を表す(5.1.1), (5.2.1), (5.3.1), (5.4.1), (5.5.1.1)あるいは(5.5.2.1), (5.6.1)などを代入した式は諸作用下における軌道要素の変化率の表示式となる。ここで(5.6.1)には(5.6.3)が代入されたものとする。次にこの軌道要素の変化率を表示する式の軌道要素に関する解を求める。しかしこれを厳密に解くことはできない。そこで線形摂動の方法によって近似解を求めることにする<sup>23)</sup>

以下において添字  $(j)$  および  $(m)(j)$  はそれぞれ  $t = t(j)$  および  $t = t(m)(j)$  における量であることを示す。そして

$$(\delta t)_{(j)} = t_{(j+1)} - t_{(j)} \tag{6.1.1}$$

とし, また  $(\delta t)_{(j)}$  の間で太陽輻射圧に基づく力の作用下にある期間に, その順につけた番号を

$$m = 1, 2, 3, \dots, m_R$$

とし, 第  $m$  番目の期間の始めと終りの時刻をそれぞれ  $t = t(m)(j)$ ,  $t = t(m')(j)$  とする。そして

$$(\delta t)_{(m)(j)} = t(m')(j) - t(m)(j) \tag{6.1.2}$$

とする。(5.1)に各作用による軌道要素の変化率の諸式を代入した式である諸作用下における軌道要素の変化率の表示式の右辺にある諸量は  $(\delta t)_{(j)}$  の間で  $t_{(j)}$  における諸量の変化率を以て変化するとみなす。ただし特にこの諸量の変化率が小さい諸量においてはその変化を見捨てする。このとき  $(\delta t)_{(j)}$  の間で次のように表しうる。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_{(j)} + \dot{\theta}_{(j)} (\delta t)_{(j)}, \\ \epsilon_1 - \epsilon_0 &= \sum_{k=1}^{k_m} P'_{k'(j)} \cos R'_{k'} \quad , \\ \frac{d\epsilon_1}{dt} &= \sum_{k=1}^{k_m} P_k(j) \sin R_k \quad , \\ \frac{d\psi}{dt} &= \sum_{l=1}^{l_m} Q_l(j) \cos S_l \quad , \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} R'_k &= R'_{k(j)} + \dot{R}'_{k(j)} \delta t_{(j)}, \\ R_k &= R_{k(j)} + \dot{R}_{k(j)} \delta t_{(j)}, \\ S_l &= S_{l(j)} + \dot{S}_{l(j)} \delta t_{(j)}, \\ \psi &= \psi_{(j)} + \dot{\psi}_{(j)} \delta t_{(j)}, \\ a_D &= a_{D(j)} \quad , \\ e_D &= e_{D(j)} \quad , \\ i_D &= i_{D(j)} \quad , \\ Q_D &= Q_{D(j)} + \dot{Q}_{D(j)} \delta t_{(j)}, \\ \omega_D &= \omega_{D(j)} + \dot{\omega}_{D(j)} \delta t_{(j)}, \\ M_D &= M_{D(j)} + \dot{M}_{D(j)} \delta t_{(j)}, \\ \lambda_S &= \lambda_{S(j)} + \dot{\lambda}_{S(j)} \delta t_{(j)}, \\ \epsilon &= \epsilon_{(j)} \quad , \\ a &= a_{(j)} \quad , \\ e &= e_{(j)} \quad , \\ i &= i_{(j)} \quad , \\ Q_q &= Q_{q(j)} + \dot{Q}_{q(j)} \delta t_{(j)}, \\ Q &= Q_{(j)} + \dot{Q}_{(j)} \delta t_{(j)}, \\ \omega &= \omega_{(j)} + \dot{\omega}_{(j)} \delta t_{(j)}, \\ M &= M_{(j)} + \dot{M}_{(j)} \delta t_{(j)}, \\ \delta t_{(j)} &= t - t_{(j)} \end{aligned} \right\} \tag{6.1.3}$$

ここで諸量の変化率をこの諸量を示す記号の上に点をつけて示すことにする。(6.1.3)において  $\dot{Q}_q, \dot{Q}, \dot{\omega}$  および  $\dot{M}$  以外の変化率はこれらの諸量を表示したこれまでの理論によって定められる。次に  $\dot{Q}_q, \dot{Q}, \dot{\omega}$ , および  $\dot{M}$  の四量を定める。このためにまず次の四式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_q}{dt} \quad , \quad \frac{dQ}{dt} \quad , \\ \frac{d\omega}{dt} \quad , \quad n + \frac{d\chi^*}{dt} \end{aligned} \right\} \tag{6.1.4}$$

を, (5.1)に各作用による軌道要素の変化率の諸式を代入した式である諸作用下における軌道要素の変化率の表示式および  $D$  の変化率を表示する(7.2.2)の第二式を用いて表す。そしてこの四式を構成する無数の構成項の中でその絶対値が比較的大きなもののみを取り, その他のものを無視する。このときにこの四式をそれぞれ  $\dot{Q}_q, \dot{Q}, \dot{\omega}$  および  $\dot{M}$  の表示式とする。以上のようにして絶対値が比較的大きなものとしてとり出される項は,  $(\delta t)_{(j)}$  が大きい場合には長年項であるが,  $(\delta t)_{(j)}$  が小さくなるにつれてさらに長周期項, 短周期項が加わってくる。

(5.1) に各作用による軌道要素の変化率の諸式を代入した式である諸作用下における軌道要素の変化率の表示式の右辺において以上のようにする。そうすればこの式は軌道要素の変化率において一次の摂動に基づく部分である次式を表す。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dElk}{dt}\right)_1 &= \left(\frac{dElk}{dt}\right)_{1E} + \left(\frac{dElk}{dt}\right)_{1L} + \left(\frac{dElk}{dt}\right)_{1S} + \left(\frac{dElk}{dt}\right)_{1R} \\ &+ \left(\frac{dElk}{dt}\right)_{1A} + \left(\frac{dElk}{dt}\right)_{1T} + \left(\frac{dElk}{dt}\right)_{1P} \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

そしてこの式は  $t$  に関する積分が可能である。なお一次の摂動の場合を添字の 1 によって示すことにする。

積分区間の幅を  $\delta t$  として、この軌道要素の変化率を表す式を積分して求められる一次の摂動に基づく軌道要素の変化を

$$\begin{aligned} \delta_1 Elk &= \delta_1 Elk_E + \delta_1 Elk_L + \delta_1 Elk_S + \delta_1 Elk_R \\ &+ \delta_1 Elk_A + \delta_1 Elk_T + \delta_1 Elk_P \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

とする。特に  $t_{(j)}$  から  $t_{(j+1)}$  までの積分および  $t_{(m)}$  から  $t_{(m')}(j)$  までの積分によって求められるこの軌道要素の変化をそれぞれ

$$(\delta_1 Elk)_{(j)}, (\delta_1 Elk)_{(m)(j)}$$

とする。このとき次のようになる。

$$(\delta_1 Elk)_{(j)} = \sum_{m=1}^{m_R} (\delta_1 Elk)_{(m)(j)}$$

なおここで  $t_{(j+1)}$  を  $t$  としたとき、および  $t_{(m')}(j)$  を  $t$  としたときのこの軌道要素の変化をそれぞれ

$$\delta_1 Elk_{(j)}, \delta_1 Elk_{(m)(j)}$$

とする。

一次の摂動に基づく半長軸の変化による平均近点離角の変化率は、次のように表される。以下において半長軸の変化に基づく場合を添字の  $\delta a$  によって示すことにする。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dM}{dt}\right)_{1,\delta a} &= -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \\ &\times (\delta_1 a_E + \delta_1 a_L + \delta_1 a_S + \delta_1 a_R \\ &+ \delta_1 a_A + \delta_1 a_T + \delta_1 a_P) \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

この(6.1.7)においても(6.1.3)のようにみなすこと

とする。そうすればこの式は  $t$  に関する積分が可能となる。

積分区間の幅を  $\delta t$  としてこの半長軸の変化による平均近点離角の変化率を表す式を積分して求めた平均近点離角の変化を

$$\begin{aligned} \delta_1 M_{\delta a} &= \delta_1 M_{\delta a,E} + \delta_1 M_{\delta a,L} + \delta_1 M_{\delta a,S} + \delta_1 M_{\delta a,R} \\ &+ \delta_1 M_{\delta a,A} + \delta_1 M_{\delta a,T} + \delta_1 M_{\delta a,P} \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

とする。ただし(6.1.7)および(6.1.8)において添字  $P$  をもつ部分は(5.6.1)によれば実際には存在しない。なお平均近点離角および軌道要素の関数に対しても軌道要素におけると同様の表し方を行うことにする。

以下に一次の摂動に基づく軌道要素の変化  $\delta_1 Elk$  とこの一次の摂動に基づく半長軸の変化による平均近点離角の変化率から得られる平均近点離角の変化  $\delta_1 M_{\delta a}$  を示す。

### 6.1.1 地球の重力potentialのharmoniesに基づく力による軌道要素の変化

(6.1.5)および(6.1.6)の右辺の第一項である  $(dElk/dt)_{1E}$  および  $\delta_1 Elk_E$  は次の五種の場合に分けられる。

- (1)  $l-2p=0$  ,  $m=0$  ,  $q=0$
- (2)  $l-2p+q=0$  ,  $m=0$  ,  $q \neq 0$
- (3)  $l-2p+q \neq 0$  ,  $m=0$
- (4)  $(l-2p+q)\dot{M} - m\dot{\theta} = 0$  ,  $m \neq 0$
- (5)  $(l-2p+q)\dot{M} - m\dot{\theta} \neq 0$  ,  $m \neq 0$

これらの五種の場合における軌道要素の変化を以下に順次に示す。

そして次に(6.1.8)の右辺の第一項である  $\delta_1 M_{\delta a,E}$  を示すことにする。

(1) Zonal harmoniesによる長年変化

(1)の場合には(5.1.1)の  $T_{l,m,p,q}$  の変化が無視されるので zonal harmoniesによる長年変化となる。これを添字 zse をつけて表せば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta_1 a_{zse} &= 0 , \\ \delta_1 e_{zse} &= 0 , \\ \delta_1 i_{zse} &= 0 , \\ \delta_1 \Omega_{zse} &= \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} J_{l,0} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} C_{l,\frac{l}{2},0}(e) \\ &\times \frac{dF_{l,0,\frac{l}{2}}(i)}{di} \delta t , \end{aligned}$$



$$\delta_1 \omega_{zse} = \frac{\mu}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \times \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dG_{l, \frac{l}{2}, 0}(e)}{de} F_{l, 0, \frac{l}{2}}(i) - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} G_{l, \frac{l}{2}, 0}(e) \frac{dF_{l, 0, \frac{l}{2}}(i)}{di} \right\} \delta t,$$

$$\delta_1 \chi_{zse}^* = \frac{\mu}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} J_{l, 0} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \times \left\{ -\frac{1-e^2}{e} \frac{dG_{l, \frac{l}{2}, 0}(e)}{de} + 2(\ell+1)G_{l, \frac{l}{2}, 0}(e) \right\} F_{l, 0, \frac{l}{2}}(i) \delta t$$

(6.1.1.1.1)

(2) zonal harmonics による長周期変化

[2] の場合には (5.1.1) の  $T_{l, m, p, q}$  が  $\omega$  の一次式となるので zonal harmonics による長周期変化となる。これを添字  $z_l$  をつけて表せば、次のようになる。

$$\delta_1 a_{z_l} = 0,$$

$$\delta_1 e_{z_l} = \frac{\mu \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_p (\ell-2p) J_{l, 0} \times \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l, p, -l+2p}(e) F_{l, 0, p}(i) I_s(\alpha_{z_l}),$$

$$\delta_1 i_{z_l} = -\frac{\mu \cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} (\ell-2p) J_{l, 0} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \times G_{l, p, -l+2p}(e) F_{l, 0, p}(i) I_s(\alpha_{z_l}),$$

$$\delta_1 Q_{qz_l} = \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_p J_{l, 0} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \times G_{l, p, -l+2p}(e) \frac{dF_{l, 0, p}(i)}{di} I_c(\alpha_{z_l}),$$

$$\delta_1 \omega_{z_l} = \frac{\mu}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_p J_{l, 0} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \times \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dG_{l, p, -l+2p}(e)}{de} F_{l, 0, p}(i) - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} G_{l, p, -l+2p}(e) \frac{dF_{l, 0, p}(i)}{di} \right\} I_c(\alpha_{z_l}),$$

$$\delta_1 \chi_{z_l}^* = \frac{\mu}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_p J_{l, 0} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \times \left\{ -\frac{1-e^2}{e} \frac{dG_{l, p, -l+2p}(e)}{de} + 2(\ell+1)G_{l, p, -l+2p}(e) \right\} F_{l, 0, p}(i) \delta t$$

$$+ 2(\ell+1)G_{l, p, -l+2p}(e) \times F_{l, 0, p}(i) I_c(\alpha_{z_l}),$$

$$\alpha_{z_l} = (\ell-2p)\omega - \{1-(-1)^l\} \frac{\pi}{4},$$

$$I_s(\alpha_\nu) = -\frac{1}{\dot{\alpha}_\nu} \{ \cos(\alpha_\nu + \dot{\alpha}_\nu \delta t) - \cos \alpha_\nu \},$$

$$[\dot{\alpha}_\nu \neq 0],$$

$$I_s(\alpha_\nu) = (\sin \alpha_\nu) \delta t, \quad [\dot{\alpha}_\nu = 0],$$

$$I_c(\alpha_\nu) = \frac{1}{\dot{\alpha}_\nu} \{ \sin(\alpha_\nu + \dot{\alpha}_\nu \delta t) - \sin \alpha_\nu \},$$

$$[\dot{\alpha}_\nu \neq 0],$$

$$I_c(\alpha_\nu) = (\cos \alpha_\nu) \delta t, \quad [\dot{\alpha}_\nu = 0]$$

(6.1.1.2.1)

ここで  $\sum_p$  は、 $l/2$  を除く 0 から  $l$  までのすべての整数についての和をとることを示す。

(3) zonal harmonics による短周期変化

[3] の場合には、(5.1.1) の  $T_{l, m, p, q}$  が  $\omega$  と  $M$  の一次式となるので zonal harmonics による短周期変化となる。これを添字  $z_s$  をつけて表せば、次のようになる。

$$\delta_1 a_{z_s} = -\frac{2\mu}{na} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q (\ell-2p+q) J_{l, 0} \times \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l, p, q}(e) F_{l, 0, p}(i) I_s(\alpha_{z_s}),$$

$$\delta_1 e_{z_s} = \frac{\mu}{na^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q J_{l, 0} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l, p, q}(e) \times \{ -(\ell-2p+q)(1-e^2) + (\ell-2p)\sqrt{1-e^2} \} \times F_{l, 0, p}(i) I_s(\alpha_{z_s}),$$

$$\delta_1 i_{z_s} = -\frac{\mu \cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q (\ell-2p) J_{l, 0} \times \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l, p, q}(e) F_{l, 0, p}(i) I_s(\alpha_{z_s}),$$

$$\delta_1 Q_{qz_s} = \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q J_{l, 0} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \times G_{l, p, q}(e) \frac{dF_{l, 0, p}(i)}{di} I_c(\alpha_{z_s}),$$

$$\delta_1 \omega_{z_s} = \frac{\mu}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q J_{l, 0} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \times \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dG_{l, p, q}(e)}{de} F_{l, 0, p}(i) - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} G_{l, p, q}(e) \frac{dF_{l, 0, p}(i)}{di} \right\} I_c(\alpha_{z_s}),$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} F_{l,0,p}(i) \right. \\ & \left. - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} G_{l,p,q}(e) \frac{dF_{l,0,p}(i)}{di} \right\} I_C(\alpha_{zs}), \\ \delta_1 \chi_{zs}^* &= \frac{\mu}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q J_{l,0} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \\ & \times \left\{ -\frac{1-e^2}{e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + 2(\ell+1) G_{l,p,q}(e) \right\} \\ & \times F_{l,0,p}(i) I_C(\alpha_{zs}), \\ \alpha_{zs} &= (\ell-2p)\omega + (\ell-2p+q)M - \{1-(-1)^l\} \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (6.1.1.3.1)$$

ここで  $\sum_q$  は  $(-\ell+2p)$  を除く  $-\infty$  から  $\infty$  にいたるすべての整数についての和をとることを示す。

(4) non-zonal harmonics の共鳴項による変化

$i_0$  および  $j_0$  を正の整数とし、 $j_0/i_0$  を既約分数とする。このとき (6.1.4) の右辺の第一項  $(dE/dt)_{\text{IE}}$  を構成する諸項の内において [4] の場合である。

$$\left. \begin{aligned} m &\neq 0 \\ \frac{\dot{M}}{\dot{\theta}} &= \frac{j_0}{i_0} = C_s = \frac{m}{\ell-2p+q} \end{aligned} \right\} \quad (6.1.1.4.1)$$

で示される条件が成立するとみなされるような項は、整数比の状態にあり、共鳴項となる。このとき臨界状態の引数

$$S = \Omega + \omega + M - C_s \theta \quad (6.1.1.4.2)$$

の変化率  $\dot{S}$  の大きさは 0 から大きく離れてはいない。

そして (5.1.1) の  $T_{l,m,p,q}$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) &= V_{l,m,p,q}(\omega, S, \Omega) \\ &= -q\omega + (\ell-2p+q)S + \{m - (\ell-2p+q)\} \Omega \\ &\quad - m \lambda_{l,m} - \{1-(-1)^{\ell-m}\} \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$(6.1.1.4.3)$$

この場合には non-zonal harmonics の共鳴項による変化となる。これを添字 Nr をつけて表せば、次のようになる。

$$\delta_1 a_{\text{Nr}} = -\frac{2\mu}{na} \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l (\ell-2p+q) J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}}$$

$$\begin{aligned} & \times G_{l,p,q}(e) F_{l,m,p}(i) I_S(\alpha_{\text{Nr}}), \\ \delta_1 e_{\text{Nr}} &= \frac{\mu}{na^2 e} \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l,p,q}(e) \\ & \times \left\{ -(\ell-2p+q)(1-e^2) \right. \\ & \quad \left. + (\ell-2p)\sqrt{1-e^2} \right\} F_{l,m,p}(i) \times I_S(\alpha_{\text{Nr}}), \\ \delta_1 i_{\text{Nr}} &= \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \\ & \times G_{l,p,q}(e) F_{l,m,p}(i) \{ -(\ell-2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i \} \\ & \times I_S(\alpha_{\text{Nr}}), \\ \delta_1 \Omega_{\text{Nr}} &= \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \\ & \times G_{l,p,q}(e) \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} I_C(\alpha_{\text{Nr}}), \\ \delta_1 \omega_{\text{Nr}} &= \frac{\mu}{na^2} \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \\ & \times \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} F_{l,m,p}(i) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} G_{l,p,q}(e) \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} \right\} I_C(\alpha_{\text{Nr}}), \\ \delta_1 \chi_{\text{Nr}}^* &= \frac{\mu}{na^2} \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \\ & \times \left\{ -\frac{1-e^2}{e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + 2(\ell+1) G_{l,p,q}(e) \right\} \\ & \times I_C(\alpha_{\text{Nr}}), \\ \alpha_{\text{Nr}} &= -q\omega + (\ell-2p+q)S + \{m - (\ell-2p+q)\} \Omega \\ & \quad - m \lambda_{l,m} - \{1-(-1)^{\ell-m}\} \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (6.1.1.4.4)$$

