

ISSN 0389-4010  
UDC 629.7.025  
534.1.12  
678.067.9

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-825

複合材平板翼の振動解析プログラムの検証

中道二郎・野口義男・石川隆司

1984年7月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 複合材平板翼の振動解析プログラムの検証\*

中 道 二 郎\*\*   野 口 義 男\*\*   石 川 隆 司\*\*

## Verification of a Computer Program for Vibration Analysis of Composite Wing Cores

Jiro NAKAMICHI,  
Yoshio NOGUCHI and Takashi ISHIKAWA

### ABSTRACT

A finite element program developed for vibration analysis of composite wing cores is examined here. Such cores are used in a research project on aeroelastic tailoring which is being conducted by the 1st Airframe Division. Formulation of the finite element analysis is presented first. The Hsieh-Clough-Tocher compatible triangular element is adopted in the analysis where the degree of freedom is 12. Based on the principle of minimum potential energy, a functional is made stationary by following the common procedure of the finite element method. Basic elastic moduli of composites are discussed in detail in order to confirm their reliability as input data for the present verification.

All moduli are determined by experimental procedures and theoretical bases of such experimentation are also given in this report. Composite wing cores are consolidated with unidirectional tapes into pure unidirectional plates of different fiber directions and multi-directional laminates. A flutter model is idealized as a composite plate with added lumped masses. Experimental results of vibration of the flutter model compare favorably with numerical predictions. The present finite element program, therefore, can be regarded as an effective tool for research projects on aeroelastic tailoring.

### 概 要

本研究所での昭和 57 年度および 58 年度における空力弾性テイリングの研究に使用された、複合材平板翼の振動解析プログラムの検証について報告する。

まず、複合材平板の有限要素法振動解析の定式化

について述べる。用いる要素は、Hsieh-Clough-Tocher の適合三角形要素であり、一要素の自由度は 12 である。最小ポテンシャルエネルギーの原理に基づき、有限要素法の通常の手法で汎関数を停留にする。さらに、解析に用いられる複合材弾性係数の妥当性・精度について検討・吟味する。用いられる弾性係数は、すべて試験で得られたものであり、試験の方法を述べ、さらにその理論的根拠を与え、有限要素法解析の為の入力データとして高精度である

---

\* 昭和59年 6 月 7 日受付

\*\* 機体第一部

ことを保証する。

検証に用いられた複合材平板は、一方向積層板および積層構成が $[0_4, (\pm 45^\circ)_2]$ の多層積層板から異なる角度で切り出された後退翼形平板、およびそれらを芯材とするフラッタ試験模型をモデル化した付加質量をもつ複合材平板である。すでに発表されている同一の平板翼、フラッタ試験模型の振動試験結果と計算結果を比較し、本解析プログラムが空力弾性テイラリングの為のソフトウェアとして有効であることを確かめた。

## 1. はじめに

近年複合材を用いた航空機の翼構造の静的あるいは動的弾性変形の特殊性を積極的に利用し、翼面上の静空力荷重の制御、航空機の運動性能の改善あるいは、フラッタおよびダイバージェンス等の空力弾性特性の改善を目的とする、いわゆる空力弾性テイラリングの技術が脚光を浴びている。<sup>1, 2, 3, 4, 5)</sup>当初この技術は前進翼の要求されるダイバージェンス速度を実現させるのに必要な構造重量を大幅に軽減する目的で提案されたものであるが、<sup>1, 2)</sup>近年の省エネルギー機開発の気運とも相俟って、前進翼のみならず後退翼に関しても総合的な翼構造設計の観点からの研究が、国内外で盛んである。

本研究に於ても、57年度より後退翼に対する空力弾性テイラリングの効果について研究を開始した。磯貝らは文献[6, 7]に於いて、カーボン/エポキシ多層積層材を素板とした数種類の繊維方向の後退翼を製作し、それらの遷音速域に於けるフラッタ試験を行なった。その結果、遷音速域に於いては、同一の平面形、同一翼型の後退翼に対して、ほぼ同一の質量比の条件で、曲げ1次の振動モードがWash-In傾向をもつ翼に於いて顕著にフラッタ速度の増加がみられることを確認した。一方、外崎らは、文献[8]に於てフラッタ模型の芯材を想定したカーボン/エポキシ一方向積層板および多層積層板の種々の繊維方向の試験片について綿密な振動試験を行ない、空力弾性テイラリングの立場から、後退翼の振動特性とフラッタ特性の関連を見極める為の貴重なデータを提供している。

本報告は、上記のふたつの研究過程に於いて、フ

ラッタ試験結果の数値的予測および振動試験に対する解析的補足の目的で著者らが用意した複合材平板の曲げおよび振動解析プログラムの検証と、そこに用いられた基礎弾性特性の吟味に関するものである。

複合材平板の曲げ・振動解析手法に関しては、通常の板のそれと本質的に異なる点はない。現在一般に普及している構造解析の為の大型汎用ソフトに於ては、殆んど例外なく異方性構造解析が可能であり、特に板曲げ・振動解析については、その計算モデル(有限要素モデル)は幾つか用意されており、使用者は、精度とコストの得失を考慮し計算モデルの選択が可能である。

しかしながら、この種の数値計算結果と実験結果をテイラリングの立場から系統的に比較した資料は極めて少ない。本報告では、外崎らが実験に用いた<sup>8)</sup>カーボン/エポキシ複合材平板の弾性定数を正確に測定し、それらを入力データとした本有限要素解析プログラムによる計算結果と、振動試験結果を比較し、その信頼性を確めた。

