

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-823

有限整定時間制御における過渡特性の改善

佐々修一・渡辺 顯

1984年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

1. はじめに	1
2. 有限整定時間制御について	2
2.1 パルス伝達関数の応用	2
2.2 状態変数の導入	2
2.3 最適制御理論等の応用	3
3. 有限整定時間制御における過度特性の改善	3
3.1 オープンループ解の導出	3
(1) システムの記述	3
(2) 左半平面に零点のある2次系の場合	3
(3) 評価関数の導入と最適解の導出	4
(4) 数値計算	4
3.2 状態フィードバック解の導出	5
(1) 巾零性の有限整定時間制御への応用	5
(2) (システム次数+1)ステップ整定	5
(3) 一般の場合	6
(4) フィードバックゲインの数値計算	7
(5) 応答の数値計算	9
4. 本制御方式の性質	9
4.1 最適解の性質	9
4.2 パラメータ変動の影響	9
4.3 外乱の影響	10
4.4 航空機ヨーダンパへの適用	10
5. おわりに	12
参考文献	12
付 録	13

有限整定時間制御における過渡特性の改善*

佐々修一** 渡辺 顯**

Improvement of the Transient Response in the Finite Settling Time Control

Shuichi SASA and Akira WATANABE

ABSTRACT

In the finite settling-time control or dead-beat control, there are some systems that do not have good transient response. We apply the optimal control theory to the dead-beat control of a single input/single output system to improve the transient response.

Two solutions are derived; one is an open-loop solution, and the other is a state feedback solution. The state feedback solution is obtained by the application of the principle of optimality, and the feedback gains are partly time dependent.

The characteristics of the optimal response are shown. Also the effect of the system parameter deviation from the original system and the effect of the state disturbance are examined, and it is found that this control law is robust in both cases.

This method is applied to a higher order system, that is a Yaw-Damper of an aircraft. The Yaw-Damper is a control system that damps the yawing motion of an airplane. The response of the actual Yaw-Damper and the response of the Yaw-Damper designed by the method mentioned in this paper are compared. It is verified that the latter is almost the same as the former in transient response and that it has the additional feature of finite time settling.

1. はじめに

近年のコンピュータ技術の発達により、デジタル制御の適用分野はますます広がってゆくものと考えられる。ここでは、航空機制御系へのデジタル制御技術の適用を考慮し、特に有限整定時間制御に着目し、その諸特性について検討する。

この制御方式は有限時間で目標に出力が一致し、以後振動を残さないという、アナログ制御ではみら

れない特徴を持っており、古くから研究がなされている。しかしこの方式を航空機のような、零点を持つ系に適用すると、その速応性、有限時間整定特性にもかかわらず、過渡状態でオーバーシュートを生ずるなど、問題のあることが明らかになった。

以下有限時間整定制御技術について、その研究の流れを概括し、さらに1入力1出力系に関して過渡特性改善策として、新たに最適制御理論の適用を加えた手法を提案し、その基本特性について、既存の制御系との応答比較のための数値実験も含めて報告することにする。

* 昭和59年4月27日受付

** 計測部

2. 有限整定時間制御について

2.1 パルス伝達関数の応用

有限整定時間制御に関する最初の研究¹⁾²⁾³⁾は、1950年代末にさかのぼり、約1/4世紀になろうとしている。初期の研究⁴⁾⁵⁾は、単一入出力系にパルス伝達関数を適用したもので、ステップ入力やランプ入力などの目標値、さらに希望出力(あるサンプル数の後、入力と一致する出力)のパルス伝達関数を求め、それから補償器の伝達関数を逆算するものであった。しかしこの方法では極と零点の消去が行なわれているため、不可観測、あるいは不可制御なモードが生じ、またそれが出力にリップル(サンプル時点では応答が目標値と一致しているが、サンプル間では“かげの振動”と呼ばれる振動の残る現象)を生じさせる原因となる。リップルのない有限整定時間応答を求めよとすれば、サンプル時点間の応答も調べるため、拡張z変換を用いた計算を必要とするという問題があった。

上記の事柄を具体的に示すと次のようになる。図1のようなz領域で表わされた単一フィードバック系を考える。ここで $R(Z)$ 、 $C(Z)$ 、 $G_p(Z)$ 、 $D(Z)$ 、 $G(Z)$ 、 $G_{LR}(Z)$ はそれぞれ入力、出力、制御対象、補償器、開ループ、閉ループのパルス伝達関数である。即ち

$$G_{LR}(Z) = \frac{C(Z)}{R(Z)} = \frac{G(Z)}{1 + G(Z)} \quad \text{：希望伝達関数} \quad (1)$$

$$G(Z) = D(Z) G_p(Z) \quad \text{：一巡伝達関数} \quad (2)$$

よって、希望伝達関数 $G_{LR}(Z)$ と、制御対象の伝達関数 $G_p(Z)$ が与えられれば、補償器 $D(Z)$ の伝達関数は、

$$D(Z) = \frac{1}{G_p(Z)} \left\{ \frac{G_{LR}(Z)}{1 - G_{LR}(Z)} \right\} \quad (3)$$

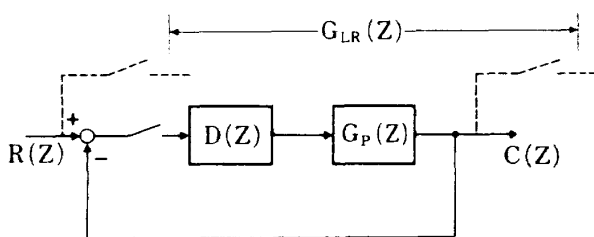


図1. パルス伝達関数による制御系の設計²⁾

で求まることになる。しかし一般に(3)において、補償器の零点で制御対象の極を消去することになる。例えば、サンプリング周期を1秒として

$$G_p(S) = \frac{1}{S(S+1)} \quad (4)$$

$$G_p(Z) = z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{S} \frac{1}{S(S+1)} \right\}_{T=1} \quad (5)$$

$$= (1 - Z^{-1}) z \left\{ \frac{1}{S^2(S+1)} \right\} \\ = \frac{Z^{-1} [1 + (e-2)Z^{-1}]}{(1 - Z^{-1})(e - Z^{-1})} \quad (6)$$

上記2次系に対し、1ステップ遅れで整定させる場合、即ち

$$G_{LR}(Z) = Z^{-1} \quad (7)$$

とすれば

$$D(Z) = \frac{1}{G_p(Z)} \left\{ \frac{G_{LR}(Z)}{1 - G_{LR}(Z)} \right\} \\ = \frac{e - Z^{-1}}{1 - (e-2)Z^{-1}} \quad (8)$$

となるが、これはサンプリング時には、1ステップで目標値と完全に一致するが、その間ではリップルが生じ、minimal prototype designと呼ばれ、特別な場合を除いて、実用上意味がない。

2.2 状態変数の導入

一方Kalmanは単一入力単一出力サンプル値系に、状態変数を導入し、任意の初期状態から状態空間原点に最短時間で遷移させる問題を、線形状態フィードバックにより解いた⁶⁾。さらに観測出力から状態ベクトル値を再生する問題(デッドビート観測問題)を定式化し、これが有限整定時間制御問題と双対の関係にあることを示した¹⁾。

1970年代に入り、多変数制御系への拡張が行なわれるようになった。^{7)~12)}

1入力1出力系と多入力多出力系の、有限整定時間制御に関する違いは、有限整定時間制御を、システムの固有値をすべて零にするフィードバック則を見出すことと考えるなら、1入力1出力系ではフィードバック則が一意に定まるのに対し、多入力多出力系では、ある程度の自由度が存在するというところにあり、その自由度が後者の研究の中心テーマになっている。

2.3 最適制御理論等の応用

この他に、システムの出力のみが整定すればよいと考え、状態には関心を持たないという、出力デッドビート制御が研究され、Wonham等によるgeometric-approach¹³⁾が適用され、成果¹⁴⁾¹⁵⁾を上げている。またデッドビートオブザバ¹⁶⁾¹⁷⁾の研究も行なわれている。これにより、状態が直接観測できないシステムについても、有限整定時間制御可能となる。さらに旧来の伝達関数法による、多変数問題への拡張の試みがなされている。