ここで  $\sum_l$  は (4.1.1.1) に示された区間にあると共に

$$l \geq \max(2, j_0)$$

をもみやすような値についての和をとることを示す。

また  $\sum_m$  は (4.1.1.1) に示された区間にあると共に  $I_{\text{Nr}}$  を正整数とするとき

$$m = I_{\text{Nr}} \cdot j_0$$

をもみたすような値についての和をとることを示す。  
さらに

$$q = -l + 2p + m \cdot \frac{i_0}{j_0}$$

である。

なお人工衛星においては次のようになる。

$$0 \leq \frac{\dot{M}}{\dot{\theta}} \leq 16.997$$

また (6.1.1.4.4) の各式は長周期の変化を表わす。

(5) non-zonal harmonics の共鳴項以外の項による変化

[5] の場合には (5.1.1) の  $T_{l,m,p,q}$  は  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $M$ ,  $\theta$  の一次式となるので non-zonal harmonics の共鳴項以外の項による変化となる。これを添字 N をつけて表せば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta_1 a_N &= -\frac{2\mu}{na} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q (\ell - 2p + q) \\ &\quad \times J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l,p,q}(e) F_{l,m,p}(i) I_S(\alpha_N), \\ \delta_1 e_N &= \frac{\mu}{na^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l,p,q}(e) \\ &\quad \times \{ -(\ell - 2p + q)(1 - e^2) \\ &\quad + (\ell - 2p)\sqrt{1 - e^2} \} F_{l,m,p}(i) \times I_S(\alpha_N), \\ \delta_1 i_N &= \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l,p,q}(e) \\ &\quad \times F_{l,m,p}(i) \{ -(\ell - 2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i \} \\ &\quad \times I_S(\alpha_N), \\ \delta_1 \Omega_{qN} &= \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q \\ &\quad \times J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l,p,q}(e) \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} I_C(\alpha_N), \\ \delta_1 \omega_N &= \frac{\mu}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} F_{l,m,p}(i) \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{\cot i}{\sqrt{1 - e^2}} G_{l,p,q}(e) \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} \right\} I_C(\alpha_N),$$

$$\begin{aligned} \delta_1 \lambda_N^* &= \frac{\mu}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} \\ &\quad \times \left\{ -\frac{1 - e^2}{e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + 2(\ell + 1) G_{l,p,q}(e) \right\} \\ &\quad \times F_{l,m,p}(i) I_C(\alpha_N), \\ \alpha_N &= (\ell - 2p)\omega + (\ell - 2p + q)M + m(\Omega - \theta) \\ &\quad - m\lambda_{l,m} - \left\{ 1 - (-1)^{\ell - m} \right\} \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (6.1.1.5.1)$$

ここで  $\sum_q$  は (6.1.1.4.4) における  $l, m, p$  に対応する  $q$  を除いて  $-\infty$  から  $\infty$  までのすべての整数についての和をとることを示す。なお (6.1.1.5.1) の各式は短周期の変化を示す。

(6) 半長軸の変化による平均近点離角の変化  
一次の摂動に基づく半長軸の変化による平均近点離角の変化は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta_1 M_{\delta a, E} &= \delta_1 M_{\delta a, ZS} + \delta_1 M_{\delta a, NR} + \delta_1 M_{\delta a, N}, \\ \delta_1 M_{\delta a, ZS} &= \frac{3\mu}{a^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q (\ell - 2p + q) J_{l,0} \\ &\quad \times \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l,p,q}(e) F_{l,0,p}(i) I'_S(\alpha_{ZS}), \\ \delta_1 M_{\delta a, NR} &= \frac{3\mu}{a^2} \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l (\ell - 2p + q) \\ &\quad \times J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l,p,q}(e) F_{l,m,p}(i) I'_S(\alpha_{NR}), \\ \delta_1 M_{\delta a, N} &= \frac{3\mu}{a^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q (\ell - 2p + q) \\ &\quad \times J_{l,m} \frac{a_E^l}{a^{l+1}} G_{l,p,q}(e) F_{l,m,p}(i) I'_S(\alpha_N), \\ I'_S(\alpha_\nu) &= -\frac{1}{\dot{\alpha}_\nu} \left[ \frac{1}{\dot{\alpha}_\nu} \{ \sin(\alpha_\nu + \dot{\alpha}_\nu \delta t) - \sin \alpha_\nu \} \right. \\ &\quad \left. - (\cos \alpha_\nu) \delta t \right], \quad \{\dot{\alpha}_\nu \neq 0\}, \\ I'_S(\alpha_\nu) &= \frac{1}{2} (\delta t)^2 \sin \alpha_\nu, \quad \{\dot{\alpha}_\nu = 0\} \end{aligned} \quad (6.1.1.6.1)$$

ここで第三式の  $\sum_q$  は(6.1.1.3.1)に示されている。また第三式の  $\sum_l, \sum_m$  および  $q$  は(6.1.1.4.4)に示されている。さらに第四式の  $\sum_q$  は(6.1.1.5.1)に示されている。

### 6.1.2 月と太陽の引力による軌道要素の変化

(6.1.5) および (6.1.6) の右辺の第二項および第三項である  $(dE l_k / dt)_{1D}$  および  $\delta_1 E l_{kD}$  は次の五種の場合に分けられる。

$$(1) \quad m=0, \quad p=\frac{l}{2}, \quad h=\frac{l}{2}, \quad q=0, \quad j=0$$

$$(2) \quad l-2p+q=0, \\ (l-2p)\dot{\omega}-(l-2h)\dot{\omega}_D-(l-2h+j)\dot{M}_D \\ +m(\dot{Q}-\dot{Q}_D)=0$$

ここで  $l-2p, l-2h, l-2h+j$  および  $m$  の内に0でないものが存在するとする。

$$(3) \quad l-2p+q=0, \\ (l-2p)\dot{\omega}-(l-2h)\dot{\omega}_D-(l-2h+j)\dot{M}_D \\ +m(\dot{Q}-\dot{Q}_D) \approx 0$$

$$(4) \quad l-2p+q \approx 0, \\ (l-2p)\dot{\omega}+(l-2p+q)\dot{M}-(l-2h)\dot{\omega}_D \\ -(l-2h+j)\dot{M}_D+m(\dot{Q}-\dot{Q}_D) \approx 0$$

$$(5) \quad l-2p+q \approx 0, \\ (l-2p)\dot{\omega}+(l-2p+q)\dot{M}-(l-2h)\dot{\omega}_D \\ -(l-2h+j)\dot{M}_D+m(\dot{Q}-\dot{Q}_D)=0$$

この〔1〕から〔4〕までの四種の場合における軌道要素の変化を以下に順次に示す。なお〔5〕の場合における軌道要素の変化は、これを表す式の因数  $G_{l,p,q}(e_D)$  の大きさが微小なために無視することにする。

そして次に(6.1.8)の右辺の第二項および第三項である  $\delta_1 M_{\delta a,L}$  および  $\delta_1 M_{\delta a,S}$  を示すこととする。

#### (1) 長年変化

〔1〕の場合には(5.2.1)の  $T_{l,m,p,h,g,j}$  の変化が無視されるので長年変化となる。これを添字DSEをつけて表せば次のようになる。

$$\delta_1 a_{DSe} = 0,$$

$$\delta_1 e_{DSe} = 0,$$

$$\delta_1 i_{DSe} = 0,$$

$$\delta_1 Q_{DSe} = G m_D \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_l \frac{a^l}{a_D^{l+1}}$$

$$\times H_{l,\frac{l}{2},0}(e) G_{l,\frac{l}{2},0}(e_D) \frac{dF_{l,0,\frac{l}{2}}(i)}{2} \\ \times F_{l,0,\frac{l}{2}}(i_D) \delta t,$$

$$\delta_1 \omega_{DSe} = G m_D \frac{1}{n a^2} \sum_l \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \\ \times \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dH_{l,\frac{l}{2},0}(e)}{de} F_{l,0,\frac{l}{2}}(i) \right. \\ \left. - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} H_{l,\frac{l}{2},0}(e) \frac{dF_{l,0,\frac{l}{2}}(i)}{di} \right\} \\ \times G_{l,\frac{l}{2},0}(e_D) F_{l,0,\frac{l}{2}}(i_D) \delta t,$$

$$\delta_1 \chi_{DSe}^* = -G m_D \frac{1}{n a^2} \sum_l \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \\ \times \left\{ \frac{1-e^2}{e} \frac{dH_{l,\frac{l}{2},0}(e)}{de} + 2l H_{l,\frac{l}{2},0}(e) \right\} \\ \times G_{l,\frac{l}{2},0}(e_D) F_{l,0,\frac{l}{2}}(i) F_{l,0,\frac{l}{2}}(i_D) \delta t \\ (6.1.2.1.1)$$

ここで  $\sum_l$  は2以上のすべての偶数についての和をとることを示す。

#### (2) $R_D$ の共鳴項による変化

(6.1.4)の右辺の第二項および第三項を構成する諸項の内において〔2〕の条件が成立するとみなされるような項は、(5.2.1)の  $T_{l,m,p,h,g,j}$  の変化率がほとんど無視されるので、共鳴項である。

この場合には  $R_D$  の共鳴項による変化となる。これを添字Drをつけて表せば、次のようになる。

$$\delta_1 a_{Dr} = 0$$

$$\delta_1 e_{Dr} = G m_D \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \sum_l \sum_m \sum_p \sum_h \sum_j \\ \times \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \kappa_m (l-2p) \frac{a^l}{a_D^{l+1}} H_{l,p,q}(e) \\ \times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) I_S(\alpha_{Dr}),$$

$$\delta_1 i_{Dr} = G m_D \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_l \sum_m \sum_p \sum_h \sum_j \\ \times \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \kappa_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\ \times F_{l,m,p}(i) \{ -(l-2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i \} \\ \times F_{l,m,h}(i_D) I_S(\alpha_{Dr}),$$

$$\begin{aligned} \delta_1 Q_{Dr} &= G m_D \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_l \sum_m \sum_p \sum_h \sum_j \\ &\times \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \kappa_m \frac{a^\ell}{a_D^{\ell+1}} H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\ &\times \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} F_{l,m,p}(i_D) I_C(\alpha_{Dr}), \\ \delta_1 \omega_{Dr} &= G m_D \frac{1}{n a^2} \sum_l \sum_m \sum_p \sum_h \sum_j \frac{(\ell+m)!}{(\ell+m)!} \kappa_m \frac{a^\ell}{a_D^{\ell+1}} \\ &\times \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dH_{l,p,q}(e)}{de} F_{l,m,p}(i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} H_{l,p,q}(e) \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} \right\} \\ &\times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,h}(i_D) I_C(\alpha_{Dr}), \\ \delta_1 \chi_{Dr}^* &= -G m_D \frac{1}{n a^2} \sum_l \sum_m \sum_p \sum_h \sum_j \\ &\times \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \kappa_m \frac{a^\ell}{a_D^{\ell+1}} \\ &\times \left\{ \frac{1-e^2}{e} \frac{dH_{l,p,q}(e)}{de} + 2\ell H_{l,p,q}(e) \right\} \\ &\times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) I_C(\alpha_{Dr}), \\ \alpha_{Dr} &= (\ell-2p)\omega - (\ell-2h)\omega_D - (\ell-2h+j)M_D \\ &\quad + m(Q-Q_D) \end{aligned} \quad (6.1.2.2.1)$$

ここで  $\sum_l, \sum_m, \sum_p, \sum_h, \sum_j$  などそれぞれ  $l, m, p, h, j$  については(4.1.2.1)に示された区間にあると共に

$$\begin{aligned} (\ell-2p)\dot{\omega} - (\ell-2h)\dot{\omega}_D - (\ell-2h+j)\dot{M}_D \\ + m(\dot{Q} - \dot{Q}_D) = 0 \end{aligned} \quad (6.1.2.2.2)$$

をもみたとみなされる値についての和をとることを示す。ただし(6.1.2.1.1)における  $l, m, p, h, j$  の値を除外する。それから以上においてとられた  $l, m, p, h, j$  の値において

$$q = -l + 2p \quad (6.1.2.2.3)$$

とする。

なお(6.1.2.2.1)の各式は長年あるいは長周期の変化を表す。

(3) 長周期変化

(3)の場合には(5.2.1)の  $T_{l,m,p,h,q,j}$  が  $Q, \omega, Q_D, \omega_D, M_D$  の一次式となるので長周期変化となる。これを添字  $Dl$  をつけて表せば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta_1 \alpha_{Dl} &= 0 \\ \delta_1 e_{Dl} &= G m_D \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_j \\ &\times \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \kappa_m (\ell-2p) \frac{a^\ell}{a_D^{\ell+1}} H_{l,p,-l+2p}(e) \\ &\times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) I_S(\alpha_{Dl}), \\ \delta_1 i_{Dl} &= G m_D \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_j \\ &\times \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \kappa_m \frac{a^\ell}{a_D^{\ell+1}} H_{l,p,-l+2p}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\ &\times F_{l,m,p}(i) \{ -(\ell-2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i \} F_{l,m,h}(i_D) \\ &\times I_S(\alpha_{Dl}), \\ \delta_1 Q_{Dl} &= G m_D \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_j \\ &\times \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \kappa_m \frac{a^\ell}{a_D^{\ell+1}} H_{l,p,-l+2p}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\ &\times \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} F_{l,m,h}(i_D) I_C(\alpha_{Dl}), \\ \delta_1 \omega_{Dl} &= G m_D \frac{1}{n a^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_j \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \kappa_m \\ &\times \frac{a^\ell}{a_D^{\ell+1}} \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dH_{l,p,-l+2p}(e)}{de} F_{l,m,p}(i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} H_{l,p,-l+2p}(e) \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} \right\} \\ &\times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,h}(i_D) I_C(\alpha_{Dl}), \\ \delta_1 \chi_{Dl}^* &= -G m_D \frac{1}{n a^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_j \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \kappa_m \\ &\times \frac{a^\ell}{a_D^{\ell+1}} \left\{ \frac{1-e^2}{e} \frac{dH_{l,p,-l+2p}(e)}{de} + 2\ell H_{l,p,-l+2p}(e) \right\} \\ &\times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) I_C(\alpha_{Dl}), \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{Dl} &= (l-2p)\omega - (l-2h)\omega_D - (l-2h+j)M_D \\ &\quad + m(\dot{Q} - \dot{Q}_D) \end{aligned} \right\} \quad (6.1.2.3.1)$$

また  $\sum_j$  は  $-\infty$  から  $\infty$  までのすべての整数についての

和をとることを示す。ただし(6.1.2.1.1)の  $l, m, p, h$  の値における  $j=0$  と(6.1.2.2.1)の  $l, m, p, h$  の値における(6.1.2.2.2)から求まる  $j$  についての和を除く。

#### (4) 短周期変化

[4]の場合には(5.2.1)の  $T_{l,m,p,h,q,j}$  が  $Q, \omega, M, Q_D, \omega_D, M_D$  などの一次式となるので短周期変化となる。これを添字 DS をつけて表せば、次のようになる。

$$\delta_1 \alpha_{DS} = -2Gm_D \frac{1}{na} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\times \kappa_m (l-2p+q) \frac{a^l}{a_D^{l+1}} H_{l,p,q}(e) G_{l,h,g}(e_D)$$

$$\times F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) I_S(\alpha_{DS}),$$

$$\delta_1 e_{DS} = Gm_D \frac{1}{na^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\times \kappa_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} H_{l,p,q}(e) \left\{ -(l-2p+q)(1-e^2) \right. \\ \left. + (l-2p)\sqrt{1-e^2} \right\}$$

$$\times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) I_S(\alpha_{DS}),$$

$$\delta_1 i_{DS} = Gm_D \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\times \kappa_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D)$$

$$\times F_{l,m,p}(i) \{ -(l-2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i \}$$

$$\times F_{l,m,h}(i_D) I_S(\alpha_{DS}),$$

$$\delta_1 Q_{qDS} = Gm_D \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j$$

$$\times \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \kappa_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D)$$

$$\times \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} F_{l,m,h}(i_D) I_C(\alpha_{DS}),$$

$$\delta_1 \omega_{DS} = Gm_D \frac{1}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\times \kappa_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dH_{l,p,q}(e)}{de} F_{l,m,p}(i) \right. \\ \left. - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} H_{l,p,q}(e) \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} \right\}$$

$$\times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,h}(i_D) I_C(\alpha_{DS}),$$

$$\delta_1 \chi_{DS}^* = -Gm_D \frac{1}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\times \kappa_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \left\{ \frac{1-e^2}{e} \frac{dH_{l,p,q}(e)}{de} + 2lH_{l,p,q}(e) \right\}$$

$$\times G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) I_C(\alpha_{DS}),$$

$$\alpha_{DS} = (l-2p)\omega + (l-2p+q)M - (l-2h)\omega_D \\ - (l-2h+j)M_D + m(\dot{Q} - \dot{Q}_D)$$

(6.1.2.4.1)

ここで  $\sum_q$  は  $-\infty$  から  $\infty$  までのすべての整数についての和をとることを示す。ただし  $-l+2p$  についての和を除く。また  $\sum_j$  は  $-\infty$  から  $\infty$  までのすべての整数についての和をとることを示す。ただし(4.1.2.1)に示された区間にあると共に

$$\left. \begin{aligned} l-2p+q &\approx 0, \\ (l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} - (l-2h)\dot{\omega}_D \\ &\quad - (l-2h+j)\dot{M}_D + m(\dot{Q} - \dot{Q}_D) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.1.2.4.2)$$

をみたすような  $l, m, p, h, q$  の値における  $j$  についての和を除く。

#### (5) 半長軸の変化による平均近点離角の変化

一次の摂動に基づく半長軸の変化による平均近点離角の変化は次のようになる。

$$\delta_1 M_{\delta a, D} = \delta_1 M_{\delta a, DS},$$

$$\delta_1 M_{\delta a, DS} = \frac{3Gm_D}{a^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j$$

$$\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \kappa_m (l-2p+q)$$

$$\times \frac{a^l}{a_E^{l+1}} H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D)$$

$$\times I'_S(\alpha_{DS})$$

(6.1.2.5.1)

ここで第二式の  $\sum_q$  および  $\sum_j$  は(6.1.2.4.1)に示されて  
いる。

6.1.3 太陽輻射圧に基づく力による軌道要素の  
変化

(6.1.5)および(6.1.6)の右辺の第四項である  $(dE/L_k / dt)_{1R}$  および  $\delta_1 E/L_{kR}$  は次の三種の場合に分けられ  
る。