周知の如く、線形フラッタ解析に於ては、翼の固有振動モードの重ね合せでフラッタモードが近似される。従来、振動解析結果と実験結果に著しい差異が見られる場合、フラッタ方程式の一般化剛性マトリックスを実験によって得られた振動数を用いて補正される手法がしばしば採用されている。フラッタ解析の意味からも振動解析結果と実験結果との比較検討は、重要であると考えられる。

本報告に於ける解析モデルとしては、通常のモデルを用いる。つまり複合材多層積層板に対して Kirchhoff の薄板理論を適用<sup>13)</sup>し、有限要素定式化を行なう。板曲げ要素としては、Hsieh-Clough-Tocher の適合三角形要素(T-12C)を用いる。<sup>12)</sup>この要素は三角形の各辺中点に於ける未知量の取り扱いがやや煩雑であるが、自由度は一要素12個と手ごろであり、通常の平板の曲げおよび振動解析に対しては、比較的その精度が良好であることも確かめられている。有限要素法定式化についても通常の手法を踏襲する。つまり、動的弾性問題の全ポテンシャルエネルギーを前述のHCT要素を用いて離散化し、有限次元の汎関数を最小化ならしめる。<sup>9, 10, 11)</sup>

## 2. 最小にすべき汎関数

複合材平板曲げ振動解析の為に有限要素定式化は、通常の板の場合の定式化を拡張することにより容易に得られる。いずれの場合も、3次元弾性論に於ける全ポテンシャルエネルギー最小の原理に基づく<sup>9, 10)</sup>。

今、図1に示すM層から成る複合材多層積層板が、円振動数 $\omega$ で微小振動していると仮定する。板が比較的薄いと仮定しKirchhoffの理論を採用し、且つ各積層間の変位の適合性を保証する。この時、円振動数 $\omega$ で微小振動している多層積層板に対する全ポテンシャルエネルギー $\Pi$ は、各積層板の全ポテンシャルエネルギー $\Pi_m$ の総和として

$$\begin{aligned}\Pi &= \sum_{m=1}^M \Pi_m \\ \Pi_m &= \frac{1}{2} \int_{Z_i}^{Z_{i+1}} Z^2 \mathbf{W}^T \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{W} dV - \\ &\quad \frac{1}{2} \omega^2 \int_{Z_i}^{Z_{i+1}} \rho^{(m)} (u^2 + v^2 + w^2) dV\end{aligned}\quad (2-1)$$

で書き表わされる。ここに $dV = dxdydz$ であり( $Z_i, Z_{i+1}$ )は、 $m$ 番目の積層材が占める $Z$ 座標の上下限座標値。 $\rho^{(m)}, \mathbf{E}^{(m)}$ はそれぞれ $m$ 番目の積層材についての密度および

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(m)} \\ \sigma_y^{(m)} \\ \tau_{xy}^{(m)} \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{(m)} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}\quad (2-2)$$

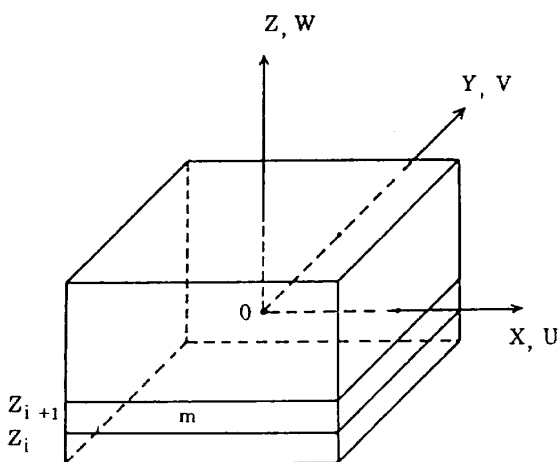


図1 多層積層材と座標系

の応力-歪関係式を与える弾性係数マトリックスである。又、ベクトル $\mathbf{W}$ は

$$\mathbf{W}^T = [W, x, W, y, W, xy] \quad (2-3)$$

を表わす。

(2-1)式の $\mathbf{E}^{(m)}$ および $\mathbf{W}$ は座標 $Z$ には無関係であること、およびKirchhoffの仮定のもとでの3軸方向の変位の関係を考慮して(2-1)式中の $Z$ 方向の積分を実行すると

$$\begin{aligned}\Pi_m &= \frac{1}{2} \int_S \mathbf{W}^T \mathbf{D}^{(m)} \mathbf{W} dxdy - \\ &\quad \frac{1}{2} \omega^2 \int_S [\rho_D^{(m)} (W_{,x}^2 + W_{,y}^2) + \rho_A W^2] dxdy\end{aligned}\quad (2-4)$$

となる。ここに

$$\mathbf{D}^{(m)} = \int_{Z_i}^{Z_{i+1}} Z^2 \mathbf{E}^{(m)} dz \quad (2-5)$$

$$\rho_D^{(m)} = \int_{Z_i}^{Z_{i+1}} Z^2 \rho^{(m)} dz \quad (2-6)$$

$$\rho_A = \int_{Z_i}^{Z_{i+1}} \rho^{(m)} dz \quad (2-7)$$

である。(2-5), (2-6), (2-7)式はそれぞれ $m$ 番目の積層材に対する、板曲げ剛性マトリックス、単位面積当りの中央面まわりの慣性モーメントおよび単位面積当りの質量である。