有限整定時間制御の歴史はこのようなものであるが、現在その応答波形に関心が向きつつ¹¹⁾¹²⁾ある。最短時間整定特性はあるものの、過渡状態において、大きなオーバーシュートを生じたりして問題を残しているのである。このため1入力1出力系について、過渡特性の改善のために、有限整定時間制御と最適制御との融合を試みた^{18)~20)}ので以下に述べることにする。

3. 有限整定時間制御における過渡特性の改善

既に述べたように、この有限整定時間制御は、速応性はあっても、ある種の制御対象に対しては、過渡的に大きな制御偏差を生じるなどの問題を生ずる。例えば2次系に左半平面零点のある場合に、従来の手法で設計すると、ステップ入力に対してオーバーシュートは避けられない。ここでこの過渡特性の改善策を考えるわけであるが、1入力1出力系の場合の最短時間整定制御はシステムの固有値をすべて ϕ にする状態フィードバックにより構成できるが、そのためのフィードバックは一意に決ってしまい、その時の状態遷移の仕方までも決ってしまい全く自由度がないのである。よって過渡応答を変えるには、前置補償器を挿入するとか、その他いろいろな手法が考えられるが、ここでは従来の方式のように、システム次数に等しいステップ数で整定させるという条件を緩めて、整定までのステップ数をふやし、そのことで生じた自由度により誤差2乗和という評価関数を最小にするような入力列を求める方式を考えた。以下ではまず、①オープンループ型の入力列を求める方法を示し、次に②状態フィードバックによ

る求め方を示す。そして本方式の性質をいくつかの数値計算例とともに示す。

3.1 オープンループ解の導出

(1) システムの記述

次のような1入力1出力系を考える。

$$G(S) = \frac{\beta_{n-1} S^{n-1} + \dots + \beta_0}{S^n + \alpha_{n-1} S^{n-1} + \dots + \alpha_0} \quad (9)$$

状態変数を導入し、可制御標準形(Controllable canonical form)で表わすと次のようになる。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (10)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (11)$$

さらにサンプリング周期 T で離散化して

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (12)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (11)$$

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{F}T}, \mathbf{B} = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau} \mathbf{G}d\tau \quad (13)$$

$$\mathbf{C} = [\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{n-1}] \quad (14)$$

系は可制御・可観測とし、さらに後の議論でも明らかかなように、 $Z=0$ に零点を持たないとする。ここでは、定常状態にある系に、ステップ状の目標値変化を与え、出力を有限ステップで追従、整定させる問題を考える。これは後の議論との関係から、状態空間内の適当な座標変換により、初期状態 $\mathbf{x}_0 = [1, 0 \dots 0]^T$ から目標状態 $\mathbf{x}_d = [0, 0, \dots, 0]^T =$ 原点に、状態を遷移させる入力系列を求める問題として、一般性を失うことはない。

(2) 左半平面に零点のある2次系の場合

系の零点に関する情報は、(14)式の出力行列 \mathbf{C} に含まれ、(11)式からも明らかかなように、出力は状態ベクトルの \mathbf{C} への射影に比例している。2次系の場合の初期状態として定常状態 $[1.0, 0.0]$ を考え、そこから状態空間原点への2ステップでの有限整定時間制御の位相面軌跡を考えると、図2のようになる。前述のように目標状態は原点となるが、有限整定するために、原点には α_1 軸に垂直な方向から近づくことが分る。零点のない時の出力は状態の第1成分 α_1 に比例しているため、オーバーシュートなく整定するが、左半平面に零点を持つ2次系では、 \mathbf{C} と同じ方向を持つ \mathbf{C}^* への射影に比例するので、 $\overline{op}_1 \rightarrow \overline{op}_2 \rightarrow \overline{op}_3$ に比例して変化し、目標値より小

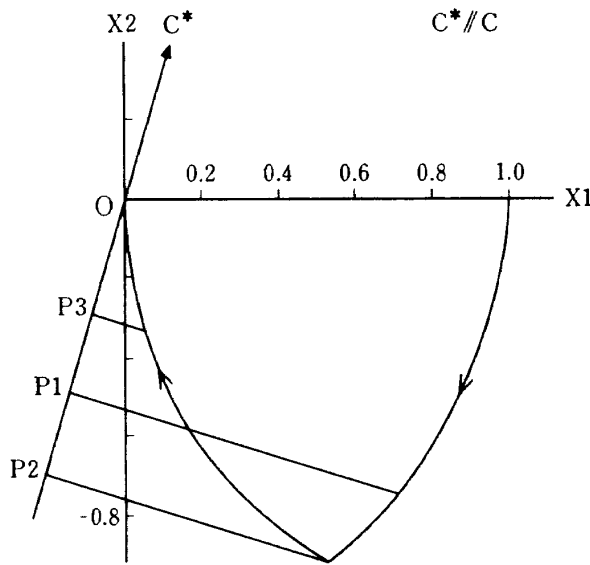


図 2. 有限時間整定制御の位相面軌跡

$$\frac{\frac{S}{0.3} + 1.0}{S^2 + 0.2S + 1.0}$$

さい方向から近づいて整定する。これは行列 C が正の傾きを持っている時、即ち左半平面に零点を持っている時、オーバーシュートは避けられないことに対応している。

(3) 評価関数の導入と最適解の導出

以上のように、左半平面に零点のある 2 次系の場合には、定常状態から原点に有限時間整定させる場合、オーバーシュートは避けられない。より高次の系については、必ずしも同様の議論では説明し得ないが、過渡特性に問題が生じる場合が多い。ここでこの過渡特性を改善するためにとり上げる手法は、既に述べたように整定までのステップ数を、システム次数より多くし、新たに導入された誤差 2 乗和という評価関数を最小にする最適入力列を求めることである。

以上は (12), (11) 及び初期状態、目標状態を拘束条件とする極値探索問題だから、Lagrange 関数の極値問題として定式化できる。 N を整定までのステップ数として

$$L = J(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda(k) (\mathbf{x}(k+1) - A\mathbf{x}(k) - B\mathbf{u}(k)) \quad (15)$$

$$J = \sum_{i=1}^{N-1} y(i)^2 \quad (16)$$

$$\mathbf{x}(N) = [0, 0, \dots, 0]^T \quad (17)$$

$$N \geq n \quad n: \text{システム次数} \quad (18)$$

L の極値問題はさらに

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}(k)} = \mathbf{o}^T, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}(k)} = \mathbf{o}, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda(k)} = \mathbf{o} \quad (19)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

一般に n 次系を N ステップ ($N \geq n$) で誤差 2 乗和を最小にしつつ有限時間整定させる場合、 N ステップで状態原点に達する条件から (20) 式、及び (19) 式を解くことにより (21) 式が得られ、計 N 本の連立方程式となる。

$$\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i} B\mathbf{u}(i) = -A^N \mathbf{x}(0) \quad (20)$$

$$m = n - 1 \sim N - 2$$

$$\sum_{l=0}^m C \left\{ A^{m-l} \left(\sum_{i=0}^{m-l} A^{-i} B C A^{-i} \right) - \sum_{i=0}^{n-l-2} {}_n D_{m+1, i+l+2} A^i \left(\sum_{j=0}^i A^{-j} B C A^{-j} \right) \right\} A^{-1} B \mathbf{u}(l)$$

$$= -C \left\{ A^m \left(\sum_{i=0}^m A^{-i+1} \mathbf{x}(0) C A^{-i} \right) - \sum_{i=0}^{n-2} {}_n D_{m+1, i+2} A^i \left(\sum_{j=0}^i A^{-j+1} \mathbf{x}(0) C A^{-j} \right) \right\} A^{-1} B \quad (21)$$

但し

$$[{}_n D_{i,1}, \dots, {}_n D_{i,n}]^T \triangleq [B, A^{-1}B, \dots, A^{-(n-1)}B]^{-1} A^{-i} B \quad (22)$$

(4) 数値計算

2 次の系について、整定までのステップ数と、初期状態応答、及び $\min J(N)$ の関係の数値計算例を図 3 に示す。 $\min J(N)$ の性質については、後の最適解の性質の項でも示す。