- (1)  $l=0, \dot{\omega} + l(2u-3)\dot{M} + (v-2)\dot{Q} + (2w-3)\dot{\lambda}_s = 0$
- (2)  $l=0, \dot{\omega} + l(2u-3)\dot{M} + (v-2)\dot{Q} + (2w-3)\dot{\lambda}_s \neq 0$
- (3)  $l \neq 0$

これらの三種の場合における軌道要素の変化を以下  
に順次に示す。

そして次に(6.1.8)の右辺の第四項である  $\delta_1 M_{\delta a, R}$   
を示すことにする。

(1)  $R_R$  の共鳴項による変化

(6.1.4)の右辺の第四項を構成する諸項の内におい  
て[1]の条件が成立するとみなされるような項は、(5.  
3.1)の  $T_{l,u,v,w}$  の変化率がほとんど無視されるので、  
共鳴項である。

この場合には  $R_R$  の共鳴項による変化となる。これ  
は添字  $R_R$  をつけて表され、次のようになる。

$$\delta_1 a_{Rr} = 0$$

$$\delta_1 e_{Rr} = 2CF \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} C_0^{1,1}(e) L_{v,w}(i, \epsilon) I_S(\alpha_{Rr}),$$

$$\delta_1 i_{Rr} = 2CF \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} C_0^{1,1}(e) \times \{-\cot i + (v-2) \operatorname{cosec} i\} L_{v,w}(i, \epsilon) I_S(\alpha_{Rr}),$$

$$\delta_1 Q_{qRr} = 2CF \frac{1}{na\sqrt{1-e^2} \sin i} C_0^{1,1}(e) \frac{dL_{v,w}(i, \epsilon)}{di} \times I_C(\alpha_{Rr}),$$

$$\delta_1 \omega_{Rr} = 2CF \frac{1}{na} \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dC_0^{1,1}(e)}{de} L_{v,w}(i, \epsilon) - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} C_0^{1,1}(e) \frac{dL_{v,w}(i, \epsilon)}{di} \right\} I_C(\alpha_{Rr}),$$

$$\delta_1 \lambda_{Rr}^* = -2CF \frac{1}{na} \left\{ \frac{1-e^2}{e} \frac{dC_0^{1,1}(e)}{de} + 2C_0^{1,1}(e) \right\} \times L_{v,w}(i, \epsilon) I_C(\alpha_{Rr}),$$

$$\alpha_{Rr} = \omega + (v-2)Q + (2w-3)\lambda_s$$

(6.1.3.1.1)

ここで  $v$  と  $w$  は(4.1.3.1)に示された区間にあると共  
に

$$\dot{\omega} + (v-2)\dot{Q} + (2w-3)\dot{\lambda}_s = 0 \quad (6.1.3.1.2)$$

をみとす値をとる。なお人工衛星が地球の影内に存  
在し輻射圧の作用がないときには軌道要素の変化は  
生じない。また(6.1.3.1.1)の各式は長周期の変化を  
表す。

(2) 長周期変化

[2]の場合に、人工衛星が輻射圧の作用下にあり  $C$   
=1のときには(5.3.1)の  $T_{l,u,v,w}$  は  $Q, \omega, \lambda_s$  の一  
次式となるので長周期変化となる。これを添字  $Rl$   
をつけて表せば、次のようになる。

$$\delta_1 a_{Rl} = 0,$$

$$\delta_1 e_{Rl} = 2CF \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} C_0^{1,1}(e) \sum_{v=1}^3 \sum_w L_{v,w}(i, \epsilon) I_S(\alpha_{Rl}),$$

$$\delta_1 i_{Rl} = 2CF \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} C_0^{1,1}(e) \sum_{v=1}^3 \sum_w \{-\cot i + (v-2) \operatorname{cosec} i\} L_{v,w}(i, \epsilon) I_S(\alpha_{Rl}),$$

$$\delta_1 Q_{qRl} = 2CF \frac{1}{na\sqrt{1-e^2} \sin i} C_0^{1,1}(e) \sum_{v=1}^3 \sum_w \frac{dL_{v,w}(i, \epsilon)}{di} I_C(\alpha_{Rl}),$$

$$\delta_1 \omega_{Rl} = 2CF \frac{1}{na} \sum_{v=1}^3 \sum_w \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{dC_0^{1,1}(e)}{de} L_{v,w}(i, \epsilon) - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} C_0^{1,1}(e) \frac{dL_{v,w}(i, \epsilon)}{di} \right\} I_C(\alpha_{Rl}),$$

$$\delta_1 \lambda_{Rl}^* = -2CF \frac{1}{na} \left\{ \frac{1-e^2}{e} \frac{dC_0^{1,1}(e)}{de} + 2C_0^{1,1}(e) \right\} \times \sum_{v=1}^3 \sum_w L_{v,w}(i, \epsilon) I_C(\alpha_{Rl}),$$

$$\alpha_{Rl} = \omega + (v-2)Q + (2w-3)\lambda_s \quad (6.1.3.2.1)$$

ここで  $\sum_w$  は1と2についての和をとることを示す。  
ただし(6.1.3.1.1)の  $v$  の値についての  $w$  についての  
和を除く。なお人工衛星の軌道が地球の影内に存在  
し輻射圧の作用がないときは軌道要素の変化は生じ  
ない。

## (3) 短周期変化

(3)の場合に、人工衛星が輻射圧の作用下にあり  $C=1$  のときには(5.3.1)の  $T_{l,u,v,w}$  は  $Q, \omega, M, \lambda_s$  の一次式となるので短周期変化となる。これを添字 RS をつけて表せば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta_1 a_{RS} &= -2CF \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 l(2u-3) \\ &\quad \{C_l^{1,1}(e) + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} L_{v,w}(i, \epsilon) I_S(\alpha_{RS}), \\ \delta_1 e_{RS} &= CF \frac{1}{nae} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 \{-l(2u-3)(1-e^2) \\ &\quad + \sqrt{1-e^2}\} \\ &\quad \times \{C_l^{1,1}(e) + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} L_{v,w}(i, \epsilon) I_S(\alpha_{RS}), \\ \delta_1 i_{RS} &= CF \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 \{C_l^{1,1}(e) \\ &\quad + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} \\ &\quad \times \{-\cot i + (v-2)\operatorname{cosec} i\} L_{v,w}(i, \epsilon) I_S(\alpha_{RS}), \\ \delta_1 Q_{RS} &= CF \frac{1}{na\sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 \{C_l^{1,1}(e) \\ &\quad + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} \frac{dL_{v,w}(i, \epsilon)}{di} I_C(\alpha_{RS}), \\ \delta_1 \omega_{RS} &= CF \frac{1}{na} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 \\ &\quad \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left\{ \frac{dC_l^{1,1}(e)}{de} + (2u-3) \frac{dS_l^{1,1}(e)}{de} \right\} L_{v,w}(i, \epsilon) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} \{C_l^{1,1}(e) + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} \frac{dL_{v,w}(i, \epsilon)}{di} \right\} \\ &\quad \times I_C(\alpha_{RS}), \\ \delta_1 \chi_{RS}^* &= -CF \frac{1}{na} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 \\ &\quad \left\{ \frac{1-e^2}{e^2} \left\{ \frac{dC_l^{1,1}(e)}{de} + (2u-3) \frac{dS_l^{1,1}(e)}{de} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \{C_l^{1,1}(e) + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} \right\} \\ &\quad \times L_{v,w}(i, \epsilon) I_C(\alpha_{RS}), \\ \alpha_{RS} &= \omega + l(2u-3)M + (v-2)Q + (2w-3)\lambda_s \end{aligned} \quad (6.1.3.3.1)$$

ここで人工衛星の軌道が地球の影内に存在していて輻射圧の作用がないときには軌道要素の変化は生じない。なお人工衛星の軌道の地球の影への出入の回数が大きくなるとこの短周期変化は累積して大きくなることもある。

## (4) 半長軸の変化による平均近点離角の変化

一次の摂動に基づく半長軸の変化による平均近点離角の変化は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta_1 M_{\delta a, RS} &= \delta_1 M_{\delta a, RS} \\ \delta_1 M_{\delta a, RS} &= \frac{3CF}{a} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{u=1}^2 \sum_{v=1}^3 \sum_{w=1}^2 l(2u-3) \\ &\quad \times \{C_l^{1,1}(e) + (2u-3)S_l^{1,1}(e)\} L_{v,w}(i, \epsilon) \\ &\quad \times I'_S(\alpha_{RS}) \end{aligned} \quad (6.1.3.4.1)$$

6.1.4 大気の抵抗の力による軌道要素の変化<sup>10)</sup>

(6.1.5)の右辺の第五項は次のように表される。

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \left( \frac{dE/k}{dt} \right)_{IA} &= \Sigma \rho F_A \sigma_m T_r, \\ F_A &= F_A(a, e, i), \\ \sigma_m &= \sigma_m(a, e, i, \omega), \\ T_r &= T_r(e, \omega, f) \end{aligned} \right\} \quad (6.1.4.1) \end{aligned}$$

ここで  $\sigma_m$  は  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s$  の何れかであり、 $T_r$  は  $f$  の周期  $2\pi$  の関数である。また  $\Sigma$  は存在しているこのような形のすべての項にわたって加えることを示す。この  $T_r$  は次のように表される。

$$\begin{aligned} T_r &= T_{r1} + T_{rd}, \\ T_{r1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_r df = T_{r1}(e, \omega), \\ T_{rd} &= T_{rd}(e, \omega, f) \end{aligned} \quad (6.1.4.2)$$

実際にはまず楕円軌道に関する諸式を用いて  $T_r$  を  $e, \omega$  および  $f$  の関数である構成項の和として表し、この構成項を用いて  $T_{r1}$  を求める。 $T_r$  には70種類あり、その構成項は247項とした。 $T_{r1}$  を次に示す。

$$\begin{aligned} (\sin f)_1 &= 0, \\ (\sin^2 f)_1 &= \frac{1}{2}, \\ (\cos f)_1 &= 0, \\ (\cos^2 f)_1 &= \frac{1}{2}, \\ (\cos^3 f)_1 &= 0, \end{aligned}$$



$$(\sin f \cos f)_i = 0 ,$$

$$(\sin f \cos^2 f)_i = 0 ,$$

$$(\sin f \cos^3 f)_i = 0 ,$$

$$(\sin f \cos^4 f)_i = 0 ,$$

$$(\sin^2 f \cos f)_i = 0 ,$$

$$(\sin^2 f \cos^2 f)_i = \frac{1}{8} ,$$

$$(\sin^2 f \cos^3 f)_i = 0 ,$$

$$(\sin^3 f \cos f)_i = 0 ,$$

$$(\sin^3 f \cos^2 f)_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \sin f\right)_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos f\right)_i = \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos^2 f\right)_i = \frac{1}{2} \frac{1}{1-e^2} ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos^3 f\right)_i = \frac{3}{8} \frac{1}{1-e^2} ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos^4 f\right)_i = \frac{3}{8} \frac{1}{1-e^2} ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \sin f \cos f\right)_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \sin f \cos^2 f\right)_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \sin f \cos^3 f\right)_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \sin^2 f \cos f\right)_i = \frac{1}{8} \frac{e}{1-e^2} ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \sin^2 f \cos^2 f\right)_i = \frac{1}{8} \frac{1}{1-e^2} ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E\right)_i = \frac{e}{1-e^2} ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E \cos f\right)_i = \frac{1}{2} \frac{1}{1-e^2} ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E \cos^2 f\right)_i = \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E \cos^3 f\right)_i = \frac{3}{8} \frac{1}{1-e^2} ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E \sin f \cos f\right)_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{a}{r} \cos E \sin f \cos^2 f\right)_i = 0 ,$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2\right\}_i = \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right) ,$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos f\right\}_i = \frac{e}{(1-e^2)^2} ,$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos^2 f\right\}_i = \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} e^2\right) ,$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos^3 f\right\}_i = \frac{3}{4} \frac{e}{(1-e^2)^2} ,$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin f \cos f\right\}_i = 0 ,$$

$$\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin f \cos^2 f\right\}_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin f\right)_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos f\right)_i = (1-e^2) \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{8} e^2\right) e ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos^2 f\right)_i = (1-e^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} e^2\right) ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos^3 f\right)_i = (1-e^2) \left(-\frac{3}{8} - \frac{5}{16} e^2\right) e ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos^4 f\right)_i = (1-e^2) \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{16} e^2\right) ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin f \cos f\right)_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin f \cos^2 f\right)_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin f \cos^3 f\right)_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin^2 f \cos f\right)_i = (1-e^2) \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{16} e^2\right) e ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \sin^2 f \cos^2 f\right)_i = (1-e^2) \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} e^2\right) ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos E\right)_i = 0 ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos E \cos f\right)_i = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} e^2\right) ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos E \cos^2 f\right)_i = \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} e^2\right) e ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos E \cos^3 f\right)_i = \frac{3}{8} \sqrt{1-e^2} ,$$

$$\left(\frac{r}{a} \cos E \sin f \cos f\right)_i = 0 ,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a} \cos E \sin f \cos^2 f\right)_1 &= 0, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f\right\}_1 &= 0, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f \cos f\right\}_1 &= 0, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f \cos^2 f\right\}_1 &= 0, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f \cos^3 f\right\}_1 &= 0, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 f \cos f\right\}_1 &= \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{23}{4} - 4e^2\right) e, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 f \cos^2 f\right\}_1 &= (1-e^2)^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{16} e^2\right), \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^2(\omega+f)\right\}_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{1-e^2} \\ &\quad + \frac{3}{8} (1-e^2)^2 e^2 \cos 2\omega, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin(\omega+f) \cos(\omega+f)\right\}_1 &= \frac{3}{8} (1-e^2)^2 e^2 \\ &\quad \times \sin 2\omega, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos f \cos^2(\omega+f)\right\}_1 &= \frac{1}{2} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \\ &\quad + \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{17}{4} - \frac{27}{8} e^2\right) e \cos 2\omega, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^2 f \cos^2(\omega+f)\right\}_1 &= \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{16} e^2\right) \\ &\quad + \sqrt{1-e^2} \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{16} e^2\right) \cos 2\omega, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^3 f \cos^2(\omega+f)\right\}_1 &= \sqrt{1-e^2} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{16} e^2\right) e \\ &\quad + (1-e^2) \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{32} e^2\right) e \cos 2\omega, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos f \sin(\omega+f) \cos(\omega+f)\right\}_1 &= \\ &= \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{8} e^2\right) e \sin 2\omega, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^2 f \sin(\omega+f) \cos(\omega+f)\right\}_1 &= \\ &= \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{16} e^2\right) \sin 2\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^3 f \sin(\omega+f) \cos(\omega+f)\right\}_1 &= \\ &= \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{32} e^2\right) e \sin 2\omega, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f \cos f \cos^2(\omega+f)\right\}_1 &= \\ &= \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{8} e^2\right) \sin 2\omega, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f \cos^2 f \cos^2(\omega+f)\right\}_1 &= \\ &= \sqrt{1-e^2} \left(\frac{5}{8} - \frac{5}{32} e^2\right) e \sin 2\omega, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f \cos f \sin(\omega+f) \cos(\omega+f)\right\}_1 &= \\ &= \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8} e^2\right) \cos 2\omega, \\ \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin f \cos^2 f \sin(\omega+f) \cos(\omega+f)\right\}_1 &= \\ &= \sqrt{1-e^2} \left(-\frac{5}{8} + \frac{5}{32} e^2\right) e \cos 2\omega \end{aligned} \quad (6.1.4.3)$$

この  $T_{r1}$  を用い、 $\sigma_m T_{r1}$  を次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m T_{r1} &= G_{so} + G_{lp} \\ G_{so} &= G_{so}(a, e, i) \\ G_{lp} &= G_{lp}(a, e, i, \omega) \end{aligned} \right\} \quad (6.1.4.4)$$

そうすれば次のようになる。

$$\rho F_A \sigma_m T_r = \rho F_A G_{so} + \rho F_A G_{lp} + \rho F_A \sigma_m T_{rd} \quad (6.1.4.5)$$

この右辺の第三項はほぼ短周期的な変化をする。そしてこれに基づく軌道要素の変化の大きさは、 $\delta t$  が大きいときには、比較的小さい。そこでこの項を(6.1.4.1)において無視する。ただし  $\delta t$  が小さいときには、この項を無視するために  $\delta t$  を  $T_0$  に近くとるを要する。そうすれば(6.1.4.1)は次のようになる。

$$\left(\frac{dE/L_k}{dt}\right)_{1A} = \Sigma \rho F_A G_{so} + \Sigma \rho F_A G_{lp} \quad (6.1.4.6)$$

この(6.1.4.6)の右辺の第一項および第二項をとった場合における軌道要素の変化を以下に順次に示す。

そして次に(6.1.8)の右辺の第五項である  $\delta_1 M_{\delta a, A}$  を示すことにする。

(1) 長年変化および  $t$  の幂で表される長年変化

(6.1.4.6)の右辺の第一項のみをとる場合には長年変化および  $t$  の幂で表される長年変化となる。これを添字 Aseps をつけて表せば、次のようになる。

$$\delta_1 \alpha_{Aseps} = A_A F_q ,$$

$$A_A = -\sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \sqrt{a}$$

$$\left[ \frac{1}{2} (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} e^2 \left\{ 1 - \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \right. \\ \left. + (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \right) \left\{ 1 - \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i + \frac{1}{2} e^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\nu}{n} \right)^3 (1-e^2)^{\frac{9}{2}} \sin^2 i \cos i \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} e^2 \cos i \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (1-e^2)^{-2} e^2 \left\{ 3 - 23 \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \right. \\ \left. - \frac{\nu}{2} \cos i \left\{ 1 - \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i + \frac{1}{4} e^2 \right] ,$$

$$\delta_1 e_{Aseps} = -\frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \\ \left[ \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2 - 2 \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin^2 i + \frac{15}{16} e^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left( 1 + \frac{7}{8} \frac{e^2}{1-e^2} \right) \left\{ 1 - 3 \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 (1+9 \cos^2 i) - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{16} e^2 \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\nu}{n} e \cos i \right. \\ \left. \times \left\{ 1 - \frac{\nu}{n} \left( 5 - \frac{11}{4} e^2 \right) (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} \right] F_q ,$$

$$\delta_1 i_{Aseps} = -\frac{1}{4} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\nu}{n} \frac{\sin i}{1-e^2} \\ \times \left[ \sqrt{1-e^2} \left\{ 1 - \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \sin i + \frac{7}{4} e^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \left( \frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^3 \left( 6 + \frac{9}{2} e^2 \right) \sin^2 i \right] F_q ,$$

$$\delta_1 Q_{Aseps} = 0 ,$$

$$\delta_1 \omega_{Aseps} = 0 ,$$

$$\delta_1 \chi_{Aseps}^* = 0 ,$$

$$F_q = \sum_{k=0}^q C_k I_k ,$$

$$I_k = G_p(k, t + \delta t) - G_p(k, t) ,$$

$$G_p(k, t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

(6.1.4.1.1)