(2-4)式に於て、変分を受ける独立量は、板の $Z$ 軸方向の変位関数 $W(x, y)$ であり、付帯条件は幾何学的境界条件である。(2-4)式の停留条件より $M$ 層から成る多層積層板の曲げ振動に対する平衡方程式と力学的境界条件が得られることは、周知の通りである。

又、解析対象として、フラッタ模型等のコアとしての複合材平板を想定した場合、素板に対して、翼型装着等による付加質量を考慮すべきケースがしばしば生じる。本解析法では、翼面上の点 $(x_j, y_j, 0)$ に重心位置が $(x'_j, y'_j, z'_j)$ の集中質量 $m_j$ が付加された場合にはこれらの運動エネルギー

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \omega^2 m_j & [ \{ W(x_j, y_j) + (x'_j - x_j) W, x(x_j, y_j) \\ & + (y'_j - y_j) W, y(x_j, y_j) \}^2 + Z_j'^2 W, x^2(x_j, y_j) \end{aligned}$$

$$+ Z_j^{12} W, y(x_j, y_j)) \quad (2-7)$$

を(2-1)式の $\Pi$ に加算することにより,  $m_j$ の慣性力を考慮する。

### 3. HCT(Hsieh-Clough-Tocher) 適合3角形要素

有限要素法では, 周知の如く対象領域を有限個の3角形ないしは4角形要素に分割する。その後, 各要素内に於て, 節点未知パラメタが決まれば一意的に未知関数が定義されるような, 形状関数を仮定する。この場合一般的な考え方としては(i)要素内連続であること(ii)用いる汎関数の中に現われる未知関数の最高微係数が要素内で意味をもつこと(iii)剛体変位を表わし得ることの3条件を満足する形状関数を選ぶ。今の場合, 板曲げの問題の特殊性と得られる数値解の精度を考慮し, 上記の3条件に加え(iv)対象領域に於て未知関数が一階連続的の微分可能でかつ二階微分が区分的連続, であるようないわゆる適合要素を考える。

話を3角形要素に限ると上記の4条件を備える完全多項式としては, 最低5次式が必要となる。この場合, 未知節点パラメタの数は一要素内21個となり, その自由度の数が多くなり過ぎるきらいがある。そこで, 本解析では3角形要素をさらに小3角形に分割し, 要素全体では形状関数として区分的多項式を用いる方法を採用する。そのひとつであるHsieh-Clough-Tocherによる方法を<sup>12)</sup>紹介する。

さて, 図2に示す様にひとつの3角形要素重心点

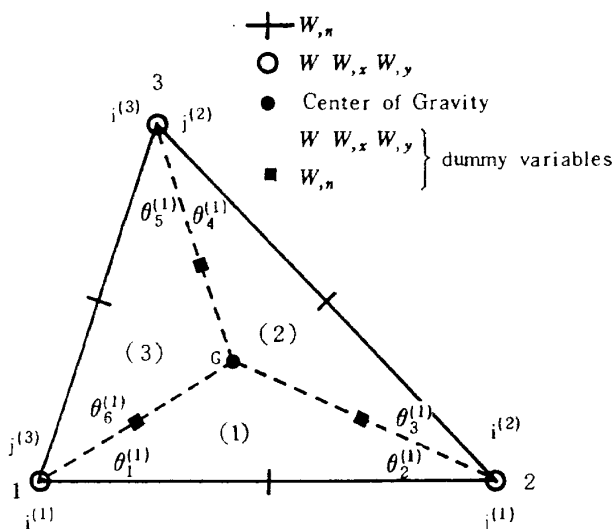


図2 HCT要素と小3角形

$G$ を用いてさらに小3角形要素に分割する。未知関数, 変位 $W$ は各小3角形要素内で3次多項式とする。全体3角形要素の自由度としては, 全体3角形要素の3頂点での $(W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}) \times 3$ の9個と3辺の中点での $(\frac{\partial W}{\partial n}) \times 3$ の3個計12個を用いる。これらの他の副次的に重心での $(W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y})$ の値を考える。これらの未知数を用いて小3角形内での変位 $W$ を3次多項式で近似した場合, 小3角形間の辺上での $\frac{\partial W}{\partial n}$ は一般には不連続である。この小3角形間の境界上での $\frac{\partial W}{\partial n}$ の連続性を保証する3つの条件式を導き, 先に副次的に導入された重心点での $(W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y})$ を消去することを考える。この結果, 全体3角形要素は, 12自由度適合3角形要素となる。

以上の手順で導いた小3角形要素(1) [図2]内での変位 $W$ に対する形状関数は以下のとおりである。

$$W(x, y) = \mathbf{K}^T \mathbf{W}_e \quad (3-1)$$

ここに

$$\mathbf{W}_e^T = [W_1, W_2, W_3, W_{x1}, W_{x2}, W_{x3}, W_{y1}, W_{y2}, W_{y3}, W_{na}, W_{nb}, W_{nc}]$$

$$\mathbf{K}^{(1)T}(x, y) = [K_1^{(1)}(x, y), K_2^{(1)}(x, y), K_3^{(1)}(x, y), K_4^{(1)}(x, y), K_5^{(1)}(x, y), K_6^{(1)}(x, y), K_7^{(1)}(x, y), K_8^{(1)}(x, y), K_9^{(1)}(x, y), K_{10}^{(1)}(x, y), K_{11}^{(1)}(x, y), K_{12}^{(1)}(x, y)]$$