図 3 は、既にオーバーシュートの避けられない場合の説明に用いた、零点を持つ 2 次系であり、応答の中の \circ 印は 2 ステップで整定させる場合であり、大きなオーバーシュートを生じている。 \bullet 印は 3 ステップ整定の場合であり、オーバーシュートは減少している。以下整定までのステップ数をふやしてゆ

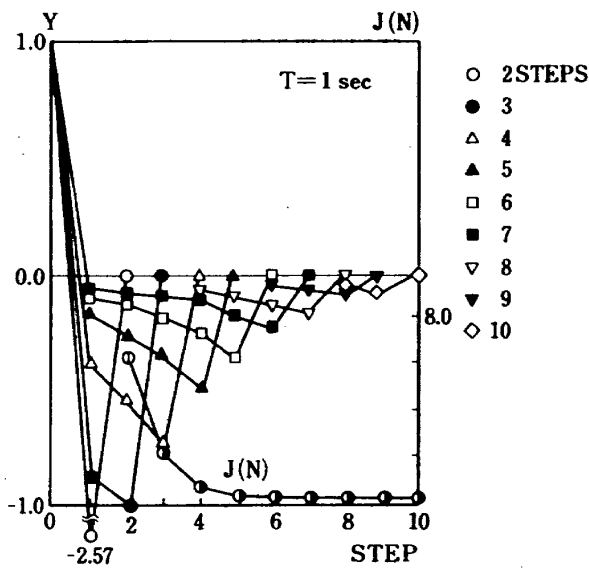


図3. 2次系の初期状態応答

$$\frac{\frac{S}{0.3} + 1.0}{S^2 + 0.2S + 1.0}$$

くと、オーバーシュートが減ってゆく様子が分る。

図3には、上記の各場合の評価関数値も示した。図からも分るように、整定までのステップ数をふやせば●で示される $J(N)$ は単調減小してゆくことが分る。

より高次の系の応答はここでは示さなかったが、 $J(N)$ の極限值 $\lim_{N \rightarrow \infty} J(N)$ は必ずしも0ではない。

3.2 状態フィードバック解の導出

これまで述べて来た方法では、最適な入力列は連立方程式を解くという形、即ちオープンループ形で得られ、制御系で望ましいとされる閉ループ系(状態フィードバック系)を構成することができなかった。ここでは行列の巾零性を利用し、さらにベルマンによる“最適性の原理”を考慮に入れて、最適な入力列の状態フィードバックによる構成について述べる。結果として得られる最適入力列は、前述のオープンループ解と同じである。一般の最適レギュレータ問題においては、最適解が状態フィードバックにより得られるが、ここでは有限整定特性を持たせた最適レギュレータもまた、状態フィードバックによって得られることを示す。以下の結論は、一般の n 次の1入力1出力系についても成立するものであ

る。

(1) 巾零性の有限整定時間制御への応用

1入力1出力系

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (23)$$

ここで、系は、可制御、可観測であり、さらに $Z = \phi$ に零点を持たないものを考える。この系に対して状態フィードバック

$$u(k) = g\mathbf{x}(k) \quad (24)$$

を考える。(24)を(23)に代入し

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}g)\mathbf{x}(k) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) \quad (25)$$

一方(23)式のシステムの可制御性を仮定すれば、状態フィードバックにより任意の極配置が可能である。よって $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値をすべて0にでき、このとき $\tilde{\mathbf{A}}$ は巾零行列となる。即ち

$$\tilde{\mathbf{A}}^n = 0 \quad (26)$$

(25)と(26)より

$$\mathbf{x}(n) = \tilde{\mathbf{A}}^n \mathbf{x}(0) = 0 \quad (27)$$

よって任意の初期状態 $\mathbf{x}(0)$ に対し、システム次数 n に等しいステップ数で、原点への有限整定時間制御が実現できる。以上が、2.2の中で述べたKalmanの方法である。以下このような巾零行列になるような状態フィードバックのことを巾零フィードバックと呼ぶ。

(2) (システム次数+1)ステップ整定

次に誤差2乗和を小さくするために、整定までのステップ数を増加させて自由度を導入するが、まずここでは、(システム次数+1)ステップでの整定を考えることにする。

初期状態 $\mathbf{x}(0)$ に対して入力 $u(0)$ を加え、 $\mathbf{x}(1)$ を得たとする。 $\mathbf{x}(1)$ 以降はシステム次数に等しい数で整定させるので、前記の巾零性を用いた状態フィードバックによる軌道となり、 $\mathbf{x}(1)$ 以降の軌道は決まってしまう。即ち標価関数を最小化するためには、 $u(0)$ により $\mathbf{x}(1)$ をどこにするかが問題となる。図4は2次系を3ステップで有限整定させる場合の概念図である。以上を式の上で考えると、次のようになる。

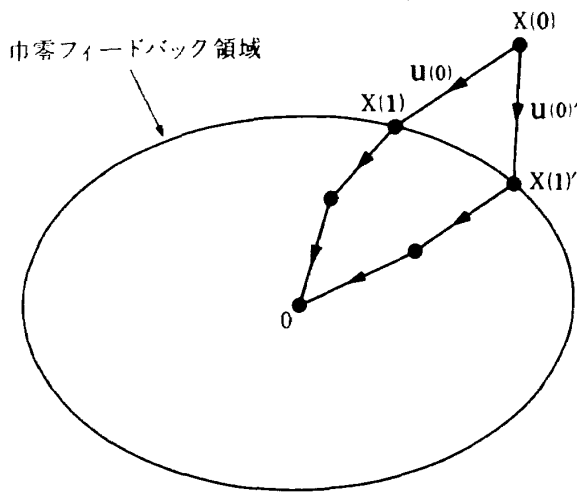


図 4. 2次系の3ステップ整定

問題の記述

$$\begin{cases} \mathbf{x}(1) = A\mathbf{x}(0) + B\mathbf{u}(0) & (28) \\ J = \mathbf{x}^T(1)C^T C\mathbf{x}(1) + \mathbf{x}^T(2)C^T C\mathbf{x}(2) \end{cases}$$

$$\rightarrow \min \quad (29)$$

一方ステップ1以降は2ステップの中零フィードバックを用いるので

$$\mathbf{x}(2) = \tilde{A}\mathbf{x}(1) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(3) = \tilde{A}\mathbf{x}(2) = \tilde{A}^2\mathbf{x}(1) = 0 \\ \because \tilde{A}^2 = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

以上を(29)に代入して

$$\begin{aligned} J = \mathbf{x}^T(1)C^T C\mathbf{x}(1) \\ + \mathbf{x}^T(1)(\tilde{C}\tilde{A})^T(\tilde{C}\tilde{A})\mathbf{x}(1) \end{aligned} \quad (32)$$

$$= \mathbf{x}^T(1)\tilde{R}_{23}\mathbf{x}(1) \quad (33)$$

$$\tilde{R}_{23} = C^T C + (\tilde{C}\tilde{A})^T(\tilde{C}\tilde{A}), \quad \tilde{R}_{23}^T = \tilde{R}_{23} \quad (34)$$

以上より問題は(28)の条件のもとで、(33)を最小化することである。(28)を(33)に代入して

$$J = (A\mathbf{x}(0) + B\mathbf{u}(0))^T \tilde{R}_{23} (A\mathbf{x}(0) + B\mathbf{u}(0)) \quad (35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{u}(0)} = 2B^T \tilde{R}_{23} (A\mathbf{x}(0) + B\mathbf{u}(0)) \quad (36)$$

$$= 2B^T \tilde{R}_{23} \mathbf{x}(1) = 0 \quad (37)$$

よってLの極値条件は(36)より

$$\mathbf{u}(0) = -(B^T \tilde{R}_{23} B)^{-1} (B^T \tilde{R}_{23} A) \mathbf{x}(0) \quad (38)$$

即ち最初の入力 $\mathbf{u}(0)$ が初期状態の関数として求められ、状態フィードバック可能なことが分った。2ステップ目からは、中零フィードバックを用いれば