(2) 長周期変化および混合長年変化

(6.1.4.6)の右辺の第二項のみをとる場合には長周期変化および混合長年変化となる。これを添字 Alpms をつけて表せば、次のようになる。

$$\delta_1 \alpha_{Alpms} = 0 ,$$

$$\delta_1 e_{Alpms} = \frac{1}{16} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{\nu}{n} \right)^2 (1-e^2)^{\frac{5}{2}} e \sin^2 i \\ \times \left\{ 2 - 3 (1-e^2)^{-2} F_{qc}(2\omega) \right\} ,$$

$$\delta_1 i_{Alpms} = \frac{1}{16} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\nu}{n} \frac{1}{1-e^2} \sin i \\ \times \left[ \left\{ \left( \frac{67}{2} - \frac{35}{4} e^2 \right) e^2 + \left( \frac{\nu}{n} \right)^2 \left( 2 - \frac{33}{4} e^2 \right) \sin^2 i \right\} F_{qc}(2\omega) \right. \\ \left. - \left( \frac{\nu}{n} \right)^2 \left( 1 - \frac{31}{8} e^2 \right) \sin^2 i F_{qc}(4\omega) \right] ,$$

$$\delta_1 Q_{Alpms} = \frac{7}{32} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\nu}{n} e^2 \\ \times \left( 1 + \frac{9}{7} e^2 \right) F_{qs}(2\omega) ,$$

$$\delta_1 \omega_{Alpms} = \frac{1}{32} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} \\ \times \left\{ \left( \frac{\nu}{n} \right)^3 (45 - 121 e^2) \sin^2 i \cos i \right. \\ \left. - \frac{\nu}{n} e^2 (7 + 16 e^2) \cos i \right\} F_{qs}(2\omega) ,$$

$$\delta_1 \chi_{Alpms}^* = -\frac{1}{2} \sqrt{\mu} C_D \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\times \left[ \left( \frac{\nu}{n} \right)^3 \left( \frac{93}{32} - \frac{151}{64} e^2 \right) \sin^2 i \cos i + \frac{1}{16} \left( \frac{\nu}{n} \right)^2 \right. \\ \left. \times \left\{ 2 + \frac{7}{2} \frac{\nu}{n} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \cos i \right\} (1-e^2)^3 \sin^2 i \right] F_{qs}(2\omega)$$

$$F_{qs}(\alpha_\nu) = \sum_{k=0}^q C_k I_{ks}(\alpha_\nu), \\ F_{qc}(\alpha_\nu) = \sum_{k=0}^q C_k I_{kc}(\alpha_\nu),$$

$$I_{ks}(\alpha_\nu) = \frac{G_s}{G_c}(k, \alpha_\nu + \dot{\alpha}_\nu \delta t, \dot{\alpha}_\nu, t - \delta t) \\ I_{kc}(\alpha_\nu) = \frac{G_s}{G_c}(k, \alpha_\nu, \dot{\alpha}_\nu, t) - \frac{G_s}{G_c}(k, \alpha_\nu, \dot{\alpha}_\nu, t),$$

$$(\dot{\alpha}_\nu \neq 0, k \neq 0),$$

$$\frac{G_s}{G_c}(k, \alpha_\nu, \dot{\alpha}_\nu, t) = \frac{k!}{\dot{\alpha}_\nu^{k+1}}$$

$$\times \left[ \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + l} \frac{(\dot{\alpha}_\nu t)^{\frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1)}}{\left\{ \frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1) \right\}!} \sin^{\alpha_\nu} \cos^{\alpha_\nu} \right. \\ \left. + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + l} \frac{(\dot{\alpha}_\nu t)^{\frac{1-(-1)^k}{2} + 2l}}{\left\{ \frac{1-(-1)^k}{2} + 2l \right\}!} (-) \cos^{\alpha_\nu} \sin^{\alpha_\nu} \right],$$

$$I_{ks}(\alpha_\nu) = \frac{I_s}{I_c}(\alpha_\nu), \quad (\dot{\alpha}_\nu \neq 0, k=0), \\ I_{kc}(\alpha_\nu) = I_k \frac{\sin \alpha_\nu}{\cos \alpha_\nu}, \quad (\dot{\alpha}_\nu = 0)$$

(6.1.4.2.1)

ここで  $\lfloor (k+1)/2 \rfloor, \lfloor k/2 \rfloor$  などは括弧内の数値の整数部分を表す。また  $0^0$  は 1 とする。

(3) 半長軸の変化による平均近点離角の変化  
一次の摂動に基づく半長軸の変化による平均近点離角の変化は次のようになる。

$$\delta_1 M_{\delta a, A} = \delta_1 M_{\delta a, A, \text{seps}}, \\ \delta_1 M_{\delta a, A, \text{seps}} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} A_A F'_q, \\ F'_q = \sum_{k=0}^q C_k I'_k, \\ I'_k = G'_p(k, t - \delta t) - G'_p(k, t) - \{G_p(k, t)\} \delta t, \\ G'_p(k, t) = \frac{t^{k+2}}{(k+1)(k+2)}$$

(6.1.4.3.1)

### 6.1.5 微小な推力による軌道要素の変化<sup>11)</sup>

(6.1.5)の右辺の第六項は次のように表される。

$$\left( \frac{dE\mathcal{L}k}{dt} \right)_{IT} = \Sigma A'B' + \Sigma A''B'' + \Sigma A'''B''',$$

$$A' = A'(a, e)$$

$$B' = t^m$$

$$A'' = A''(a, e, i)$$

$$B'' = B''(\omega)$$

$$A''' = A'''(a, e, i)$$

$$B''' = t^{m'} B'''_i(m_\omega \omega + m_M M + m_t t)$$

(6.1.5.1)

ここで次のようになる。

$m$  : 0か正整数

$B''$  : sinあるいはcos

$m'$  : 0か正整数

$B'''_i$  : sinあるいはcos

$m_\omega$  : 0か1

$m_M, m_t$  : 共に0とはならぬ整数

また  $\Sigma$  は存在しているこのような形のすべての項にわたって加えることを示す。この(6.1.5.1)の右辺の第一項、第二項および第三項をとった場合における軌道要素の変化を以下に順次に示す。

そして次に(6.1.8)の右辺の第六項である  $\delta_1 M_{\delta a, T}$  を示すことにする。

なおここで(5.5.1.1)から導かれる(6.1.5.1)によって得られる式を先に示す。そしてその後(5.5.2.1)から導かれる(6.1.5.1)によって得られる式を示すことにする。ただし共通の場合には一方のみを示す。

(1) 長年変化および  $t$  の冪で表される長年変化  
(6.1.5.1)の右辺の第一項のみをとる場合には長年変化および  $t$  の冪で表される長年変化となる。これを添字 Tseps をつけて表せば、次のようになる。

$$\delta_1 a_{T\text{seps}} = 2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{n} C_0^{-1,0}(e) \sum_{k=0}^{\infty} T_{Tk} I_k,$$

$$\delta_1 e_{T\text{seps}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \{A_{1,0}(e) + C_0^{0,1}(e)\} \sum_{k=0}^{\infty} T_{Tk} I_k$$

$$\delta_1 i_{T\text{seps}} = 0,$$

$$\delta_1 \dot{i}_{T\text{seps}} = 0,$$

$$\delta_1 \omega_{T\text{seps}} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} C_0^{0,1}(e) \sum_{k=0}^{\infty} S_{Tk} I_k,$$

$$\delta_1 \chi_{Tseps}^* = -\sqrt{1-e^2} \delta_1 \omega_{Tseps} - \frac{2}{na} C_0^{1,0}(e) \sum_{k=0}^{\infty} S_{Tk} I_k \quad (6.1.5.1.1)$$

また次のようになる。

$$\delta_1 a_{Tseps} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} K_a(e) \sum_{k=0}^{\infty} T'_{Tk} I_k ,$$

$$\delta_1 e_{Tseps} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ 2\{e + C_0^{0,1}(e)\} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \right. \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \{2e C_0^{0,p}(e) + C_0^{0,p+1} \\ & \quad \left. + C_0^{0,p-1}(e)\} \right] \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} T'_{Tk} I_k , \end{aligned}$$

$$\delta_1 \dot{\chi}_{Tseps} = 0 ,$$

$$\delta_1 Q_{qTseps} = 0 ,$$

$$\delta_1 \omega_{Tseps} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \left\{ e + C_0^{0,1}(e) + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_0^{1,0}(e) - C_0^{1,2}(e) \} \right\} \right. \\ & \times \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,p}(e) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \\ & \times \left[ \left\{ e C_0^{0,p}(e) + \frac{1}{2} \{ C_0^{0,p+1}(e) + C_0^{0,p-1}(e) \} \right\} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{ C_0^{1,p}(e) - \frac{1}{2} \{ C_0^{1,p+2}(e) + C_0^{1,p-2}(e) \} \} \right\} \right] \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} N'_{Tk} I_k , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_1 \chi_{Tseps}^* &= -\sqrt{1-e^2} \delta_1 \omega_{Tseps} \\ & + \frac{2}{na} \left[ \{ C_0^{1,0}(e) + e C_0^{1,1}(e) \} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{s,q}(e) \right. \\ & \quad + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \\ & \quad \times \left[ C_0^{1,p}(e) + \frac{1}{2} e \{ C_0^{1,p+1}(e) \right. \\ & \quad \left. \left. + C_0^{1,p-1}(e) \} \right] \right] \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} N'_{Tk} I_k , \end{aligned}$$

$$K_a(e) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{s,q}(e) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{p,s,q}(e) C_0^{0,p}(e) \quad (6.1.5.1.2)$$

## (2) 長周期変化

(6.1.5.1)の右辺の第二項のみをとる場合には長周期変化となる。これを添字 Tlp をつけて表せば、次のようになる。

$$\delta_1 a_{Tlp} = 0 ,$$

$$\delta_1 e_{Tlp} = 0 ,$$

$$\delta_1 \dot{\chi}_{Tlp} = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} C_0^{1,1}(e) W_{T0} I_C(\omega) ,$$

$$\delta_1 Q_{qTlp} = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2} \sin i} C_0^{1,1}(e) W_{T0} I_S(\omega) ,$$

$$\delta_1 \omega_{Tlp} = -\delta_1 Q_{qTlp} \cos i ,$$

$$\delta_1 \chi_{Tlp}^* = 0$$

(6.1.5.2.1)

## (3) 短周期変化および混合長年変化

(6.1.5.1)の右辺第三項のみをとる場合には短周期変化および混合長年変化となる。これを添字 Tspms をつけて表せば、次のようになる。

$$\delta_1 a_{Tspms} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}$$

$$\times \left[ e \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) V_S(S_T, lM) \right.$$

$$\left. + (1-e^2) C_0^{-1,0}(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{T_k} I_C(kt) + b_{T_k} I_S(kt) \} \right.$$

$$\left. + (1-e^2) \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{-1,0}(e) V_C(T_T, lM) \right] ,$$

$$\delta_1 e_{Tspms} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}$$

$$\times \left[ \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) V_S(S_T, lM) \right.$$

$$\left. + \{ A_{1,0}(e) + C_0^{0,1}(e) \} \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{T_k} I_C(kt) + b_{T_k} I_S(kt) \} \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty} \{ A_{1,l}(e) + C_l^{0,1}(e) \} V_C(T_T, lM) \right] ,$$

$$\delta_1 \dot{\chi}_{Tspms} = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) + S_l^{1,1}(e)\} \{V_C(W_T, \omega + lM) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - W_{T0} I_C(\omega)\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) - S_l^{1,1}(e)\} \{V_C(W_T, \omega - lM) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - W_{T0} I_C(\omega)\} \right] \\ & = F_i \quad , \end{aligned}$$

$$\delta_1 Q_{q \text{ Tspsms}} = \frac{1}{na \sqrt{1-e^2} \sin i}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) + S_l^{1,1}(e)\} \{V_S(W_T, \omega + lM) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - W_{T0} I_S(\omega)\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \{C_l^{1,1}(e) - S_l^{1,1}(e)\} \{V_S(W_T, \omega - lM) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - W_{T0} I_S(\omega)\} \right] \\ & = F_{2q} \quad , \end{aligned}$$

$$\delta_1 \omega_{\text{Tspsms}} = -\delta_1 Q_{q \text{ Tspsms}} \cos i + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na e}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ -C_0^{0,1}(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{S_T k} I_C(kt) + b_{S_T k} I_S(kt)\} \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,1}(e) V_C(S_T, lM) \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-e^2} S_l^{1,1}(e) + S_l^{0,1}(e) \right\} V_S(T_T, lM) \right] \quad , \end{aligned}$$

$$\delta_1 \chi_{\text{Tspsms}}^* = -\sqrt{1-e^2} (\delta_1 Q_{q \text{ Tspsms}} \cos i + \delta_1 \omega_{\text{Tspsms}}) - \frac{2}{na}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ C_0^{1,0}(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{S_T k} I_C(kt) + b_{S_T k} I_S(kt)\} \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{1,0}(e) V_C(S_T, lM) \right] \quad , \end{aligned}$$

$$V_S(A_T, \alpha_\nu) = A_{T0} I_S(\alpha_\nu)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_{T k} I_{KS}(\alpha_\nu) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} a_{A_T k} \{I_S(\alpha_\nu + kt) + I_S(\alpha_\nu - kt)\} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} b_{A_T k} \{I_C(\alpha_\nu + kt) - I_C(\alpha_\nu - kt)\} \right] \quad , \end{aligned}$$

$$V_C(A_T, \alpha_\nu) = A_{T0} I_C(\alpha_\nu)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_{T k} I_{kC}(\alpha_\nu) \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. + \frac{1}{2} a_{A_T k} \{I_C(\alpha_\nu + kt) + I_C(\alpha_\nu - kt)\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} b_{A_T k} \{I_S(\alpha_\nu + kt) - I_S(\alpha_\nu - kt)\} \right] \quad (6.1.5.3.1) \end{aligned}$$

また次のようになる。

$$\delta_1 a_{\text{Tspsms}} = \frac{2}{n \sqrt{1-e^2}}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ K_a(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{T_T k} I_C(kt) + b_{T_T k} I_S(kt)\} \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{p,s,q}(e) \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,p}(e) V_C(T_T', lM) \right] \quad , \end{aligned}$$

$$\delta_1 e_{\text{Tspsms}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}$$

$$\times \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \left[ 2 \{e + C_0^{0,1}(e)\} \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{T_T k} I_C(kt) \right. \right.$$

$$\left. + b_{T_T k} I_S(kt)\} \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{0,1}(e) V_C(T_T', lM) \right.$$

$$\left. - \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{1,1}(e) V_S(N_T, lM) \right] \quad ,$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e)$$

$$\left[ \{2e C_0^{0,p}(e) + C_0^{1,p+1}(e) + C_0^{0,p-1}(e)\} \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{T_T k} I_C(kt) + b_{T_T k} I_S(kt)\} \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty} \{2e C_l^{0,p}(e) + C_l^{1,p+1}(e) + C_l^{0,p-1}(e)\} \right.$$

$$\left. \times V_C(T_T', lM) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \{S_l^{1,p+1}(e) - S_l^{1,p-1}(e)\} V_S(N_T', lM) \right] \quad ,$$

$$\delta_1 i_{\text{Tspsms}} = F_i \quad ,$$

$$\delta_1 Q_{q \text{ Tspsms}} = F_{2q} \quad ,$$

$$\delta_1 \omega_{\text{Tspsms}} = -\delta_1 Q_{q \text{ Tspsms}} \cos i$$

$$+ \frac{\sqrt{1-e^2}}{na e} \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{s,q}(e) \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) V_S(T_T', lM) \right. \right.$$

$$\left. + \left[ e + C_0^{0,1}(e) + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{C_0^{1,0}(e) - C_0^{1,2}(e)\} \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{N_T k} I_C(kt) + b_{N_T k} I_S(kt)\} \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ C_0^{0,1}(e) + \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{C_l^{1,0}(e) - C_l^{1,2}(e)\} \right] \\
 & \times V_C(N_T, \ell M) \Big] \\
 & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \\
 & \times \left[ \sum_{l=1}^{\infty} \{S_l^{0,p+1}(e) - S_l^{0,p-1}(e)\} V_S(T_T, \ell M) \right. \\
 & + \left[ e C_0^{0,p}(e) + \frac{1}{2} \{C_0^{0,p+1}(e) + C_0^{0,p-1}(e)\} \right. \\
 & + \left. \left. \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{C_0^{1,p}(e) - \frac{1}{2} \{C_0^{1,p+2}(e) + C_0^{1,p-2}(e)\}\} \right] \right] \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{N_T k} I_C(kt) + b_{N_T k} I_S(kt)\} \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ e C_l^{0,p}(e) + \frac{1}{2} \{C_l^{0,p+1}(e) + C_l^{0,p-1}(e)\} \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} \frac{e}{1-e^2} \{C_l^{1,p}(e) - \frac{1}{2} \{C_l^{1,p+2}(e) + C_l^{1,p-2}(e)\}\} \right] \\
 & \times V_C(N_T, \ell M) \Big] \Big]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_1 \chi_{TSPMS}^* &= \sqrt{1-e^2} (\delta_1 Q_{TSPMS} \cos i + \delta_1 \omega_{TSPMS}) \\
 & - \frac{2}{na} \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \left\{ e \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{1,1}(e) V_S(T_T, \ell M) \right. \right. \\
 & - \left. \left. \{C_0^{1,0}(e) + e C_0^{1,1}(e)\} \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{N_T k} I_C(kt) + b_{N_T k} I_S(kt)\} \right. \right. \\
 & - \left. \left. \sum_{l=1}^{\infty} \{C_l^{1,0}(e) + e C_l^{1,1}(e)\} V_C(N_T, \ell M) \right\} \right. \\
 & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C'_{p,s,q}(e) \\
 & \times \left[ \frac{1}{2} e \sum_{l=1}^{\infty} \{S_l^{1,p+1}(e) - S_l^{1,p-1}(e)\} V_S(T_T, \ell M) \right. \\
 & - \left. \left. \{C_0^{1,p}(e) + \frac{1}{2} e \{C_0^{1,p+1}(e) + C_0^{1,p-1}(e)\}\} \right. \right. \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{N_T k} I_C(kt) + b_{N_T k} I_S(kt)\} \\
 & - \left. \left. \sum_{l=1}^{\infty} \left[ C_l^{1,p}(e) + \frac{1}{2} e \{C_l^{1,p+1}(e) + C_l^{1,p-1}(e)\} \right] \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times V_C(N_T, \ell M) \Big] \Big] \\
 & (6.1.5.3.2)
 \end{aligned}$$