$$\begin{aligned} K_1^{(1)} &= \left(1 + \frac{\gamma_{G3}}{\gamma_{31}} \cos \theta_5 + \frac{\gamma_{G2}}{\gamma_{12}} \cos \theta_2\right) L_i L_j^2 L_G^2 \\ &+ \frac{\gamma_{G2}}{\gamma_{12}} \cos \theta_2 L_j L_G^2 \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} \frac{\gamma_{G3}}{\gamma_{31}} \cos \theta_5 + \frac{2}{9} \frac{\gamma_{G2}}{\gamma_{12}} \cos \theta_2\right) L_G^3 \\ &+ L_i^3 + 3 L_i^2 L_j + 3 L_i^2 L_G \\ &+ 6 \frac{\gamma_{G2}}{\gamma_{12}} \cos \theta_2 L_i L_j L_G \\ K_2^{(1)} &= \left(1 + \frac{\gamma_{G1}}{\gamma_{12}} \cos \theta_1 + \frac{\gamma_{G3}}{\gamma_{23}} \cos \theta_4\right) L_j L_i^2 L_G^2 \\ &+ \frac{\gamma_{G1}}{\gamma_{12}} \cos \theta_1 L_i L_G^2 \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} \frac{\gamma_{G1}}{\gamma_{12}} \cos \theta_1 + \frac{2}{9} \frac{\gamma_{G3}}{\gamma_{23}} \cos \theta_4\right) L_G^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L_j^3 + 3 L_i L_j^2 + 3 L_i^2 L_G \\
& + 6 \frac{r_{G1}}{r_{12}} \cos \theta_1 L_i L_j L_G \\
K_3^{(1)} &= \frac{r_{G1}}{r_{31}} \cos \theta_6 + \frac{r_{G2}}{r_{23}} \cos \theta_3 \\
K_4^{(1)} &= \left( -\frac{1}{2} x_{1G} + \frac{1}{6} x_{ji} \frac{r_{G2}}{r_{12}} \cos \theta_2 \right. \\
& + \frac{1}{6} x_{31} \frac{r_{G3}}{r_{31}} \cos \theta_5 \left. \right) L_i L_G^2 \\
& + \left( \frac{1}{6} x_{21} \frac{r_{G2}}{r_{12}} \cos \theta_2 + \frac{1}{6} x_{2G} \right) L_j L_G^2 \\
& + \frac{1}{27} \left( -2 x_{1G} + x_{21} \frac{r_{G2}}{r_{12}} \cos \theta_2 \right. \\
& + x_{31} \frac{r_{G3}}{r_{31}} \cos \theta_5 \left. \right) L_G^3 + x_{21} L_i^2 L_j + x_{G1} L_i^2 L_G \\
& + \left( x_{21} \frac{r_{G2}}{r_{12}} \cos \theta_2 + x_{2G} \right) L_i L_j L_G \\
K_5^{(1)} &= \frac{1}{6} \left( x_{12} \frac{r_{G1}}{r_{12}} \cos \theta_1 + x_{1G} \right) L_i L_G^2 \\
& + \left( -\frac{1}{2} x_{2G} + \frac{1}{6} x_{12} \frac{r_{G1}}{r_{12}} \cos \theta_1 \right. \\
& + \frac{1}{6} x_{32} \frac{r_{G3}}{r_{23}} \cos \theta_4 \left. \right) L_j L_G^2 \\
& + \frac{1}{27} \left( -2 x_{2G} + x_{12} \frac{r_{G1}}{r_{12}} \cos \theta_1 \right. \\
& + x_{32} \frac{r_{G3}}{r_{23}} \cos \theta_4 \left. \right) L_G^3 - x_{21} L_i L_j^2 - x_{2G} L_j^2 L_G \\
& + \left( -x_{21} \frac{r_{G1}}{r_{12}} \cos \theta_1 + x_{1G} \right) L_i L_j L_G \\
K_6^{(1)} &= \frac{1}{6} \left( x_{13} \frac{r_{G1}}{r_{31}} \cos \theta_6 + x_{1G} \right) L_i L_G^2 \\
& + \frac{1}{27} \left( -2 x_{3G} + x_{23} \frac{r_{G2}}{r_{23}} \cos \theta_3 \right. \\
& + x_{13} \frac{r_{G1}}{r_{31}} \cos \theta_6 \left. \right) L_G^3 \\
& + \frac{1}{6} \left( x_{23} \frac{r_{G2}}{r_{23}} \cos \theta_3 + x_{2G} \right) L_j L_G^2 \\
K_7^{(1)} &= \left( -\frac{1}{2} y_{1G} + \frac{1}{6} y_{21} \frac{r_{G2}}{r_{12}} \cos \theta_2 \right. \\
& + \frac{1}{6} y_{31} \frac{r_{G3}}{r_{31}} \cos \theta_5 \left. \right) L_i L_G^2 \\
& + \frac{1}{6} \left( y_{21} \frac{r_{G2}}{r_{12}} \cos \theta_2 + y_{2G} \right) L_j L_G^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{27} \left( -2 y_{1G} + y_{21} \frac{r_{G2}}{r_{12}} \cos \theta_2 \right. \\
& + y_{31} \frac{r_{G3}}{r_{31}} \cos \theta_5 \left. \right) L_G^3 + y_{21} L_i^2 L_j + y_{G1} L_i^2 L_G \\
& + \left( y_{21} \frac{r_{G2}}{r_{12}} \cos \theta_2 + y_{2G} \right) L_i L_j L_G \\
K_8^{(1)} &= \frac{1}{6} \left( y_{12} \frac{r_{G1}}{r_{12}} \cos \theta_1 + y_{1G} \right) L_i L_G^2 \\
& + \left( -\frac{1}{2} y_{2G} + \frac{1}{6} y_{12} \frac{r_{G1}}{r_{12}} \cos \theta_1 \right. \\
& + \frac{1}{6} y_{32} \frac{r_{G3}}{r_{23}} \cos \theta_4 \left. \right) L_j L_G^2 \\
& + \frac{1}{27} \left( -2 y_{2G} + y_{12} \frac{r_{G1}}{r_{12}} \cos \theta_1 \right. \\
& + y_{32} \frac{r_{G3}}{r_{23}} \cos \theta_4 \left. \right) L_G^3 - y_{21} L_i L_j^2 - y_{2G} L_j^2 L_G \\
& + \left( -y_{21} \frac{r_{G1}}{r_{12}} \cos \theta_1 + y_{1G} \right) L_i L_j L_G \\
K_9^{(1)} &= \frac{1}{6} \left( y_{13} \frac{r_{G1}}{r_{31}} \cos \theta_6 + y_{1G} \right) L_i L_G^2 \\
& + \frac{1}{6} \left( y_{23} \frac{r_{G2}}{r_{23}} \cos \theta_3 + y_{2G} \right) L_j L_G^2 \\
& + \frac{1}{27} \left( -2 y_{3G} + y_{23} \frac{r_{G2}}{r_{23}} \cos \theta_3 \right. \\
& + y_{13} \frac{r_{G1}}{r_{31}} \cos \theta_6 \left. \right) L_G^3 \\
K_{10}^{(1)} &= -\frac{2}{3} \frac{\Delta}{r_{23}} L_j L_G^2 - \frac{4}{27} \frac{\Delta}{r_{23}} L_G^3 \\
K_{11}^{(1)} &= -\frac{2}{3} \frac{\Delta}{r_{31}} L_i L_G^2 - \frac{4}{27} \frac{\Delta}{r_{31}} L_G^3 \\
K_{12}^{(1)} &= -\frac{2}{3} \frac{\Delta}{r_{12}} L_i L_G^2 - \frac{2}{3} \frac{\Delta}{r_{12}} L_j L_G^2 - \frac{4}{27} \frac{\Delta}{r_{12}} L_i L_j L_G \\
& (3-2)
\end{aligned}$$