よい。

この時誤差2乗和の最小値 J_{OPT} は(35)式と(38)式より次式で得られる。

$$J_{OPT} = \mathbf{x}^T(0) R_{23} \mathbf{x}(0) \quad (39)$$

$$\begin{aligned} R_{23} = [A - (B^T \tilde{R}_{23} B)^{-1} (B^T \tilde{R}_{23} A)]^T \tilde{R}_{23} \\ [A - (B^T \tilde{R}_{23} B)^{-1} (B^T \tilde{R}_{23} A)] \end{aligned} \quad (40)$$

ところで $(B^T \tilde{R}_{23} B)^{-1}$ の存在に関しては、次のようなことが言える。

ここでは、整定までのステップ数を3より大きくした時のことも考慮し、逆数が存在するための十分条件だけを述べる。

$$B^T \tilde{R}_{23} B = B^T [C^T C + (\tilde{C}\tilde{A})^T (\tilde{C}\tilde{A})] B > 0 \quad (41)$$

なるためには、 CB 、 $\tilde{C}\tilde{A}$ ともにスカラであることを考え、十分条件として任意の $\tilde{\mathbf{x}} \in R^2$ に関して

$$C\tilde{\mathbf{x}} = 0 \quad (42)$$

$$\tilde{C}\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = 0 \quad (43)$$

の両式を同時に満たさなければよいことが分る。

(42)式は $\tilde{\mathbf{x}} \in C^\perp$ (C と直交)を示し、(43)式は、そのような $\tilde{\mathbf{x}}$ に \tilde{A} を掛けても、やはり C と直交していることを示す。よって(41)式がなりたつための十分条件は次のように言い換えることができる。

「 C と直交するベクトル空間が \tilde{A} の演算に関して閉じていないこと。」

(3) 一般の場合

一般に n 次の系を N ステップ($N \geq n$)で有限時間整定させる場合を考える。最適性の原理を考え、2ステップ目からの最適フィードバック制御が分っているとして、帰納法的に考えると、

$$\mathbf{x}(1) = A\mathbf{x}(0) + B\mathbf{u}(0) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} J = [C\mathbf{x}(1)]^2 + J_{OPT}[\mathbf{x}(1)] \\ (\text{最適性の原理}) \end{aligned} \quad (45)$$

$$= \mathbf{x}(1)^T \tilde{R}_{nN} \mathbf{x}(1) \quad (46)$$

となり、これは(28)、(33)と同じ形をしている。

よって最適入力

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0) = -(B^T \tilde{R}_{nN} B)^{-1} \\ (B^T \tilde{R}_{nN} A) \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (47)$$

即ち、現在の状態 $\mathbf{x}(0)$ が分れば、その最適入力は(47)のような、状態フィードバックにより求まることが分る。 N を変えることにより、その時々

ードバックゲインを用いて、状態フィードバックすればよいことになる。

以上をまとめると、 n 次系を N ステップで誤差2乗和を最小にしつつ、有限整定させるためには、次の可変ゲイン状態フィードバックとすればよい。

$$\begin{cases} u(i) = -(B^T \tilde{R}_{n,N-i} B)^{-1} \\ \quad (B^T \tilde{R}_{n,N-i} A) x(i) \quad (48) \end{cases}$$

$$\tilde{R}_{n,j} = C^T C + R_{n,j-1} \quad (49)$$

$$\begin{cases} R_{n,j-1} = [A - B(B^T \tilde{R}_{n,j-1} B)^{-1} \\ \quad (B^T \tilde{R}_{n,j-1} A)]^T \tilde{R}_{n,j-1} \\ \quad \times [A - B(B^T \tilde{R}_{n,j-1} B)^{-1} \\ \quad (B^T \tilde{R}_{n,j-1} A)] \quad (j > n+1) \end{cases} \quad (50)$$

$$R_{n,n} = \sum_{i=1}^{n-1} (C \tilde{A}^i)^T (C \tilde{A}^i) \quad (51)$$

ここで n : システム次数, N : 整定までのステップ数, $u(i)$: i ステップ目の入力, $x(i)$: i ステップ目の状態等である。

そして最後の n ステップは巾零フィードバックとする。 $N \rightarrow \infty$ としたときの評価関数値は(49), (50), (51)で $R_{n,j}$ の定常値 $R_{n,\infty}$ により

$$J_{OPT} \rightarrow x(0)^T R_{n,\infty} x(0) \quad (52)$$

となることが分る。さらに(37)の一般化により、最適軌道上の各状態 $x(i)$ は、図5のように $\tilde{R}_{n,N-i+1} B$ と直交していることが分る。

ここで(48), (50)式中の逆数が存在する十分条件について考える。

(49)式より

$$\tilde{R}_{n,n+1} = C^T C + R_{n,n} = \sum_{i=0}^{n-1} (C \tilde{A}^i)^T (C \tilde{A}^i) > 0 \quad (53)$$

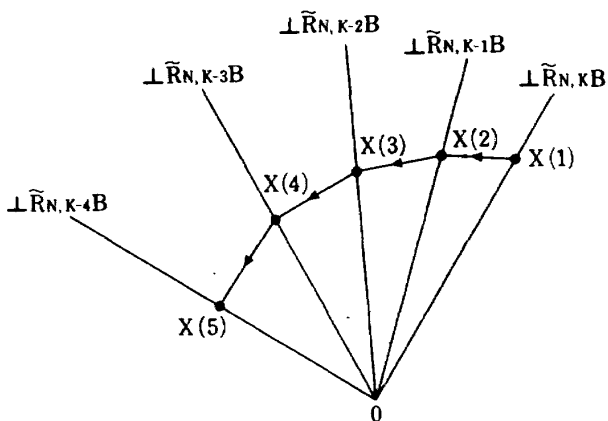


図5. 最適軌道の性質

がなりたつためには、 $C \tilde{A}^i$ が行ベクトルであることより

$$C \tilde{A}^i x = 0 \quad i = 0 \sim n-1 \quad (54)$$

をみたすベクトル x が存在しなければよい。即ち

$$\begin{bmatrix} C \\ C \tilde{A} \\ \vdots \\ C \tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} x = \phi \quad (55)$$

なる x が存在しなければよいので、これは状態フィードバックを施した系の可観測性の条件

$$\text{rank} [C^T, \tilde{A}^T C^T, \dots, (\tilde{A}^T)^{n-1} C^T] = n \quad (56)$$

と等価になる。

これがなりたつなら、(50)式より $R_{n,n+1} > 0$, よって(49)式より $\tilde{R}_{n,n+2} > 0$ となり、以下 $\tilde{R}_{n,j} > 0$ ($j \geq 2$)が示され、 $(B^T \tilde{R}_{n,j-1} B)$ の正値性が示され、その逆数が常に存在することが分る。

よって解が存在するための十分条件は、状態フィードバックを施した系で、可観測性が成りたつことである。

この条件の意味については、付録Aに述べることにする。

(4) フィードバックゲインの数値計算

図2や図3で示した零点のある2次系について、3.2で示した手法により、状態フィードバックゲインを実際に求めた。

$$G(S) = \frac{S}{0.3} + 1.0 \quad (57)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & -0.2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1.0 \quad 1/0.3] \quad (58)$$

サンプリング周期1秒で離散化して

$$A = \begin{bmatrix} 0.56897 & 0.76276 \\ -0.76276 & 0.41642 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.43103 \\ 0.76276 \end{bmatrix}$$

$$C = [1.0 \quad 1/0.3] \quad (59)$$

のようになる。

ここで3.2(C)のアルゴリズムに従って、状態フィードバックゲインマトリクスを求めてみる。ここで状態フィードバックゲインマトリクス $g(i)$ とは

$$u(i) = g(i) x(i) \quad (60)$$

とするような 1×2 のマトリクスであり、(48) 式に対応させれば次のようになる。

$$g(i) = -(B^T \tilde{R}_{n,N-i} B)^{-1} (B^T \tilde{R}_{n,N-i} A) \tag{61}$$

ここでは一応 10 ステップ整定までを考えるとすれば、 $g(i)$ は表 1 のようになる。 $g(i)$ の具体的使い方は例えば 10 ステップ整定なら、制御開始時点の状態 $x(0)$ を用いて、最初の制御入力 $u(0)$ を

$$u(0) = g(0)x(0) \tag{62}$$

表 1. 状態フィードバックゲインマトリクス

i	$g(i)$	
0	-.66154	-.72446
1	.65951	-.72553
2	.65558	-.72760
3	.64786	-.73167
4	.63256	-.73974
5	.60134	-.75621
6	.53395	-.79175
7	.36896	-.87877
8*	-.19999	-1.17886
9*	-.19999	-1.17886