(4) 半長軸の変化による平均近点離角の変化  
 一次の摂動に基づく半長軸の変化による平均近点離角の変化は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \delta_1 M_{\delta a, T} &= \delta_1 M_{\delta a, TSPMS} + \delta_1 M_{\delta a, TSPMS} , \\
 \delta_1 M_{\delta a, TSPMS} &= - \frac{3\sqrt{1-e^2}}{a} C_0^{-1,0} \sum_{k=0}^{\infty} T_{Tk} I'_k , \\
 \delta_1 M_{\delta a, TSPMS} &= \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \left[ e \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{0,1}(e) V'_S(S_T, \ell M) \right. \\
 & - (1-e^2) C_0^{-1,0}(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{T_T k} I'_C(kt) + b_{T_T k} I'_S(kt)\} \\
 & \left. + (1-e^2) \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{-1,0}(e) V'_C(T_T, \ell M) \right] ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I'_k &= G'_p(k, t + \delta t) - G'_p(k, t) - \{G_p(k, t)\} \delta t , \\
 G'_p(k, t) &= \frac{t^{k+2}}{(k+1)(k+2)} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I'_C(\alpha_\nu) &= \frac{1}{\dot{\alpha}_\nu} \left[ -\frac{1}{\dot{\alpha}_\nu} \{ \cos(\alpha_\nu + \dot{\alpha}_\nu \delta t) - \cos \alpha_\nu \} \right. \\
 & \left. - (\sin \alpha_\nu) \delta t \right] , \quad [\dot{\alpha}_\nu \neq 0] ,
 \end{aligned}$$

$$I'_C(\alpha_\nu) = \frac{1}{2} (\delta t)^2 \cos \alpha_\nu , \quad [\dot{\alpha}_\nu = 0] ,$$

$$\begin{aligned}
 V'_S(A_T, \alpha_\nu) &= A_{T0} I'_S(\alpha) \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_{Tk} I'_{kS}(\alpha_\nu) \right. \\
 & + \frac{1}{2} a_{A_T k} \{ I'_S(\alpha_\nu + kt) + I'_S(\alpha_\nu - kt) \} \\
 & \left. - \frac{1}{2} b_{A_T k} \{ I'_C(\alpha_\nu + kt) - I'_C(\alpha_\nu - kt) \} \right] ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V'_C(A_T, \alpha_\nu) &= A_{T0} I'_C(\alpha_\nu) \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_{Tk} I'_{kC}(\alpha_\nu) \right. \\
 & + \frac{1}{2} a_{A_T k} \{ I'_C(\alpha_\nu + kt) + I'_C(\alpha_\nu - kt) \} \\
 & \left. + \frac{1}{2} b_{A_T k} \{ I'_S(\alpha_\nu + kt) - I'_S(\alpha_\nu - kt) \} \right] ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I'_{kS}(\alpha_\nu) &= G'_S(k, \alpha_\nu + \dot{\alpha}_\nu \delta t, \dot{\alpha}_\nu, t + \delta t) \\
 & - G'_S(k, \alpha_\nu, \dot{\alpha}_\nu, t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -G_S(k, \alpha_\nu, \dot{\alpha}_\nu, t) \delta t, \quad (\dot{\alpha}_\nu \neq 0), \\
 I'_{kC}(\alpha_\nu) &= G'_C(k, \alpha_\nu + \dot{\alpha}_\nu \delta t, \dot{\alpha}_\nu, t + \delta t) \\
 & - G'_C(k, \alpha_\nu, \dot{\alpha}_\nu, t) \\
 & - G_C(k, \alpha_\nu, \dot{\alpha}_\nu, t) \delta t, \quad (\dot{\alpha}_\nu \neq 0), \\
 G'_S & G'_C(k, \alpha_\nu, \dot{\alpha}_\nu, t) = \frac{k!}{\dot{\alpha}_\nu^{k+1}} \\
 & \times \left[ \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + l} \frac{\dot{\alpha}_\nu^{\frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1)}}{\left\{ \frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1) \right\}!} \right. \\
 & \times \frac{G_S}{G_C} \left( \frac{1+(-1)^k}{2} + 2(l-1), \alpha_\nu, \dot{\alpha}_\nu, t \right) \\
 & + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + l} \frac{\dot{\alpha}_\nu^{\frac{1-(-1)^k}{2} + 2l}}{\left\{ \frac{1-(-1)^k}{2} + 2l \right\}!} \\
 & \left. \times \frac{(-) G_C}{G_S} \left( \frac{1-(-1)^k}{2} + 2l, \alpha_\nu, \dot{\alpha}_\nu, t \right) \right], \\
 I'_{kS}(\alpha_\nu) &= I'_k \sin \alpha_\nu, \quad (\dot{\alpha}_\nu = 0), \\
 I'_{kC}(\alpha_\nu) &= I'_k \cos \alpha_\nu, \quad (\dot{\alpha}_\nu = 0)
 \end{aligned} \tag{6.1.5.4.1}$$

ここで  $\lfloor (k+1)/2 \rfloor$ ,  $\lfloor k/2 \rfloor$ などは括弧内の数値の整数部分を表す。

また次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \delta_1 M_{\delta a, T} &= \delta_1 M_{\delta a, T \text{ s p s}} + \delta_1 M_{\delta a, T \text{ s p m s}}, \\
 \delta_1 M_{\delta a, T \text{ s p s}} &= -\frac{3}{a \sqrt{1-e^2}} K_a(e) \sum_{k=0}^{\infty} T'_{T k} I'_k, \\
 \delta_1 M_{\delta a, T \text{ s p m s}} &= -\frac{3}{a \sqrt{1-e^2}} \\
 & \times \left[ K_a(e) \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{T' k} I'_C(k t) + b_{T' k} I'_S(k t) \} \right. \\
 & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^s C_{p, s, q}(e) \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{p, s}(e) V'_C(T'_l, l M) \right]
 \end{aligned} \tag{6.1.5.4.2}$$

### 6.1.6 赤道面の運動による軌道要素の変化

(6.1.5)の右辺の第七項をとった場合における軌道要素の変化は、(5.6.3)の  $R_k$ ,  $S_L$ などが長周期項のために、長周期変化をする。これを添字  $p_l$ をつけて表せば次のようになる<sup>5)</sup>  $E l_{k' p_l}$ は  $i$ ,  $\Omega_q$  および  $\omega$  を代

表する表示とする。

$$\begin{aligned}
 \delta_1 E l_{k' p_l} &= \Sigma f_i(\sin i, \cos i) f_{\epsilon_0}(\sin \epsilon_0, \cos \epsilon_0) \\
 & A_1 A_2 \cdots A_g \\
 & I_{h, w}(B_1, B_2, \cdots, B_{h-w}, B_{h-w+1}, \cdots, B_h)
 \end{aligned} \tag{6.1.6.1}$$

ここで  $A_1, A_2, \cdots, A_g$  は  $P'_1, P'_2, \cdots, P'_{k_m}$  の内の  $\tau_1$  個,  $P_1, P_2, \cdots, P_{k_m}$  の内の  $\tau_2$  個および  $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{l_m}$  の内の  $\tau_3$  個を示し、次のようになる。

$$g = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$$

また  $B_1, B_2, \cdots, B_{h-w}$  は  $R'_1, R'_2, \cdots, R'_{k_m}$  の内の  $\tau_2$  個,  $\tau_4$  個の  $\Psi$  および  $\tau_6$  個の  $\Omega_q$  を示し、次のようになる。

$$h - w = \tau_2 + \tau_4 + \tau_6$$

そして  $B_{h-w+1}, \cdots, B_h$  は  $R'_1, R'_2, \cdots, R'_{k_m}$  の内の  $\tau_1$  個,  $S_1, S_2, \cdots, S_{l_m}$  の内の  $\tau_3$  個,  $\tau_5$  個の  $\Psi$  および  $\tau_7$  個の  $\Omega_q$  を示し、次のようになる。

$$w = \tau_1 + \tau_3 + \tau_5 + \tau_7$$

なお  $\Sigma$  は上式の右辺の形の項にしてすべての項にわたって加えることを示す。さらに次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & I_{h, w}(B_1, B_2, \cdots, B_h) \\
 & = (-1)^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor + \lfloor \frac{w}{2} + \frac{1+(-1)^h}{4} \rfloor} \frac{1}{2^{h-1}} \sum_{m=1}^{2^{h-1}} (-1)^{n=w} \frac{\max(h-1, w)^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}}{2^m} \\
 & \times \left\{ \frac{1-(-1)^{h+w}}{2} S_{h, m} + \frac{1+(-1)^{h+w}}{2} C_{h, m} \right\},
 \end{aligned}$$

$$S_{h, m} = I_S(\Gamma_{h, m}),$$

$$C_{h, m} = I_C(\Gamma_{h, m}),$$

$$\Gamma_{h, m} = \sum_{\nu=1}^h (-1)^{\lfloor \frac{m-1}{2^{h-\nu}} \rfloor} B_\nu,$$

$$\dot{\Gamma}_{h, m} = \sum_{\nu=1}^h (-1)^{\lfloor \frac{m-1}{2^{h-\nu}} \rfloor} \dot{B}_\nu$$

ここで  $\lfloor \quad \rfloor$  は整数部分を示す。

特に(5.6.1)の初めの三式において右辺の第二項までをとることにすれば、(5.6.1)の代わりに(5.6.1')を用いることになる。この場合には次のようになる<sup>5)</sup>

$$\delta_1 i_{p_l} = F_{i I} + F_{i \Pi},$$

$$\delta_1 \Omega_{q p_l} = F_{\Omega q I} + F_{\Omega q \Pi},$$

$$\delta_1 \omega_{p_l} = F_{\omega I} + F_{\omega \Pi},$$

$$F_{i I} = - \left\{ \cos \epsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} P_k I_{3,0}(R_k, \Psi, \Omega_q) \right\}$$



$$\begin{aligned}
& -\sin \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{k=1}^{k_m} P'_k P_k I_{4,1}(R_k, \Psi, \Omega_q, R'_k) \\
& + \sin \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{l_m} Q_l I_{3,2}(\Omega_q, S_l, \Psi) \\
& + \cos \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{l=1}^{l_m} P'_k Q_l I_{4,3}(\Omega_q, R'_k, S_l, \Psi) \\
& - \sin^2 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} P_k I_{2,1}(R_k, \Omega_q) \\
& - \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} P_k I_{3,2}(R_k, \Psi, \Omega_q) \\
& - \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{k=1}^{k_m} P'_k P_k I_{3,2}(R_k, R'_k, \Omega_q) \\
& + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{k=1}^{k_m} P'_k P_k I_{4,3}(R_k, R'_k, \Psi, \Omega_q) \\
& + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{l_m} Q_l I_{3,2}(\Psi, S_l, \Omega_q) \\
& + \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{l=1}^{l_m} P'_k Q_l I_{4,3}(\Psi, R'_k, S_l, \Omega_q) \} , \\
F_{i\Pi} &= 0 , \\
F_{Q_q I} &= -\cot i \left\{ \cos \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} P_k I_{3,1}(R_k, \Psi, \Omega_q) \right. \\
& - \sin \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{k=1}^{k_m} P'_k P_k I_{4,2}(R_k, \Psi, R'_k, \Omega_q) \\
& + \sin \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{l_m} Q_l I_{3,3}(S_l, \Psi, \Omega_q) \\
& + \cos \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{l=1}^{l_m} P'_k Q_l I_{4,4}(R'_k, S_l, \Psi, \Omega_q) \\
& + \sin^2 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} P_k I_{2,0}(R_k, \Omega_q) \\
& + \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} P_k I_{3,1}(R_k, \Omega_q, \Psi) \\
& + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{k=1}^{k_m} P'_k P_k I_{3,1}(R_k, \Omega_q, R'_k) \\
& - \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{k=1}^{k_m} P'_k P_k I_{4,2}(R_k, \Omega_q, R'_k, \Psi) \\
& - \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{l_m} Q_l I_{3,1}(\Psi, \Omega_q, S_l) \\
& \left. - \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{l=1}^{l_m} P'_k Q_l I_{4,2}(\Psi, \Omega_q, R'_k, S_l) \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{Q_q \Pi} &= \frac{1}{2} \left\{ (-\cos \varepsilon_0 + \sin^2 \varepsilon_0) \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{k=1}^{k_m} P'_k P_k I_{3,1}(R_k, \Psi, R'_k) \right. \\
& - \sin^3 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{l=1}^{l_m} P'_k Q_l I_{3,3}(R'_k, S_l, \Psi) \\
& + \sin \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} P_k I_{2,0}(R_k, \Psi) \\
& + \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{l_m} Q_l I_{2,2}(S_l, \Psi) \\
& + \cos^3 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{k=1}^{k_m} P'_k P_k I_{4,2}(R_k, \Psi, R'_k, \Psi) \\
& - \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{l_m} Q_l I_{3,3}(S_l, \Psi, \Psi) \\
& - \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{l=1}^{l_m} P'_k Q_l I_{4,4}(R'_k, S_l, \Psi, \Psi) \\
& - \sin^2 \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{l_m} Q_l I_{3,1}(\Psi, \Psi, S_l) \\
& \left. - 2 \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{l=1}^{l_m} P'_k Q_l I_{4,2}(\Psi, \Psi, R'_k, S_l) \right\} ,
\end{aligned}$$

$$F_{\omega I} = -\frac{1}{\cot i \sin i} F_{Q_q I} ,$$

$$F_{\omega \Pi} = 0$$

(6.1.6.1')

## 6.2 二次の摂動に基づく軌道要素の変化

第 6.1 節の初頭において示したように(5.1)に各作用による軌道要素の変化率を表す(5.1.1), (5.2.1), (5.3.1), (5.4.1), (5.5.1.1)あるいは(5.5.2.1), (5.6.1)などを代入した式は諸作用下における軌道要素の変化率の表示式となる。

ここで第 6.1 節においてはこの表示式の右辺にある諸量は(6.1.3)および(6.1.4)に示されるように変化するとみなし、次いでこの表示式の積分を行って一次の摂動に基づく軌道要素の変化を求めた。つまり線形摂動の方法を用いて近似解を求めた。

次に一層精確な解を求めるために、以上に求めた一次の摂動に基づく軌道要素の変化にさらに加える、二次の摂動に基づく軌道要素の変化を求めることにする。この二次の摂動に基づく軌道要素の変化を求めるために必要となる、軌道要素の変化率における二次の摂動に基づく部分を次式のように表す。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dEl_k}{dt}\right)_2 &= \left(\frac{dEl_k}{dt}\right)_{2B} + \left(\frac{dEl_k}{dt}\right)_{2L} + \left(\frac{dEl_k}{dt}\right)_{2S} \\ &+ \left(\frac{dEl_k}{dt}\right)_{2R} + \left(\frac{dEl_k}{dt}\right)_{2A} + \left(\frac{dEl_k}{dt}\right)_{2T} \\ &+ \left(\frac{dEl_k}{dt}\right)_{2P} \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

なお二次の摂動の場合を添字の 2 によって示すことにする。

積分区間の幅を  $\delta t$  として、この軌道要素の変化率を表す式を積分して求められる二次の摂動に基づく軌道要素の変化を次のように表す。

$$\begin{aligned} \delta_2 El_k &= \delta_2 El_{kE} + \delta_2 El_{kL} + \delta_2 El_{kS} + \delta_2 El_{kR} \\ &+ \delta_2 El_{kA} + \delta_2 El_{kT} + \delta_2 El_{kP} \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

特に  $t_{(j)}$  から  $t_{(j+1)}$  までの積分および  $t_{(m)(j)}$  から  $t_{(m)(j)}$  までの積分によって求められるこの軌道要素の変化をそれぞれ

$$\left(\delta_2 El_k\right)_{(j)}, \quad \left(\delta_2 El_k\right)_{(m)(j)}$$

とする。このとき次のようになる。

$$\left(\delta_2 El_k\right)_{(j)} = \sum_{m=m_1}^{m_2} \left(\delta_2 El_k\right)_{(m)(j)}$$

なおここで  $t_{(j+1)}$  を  $t$  としたときおよび  $t_{(m)(j)}$  を  $t$  としたときのこの軌道要素の変化をそれぞれ

$$\delta_2 El_k(j), \quad \delta_2 El_k(m)(j)$$

とする。

一般に二次の摂動に基づく軌道要素の変化率および変化の大きさは非常に小さい。そこで一次の摂動に基づく軌道要素の変化率および変化の内の、最も主要な zonal harmonics に基づいた摂動力の作用による部分に対してのみ二次の摂動に基づく軌道要素の変化率および変化を考慮することにする。ここで zonal harmonics に基づく力による場合を添字の Z で表すことにする。そうすれば次のように表される。

$$\left(\frac{dEl_k}{dt}\right)_2 = \left(\frac{dEl_k}{dt}\right)_{2Z} \quad (6.2.1')$$

$$\delta_2 El_k = \delta_2 El_{kZ} \quad (6.2.2')$$

ところで地球の人工衛星の運動において zonal harmonics に基づく摂動の理論は Brouwer によって確立された<sup>24)</sup>そしてこの Brouwer の理論は一般項による表示式を用いて任意の次数までの harmonics をとりうる理論に拡張された<sup>25)</sup>さらにこの理論における

正準変換式と正準方程式を変形して Lagrange 形の運動方程式が導き出された。この運動方程式の内で一次の摂動に基づく軌道要素の変化率を表す部分を除いた残りの部分が二次の摂動に基づく軌道要素の変化率の表す式となる。ここでこの表示式の右辺にある軌道要素および平均近点離角は(6.1.3)の末尾の八式および(6.1.4)に示されるように変化するとみなし、次いでこの表示式を積分すれば一次および二次の摂動に基づく軌道要素の変化が得られる<sup>26)</sup>

以上のようにして求められた、zonal harmonics に基づいた力による二次の摂動に基づく軌道要素の変化率と変化を次に示すことにする。

### 6.2.1 Zonal Harmonics に基づいた力による二次の摂動に基づく軌道要素の変化率

軌道要素の変化率の表示式を以下に示す。

(1) 主問題の場合

(a) 長周期項

(i) 変換後の Hamilton 関数による部分

二次の zonal harmonics の定数  $J_{2,0}$  を微小数の基準とする。そして二次の摂動の場合、正準変換後の Hamilton 関数における第二位の微小数を因数とする周期項に基づく場合および長周期の場合をそれぞれ添字の 2, F および ZL によって示すことにする。そうすれば次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{da}{dt}\right)_{2,F,ZL} &= 0, \\ \left(\frac{de}{dt}\right)_{2,F,ZL} &= -\frac{3}{32} J_{2,0}^2 a_E^4 \frac{ne \sin^2 i (14-15 \sin^2 i)}{a^4 (1-e^2)^3} \sin 2\omega, \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_{2,F,ZL} &= \frac{3}{32} J_{2,0}^2 a_E^4 \frac{ne^2 \cos i \sin i (14-15 \sin^2 i)}{a^2 (1-e^2)^4} \sin 2\omega, \\ \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_{2,F,ZL} &= -\frac{3}{16} J_{2,0}^2 a_E^4 \frac{ne^2 \cos i (7-15 \sin^2 i)}{a^4 (1-e^2)^4} \cos 2\omega, \\ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{2,F,ZL} &= \frac{3}{64} J_{2,0}^2 a_E^4 \\ &\times \frac{n \{ e^2 (28-158 \sin^2 i + 135 \sin^4 i) - 2 \sin^2 i (14-15 \sin^2 i) \}}{a^4 (1-e^2)^4} \\ &\times \cos 2\omega, \\ \left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_{2,F,ZL} &= \frac{3}{64} J_{2,0}^2 a_E^4 \frac{n(2-5e^2) \sin^2 i (14-15 \sin^2 i)}{a^4 (1-e^2)^2} \\ &\times \cos 2\omega \end{aligned} \quad (6.2.1.1.1)$$