ここに

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_G & y_G \end{vmatrix}$$

$L_i, L_j, L_G$  は小3 角形要素内(1)での頂点  $i^{(1)}, j^{(1)}$ ,  $G$  に対応する面積座標\*であり,  $r_{12}, \dots, r_{G1}, \dots$ , 等

\* ここでの  $L_i, L_j, L_G$  は本来小3 角形(1)内での面積座標の意味で  $L_i^{(1)}, L_j^{(1)}, L_G^{(1)}$  と書くべき所, (1)の上添字は表示の複雑化をさける意味で省略した。

は

$$\begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ &\vdots \\ r_{G1} &= \sqrt{(x_G - x_1)^2 + (y_G - y_2)^2}, \\ &\vdots \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (3-3)$$

又,  $x_{ij}$ ,  $x_{iG}$  等は

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_i - x_j \\ x_{iG} &= x_i - x_G \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (3-4)$$

を示す。

小3角形(2)および(3)内では,  $K_1^1 \sim K_{12}^1$  の表示に於けるそれぞれの添字および  $\theta_1 \sim \theta_6$  を Cyclic に変えることにより, 変位  $W$  に対する形状関数が得られる。

さらに  $W(x, y)$  の  $x$  および  $y$  に関する微係数  $W, x$ ,  $W, y$ ,  $W, xx$ ,  $W, yy$ ,  $W, xy$  は

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_i^{(1)}}{\partial x} &= \frac{y_{2G}}{\Delta}, & \frac{\partial L_i^{(1)}}{\partial y} &= \frac{x_{2G}}{\Delta} \\ \frac{\partial L_j^{(1)}}{\partial x} &= \frac{y_{G1}}{\Delta}, & \frac{\partial L_j^{(1)}}{\partial y} &= \frac{x_{G1}}{\Delta} \\ \frac{\partial L_G^{(1)}}{\partial x} &= \frac{y_{12}}{\Delta}, & \frac{\partial L_G^{(1)}}{\partial y} &= \frac{x_{12}}{\Delta} \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (3-5)$$

の関係を用いて容易に計算し得る。後の便宜の目的で, 小3角形内での  $W$  の微係数を

$$\begin{aligned} W_{,x}^{(l)} &= K_{,x}^{(l)T} W_e, & W_{,y}^{(l)} &= K_{,y}^{(l)T} W_e \\ W_{,xx}^{(l)} &= K_{,xx}^{(l)T} W_e, & W_{,yy}^{(l)} &= K_{,yy}^{(l)T} W_e \\ W_{,xy}^{(l)} &= K_{,xy}^{(l)T} W_e, \end{aligned} \quad l = 1, 2, 3 \quad (3-6)$$

で表わすことにする。

#### 4. 有限要素定式化<sup>11, 12)</sup>

さて, 前節で得られた各要素内での変位  $W$  およびそれらの微係数を(2-1)式の汎関数に代入する。その結果, 全ポテンシャルエネルギーは自動的に離散化され