* 最後の 2 ステップは巾零フィードバック

により求め、サンプル間は $u(0)$ を出し続け、次のサンプリング時刻 T (この場合 1 秒後) にその状態 $x(1)$ を調べ、

$$u(1) = g(1)x(1) \tag{63}$$

により、次の制御入力 $u(1)$ を求めればよい。同様のことを $u(2) \dots u(7)$ まで求めればよい。そして最後の 2 ステップでの $g(8)$ と $g(9)$ は、 $A = A + Bg$ が $\tilde{A}^2 = \phi$ を満足するような、巾零状態フィードバックになっているので、この $g(8)$ 、 $g(9)$ を用いて、 $u(8)$ 、 $u(9)$ を求めればよいことになる。

さらに、このようにして得られた 10 ステップで整定させる制御方式は、最適であるので、最適性の原理によれば、その途中からの軌道も最適なのである。よって、例えば 5 ステップ整定させるなら、表 1 の $g(5)$ から順に状態フィードバックゲインマトリクスとして用いればよい。即ち

$$\begin{aligned} u(0) &= g(5)x(0) \\ u(1) &= g(6)x(1) \\ &\vdots \\ u(4) &= g(9)x(4) \end{aligned} \tag{64}$$

とすればよい。これは (48) 式からも明らかである。以上から、表 1 のような、状態フィードバック行列を一度計算しておけば、整定までのステップ数を変更しても、同じものが使えるので、事前計算は系に

表 2. 2 次系の状態フィードバックによる最適な有限整定時間制御の応答 (5 ステップ整定)

time (sec)	u	y	x_1	x_2
.0	.60134	1.0	1.0	.0
.5	.60134	.34650	.95278	-.18188
1.0	.68296	-.18544	.82817	-.30408
1.5	.68296	-.34965	.67223	-.30657
2.0	.40550	-.25765	.53364	-.23739
2.5	.40550	-.41007	.41015	-.24607
3.0	.17229	-.35796	.29734	-.19659
3.5	.17229	-.51522	.19283	-.21242
4.0	.19025	-.49737	.09349	-.17725
4.5	.19025	-.29568	.02408	-.09593
5.0	.0	.0	.0	.0
5.5	.0	.0	.0	.0
6.0	.0	.0	.0	.0

対して1度で済むことになる。

(5) 応答の数値計算

次にこの状態フィードバック行列を用いて、上記2次系を、実際に制御した場合の応答を示す。整定までのステップ数を5ステップとし、初期状態 $\mathbf{x}(0) = [1.0, 0]^T$ 、サンプリング周期は1秒である。系の応答は、時間きざみ幅1/50のルンゲクッタ法により計算した。時間、制御入力 u 、出力 y 、状態 $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ を表2に示す。

この状態フィードバックによる、5ステップ整定の入力 u は、3.で述べたオープンループ解と一致し、応答波形は、図3における5ステップ整定の場合と同じである。またルンゲクッタ法による積分誤差も考えられるが、表2の、小数点以下5ケタの表示では、図3の結果と一致している。

4. 本制御方式の性質

4.1 最適解の性質

最適解の性質として次のことが言える。

誤差2乗和の最小値、 $\min J(N)$ は N に関して広義の単調減少関数である。

(証明)

入力系列を $\mathbf{u}(m) \triangleq \{u(0), u(1), \dots, u(m-1)\}$ で表わす。 $\mathbf{u}^*(N-1)$ が $J(N-1)$ の最小値を与えるなら、 $\mathbf{u}(N) = \{\mathbf{u}^*(N-1), \alpha_0/\beta_0\}$ により、有限整定であり、その時 $J(N) = \min J(N) < \min J(N-1)$ 。

Q.E.D.

以上の性質は図3中の $J(N)$ により、示されている。さらに同様の考え方により次の性質がある。

整定時間が同じなら、整定までのステップを整数倍にすると、誤差2乗和は単調減少する。

4.2 パラメータ変動の影響

有限整定時間制御の特徴は、その速応性にあるが、システムパラメータの変動により、有限整定特性が成り立たなくなる可能性がある。ここでは、システムパラメータ変動に対して応答がどのように変わるかを、数値計算により示す。図6は前記2次系に関して、5ステップ整定させるようなフィードバックゲインを用いて、パラメータ変動が起ったシステムの

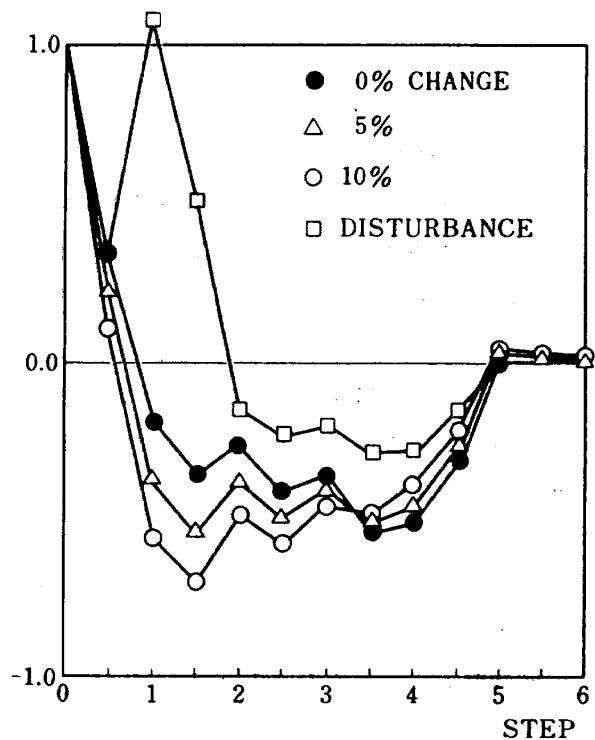


図6. パラメータ変動と外乱の影響

応答を示す。

●印は0%の変動、即ちシステムに整合した状態フィードバックゲインを用いた場合であり、応答は2.2(4)の応答と同じである。

△印はシステム各パラメータを5%変動させたものであり、この時システムは次のようにした。

$$F' = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.05 & -0.21 \end{bmatrix} \quad G' = G$$

$$C' = [1.0 \quad 3.5] \quad (65)$$

○印は同様に10%変動させたものであり、各パラメータは次のものである。

$$F' = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.1 & -0.22 \end{bmatrix} \quad G' = G$$

$$C' = [1.0 \quad 3.67] \quad (66)$$

図6からも明らかなように、システムパラメータがもとのシステムからずれると、オーバーシュートが増大し、さらに有限整定特性も保存されないことが分る。しかし、目標時刻での誤差の小さい事、さらに目標整定時刻以降、状態が零に収束することが分る。

零への収束性に関しては、最終の2(一般には n)ステップにおいては、制御系を含めたシステム固有値が、パラメータ変動により、完全に原点に一致し

なくなっても、原点近傍に分布する形となり、安定性、収束性が保証されるためと考えられる。

4.3 外乱の影響

ここでは前述までの2次系に、制御開始から1秒目に、状態を強制的に $[0.25, 0.25]^T$ に移すような外乱を与え、その状態フィードバック系での応答を調べる。これを図示したのが図6の□印であり、1秒目から本来の応答●印とずれてしまうことが分る。しかしこのずれにもかかわらず、目標整定時刻5秒では完全に出力が整定することが分る。これは最後の2ステップが巾零フィードバックになっているためである。さらに最適性の原理から、この時の軌道は初期状態を、 $[0.25, 0.25]^T$ とする4ステップ整定での最適軌道になっているのである。

以上のことは、サンプリングの途中で外乱が入る場合も同様に成立する。即ち本制御方式は状態外乱に対して頑強な制御系であると考えられる。

4.4 航空機ヨーダンパへの適用

より高次の系への適用、及びサンプリング時点間の応答の様子を見る意味で、航空機に用いられるヨーダンパを本方式で構成してみる。図7にヨーダンパの概念図を示す。基本的には垂直軸まわりの回転運動(ヨーイング)をセンサにより検出し、ラダー入力にフィードバックするものである。