## (ii) 相互作用による部分

相互作用に基づく場合を添字の C によって示すことにする。ここで一次の摂動に基づく軌道要素の変化率における主問題の場合の長年項に対する作用をとる。そしてまた二次の摂動に基づく軌道要素の変化における主問題の場合の長周期項の正準変換後の Hamilton 関数による部分に原因する作用を考慮する。そうすれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dQ_0}{dt}\right)_{2,C,ZI} &= 6J_{2,0} a_E^2 \frac{ne \cos i}{a^3 (1-e^2)^3} \delta_2 e_{F,ZI} \\ &\quad - \frac{3}{2} J_{2,0} a_E^2 \frac{n \sin i}{a^2 (1-e^2)^3} \delta_2 i_{F,ZI} , \\ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{2,C,ZI} &= -3J_{2,0} a_E^2 \frac{ne(4-5 \sin^2 i)}{a^2 (1-e^2)^3} \delta_2 e_{F,ZI} \\ &\quad + \frac{15}{4} J_{2,0} a_E^2 \frac{n \sin 2i}{a^2 (1-e^2)^2} \delta_2 i_{F,ZI} , \\ \left(\frac{d\lambda^*}{dt}\right)_{2,C,ZI} &= -\frac{9}{4} J_{2,0} a_E^2 \frac{ne(2-3 \sin^2 i)}{a^2 (1-e^2)^{\frac{5}{2}}} \delta_2 e_{F,ZI} \\ &\quad + \frac{9}{4} J_{2,0} a_E^2 \frac{n \sin 2i}{a^2 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \delta_2 i_{F,ZI} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.1.1.2)$$

ここで  $\delta_2 e_{F,ZI}$  および  $\delta_2 i_{F,ZI}$  は (6.2.2.1.1) において求められている

## (b) 長年項

主問題の場合および長年的の場合をそれぞれ添字の M および se によって示すことにする。そうすれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dQ_0}{dt}\right)_{2,M,se} &= -\frac{3}{32} J_{2,0}^2 a_E^4 \frac{n \cos i}{a^4 (1-e^2)^4} \\ &\quad \times \left\{ 36 + 4e^2 + 24\sqrt{1-e^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \right. \\ &\quad \left. - 5(8-e^2) \sin^2 i \right\} , \\ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{2,M,se} &= \frac{3}{128} J_{2,0}^2 a_E^4 \frac{2}{a^4 (1-e^2)^4} \\ &\quad \times \left\{ (8-10 \sin^2 i)(48-43 \sin^2 i) \right. \\ &\quad \left. + 24\sqrt{1-e^2} (4-5 \sin^2 i)(2-3 \sin^2 i) \right. \\ &\quad \left. + e^2(56-36 \sin^2 i - 45 \sin^4 i) \right\} , \\ \left(\frac{d\lambda^*}{dt}\right)_{2,M,se} &= \frac{3}{128} J_{2,0}^2 a_E^4 \frac{n}{a^4 (1-e^2)^4} \\ &\quad \times \left\{ 15\sqrt{1-e^2} (8-16 \sin^2 i + 7 \sin^4 i) \right. \\ &\quad \left. + 16(1-e^2)(2-3 \sin^2 i)^2 \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ 5\sqrt{1-e^2} (1-e^2)(-8+8 \sin^2 i \\ &+ 5 \sin^4 i) \end{aligned} \right\}$$

(6.2.1.1.3)

## (2) 二次をこえる Zonal Harmonics に基づく摂動力をとった場合

$l$  次の zonal harmonics に基づく場合を添字の  $l$  によって示すことにする。そうすれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dQ_0}{dt}\right)_{2,l,ZI} &= 6J_{2,0} a_E^2 \frac{ne \cos i}{a^3 (1-e^2)^3} \delta_1 e_{l,ZI} \\ &\quad - \frac{3}{2} J_{2,0} a_E^2 \frac{n \sin i}{a^2 (1-e^2)^2} \delta_1 i_{l,ZI} , \\ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{2,l,ZI} &= -3J_{2,0} a_E^2 \frac{ne(4-5 \sin^2 i)}{a^2 (1-e^2)^3} \delta_1 e_{l,ZI} \\ &\quad + \frac{15}{4} J_{2,0} a_E^2 \frac{n \sin^2 i}{a^2 (1-e^2)^2} \delta_1 i_{l,ZI} , \\ \left(\frac{d\lambda^*}{dt}\right)_{2,l,ZI} &= -\frac{9}{4} J_{2,0} a_E^2 \frac{ne(2-3 \sin^2 i)}{a^2 (1-e^2)^{\frac{5}{2}}} \delta_1 e_{l,ZI} \\ &\quad + \frac{9}{4} J_{2,0} a_E^2 \frac{n \sin 2i}{a^2 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \delta_1 i_{l,ZI} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.1.2.1)$$

ここで  $\delta_1 e_{l,ZI}$  および  $\delta_1 i_{l,ZI}$  は (6.1.1.2.1) の  $\delta_1 e_{ZI}$  および  $\delta_1 i_{ZI}$  における無限項の内の  $l$  次の harmonic に基づく項である。

## 6.2.2 Zonal Harmonics に基づいた力による二次の摂動に基づく軌道要素の変化

次に第 6.2.1 節に示した軌道要素の変化率から求められる軌道要素の変化の表示式を以下に示す。

## (1) 主問題の場合

## (a) 長周期項

## (i) 変換後の Hamilton 関数による部分

(6.2.1.1.1) から次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_2 a_{F,ZI} &= 0 , \\ \delta_2 e_{F,ZI} &= -\frac{3}{32} J_{2,0}^2 a_E^4 \frac{ne \sin^2 i (14-15 \sin^2 i)}{a^4 (1-e^2)^3} \\ &\quad \times I_S(a_{2,F,ZI}) , \\ \delta_2 i_{F,ZI} &= \frac{3}{32} J_{2,0}^2 a_E^4 \frac{ne^2 \cot i \sin^2 i (14-15 \sin^2 i)}{a^4 (1-e^2)^4} \\ &\quad \times I_S(a_{2,F,ZI}) , \\ \delta_2 Q_{qF,ZI} &= -\frac{3}{16} J_{2,0}^2 a_E^4 \frac{ne^2 \cos i (7-15 \sin^2 i)}{a^4 (1-e^2)^4} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \times I_c(\alpha_{2,F,Zl}) , \\ \delta_2 \omega_{F,Zl} &= \frac{3}{64} J_{2,0}^2 \alpha_E^4 \frac{n}{a^4 (1-e^2)^4} \\ & \times \{ e^2 (28-158 \sin^2 i + 135 \sin^4 i) \\ & \quad - 2 \sin^2 i (14-15 \sin^2 i) \} I_c(\alpha_{2,F,Zl}) , \\ \delta_2 \chi_{F,Zl}^* &= \frac{3}{64} J_{2,0}^2 \alpha_E^4 \frac{n(2-5e^2) \sin^2 i (14-15 \sin^2 i)}{a^4 (1-e^2)^2} \\ & \times I_c(\alpha_{2,F,Zl}) , \\ \alpha_{2,F,Zl} &= 2\omega \end{aligned} \quad (6.2.2.1.1)$$

(ii) 相互作用による部分

(6.2.1.1.2) から次式をうる。

$$\begin{aligned} \delta_2 \Omega_{c,Zl} &= -\frac{45}{64} J_{2,0}^3 \alpha_E^6 \frac{n^2 e^2 \sin^2 i \cos i (14-15 \sin^2 i)}{a^6 (1-e^2)^6} \\ & \times I'_s(\alpha_{2,c,Zl}) , \\ \delta_2 \omega_{c,Zl} &= \frac{9}{64} J_{2,0}^3 \alpha_E^6 \frac{n^2 e^2 \sin^2 i (13-15 \sin^2 i)(14-15 \sin^2 i)}{a^6 (1-e^2)^6} \\ & \times I'_s(\alpha_{2,c,Zl}) , \\ \delta_2 \chi_{c,Zl}^* &= \frac{27}{128} J_{2,0}^3 \alpha_E^6 \frac{n^2 e^2 (4-5 \sin^2 i) \sin^2 i (14-15 \sin^2 i)}{a^6 (1-e^2)^2} \\ & \times I'_s(\alpha_{2,c,Zl}) , \\ \alpha_{2,c,Zl} &= 2\omega \end{aligned} \quad (6.2.2.1.2)$$

(b) 長年項

(6.2.1.1.3) から次式をうる。

$$\begin{aligned} \delta_2 \Omega_{qM,se} &= -\frac{3}{32} J_{2,0}^2 \alpha_E^4 \frac{n \cos i}{a^4 (1-e^2)^4} \\ & \times \{ 36+4e^2+24\sqrt{1-e^2} (1-\frac{3}{2} \sin^2 i) \\ & \quad - 5(8-e^2) \sin^2 i \} \delta t , \\ \delta_2 \omega_{M,se} &= \frac{3}{128} J_{2,0}^2 \alpha_E^4 \frac{n}{a^4 (1-e^2)^4} \\ & \times \{ (8-10 \sin^2 i)(48-43 \sin^2 i) \\ & \quad + 24\sqrt{1-e^2} (4-5 \sin^2 i)(2-3 \sin^2 i) \\ & \quad + e^2 (56-36 \sin^2 i-45 \sin^4 i) \} \delta t , \\ \delta_2 \chi_{M,se}^* &= \frac{3}{128} J_{2,0}^2 \alpha_E^4 \frac{n}{a^4 (1-e^2)^4} \\ & \times \{ 15\sqrt{1-e^2} (8-16 \sin^2 i+7 \sin^4 i) \\ & \quad + 16(1-e^2)(2-3 \sin^2 i)^2 \\ & \quad + 5\sqrt{1-e^2} (1-e^2)(-8+8 \sin^2 \\ & \quad + 5 \sin^4 i) \} \delta t \end{aligned} \quad (6.2.2.1.3)$$

(2) 二次をこえる Zonal Harmonics に基づく摂動をとった場合

(6.2.1.2.1) から次式をうる。

$$\begin{aligned} \delta_2 \Omega_{q,l,Zl} &= \frac{15}{2} J_{2,0} J_{l,0} \alpha_E^{2+l} \frac{n^2 \cos i}{a^{2+l} (1-e^2)^{\frac{l}{2}}} \sum_p (\ell-2p) \\ & \times G_{l,p,-l+2p}(e) F_{l,0,p}(i) I'_s(\alpha_{2,l,Zl}) , \\ \delta_2 \omega_{l,Zl} &= -J_{2,0} J_{l,0} \alpha_E^{2+l} \frac{n}{a^{2+l} (1-e^2)^{\frac{l}{2}}} \\ & \times (12-15 \sin^2 i + \frac{15}{2} \cos^2 i) \sum_p (\ell-2p) \\ & \times G_{l,p,-l+2p}(e) F_{l,0,p}(i) I'_s(\alpha_{2,l,Zl}) , \\ \delta_2 \chi_{l,Zl}^* &= -\frac{9}{4} J_{2,0} J_{l,0} \alpha_E^{2+l} \frac{n^2}{a^{2+l} (1-e^2)^2} \\ & \times (2-3 \sin^2 i + 2 \cos^2 i) \sum_p (\ell-2p) \\ & \times G_{l,p,-l+2p}(e) F_{l,0,p}(i) I'_s(\alpha_{2,l,Zl}) , \\ \alpha_{2,l,Zl} &= (\ell-2p) \omega - \{ 1-(-1)^l \} \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (6.2.2.2.1)$$

ここで  $\sum_p$  は  $l/2$  を除く 0 から  $l$  までの整数についての和をとることを示す。 $l$  が

$$l = 3, 4, \dots, \ell_{EZl \max}$$

までの harmonics をとることにすれば軌道要素の変化は次のようになる。

$$\delta_2 E \ell_{kH,Zl} = \sum_{l=3}^{\ell_{EZl \max}} \delta_2 E \ell_{kl,Zl} \quad \left. \begin{array}{l} k=4, 5, 6 \end{array} \right\} \quad (6.2.2.2.2)$$

## 第7章 運動の決定

## 7.1 軌道要素

$\delta t$  の間における軌道要素の変化  $\delta E \ell_k$  は一次および二次の摂動に基づく各種の作用による軌道要素の変化から構成されるとする。したがって次のように置く。

$$\delta E \ell_k = \delta_1 E \ell_k + \delta_2 E \ell_k \quad (7.1.1)$$

そしてこの式の右辺の第一項および第二項は前章によればそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta_1 E \ell_k &= \delta_1 E \ell_{kE} + \delta_1 E \ell_{kL} + \delta_1 E \ell_{kS} + \delta_1 E \ell_{kR} \\ & \quad + \delta_1 E \ell_{kA} + \delta_1 E \ell_{kT} + \delta_1 E \ell_{kP} \end{aligned}$$

$$\delta_2 El_k = \delta_2 El_{kz} \quad (7.1.2)$$

さらにこの両式の右辺の各項は前章に示されている。  
これをまとめて表すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 El_{kE} &= \delta_1 El_{kzse} + \delta_1 El_{kzI} + \delta_1 El_{kzs} \\ &\quad + \delta_1 El_{kNR} + \delta_1 El_{kN} \\ \delta_1 El_{kD} &= \delta_1 El_{kDse} + \delta_1 El_{kDR} + \delta_1 El_{kDI} \\ &\quad + \delta_1 El_{kDs} \\ \delta_1 El_{kR} &= \delta_1 El_{kRR} + \delta_1 El_{kRI} + \delta_1 El_{kRS} \\ \delta_1 El_{kA} &= \delta_1 El_{kAsops} + \delta_1 El_{kAlpms} \\ \delta_1 El_{kT} &= \delta_1 El_{kTseps} + \delta_1 El_{kTIp} + \delta_1 El_{kTspms} \\ \delta_1 El_{kP} &= \delta_1 El_{kPI} \\ \delta_2 El_{kz} &= \delta_2 El_{kFzI} + \delta_2 El_{kCzI} + \delta_2 El_{kMse} \\ &\quad + \delta_2 El_{kHzi} \end{aligned} \right\} (7.1.3)$$

軌道要素の変化が以上のように表される場合に、 $\delta t$ の間における平均近点離角の変化は(3.2)によれば次のようになる。

$$\delta M = \delta \chi^* + n \delta t + \delta_1 M_{\delta a} \quad (7.1.4)$$

この右辺の第三項は前章によれば次のようになる。

$$\delta_1 M_{\delta a} = \delta_1 M_{\delta a,E} + \delta_1 M_{\delta a,I} + \delta_1 M_{\delta a,S} + \delta_1 M_{\delta a,R} \\ + \delta_1 M_{\delta a,A} + \delta_1 M_{\delta a,T} \quad (7.1.5)$$

さらにこの式の右辺の各項も前章に示されている。  
これをまとめて表すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 M_{\delta a,E} &= \delta_1 M_{\delta a,zs} + \delta_1 M_{\delta a,NR} + \delta_1 M_{\delta a,N} \\ \delta_1 M_{\delta a,D} &= \delta_1 M_{\delta a,DS} \\ \delta_1 M_{\delta a,R} &= \delta_1 M_{\delta a,RS} \\ \delta_1 M_{\delta a,A} &= \delta_1 M_{\delta a,Asops} \\ \delta_1 M_{\delta a,T} &= \delta_1 M_{\delta a,Tseps} + \delta_1 M_{\delta a,Tspms} \end{aligned} \right\} (7.1.6)$$

人工衛星の運動決定の開始時を  $t_{(1)}$  とする。このときに時刻

$$\left. \begin{aligned} t_{(j)} &= t_{(1)} + \sum_{j=1}^{j-1} (\delta t)_{(j)} \\ &= t_{(1)} + \Delta t \end{aligned} \right\} (7.1.7)$$

における軌道要素は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} El_{k(j)} &= El_{k(1)} + \sum_{j=1}^{j-1} (\delta El_k)_{(j)} \\ &= El_{k(1)} + \Delta El_k \end{aligned} \right\} (7.1.8)$$

また平均近点離角は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{(j)} &= M_{(1)} + \sum_{j=1}^{j-1} (\delta M)_{(j)} \\ &= M_{(1)} + \Delta M \end{aligned} \right\} (7.1.9)$$

なお軌道要素の関数にも(7.1.9)と同様の表し方をとることとする。

(7.1.7)、(7.1.8)および(7.1.9)によれば、人工衛星の運動が諸作用に基づく一次の摂動および zonal harmonics に基づく二次の摂動までを考慮に入れて決定されることになる。

## 7.2 二種の昇交点経度の差<sup>5,b)</sup>

一般歳差を表す次の諸量をとる。

- $90^\circ - \zeta_0$  : 1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく瞬時の平均赤道の昇交点の赤経を表す角度
- $90^\circ + Z_m$  : この昇交点の、瞬時の平均春分点と平均赤道に基づく赤経を表す角度
- $\theta_m$  : 1950.0の平均赤道に対する瞬時の平均赤道の傾斜角

これらの諸量は天体暦に表示されている。さらに次のようにする。

- $\lambda_0$  : 1950.0の平均赤道に対する瞬時の黄道の傾角の補角
- $\beta_0$  : 瞬時の黄道に沿って測った1950.0の平均赤道と瞬時の平均赤道の角距離
- $\tau_0$  : 瞬時の黄道と1950.0の平均赤道の交点のうち太陽が南から北へこの赤道を通過する点を  $r'$  とするとき、1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく  $r'$  の赤経を  $90^\circ - \zeta_0$  から減じた角度
- $\rho_0$  :  $\alpha$  から  $90^\circ - \zeta_0$  を減じた角度
- $\tau_0$  : 瞬時の真春分点と真赤道に基づく1950.0の平均赤道に対する瞬時の真の赤道の昇交点の赤経

このとき次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda_0 &= -\cos \epsilon_m \cos \theta_m \\ &\quad + \sin \epsilon_m \sin \theta_m \cos (90^\circ + Z_m) , \\ \sin \beta_0 &= \frac{\sin (90^\circ + Z_m)}{\sin \lambda_0} \sin \theta_m , \\ \cos \tau_0 &= \cos \beta_0 \cos (90^\circ + Z_m) \\ &\quad + \sin \beta_0 \sin (90^\circ + Z_m) \cos \epsilon_m , \end{aligned} \right\}$$