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^M \int_{S(l)} W_e^T [K_{,xx}^{(l)}, K_{,yy}^{(l)}, K_{,xy}^{(l)}] D^{(m)} \\ &\quad \begin{bmatrix} K_{,xx}^{(l)T} \\ K_{,yy}^{(l)T} \\ K_{,xy}^{(l)T} \end{bmatrix} W_e dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \omega^2 \int_{S(l)} [\rho_D^{(m)} W_e^T (K_x^{(l)} K_x^{(l)T} \\ &+ K_y^{(l)} K_y^{(l)T}) W_e + \rho_A^{(m)} W_e^T K^{(l)T} W_e] dx dy \end{aligned} \quad (4-1)$$

となる。ここに  $S(l)$  は3角形要素  $e$  に於ける小3角形要素  $(l)$  の面積を表わす。( $l = 1, 2, 3$ )

(4-1)式の  $dx dy$  についての積分を実行し

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^M [W_e^T P_{e,l}^{(m)} W_e \\ &- \omega^2 W_e^T Q_{e,l}^{(m)} W_e] \end{aligned} \quad (4-2)$$

で表わすことにすると, マトリックス  $P_{e,l}^{(m)}$ ,  $Q_{e,l}^{(m)}$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} P_{e,l}^{(m)} &= \int_{S(l)} [K_{,xx}^{(l)}, K_{,yy}^{(l)}, K_{,xy}^{(l)}] D^{(m)} \\ &\quad \begin{bmatrix} K_{,xx}^{(l)T} \\ K_{,yy}^{(l)T} \\ K_{,xy}^{(l)T} \end{bmatrix} dx dy \end{aligned} \quad (4-3)$$

$$\begin{aligned} Q_{e,l}^{(m)} &= \int_{S(l)} [\rho_D^{(m)} (K_{,x}^{(l)T} K_{,x}^{(l)} + K_{,y}^{(l)T} K_{,y}^{(l)}) \\ &+ \rho_A^{(m)} K^{(l)T} K^{(l)}] dx dy \end{aligned} \quad (4-4)$$

となる。

(4-2)式に於て変分を受ける独立量は  $W_e$  ( $e = 1, N$ ) であり付帯条件は, 幾何学的境界条件である。

(4-2)式の  $W_e$  ( $e = 1, N$ ) に関する第一変分をとり, 零とおくことにより, 結局

$$PW - \omega^2 QW = 0 \quad (4-5)$$

の形の離散化された振動方程式に帰着される。ここにマトリックス  $P$  および  $Q$  は, (4-3)および(4-4)式の小マトリックスを用いて組み立てられる, 全体の剛性マトリックスおよび質量マトリックスである。又  $W$  はすべての節点未知パラメタを並べて得られる変位ベクトルである。

#### 5. 計算結果

昌頭で述べた通り, 本解析プログラムは, 文献[6, 7]および[8]に関連して, フラッタ試験結果の数値的予測および振動試験に対する解析的補足の目的で用意されたものである。ここでは専ら, 文献[8]で取り扱われている一連の翼形複合材平板の振動試験結果および文献[7]で取り扱われている複合

材平板を芯材としたフラッタ翼模型のフラッタ予備試験としての振動試験結果を用いて、本解析プログラムで得られる数値解の検証を行なう。文献[6, 7, 8]で用いられた材料は共に、カーボン/エポキシ複合材である。

振動試験方法については、文献[8]に詳しいが、簡単に述べる。2台の加振器の可動部を連結した試験片搭載台に、試験片を水平にした状態で翼根を固定し、片持梁の状態で正弦波加振する。共振点は、振動数をスイープしながら、試験片の振幅の変化および上面に撒いた砂の挙動を参考にして求める。振動モードは、試験片上面の55の測定点の振幅を、静電容量型変位計により非接触で計測する。その際、変位計出力と加振器の可動部に取り付けられた加速度計出力とのリサージュ図形を監視して、隣接した2測定点間の位相の逆転からノードの位置を判定した。

#### (i) 翼形複合材平板の振動試験結果との比較

用意された試験片は、公称板厚3mmの一方向材母板から、繊維の方向と50%翼弦線の成す角 $\beta$ （図3参照）がそれぞれ $+5^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $-5^\circ$ になるように切り出された3種類、および、積層構成 $[0^\circ_4, (\pm 45^\circ)_2]_s$ で公称板厚4mm、2.7mm、2.4mmのそれぞれの母板から $0^\circ$ 方向の繊維と50%翼弦線の成す角 $\beta$ がそれぞれ、 $+5^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $-5^\circ$ となるように切り出された9種類、都合12種類である。文献[8]にならい、それぞれの試験片に呼称を与え表1にまとめた。試験片の寸法、平面形に関しては、図3に示す通りである。

計算に用いられたHCT3角形要素分割パターンは、図4の如くであり、全体として要素数56、自由度は215である。計算は、U1, U3, M1, M2, M3, M5およびM8の各ケースについてなされた。弾性定数に関する入力データは、次節以下の表6に示された一方向材の弾性係数であり、検討、吟味が加えられた結果である。

それぞれのケースの低次モード5つについて計算された振動数を試験結果と比較して、表2にまとめた。各試験片共に、板厚に関しては、公称値から多少の誤差が分布しているが、計算値はすべて一様に公称値厚としての結果である。M1, M2, M3については、各積層の方向が同一であり板厚のみが変化