ここでは現在航空宇宙技術研究所で開発中のSTOL実験機で巡航中に用いられるヨーダンパについて考える。速度200kt、高度20000ftで定常水平飛行からの微小変位について、横方向の線形化された運動方程式を考える。さらにラダー入力だけをフィードバック系で作るので、エルロン入力は0と

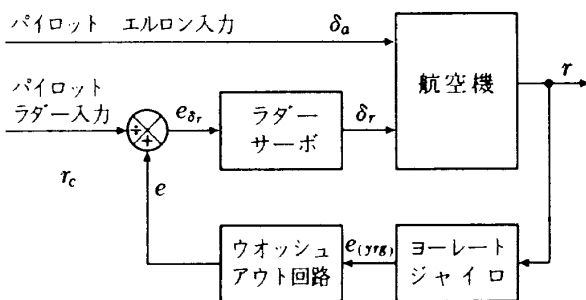


図7. ヨーダンパー概念図²¹⁾

しておくとして、次のような1入力1出力系が得られる。

$$\mathbf{x} = [\beta, P, \varphi, r]^T \quad u = \delta r \quad (67)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.175 & 0.0 & 0.053 & -0.990 \\ -3.53 & -1.72 & 0.0 & 0.481 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 3.16 & -0.158 & 0.0 & -0.552 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.063 \\ 1.38 \\ 0.0 \\ -2.96 \end{bmatrix} u \quad (68)$$

$$y = [0.0, 0.0, 0.0, 1.0] \mathbf{x} \quad (69)$$

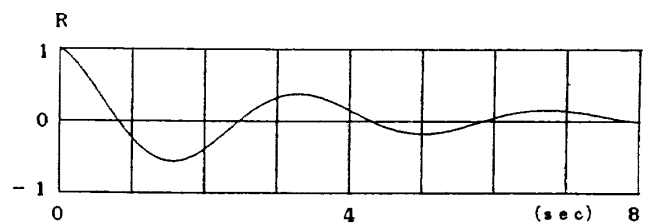
ここで β : 横すべり角, P : ロールレート, φ : バンク角, r : ヨーレート, δr : ラダー舵角を示す。ヨーダンパとしては、ゲインとウォッシュアウトよりなるものを用い、次の式で表わされるものとした。

$$\delta r = G_{YD} \frac{T_{YD} S}{T_{YD} S + 1} r \quad (70)$$

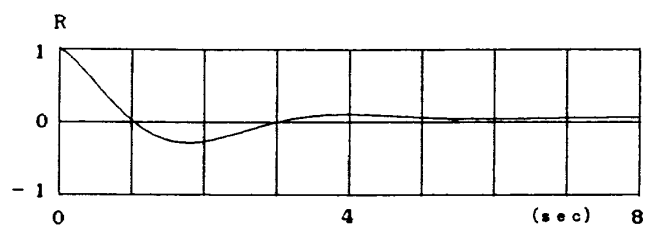
前記の飛行条件で、 $G_{YD} = 0.325, T_{YD} = 2.0$ (sec) とした。

図8(a)は初期状態を $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0, 1]^T$ とした時の自由応答で、横軸は時間(sec)、縦軸はヨーレート R (deg/sec) であり、ダッチロールモードが現われている。

これに(70)式のヨーダンパを付加した時の応答が(b)であり、ダンパとしての効果がよく現われている。ここで最終状態が ϕ にならないのは、微分フ



(a) Yaw-damper off



(b) Yaw-damper on

図8. STOL機 CLEAN 形態初期状態応答 (200kt, 20000ft)

ィードバック(ウォッシュアウト)しかしていないためである。

これに対し、図9, 10, 11は、初期状態を上記と同様にして、ラダーへのフィードバックを、これまで述べて来た手法により求めたものである。

図9はサンプリング周期を1(sec)としたもので、(a)は4ステップ整定、(b)は6ステップ整定、(c)は8ステップ整定である。(a)は従来の有限整定制御による応答で、システム次数に等しいステップ数で整定しているが、大きな行き過ぎを生じている。これに対し(b)(c)では、行き過ぎが、しだいに減小して行く様子が分る。

縦軸にはフィードバック量である入力舵角 u (deg) もプロットしたが、舵角は後縁左を正としたため、入力変位に対する出力変動の方向が逆転していることに注意を要する。