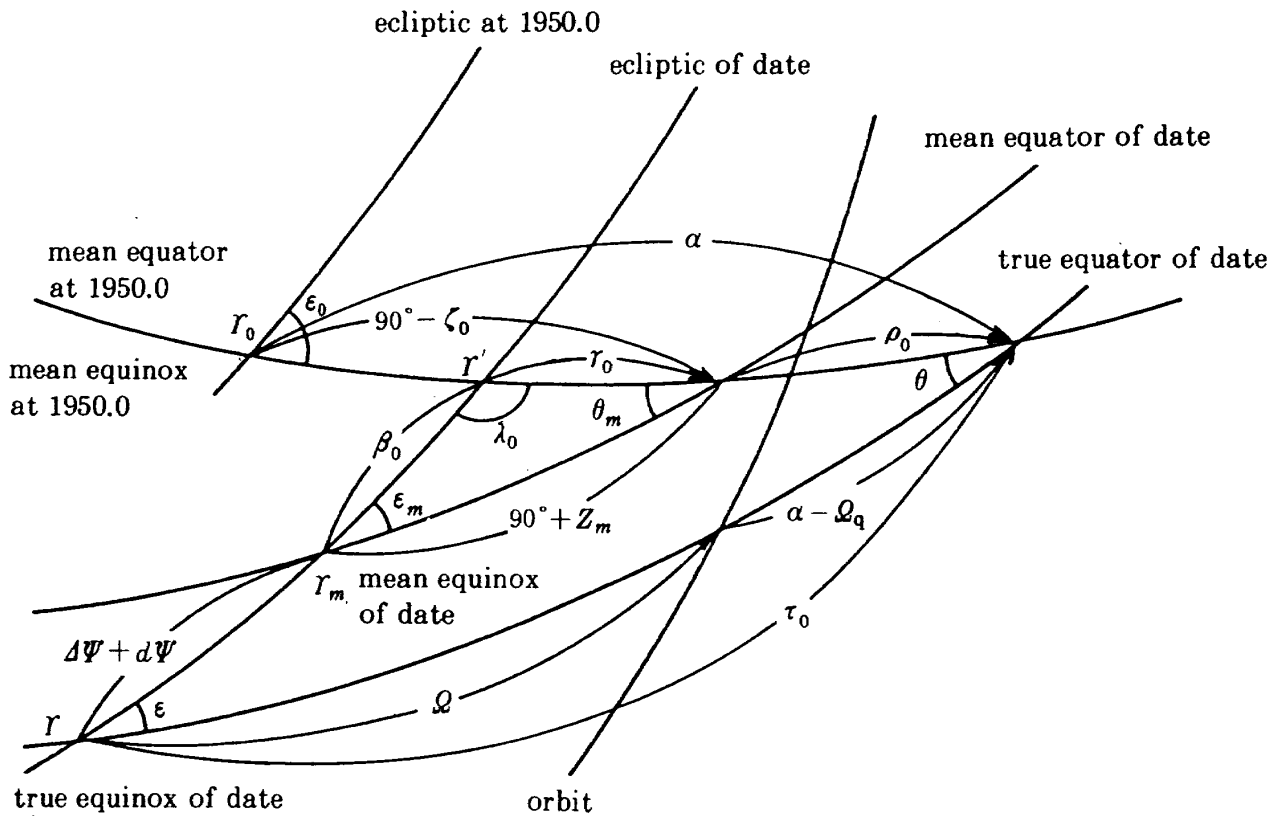


図2 春分点と赤道

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\cos \lambda_0 \cos \varepsilon \\ &\quad + \sin \lambda_0 \sin \varepsilon \cos (\Delta\Psi + d\Psi + \beta_0), \\ \cos (\tau_0 + \rho_0) &= \frac{\sin \lambda_0 \cos \varepsilon + \cos \lambda_0 \sin \varepsilon \cos (\Delta\Psi + d\Psi + \beta_0)}{\sin \theta}, \\ \cos \tau_0 &= \frac{\sin \theta \cos \lambda_0 + \cos \theta \sin \lambda_0 \cos (\tau_0 + \rho_0)}{\sin \varepsilon} \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

この(7.2.1)に示す三角関数の逆三角関数の主値として  $\lambda_0, \beta_0, \tau_0, \tau_0 + \rho_0, \tau_0$  などが求められる。さらにこれらを用いて(7.2.1)の  $t$  に関する導関数からこれらの変化率が求められる。このとき  $D$  とその変化率を求める式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} D &= \mathcal{Q} - \mathcal{Q}_q = \tau_0 - 90^\circ + \zeta_0 - \rho_0, \\ \frac{dD}{dt} &= \frac{d\mathcal{Q}}{dt} - \frac{d\mathcal{Q}_q}{dt} = \frac{d\tau_0}{dt} + \frac{d\zeta_0}{dt} - \frac{d\rho_0}{dt} \end{aligned} \right\} \tag{7.2.2}$$

## 第8章 運動を決定する計算

### 8.1 計算に用いる式

前章までの所論によれば、人工衛星の運動を決定することが理論的には可能であり、したがってまた

この理論における式を用いて運動を決定する計算を実行することができることになる。

人工衛星の運動を決定する計算を行うに際しては、精確を期するためには運動に対する各種の摂動の諸作用を可及的に広い範囲にわたって取り上げた場合の理論における式を用いて計算を行うことが望ましい。

しかし人工衛星の運動を決定する計算を行う場合に目的、所要の計算の精度、計算に割り当て得る時間などに関する制限、条件などが存在するときがある。このようなときにはこの制限、条件などに応じ得る計算を行う必要がある。このためには各種の摂動の諸作用の内から対象とする人工衛星に対して主要であると考えられる部分のみを取り上げた場合の理論における式を用いて計算を行う。

また各種の作用の表示をする理論の式において、諸量を一般項を用い無限項の和として表す場合が多い。この場合にはこの諸量は、重力 potential の harmonics の定数、人工衛星の地心距離と月あるいは太陽の地心距離との比、軌道の離心率などに関する冪級数の形をとっている。したがって計算を実行するときには所要の精度に応じうる有限項数までを

とることとする。

なお本理論の式において用いられる時系，月および太陽の位置，人工衛星の位置，赤道面の位置などの諸量を表示する式に対しては，これらの式が必要となるそれぞれのところで説明を加えてきた。これらは厳密な表示またはそれに近い表示をとっている。したがって精確さにおいて本理論の式に十分に対応できる状態にある。

## 8.2 計算の例

前章までの所論によって地球の人工衛星の運動を決定する計算が次の二種の場合に行われている。この二種の計算においては各種の摂動の諸作用の内から対象とする人工衛星に対して主要であると考えられる部分のみが取り上げられている。

第一の計算は低高度の人工衛星に関するものである。<sup>10)</sup>そこにおいて地球の重力 potential の中心項に基づく力と大気抵抗の力を取り，また  $R$  の一部分を考慮している。このような部分として地球の重力 potential の harmonics  $R_E$  を取り上げている。なお協定世界時<sup>4)</sup>を  $t_0$  とし，この時系において運動決定の時刻を定めている。そして運動決定の開始時における近地点および遠地点の高度がそれぞれ約 230 km および約 330 km である落下の直前の人工衛星の運動を計算している。これは人工衛星の運動を決定する問題の内でも最も困難なものである。

計算の結果によれば人工衛星の寿命の予測を行うことができるにしてもその位置を精確に予測することは容易ではない。各種の摂動の諸作用下にある人工衛星の運動を取り扱う一般摂動理論として本理論は従来の理論に比してその構成を可及的に一層精確化している。しかしこのような理論を以てしても落下の直前の人工衛星の運動の決定を完全に行うことはできない。

第二の計算は静止衛星に関するものである。<sup>11)</sup>そこにおいて地球の重力 potential の中心項に基づく力と微小な推力を取り，また  $R$  の一部分を考慮している。このような部分として地球の重力 potential の harmonics  $R_E$ ，月の引力の potential  $R_L$  および太陽の引力の potential  $R_S$  を取り上げている。ここでも協定世界時をとり，この時系において運動決定の

時刻を定めている。そして人工衛星を不連続的に作用する微小な推力によって地球に相対的な静止の位置に保持するときの運動を計算している。ここで静止の位置の保持は

$$i \leq 0.1 \text{ deg} \quad , \\ |\Delta \lambda| \leq 0.1 \text{ deg}$$

によって規定されるとする。

以上の計算によって所要の微小な推力を決定する過程を明らかにし，またこれによって微小な推力による軌道の制御の可能性を示した。

## 第 9 章 考 察

### 9.1 評 価

本研究における理論の寄与する所，長所，欠点，限界などについて考察する。

運動の決定は最終的には第 7 章の諸式によって行われる。ここで本理論における運動の決定の精度を考究する。所要の精度に対応して考慮を要する摂動は，第 7 章の諸式の右辺の各項を構成する各種の摂動に基づく地心のまわりの角運動から求めた軌道の長さの，地球の重力 potential の中心項に基づく力による地心のまわりの角運動から求めた軌道の長さに対する比によって決定される。ところでこの軌道の長さの比の概略の値は potential，摂動加速度，軌道要素の変化率などを表す諸式に基づいて求められる。そこでこの諸式に基づいて求めた軌道の長さの比の概略の値を表 1 に示す。この際に輻射圧による力，大気抵抗の力などは次の諸量によって規定されるとしてある。

$$F = -10^{-5} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \quad ,$$

$$C_D = 3 \quad ,$$

$$\frac{A}{m} = 3 \times 10^{-2} \frac{\text{cm}^2}{\text{gm}}$$

これらは一般の人工衛星における値である。また微小な推力はイオンエンジンのような電気推進機を用いた場合のものとし，静止衛星においてのみ作用するとしてある。ここで次に人工衛星の運用をする場合において軌道運動の理論の精度に対する要求の具体的な実例を示す。その一つとして高度約 1000 km の人工衛星が 15 日間に地球を周回する場合の軌道の長さを 50 m 以下の誤差において決定する場合をとっ

表1 軌道の長さの比

作用		人工衛星		低, 中高度衛星		静止衛星	
		高度	km				
地球の重力	中心項に基づく力		1				
	一次の摂動力	2次のharmonicによる部分	10 <sup>-3</sup>				
		2次をこえるharmonicによる部分	10 <sup>-6</sup>				
	二次の摂動力		10 <sup>-6</sup>				
月の引力	一次の摂動力	2次のharmonicによる部分	10 <sup>-7</sup>		10 <sup>-5</sup>		
		3次 "	10 <sup>-9</sup>		10 <sup>-6</sup>		
		4次 "	10 <sup>-10</sup>		10 <sup>-7</sup>		
		5次 "	10 <sup>-12</sup>		10 <sup>-8</sup>		
太陽の引力	一次の摂動力	2次のharmonicによる部分	10 <sup>-7</sup>		10 <sup>-5</sup>		
		3次 "	10 <sup>-12</sup>		10 <sup>-9</sup>		
輻射圧による力	一次の摂動力		10 <sup>-8</sup>		10 <sup>-6</sup>		
赤道面の運動	一次の摂動力		10 <sup>-8</sup>		10 <sup>-6</sup>		

作用		人工衛星		低, 中高度衛星				
		高度	km	90	125	300	500	1000
大気の抵抗の力	一次の摂動力		10 <sup>-1</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-9</sup>	10 <sup>-10</sup>	

作用		人工衛星	静止衛星
微小な推力	一次の摂動力		10 <sup>-5</sup>



てみる。この場合の軌道の長さは約  $0.94 \times 10^7$  km となる。したがって要求される運動の決定の精度は次のようになる。

$$\frac{50\text{m}}{0.94 \times 10^7 \text{ km}} = 0.53 \times 10^{-8} \quad (9.1.1)$$

ここで以上の要求に対しては本理論が対応することが可能であるか否かに関して調べることにする。(9.1.1)は potential の中心項に基づく力による運動における軌道の長さを 1 とするとき、摂動に基づく運動における軌道の長さを  $10^{-8}$  の程度まで考えなければならぬことを表す。つまり表 1 において  $10^{-8}$  程度の大きさの摂動までの考慮を要することを表す。ところで表 1 によれば本理論は、すべての摂動をとり入れるときに、この (9.1.1) によって表される要求に十分に応じ得ることが示されている。

次にまた運動の決定に関する第 7 章の理論における一般摂動理論の進め方に関して考究する。本理論においては運動の決定に際して、その開始時から任意時刻までの期間を分割し、その各部分を積分区間として軌道要素の変化および平均近点離角の変化を求め、これから任意時刻の軌道要素および平均近点離角を求めた。この分割は次のようにして決定される。それはこの分割によって作られた積分区間において次の三条件が成立するように積分区間の幅をとることである。第一は摂動関数および摂動加速度の表示を時刻に関して連続関数とすることである。第二は摂動関数および摂動加速度の表示を可及的に人工衛星の環境の実情に合致させることである。第三は線形摂動理論においてとられた前提に反しないことである。もし分割の必要がなければこれは一般摂動理論の長所に適合して望ましい。しかしほとんどの場合にこうはならない。例えば太陽輻射圧および推力の作用を扱う場合、その作用が不連続的であれば、作用が断続する時刻毎に積分区間を改め、積分区間における摂動関数および摂動加速度の表示の連続化を図るを要する。また大気抵抗の作用を扱う場合には摂動加速度の表示を長時間にわたって実情に合致するように行うことは一般にできない。しかし短時間においては所要の精確さにおいてこれを行いつつあるときがある。このときにはこの短時間を積分区間の幅とする。さらに月の引力を扱う場合には、

線形摂動理論の前提に従って月の軌道要素が時刻に関する一次関数とみなされる程度の短い時間を積分区間の幅とする。なお、人工衛星の運動の状態によって軌道要素に一時的に急激な変化を生じる場合がある。この場合にも積分区間の幅を小さくして線形摂動理論の前提に反しないようにすることを要する。以上のように本研究における理論においては積分区間の幅を適切にとることが必要である。したがって本研究における理論は一般摂動理論ではあるが人工衛星およびその環境の力学的状態によっては特別摂動理論の進め方をもとることがある。以上のようにして運動の決定を常に精確に行い得るようにしている。

## 9.2 残された諸問題

本研究における理論の弱点を明らかにし、今後における解決が望まれる諸点について考察する。

本理論においては人工衛星の軌道の離心率と傾斜角が小さくなる場合に軌道要素の変化率が大きくなる。このために積分区間の幅に対して先に指摘した注意を特に要する。ここでこのような特別の対策を回避しようとするときには、軌道要素の代わりに適当な変数を用いる必要がある。そしてこれを実行することは大して困難なことではない。

次に大気抵抗の影響に関する理論において次の諸点に関して摂動加速度の表示を一層現実に即して行う必要がある。まずさらに良好な大気模型に基づいて求められる解析的表示による大気密度を用いることである。次に抵抗係数と断面積を人工衛星の高度と実際の姿勢に対応して表示することである。また人工衛星の大気に相対的な速度に対して超高層大気中の風の影響を考慮することである。なお以上とは別に地球物理学的量の信頼するに足る値が与えられることを要する。ただし以上の諸点は、本研究の主体である摂動理論の本質とは概して異質のものであり、他の研究において解決されることが望まれる。

なお本理論においては運動決定の開始時から任意時刻までの期間の分割が第 9.1 節に示した三条件によって行われている。このため本理論は一般摂動理論ではあるが特別摂動理論の特性をも持っている。ここでこのような分割を不要となし得れば理論は一

般の一般摂動理論の長所を具備することとなり望ましい。しかしこのためには摂動関数および摂動加速度の表示の常時における連続化と長期間にわたっての精確化を行い、さらに非線形摂動の理論の確立をしなくてはならない。しかしこれらは何れも非常に困難な問題であり、容易には解決されないであろう。

## 第10章 結 論

地球の人工衛星の実際の環境に可及的に精確に対応することができる力学系をとった。このために摂動力として地球の重力 potential の harmonics に基づく力、月と太陽の引力、太陽輻射圧に基づく力、大気の抵抗の力および微小な推力を取り上げた。また基準とする地心赤道座標系の運動を考慮した。そしてこれらの諸作用を一括して取り扱うことにした。

諸作用を一括して取り扱う理論としては初めて一般摂動法をとり、これによって人工衛星の力学的挙動に対する的確な見とおしを得ることが目指されている。ここで三種の項から成る最も広汎な Lagrange 形の運動方程式を用いた。したがって各種の作用の間の相互作用を十分に取り入れながら各種の作用による摂動を求め、次に直ちにその和を求めて人工衛星の運動決定が行われるようにされている。

一次の摂動に基づく各種の作用のそれぞれによる軌道要素の変化と平均近点離角の変化が求められた。このそれぞれの変化は各種の作用が単独に存在するとした場合に求められた変化における同じ精確さを以て表現されている。そしてまたこのそれぞれの変化は比較的に一様な精確さを持っている。

最も主要である zonal harmonics に基づいた摂動力の作用に対して、二次の摂動に基づく軌道要素の変化が求められた。この変化は摂動力として zonal harmonics に基づく力のみが存在する特別の場合において Brouwer の理論における式を包含する程度の精確さを持っている。

以上に求めた各種の作用による変化の和として諸作用を一括して取り扱った場合の軌道要素の変化および平均近点離角の変化が求められる。

人工衛星の運動決定の開始時から任意時刻までの期間を分割し、その各部分を積分区間として諸作用を一括して取り扱った場合の変化が求められる。さ

らにその和を用いて任意の時刻の軌道要素と平均近点離角を求め、人工衛星の運動を決定できる。

この分割された部分である積分区間は、摂動関数と摂動加速度の表示が時刻に関して連続であり、可及的に人工衛星の環境の実情に合致し、また線形摂動理論の前提が成立するようにとられる。したがって本研究における理論は一般摂動理論ではあるが、特別摂動理論の特性を持つこともあり、人工衛星の運動の決定を常に精確に行い得る。

本理論に基づいて人工衛星の運動を決定する計算を実行することが可能である。

本理論は、地球の重力 potential の中心項に基づく力の  $10^{-8}$  程度の摂動の作用までを考慮しうる精度をもっている。これは高度約 1000 km の人工衛星が 15 日間に地球を周回する場合の軌道の長さを 50 m 以下の誤差において決定できることに対応している。

## 謝 辞

恩師である故萩原雄祐東京大学名誉教授ならびに木村春夫九州大学教授および堀源一郎東京大学教授の両長友に、本研究に関して各種の学識を摂取させて頂くと共にまた幾多の教示を頂いたことに対して、深厚なる感謝を表明致す。

また航空宇宙技術研究所の松島弘一主任研究官に、本研究において各様の助言を頂いたことに対し、そして航空宇宙技術研究所の中馬三智子嬢に、本研究を行うに際して随時随所に多くの助力をして頂いたことに対し、多大なる謝意を表明する次第である。

## 引用文献

- 1) Y. Hagihara ; *Celestial Mechanics*, Vol. II, Part 1 (1972) pp. 128~486, The MIT Press.
- 2) 日本航空宇宙学会；人工衛星軌道の調査（将来ミッション調査 その3），航宇字第902号，第3章（武内澄夫；軌道の摂動）（1980）pp. 47~74.
- 3) E. M. Gaposchkin (ed.) ; 1973 *Smithsonian Standard Earth (III)*, SAO Special Report, 353 (1973).
- 4) 松島弘一；衛星運動のシミュレーションシス