表1 試験片の種類

h: 公称値

$\beta \backslash h$	3mm	4mm	2.7mm	2.4mm
$\beta = +5^\circ$	U1	M1	M2	M3
$\beta = 0^\circ$	U2	M6	M4	M7
$\beta = -5^\circ$	U3	M8	M5	M9

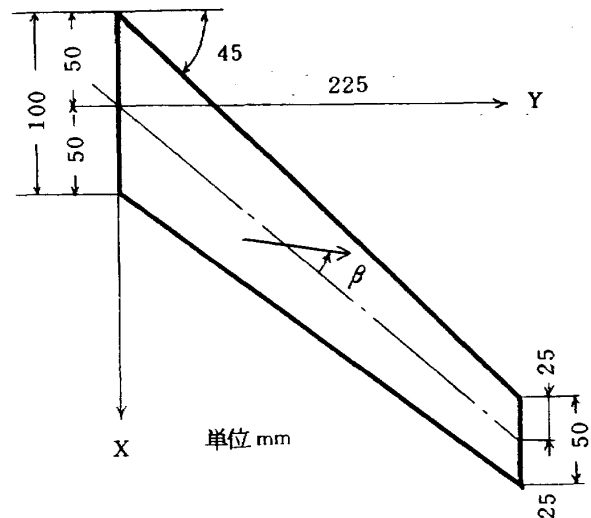


図3 翼形試験片と寸法

する。その為、計算で得られた振動数に関しては相似性があり、振動モードに関しては三者とも一致する。（図6参照）

図5に一方向材試験片U1, U3についての振動モードのノードルラインを、各振動数と共に示した。図中、計算で得られたノードルラインを実線で、実験で得られたそれらを破線で示してある。振動数については、( )内に実験値が示されている。同様に、図6に多層積層材試験片M2, M5の振動モードのノードルラインおよび振動数を示す。図5, 図6を見る限りに於ては一方向材、多層積層材共に、試験片の切り出し角 $\beta$ の $\pm 5^\circ$ の違いによるノードルラインの変化は顕著ではない。図7は切り出し角 $\beta$ の違いによる第1次モードの差異を見る目的でM8, M2の計算によって得られた振動モードの各スパン位置での変位を水平方向に投影したものである。M8( $\beta = -5^\circ$ )ではM2( $\beta = +5^\circ$ )に比べ後退翼特有の頭下げ振りモードの連成が顕著に軽減されている(Wash-outが軽減されている)ことが認められる。



表 2 振動数一覧 (a)

MODEL	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
U1	59.1 (57.6) <u>-3.38</u>	228.0 (221.4) <u>-2.89</u>	361.3 (355.5) <u>-1.60</u>	609.5 (596.3) <u>-2.17</u>	997.8 (976.6) <u>-2.12</u>
U3	52.7 (52.9) <u>0.38</u>	267.6 (269.3) <u>0.64</u>	287.0 (287.4) <u>0.14</u>	720.0 (721.5) <u>0.21</u>	776.3 (775.2) <u>-0.14</u>
M1	76.2 (74.1) <u>-2.76</u>	344.5 (327.7) <u>-4.88</u>	492.4 (458.1) <u>-6.97</u>	892.3 (848.9) <u>-4.86</u>	1350.0 (1237.6) <u>-8.33</u>
M2	51.5 (53.3) <u>3.50</u>	232.7 (245.7) <u>5.59</u>	332.8 (341.3) <u>2.55</u>	602.9 (641.0) <u>6.32</u>	912.6 (963.4) <u>5.57</u>
M3	45.7 (45.2) <u>-1.09</u>	206.9 (203.3) <u>-1.74</u>	295.9 (292.6) <u>-1.11</u>	536.0 (524.4) <u>-2.16</u>	811.4 (811.0) <u>-0.05</u>
M5	48.3 (46.8) <u>-3.11</u>	252.6 (246.2) <u>-2.53</u>	299.0 (290.9) <u>-2.71</u>	663.2 (643.9) <u>-2.91</u>	805.8 (774.0) <u>-3.95</u>