この場合、入力が離散的であるために、応答がなめらかではないが、ヨーレートにダンピングを与え、さらに有限時間で整定させる性質のあることが分る。

図10は、サンプリング周期を0.5(sec)とした

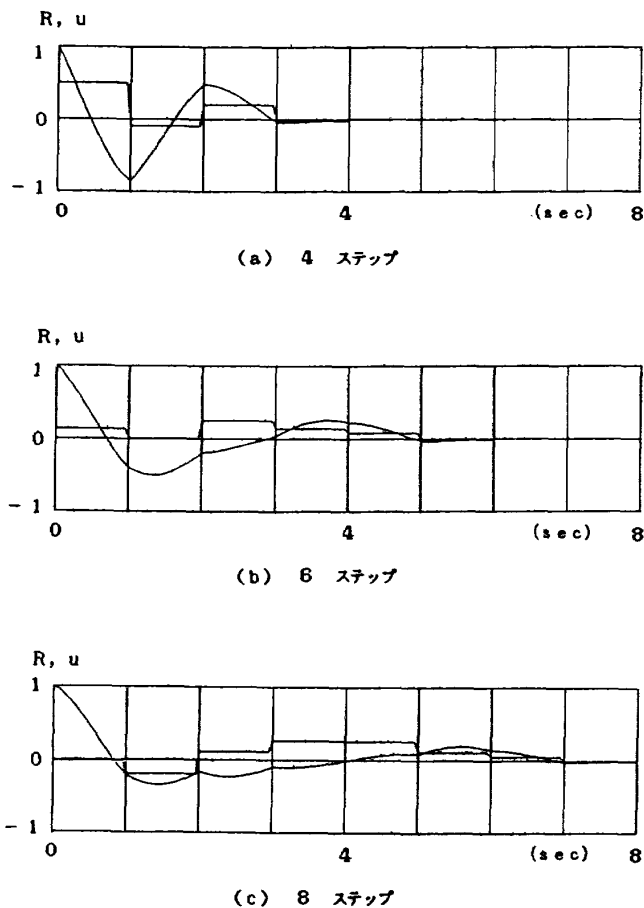


図9. 最適な有限整定制御 $T = 1.0 \text{ sec}$

もので、最短時間の場合、4 step, 2秒で整定するが、フィードバック量は図9の(a)と比べて大きくなっている。

同様に図11は、サンプリング周期0.25(sec)のものであり、フィードバック量が増大してくることが分る。

図9, 10, 11のどの場合も、整定時間を延ばすと、行き過ぎ量は減少し、十分長ければ、最初の1ステ

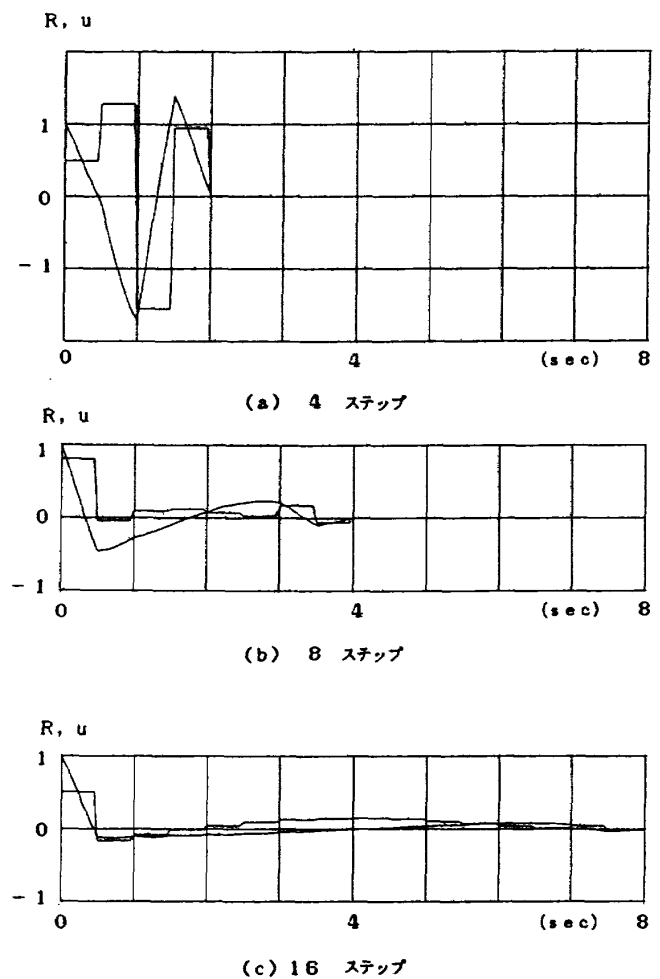


図10. 最適な有限整定制御 $T = 0.5 \text{ sec}$

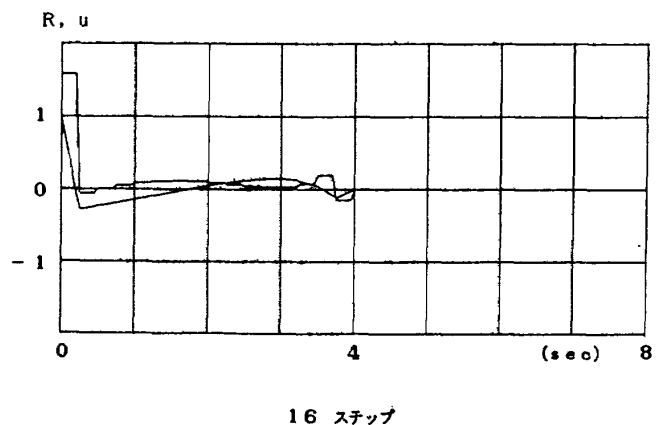


図11. 最適な有限整定制御 $T = 0.25 \text{ sec}$

ップではほぼ目標値に到達している。これは、必要な立ち上がり時間から、サンプリング時間が決められるという意味で、サンプリング時間決定の一つの目安を与えると考えられる。

5. おわりに

有限整定時間制御において、その速応性にもかかわらず過渡特性の悪い場合があり、その改善のために最適制御理論の導入を試みた。そして制御入力の変換方法として、オープンループ方式と状態フィードバック方式を導き、その等価性を数値実験により確かめた。さらにシステムパラメータ変動、及び状態外乱に対する性質を数値実験により調べ、頑強な制御系になっていることが分った。

制御系として望ましい状態フィードバック形式を本方式でも求めたが、そのゲインの一部が時変パラメータになっているという特徴を有する。これは従来の考え方からするとあまり望ましくない性質といえるかも知れないが、最近の計算機の発達は、このような問題点を充分緩和するものであると考えている。

今後の課題として、これまでの手法を多入力多出力系へ発展させることが考えられるが、その場合、解析的手法のみでなく代数的手法が必要になり、その展開は今までのものとはかなり違ったものになると考えられる。

参 考 文 献

- 1) 今井弘之; デッドビート制御, 計測と制御, Vol. 22, No.7, 606/613 (1981).
- 2) TAKAHASHI, RABIN, AUSLANDER; 制御と力学系, コロナ社(1977).
- 3) 成田誠之助; デジタルシステム制御, 理論と応用, 昭晃堂(1980).
- 4) E. Jury. *Sampled-Data Control Systems*, Wiley, New York (1958).
- 5) J. Tou: *Digital and Sampled-Data Control Systems*, McGraw-Hill, New York (1959).
- 6) R.E. Kalman: *On the General Theory of Control Systems*, Preprint First IFAC Congr. Aut. Control, Moscow, 4, 2020/2030 (1960).
- 7) J.B. Farison and F. C. Fu: *The Matrix Properties of Minimum-Time Discrete Linear Regulator Control*, IEEE Trans., AC-15 390/391 (1970).
- 8) V. Kucera: *The Structure and Properties of Time-Optimal Discrete Linear Control*, IEEE Trans., AC-16, 375/377 (1971).
- 9) C.T. Mullis: *Time Optimal Discrete Regulator Gains*: IEEE Trans., AC-17 265/266 (1972).
- 10) B. Leden: *Multivariable Dead-Beat Control*, Automatica, 13, 185/188 (1977).
- 11) O.A. Sebakhy and T.M. Abdel-Moneim: *State Regulation in Linear Discrete-Time System in Minimum Time*, IEEE Trans., AC-24 84/88 (1979).
- 12) O.A. Sebakhy and T.M. Abdel-Moneim: *Design of Optimal Dead-Beat Controllers*, IEEE Trans., AC-25 604/606 (1980).
- 13) M.W. Wonham: *Linear Multivariable Control. A Geometric Approach*. Springer-Verlag, New York (1974).
- 14) 西村, 瓜倉, 長田; 線形離散システムの最短時間出力整定問題, 計測自動制御学会論文集, 11-6, 688/694 (1975).
- 15) B. Leden: *Output Dead-Beat Control. A Geometric Approach*, Int. J. Control, 26-4, 493/504 (1977).
- 16) H. Akashi and H. Imai: *Disturbance Localization and Output Deadbeat Control Through an Observer in Discrete-Time Linear Multi-variable Systems*, IEEE Trans. AC-24, 621/627 (1979).
- 17) 井上, 室井; 線形離散時間系に対するオブザーバについて, システムと制御, 18, 309/313 (1974).
- 18) 佐々, 渡辺; 誤差2乗和を最小にする有限整定制御, 第21回SICE 学術講演会前刷.
- 19) 佐々, 渡辺; 最適な有限整定制御の状態フィードバックによる構成, 第25回自動制御連合講演会前刷.
- 20) 佐々, 渡辺; 最適な有限時間整定制御, 昭和58年電気学会全国大会前刷.

- 21) J.H. Blakelock: Automatic Control of Aircraft and Missiles, John Wiley & Sons Inc., New York.

付 録 A

本制御方式が解を持つための十分条件として得られた、(56)式で示される、巾零フィードバックを施した系の可観測性の意味を考える。

この方式では、評価関数として出力の2乗和を考え、終端条件に有限整定性を考えているので、目標整定時刻を N としたとき、次の2次形式線形レギュレータ問題と等価になる。

$$J = \mathbf{x}(N-n)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(N-n) + \sum_{i=1}^{N-n-1} \mathbf{x}(i)^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}(i) \rightarrow \min \quad (\text{A-1})$$

\mathbf{Q} は、最後の n ステップが有限整定になるような巾零フィードバックなので、次のようになる。

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^i)^T (\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^i) \quad (\text{A-2})$$

よって(53)式の条件は、(A-2)式、即ち(A-1)式における仮の終端状態 $\mathbf{x}(N-n)$ に関する重み行列 \mathbf{Q} が正定でなければならないということである。

もし正定でなければ

$$\tilde{\mathbf{x}} \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}} = 0 \quad (\text{A-3})$$

なる $\tilde{\mathbf{x}}$ が存在する。このとき(A-1)の解が存在するとして、それを \mathbf{x}_{OPT} とすれば、 $N-n$ での状態を

$$\mathbf{x}_{OPT}(N-n) \rightarrow \mathbf{x}_{OPT}(N-n) + \tilde{\mathbf{x}} \quad (\text{A-4})$$

と変えても、(A-3)式により、(A-1)式の J は変化しない。即ち、解の一意性が保証されなくなるのである。これは J の中に入力に関するペナルティが含まれていないため、 $u(N-n-1)$ に自由度があり、上記 $\tilde{\mathbf{x}}$ のような状態への遷移をしても評価関数値が変化しないためと考えられる。

ところで、(A-3)式中の $\tilde{\mathbf{x}}$ で示された状態の意味について考える。この $\tilde{\mathbf{x}}$ は

$$\begin{cases} \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} = 0 \\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\tilde{\mathbf{x}} = 0 \end{cases} \quad (\text{A-5})$$