- テムにおける世界時の予測, 航技研報告 TR-430 (1975).
- 5.a) 武内澄夫; 地球の人工衛星の赤道系軌道要素に対する赤道面の運動の影響, 日本航空宇宙学会誌, Vol. 30, No. 339 (1982) pp. 191~198.
- 5.b) 武内澄夫; 地球の人工衛星の赤道系要素に対する赤道面の運動の影響に関する研究, 航技研報告 TR-695 (1982).
- 6) D. Brouwer & G.M. Clemence; *Methods of Celestial Mechanics* (1961) Academic Press.
- 7) 武内澄夫; 地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究 — 運動が長期間にわたる場合 —, 航技研報告 TR-320 (1973).
- 8) 武内澄夫 & 松島弘一; 月と太陽の引力の作用下にある地球の人工衛星の運動に関する研究, 航技研報告 TR-323 (1973).
- 9.a) 武内澄夫; 人工衛星の運動に対する太陽輻射圧の影響, 日本航空宇宙学会誌, Vol. 23, No. 252 (1975) pp. 6~11.
- 9.b) 武内澄夫; 人工衛星の運動に対する太陽輻射圧の影響に関する研究, 航技研報告 TR-387 (1974).
- 10) 武内澄夫; 地球の人工衛星の運動における大気の抵抗の影響に関する研究, 航技研報告 TR-748 (1982).
- 11.a) 武内澄夫; 地球の人工衛星の運動におよぼす微小な推力の影響, 日本航空宇宙学会誌, Vol. 32, No. 360 (1984) pp. 23~33.
- 11.b) 武内澄夫; 地球の人工衛星の運動におよぼす微小な推力の影響に関する研究, 航技研報告 TR-744 (1982).
- 12) W.M. Kaula; *Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellite*, *Geophysical J.*, 5 (1961) pp. 104~133.
- 13) F. Tisserand; *Traité de Mécanique Céleste*, Tome I (1889) Gauthier-Villars et Fils, Paris.
- 14) H. C. Plummer; *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy* (1918) Dover Publications, Inc. New York.
- 15) W.M. Kaula; *Theory of Satellite Geodesy* (1966) Blaisdell Publishing Company.
- 16) A. Cayley; *Tables of the Developments of Functions in the Theory of Elliptic Motion*, *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, 29, VI (1861) pp. 191~306.
- 17) Sumio Takeuchi & Koichi Matsushima; *The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earth's Gravitational Field*, TR-255T, National Aerospace Laboratory, Japan, August (1972).
- 18) W.M. Kaula; *Development of the Lunar and Solar Disturbing Functions for a Close Satellite*, *Astronomical J.*, Vol. 67, No. 5 (1962) pp. 300~303.
- 19) W.M. Smart; *Celestial Mechanics* (1953) Longmans, Green and co., London.
- 20) 武内澄夫; Jacchia の 1971 年の大気模型に基づいた超高層大気の密度の解析的表示, 航技研報告 TR-541 (1978).
- 21) L. G. Jacchia; *Revised Static Models of the Thermosphere and Exosphere with Empirical Temperature Profiles*, SAO Special Report, 332 (1971).
- 22) 海上保安庁水路部; 昭和 59 年天体位置表 (1984) 海上保安庁.
- 23) G. V. Groves (ed.); *Dynamics of Rockets and Satellites* (1965) pp. 179~215, North-Holland Publishing Company.
- 24) D. Brouwer; *Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag*, *Astronomical J.*, Vol. 64 (1959) pp. 378~397.
- 25) 武内澄夫; 人工衛星の運動における Zonal Harmonics による摂動, 航技研報告 TR-384 (1974).
- 26) 武内澄夫; 地球の人工衛星の運動における Zonal Harmonics による摂動 — 一次および二次の摂動, 航技研報告 TR-738 (1982).

## 付録 記号

本研究において用いられた主要な記号を以下に示す。

$A$ : 人工衛星の断面積	$F_T$ : $v$ の因数
$A', A'', A'''$ : $(dEl_k/dt)_{IT}$ の構成項の因数	$F'_T$ : $1/v$ の因数
$A_A$ : $\delta_1 a_{Asaps}$ の因数	$F_i$ : $\delta_1 i_{TSPms}$
$A_T$ : $S_T, T_T, W_T, T'_T, N'_T$ などを表す量	$F_{iI}, F_{iII}$ : $\delta_1 i_{pI}$ の構成項
$A_{T0}$ : $A_T$ の構成項	$F_{l,m,p}$ : 傾斜角関数
$A_{Tk}$ : $A_T$ の構成項の因数	$F_{Qq}$ : $\delta_1 Q_{qTSPms}$
$A_1, \dots, A_g$ : $\delta_1 El_k'_{pI}$ の構成項の因数	$F_{QqI}, F_{QqII}$ : $\delta_1 Q_{q pI}$ の構成項
$A_{1,l}$ : $\cos E$ の展開式の係数	$F_{\omega I}, F_{\omega II}$ : $\delta_1 \omega_{pI}$ の構成項
$B, B'', B'''$ : $(dEl_k/dt)_{IT}$ の構成項の因数	$G$ : 万有引力の定数
$B''''$ : $B'''$ の因数	$G_{lp}$ : $\sigma_m T_{ri}$ の $\omega$ に依存する構成項
$C$ : 人工衛星が輻射圧の作用下にあるときに 1 となり, その作用下になくときに 0 となる数	$G_{se}$ : $\sigma_m T_{ri}$ の $\omega$ に独立な構成項
$C_D$ : 人工衛星の抵抗係数	$G_{l,p,q}$ : 離心率関数
$C_k$ : $\rho$ を $t$ に関する多項式として表したときの係数	$H$ : 超幾何関数
$C_{l,m}$ : 地球の重力 potential の harmonics の定数	$H_{l,p,q}$ : 離心率関数
$C_{s,q}$ : $F_T$ の構成項	$I_{h,w}$ : $\delta_1 El_k'_{pI}$ の構成項の因数
$C_{p,s,q}$ : $F_T$ の構成項の因数	$J$ : 1950.0 の平均赤道面に対する人工衛星の軌道面の傾斜角
$C'_{s,q}$ : $F'_T$ の構成項	$J_l$ : $J_{l,0}$
$C'_{p,s,q}$ : $F'_T$ の構成項の因数	$J_l(l_e)$ : 第一種の Bessel 関数
$C_i^{q,p}$ : 楕円軌道における関数の展開式の係数	$J_{l,m}$ : 地球の重力 potential の harmonics の定数
$D$ : 二つの昇交点経度の差 $Q - Q_q$	$L_{v,w}$ : $R_R$ における傾斜角の関数の因数
$D_{iI}, D_{iII}, D_{iIII}$ : $(di/dt)_p$ の構成項	$M$ : 人工衛星の平均近点離角
$D_{QqI}, D_{QqII}, D_{QqIII}$ : $(dQ_q/dt)_p$ の構成項	$M_D$ : 月あるいは太陽の平均近点離角
$D_{\omega I}, D_{\omega II}, D_{\omega III}$ : $(d\omega/dt)_p$ の構成項	$N$ : 人工衛星の昇交点経度 1950.0 の平均春分点と平均赤道に基づいた昇交点の赤経
$E$ : 人工衛星の離心近点離角	$O$ : 地心
$El_k$ : 人工衛星の六軌道要素 $a, e, i, Q_q, \omega, \chi^*$	$P_k$ : $d\epsilon_1/dt$ の構成項の因数
$El_k'$ : 人工衛星の三軌道要素 $i, Q_q, \omega$	$P_l$ : Legendre 関数
$F$ : 人工衛星の太陽輻射圧による摂動加速速度の $\alpha_6$ 成分	$P'_k$ : $\epsilon_1 - \epsilon_0$ の構成項の因数
$F_A$ : $(dEl_k/dt)_{IA}$ の構成項の因数	$P_l^m$ : Legendre 陪関数
	$P$ : 人工衛星の摂動加速度
	$Q_l$ : $d\Psi/dt$ の構成項の因数
	$R$ : 人工衛星の摂動関数
	$R_k$ : $\epsilon_1 - \epsilon_0$ の構成項の三角関数の因数の引数
	$R'_k$ : $R_k'$
	$S, T, W$ : $P$ の $X, Y, Z$ 成分
	$S_R$ : 角秒を rad に換算する定数
	$S_l$ : $\Psi$ の構成項の三角関数の因数の引数

- $S_{l,m}$  : 地球の重力 potential の harmonics の定数  
 $S_l^{q,p}$  : 楕円軌道における関数の展開式の係数  
 $T', N', W$  :  $\mathbf{P}$  の  $X', Y', Z'$  成分  
 $T_0$  : 人工衛星の軌道運動の周期  
 $T_r$  :  $(dEl_k/dt)_{1A}$  の構成項の因数  
 $T_1, \dots, T_8$  :  $D_{i1}, D_{i2}, D_{i3}, D_{\omega 1}, D_{\omega 2}, D_{\omega 3}$ ,  $D_{\omega 1}, D_{\omega 2}, D_{\omega 3}$  などの構成項の因数  
 $T_{rd}$  :  $T_r$  の  $f$  に依存する構成項  
 $T_{ri}$  :  $T_r$  の  $f$  に独立な構成項  
 $T_{l,m,p,q}$  :  $R_E$  における三角関数の因数  
 $T_{l,u,v,w}$  :  $R_R$  における三角関数の因数  
 $T_{l,m,p,h,q,j}$  :  $R_D$  における三角関数の因数  
 $U$  : 人工衛星の単位質量に対するの potential  
 $V_{l,m,p,q}$  : 整数比の状態にある場合の  $T_{l,m,p,q}$   
 $X, Y, Z$  : 地心  $O$  を原点とし人工衛星の位置ベクトルおよび  $O$  に関する人工衛星の角運動の方向, 向きに  $X, Z$  軸をとった右手系直交座標系  $OXYZ$  の座標  
 $X', Y', Z'$  : 地心  $O$  を原点として人工衛星の速度および  $Z$  軸の方向, 向きに  $X', Z'$  軸をとった右手系直交座標系  $O'X'Y'Z'$  の座標  
 $X_l^{q,p}$  : Hansen 係数  
 $X_{l,s}^{q,p}$  : Hansen 係数を無限項で表示した場合の各項における因数  
 $a$  : 人工衛星の軌道の半長軸,  $El_1$   
 $a_{ATk}$  :  $A_T$  の構成項の因数  
 $a_D$  : 月あるいは太陽の軌道の半長軸  
 $a_E$  : 地球の平均赤道半径  
 $b_{ATk}$  :  $A_T$  の構成項の因数  
 $C_S$  :  $M$  の変化率と  $\theta$  の変化率の比が整数比となった場合の値  
 $d\epsilon$  : 黄道傾角の章動の短周期部分  
 $d\Psi$  : 黄経の章動の短周期部分  
 $e$  : 人工衛星の軌道の離心率,  $El_2$   
 $e_D$  : 月あるいは太陽の軌道の離心率  
 $f$  : 人工衛星の真近点離角  
 $f_i$  :  $\delta_1 El_k'_{pl}$  の構成項の因数  
 $f_{\epsilon_0}$  :  $\delta_1 El_k'_{pl}$  の構成項の因数  
 $i$  : 人工衛星の瞬時の真の赤道面に対する軌道面の傾斜角,  $El_3$   
 $i_D$  : 月あるいは太陽の瞬時の真の赤道面に対する軌道面の傾斜角  
 $m$  : 人工衛星の質量  
 $m_D$  : 月あるいは太陽の質量  
 $m_E$  : 地球の質量  
 $n$  : 人工衛星の平均運動  
 $p_k$  :  $\epsilon_1 - \epsilon_0$  の構成項の因数  
 $q_l$  :  $\Psi$  の構成項の因数  
 $r$  : 人工衛星の地心距離  
 $\mathbf{r}$  : 人工衛星の地心に関する位置ベクトル  
 $r_D$  : 月あるいは太陽の質量中心の地心距離  
 $s$  : 臨界状態の引数  
 $t$  : 原子時  
 $t_{(j)}$  :  $t$  のある時刻  
 $t_{(1)}$  : 運動決定の開始時における  $t$   
 $t_c$  : 協定世界時  
 $u$  :  $\omega + f$   
 $v$  : 人工衛星の速度  
 $v_r$  : 人工衛星の大気に相対的な速度  
 $v_{rX}, v_{rY}, v_{rZ}$  :  $v_r$  の  $X, Y, Z$  成分  
 $x_s, y_s, z_s$  : 地心を原点とする並進運動座標系の座標  
 $x_T, y_T, z_T$  : 瞬時の真の赤道に基づく地心赤道座標系の座標  
 $x_6$  : 地心を原点として太陽の中心に向けてとった座標軸の座標  
 $z_m$  : 瞬時の平均春分点と平均赤道に基づく, この赤道の 1950.0 の平均赤道に対する昇交点の赤経から  $90^\circ$  を減じた角度  
 $\Delta El_k$  :  $El_k$  の  $\Delta t$  間の変化  
 $\Delta M$  :  $M$  の  $\Delta t$  間の変化  
 $\Delta a$  :  $a$  の  $\Delta t$  間の変化

$\Delta e$ : $e$ の $\Delta t$ 間の変化	$\delta_2 El_k$ : 人工衛星の二次の摂動に基づく軌道要素の変化
$\Delta i$ : $i$ の $\Delta t$ 間の変化	$\delta El_k$ : 人工衛星の軌道要素の変化
$\Delta t$ : 時間	$\delta_1 M_{\delta a}$ : 人工衛星の一次の摂動に基づく半長軸の変化による平均近点離角の変化率を積分して求めた平均近点離角の変化
$\Delta Q_q$ : $Q_q$ の $\Delta t$ 間の変化	$\delta M$ : 人工衛星の平均近点離角の変化
$\Delta Q$ : $Q$ の $\Delta t$ 間の変化	$\varepsilon$ : 瞬時の真の黄道傾角
$\Delta \varepsilon$ : 黄道傾角の章動の長周期部分	$\varepsilon_m$ : 瞬時の平均赤道に基づく平均黄道傾角
$\Delta \lambda$ : $\lambda$ の $\Delta t$ 間の変化	$\varepsilon_0$ : 1950.0における平均赤道に基づく平均黄道傾角
$\Delta \chi^*$ : $\chi^*$ の $\Delta t$ 間の変化	$\varepsilon_1$ : 瞬時の真の赤道に対する1950.0における黄道の傾角
$\Delta \Psi$ : 黄経の章動の長周期部分	$\zeta_0$ : $90^\circ$ から, 1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく瞬時の平均赤道の昇交点の赤経を引いた角度
$\Delta \omega$ : $\omega$ の $\Delta t$ 間の変化	$\theta$ : 1950.0の平均赤道と瞬時の真の赤道のなす角
$\theta$ : グリニジ視恒星時	$\theta_E$ : 地心と人工衛星を結ぶ直線が地心と月あるいは太陽の質量中心を結ぶ直線に対してなす角
$\Psi$ : 1950.0における黄道に沿って測った1950.0の平均赤道と瞬時の真の赤道との角距離	$\theta_m$ : 1950.0の平均赤道に対する瞬時の平均赤道の傾斜角
$\Psi_m$ : 1950.0からの日月歳差	$\kappa_m$ : $R_D$ の因数
$Q$ : 人工衛星の昇交点経度 瞬時の真の春分点と赤道に基づいた昇交点の赤経	$\lambda$ : 人工衛星の地理学的経度
$Q_D$ : 月あるいは太陽の昇交点経度 瞬時の真の春分点と赤道に基づいた昇交点の赤経	$\lambda_S$ : 太陽の黄経
$Q_q$ : 人工衛星の昇交点経度 $\alpha$ に1950.0の平均赤道に対する瞬時の真の赤道の昇交点から瞬時の真の赤道に沿って軌道の昇交点までを測った角を加えた角, $El_4$	$\lambda_0$ : 1950.0の平均赤道に対する瞬時の黄道の傾角の補角
$\alpha$ : 1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく瞬時の真の赤道の昇交点の赤経	$\lambda_{l,m}$ : 地球の重力 potential の harmonics の定数
$\beta$ : 人工衛星の地心緯度	$\mu$ : 地心重力定数
$\beta_0$ : 瞬時の黄道に沿って測った1950.0の平均赤道と瞬時の平均赤道の角距離	$\nu$ : 地球のその自転軸まわりの回転ベクトル
$r_0$ : 瞬時の黄道と1950.0の平均赤道の交点のうち, 太陽が南から北へこの赤道を通過する点を $r'$ とするとき, 1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく $r'$ の赤経を $90^\circ - \zeta_0$ から減じた角度	$\rho$ : 人工衛星が存在する位置における大気の密度
$\delta t$ : 時間	$\rho_0$ : $\alpha$ から $90^\circ - \zeta_0$ を減じた角度
$\delta_1 El_k$ : 人工衛星の一次の摂動に基づく軌道要素の変化	$\sigma$ : 人工衛星の軌道に沿って測った1950.0の平均赤道と瞬時の真の赤道の角距離

$\sigma_m$  :  $(dE/dt)_{1A}$  の構成項の因数  
 $\sigma_1, \dots, \sigma_5$  :  $\tau$  の構成項の因数  
 $\tau$  :  $v_r$  の因数  
 $\tau_0$  : 瞬時の真春分点と真赤道に基づくこの赤道の 1950.0 の平均赤道に対する昇交点の赤経  
 $\phi$  : 1950.0 の平均赤道から測った人工衛星の近地点引数  
 $\chi^*$  : 人工衛星の運動決定が行われる時刻  $t_{(j)}$  における平均近点離角,  $E/\ell_6$   
 $\omega$  : 人工衛星の瞬時の真の赤道面から測った近地点引数,  $E/\ell_5$   
 $\omega_D$  : 月あるいは太陽の瞬時の真の赤道面から測った近地点引数

次に主要な添字を以下に示す。

A : 大気抵抗の力によることを表す。  
 C,  $z\ell$  : 主問題の場合において、相互作用に基づき、長周期の場合を示す。  
 D : 月あるいは太陽の引力によることを表す。  
 E : 地球の重力 potential の harmonics に基づく力によることを表す。  
 F,  $z\ell$  : 主問題において、正準変換後の Hamilton 関数における第二位の微小数を因数とする周期項に基づき、長周期の場合を示す。  
 H,  $z\ell$  : 三次以上の zonal harmonics に基づき、長周期の場合を示す。  
 L : 月の引力によることを表す。

M, se : 主問題において、長年的の場合を示す。

N : non-zonal harmonics の共鳴項以外の項による変化を表す。

Nr : non-zonal harmonics の共鳴項による変化を表す。

P : 赤道面の運動によることを表す。

R : 太陽輻射圧に基づく力によることを表す。

S : 太陽の引力によることを表す。

T : 微小な推力によることを表す。

Z : zonal harmonics に基づく力によることを表す。

$(j)$  :  $t_{(j)}$  における量であることを示す。

$\ell$  : 長周期変化を表す。

$\ell p$  : 長周期変化を表す。

$\ell pms$  : 長周期変化および混合長年変化を表す。

$\ell, z\ell$  : 三次以上の  $\ell$  次の zonal harmonics に基づき、長周期の場合を示す。

r : 共鳴項による変化を表す。

s : 短周期変化を表す。

se : 長年変化を表す。

seps :  $t$  の幂で表される長年変化を表す。

spms : 短周期変化および混合長年変化を表す。

1 : 一次の摂動の場合を示す。

(1) :  $t_{(1)}$  における量であることを示す。

2 : 二次の摂動の場合を示す。

---

## 航空宇宙技術研究所報告 807号

昭和59年5月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川2-27-12

---



Printed in Japan