をみたすので、 $N-n \sim N$ までのサンプリング時刻に出力が ϕ になるような系

$$\mathbf{x}_{n+1} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}_n$$

の初期状態である。即ち、出力には現われてこない

モードである。

また、状態フィードバックを施した系の可観測性について考える。

もとの系を

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}u_n \\ y_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n \end{cases} \quad (\text{A-6})$$

その伝達関数

$$H(Z) = \mathbf{C}(Z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{b(Z)}{a(Z)} \quad (\text{A-7})$$

状態フィードバックを施した系を

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}(g\mathbf{x}_n + v) \\ \quad = (\mathbf{A} + \mathbf{B}g)\mathbf{x}_n + \mathbf{B}v \\ y_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n \end{cases} \quad (\text{A-8})$$

その伝達関数は

$$H'(Z) = \mathbf{C}(Z\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}g)\mathbf{B} = \frac{b(Z)}{a'(Z)},$$

$$a'(Z) = |Z\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}g| \quad (\text{A-9})$$

となる。状態フィードバックでは伝達関数の分子は不変なので、(A-7)と(A-9)で $b(Z)$ は共通である。

ところで(A-6)を可制御・可観測としたとき、(A-8)では可制御性は保存されるが、可観測性は保存されるとは限らない。これが保存されるのは、(A-9)で $b(Z)$ と $a'(Z)$ とが互いに既約(約分できないこと、prime)であることである。ところで状態フィードバックによって、 Z 平面の極をすべて原点 $Z=0$ に移動させるのが有限整定制御であった。本方式の場合も、最後の n ステップでの巾零フィードバックでも同じことをしているので、このとき

$$a'(Z) = Z^n \quad (\text{A-10})$$

としていることになる。よってこの $a'(Z)$ と $b(Z)$ が既約であるためには、 $b(Z)$ が $Z=0$ に零点を持たない必要がある。

よって本方式は、系を Z 変換の伝達関数で表示した時、 $Z=0$ に零点を持たないものに対して、解を持つことが分る。

付 録 B

従来の有限整定時間制御を多入力多出力系に拡張したものがLedenにより与えられている¹⁰⁾これはこれまでの一入力一出力系の場合のような、解析的な手法と異なり可制御空間に注目した手法であるが、多入力多出力系への一つの展望を与えるという意味で付録とすることにした。以下線形代数の記法を用いて簡単に紹介する。

システムを今までと同様次のように表す。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}u_n \quad (\text{B-1})$$

ここで $\mathbf{x}_n \in R^n = X$, $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$, $u_n \in R^{m \times 1}$ とする。 X の部分空間で、 i ステップで原点に移すことのできる空間を X_i で表す。即ち

$$X_i = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = -(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}u_0 + \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}u_1 + \dots + \mathbf{A}^{-i}\mathbf{B}u_{i-1}), (u_0, u_1, \dots, u_{i-1}) \} \quad (\text{B-2})$$

すると

$$X_{i+1} = \mathbf{A}^{-1}(X_i + \mathbf{B}) \quad (\text{B-3})$$

$$0 = X_0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X = R^n \quad (\text{B-4})$$

(B-4)式から、適当な ν に対して、 $X_{i+1} = X_i$, $i \geq \nu$ となる。この ν は可制御指数と呼ばれている。このとき

$$\text{rank} [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{-\nu}\mathbf{B}] = n \quad (\text{B-5})$$

以上から、任意の初期状態は、適当な入力系列により、 ν ステップで原点に移動できることを示している。

次にこのような入力系列を固定ゲインの状態フィードバックにより求める一つの方法を示す。(B-5)式により、 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{-\nu}\mathbf{B}$ には、一次独立な n 本の列が含まれる。ここではそれらを左から順番に選び出す。実はこの選び方には自由度があるのであるが、ここではこのような選び方をすることにする。この選ばれた列から次の行列 V を作る。

$$V = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{-\nu}\mathbf{B}^{(\nu)}] \quad (\text{B-6})$$

$\mathbf{B}^{(i)}$ は上記のように選ばれた $\mathbf{A}^{-i}\mathbf{B}$ の列からなる行列である。 B はfull-rankとしているので

$$\mathbf{B}^{(1)} = B \quad (\text{B-7})$$

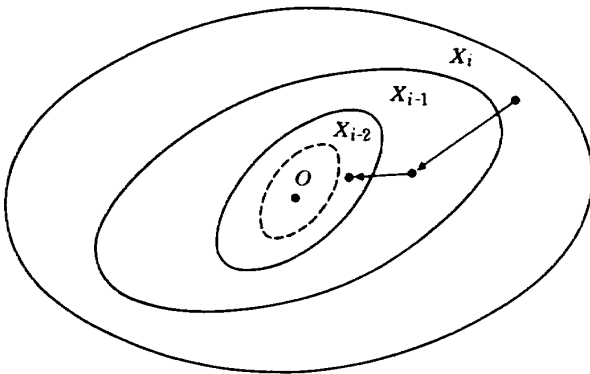


図 12. 状態空間内の状態遷移

さらに

$$\mathbf{B} = \text{im} B^{(1)} \supset \text{im} B^{(2)} \supset \dots \supset \text{im} B^{(\nu)} \quad (\text{B-8})$$

ここでフィードバック行列を F とすれば

$$F = [-I_m, O_{m \times (n-m)}] V^{-1} \quad (\text{B-9})$$

により求めればよい。 I_m は $m \times m$ の単位行列、 $O_{m \times (n-m)}$ は $m \times (n-m)$ の零行列である。

この物理的意味を少し考える。めざす状態フィードバックとは、 $\mathbf{x} \in X_i$ に状態フィードバックを施すと、 X_{i-1} に写像するものであろう。(図12) 即ち各 X_i は $A^{-1}B^{(1)}, A^{-2}B^{(2)}, \dots, A^{-i}B^{(i)}$ で張ることができるので、 X_i に含まれる任意のベクトルを \mathbf{x}_i と表せば

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^i A^{-j} B^{(j)} \mathbf{a}_j \quad \mathbf{a}_j : \text{適当な係数ベクトル}$$

$$\cap$$

$$X_i$$

$$A\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^i A^{-j+1} B^{(j)} \mathbf{a}_j \quad (\text{B-10})$$

$$= \underbrace{B^{(1)}}_{\mathbf{B}} \mathbf{a}_1 + \sum_{j=2}^i \underbrace{A^{-(j-1)} B^{(j)}}_{\cap X_{i-1}} \mathbf{a}_j \quad (\text{B-11})$$

$$BF\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^i BFA^{-j} B^{(j)} \mathbf{a}_j \quad (\text{B-12})$$

$$= BFA^{-1} B \mathbf{a}_1 + \sum_{j=2}^i BFA^{-j} B^{(j)} \mathbf{a}_j \quad (\text{B-13})$$

(B-11) と (B-13) より

$$(A+BF)\mathbf{x}_i = B \{ I_m + F A^{-1} B \} \mathbf{a}_1$$

$$+ \sum_{j=2}^i A^{-(j-1)} B^{(j)} \mathbf{a}_j$$

$$+ \sum_{j=2}^i BFA^{-j} B^{(j)} \mathbf{a}_j \quad (\text{B-14})$$

先述のように、状態フィードバックにより、 X_i の要素が X_{i-1} に写像されるためには、(B-14)式においては、第2項が X_{i-1} の要素になっているので、それ以外が消えればよい。そのためには

$$FA^{-1}B = -I_m \quad (\text{B-15})$$

$$FA^{-j}B^{(j)} = 0 \quad j \geq 2 \quad (\text{B-16})$$

この2式の関係のみたす F を求めればよいことが分る。これをまとめたのが (B-9) 式である。

ここで $B^{(i)}$ の選び方、即ち $[A^{-1}B, A^{-2}B, \dots, A^{-\nu}B]$ から n 本の線形独立なベクトルを選び出す方法には自由度があり、上記の方法もその一つなのである。よってこの自由度を利用して応答波形を変えることが可能になる。その一例が参考文献11) にあり、一般化固有ベクトルの指定により、応答波形を改善できると述べている。

航空宇宙技術研究所報告 823号

昭和59年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川2-27-12

Printed in Japan