( ) Experiments ,      =  $(1 - \text{試験値/計算値}) \times 100.0$

Number of Elements 56  
Degrees of Freedom 215

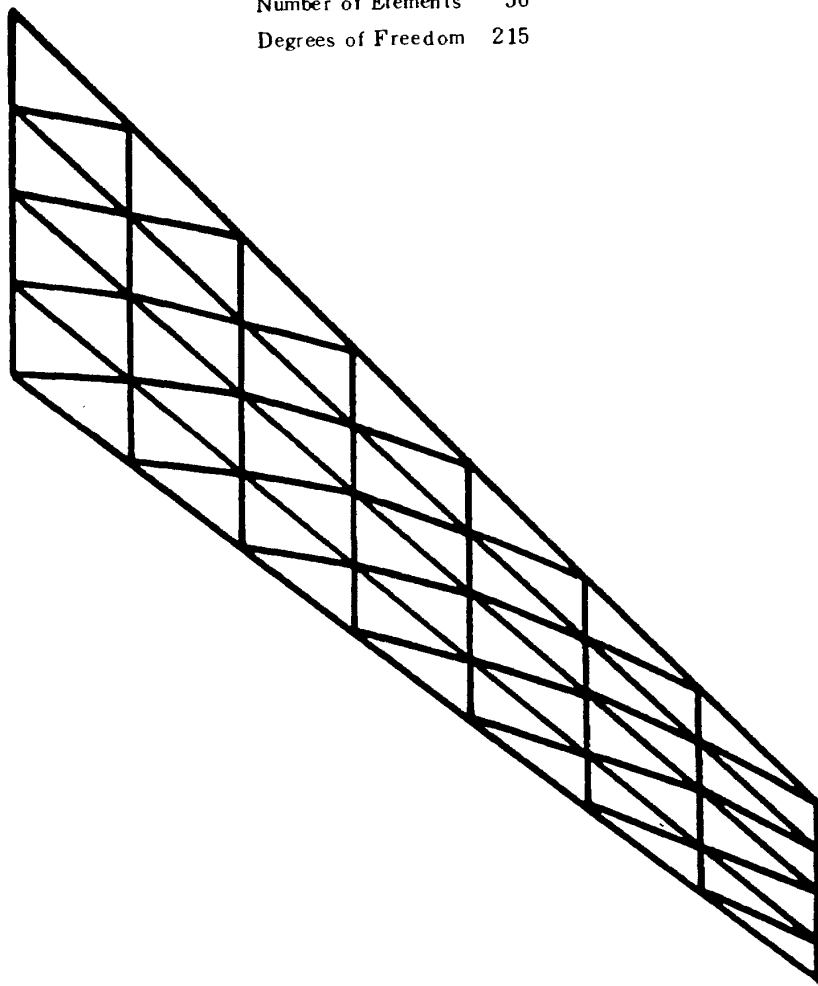


図 4 有限要素分割パターン

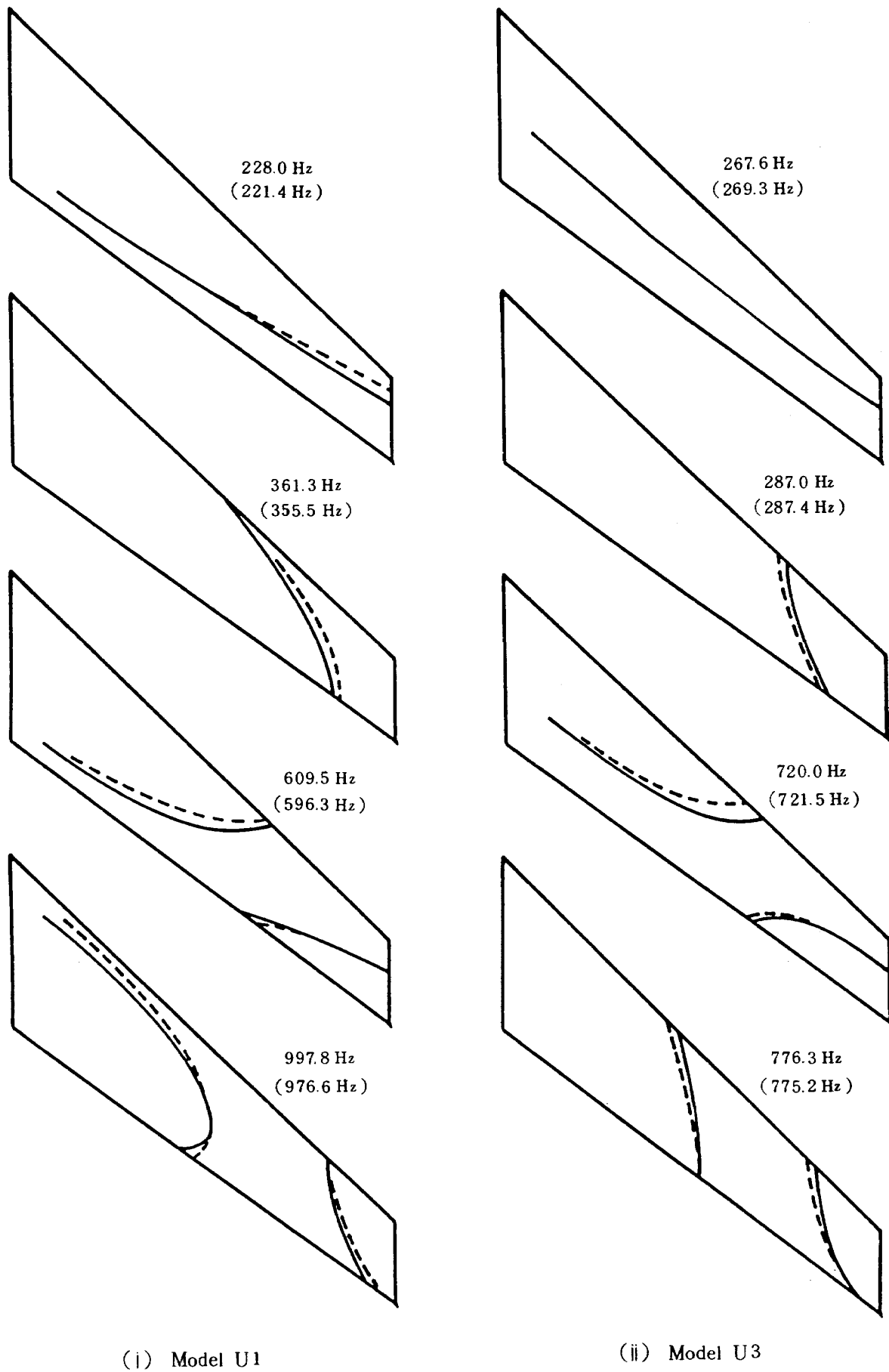


図5 一方向材試験片の振動モード

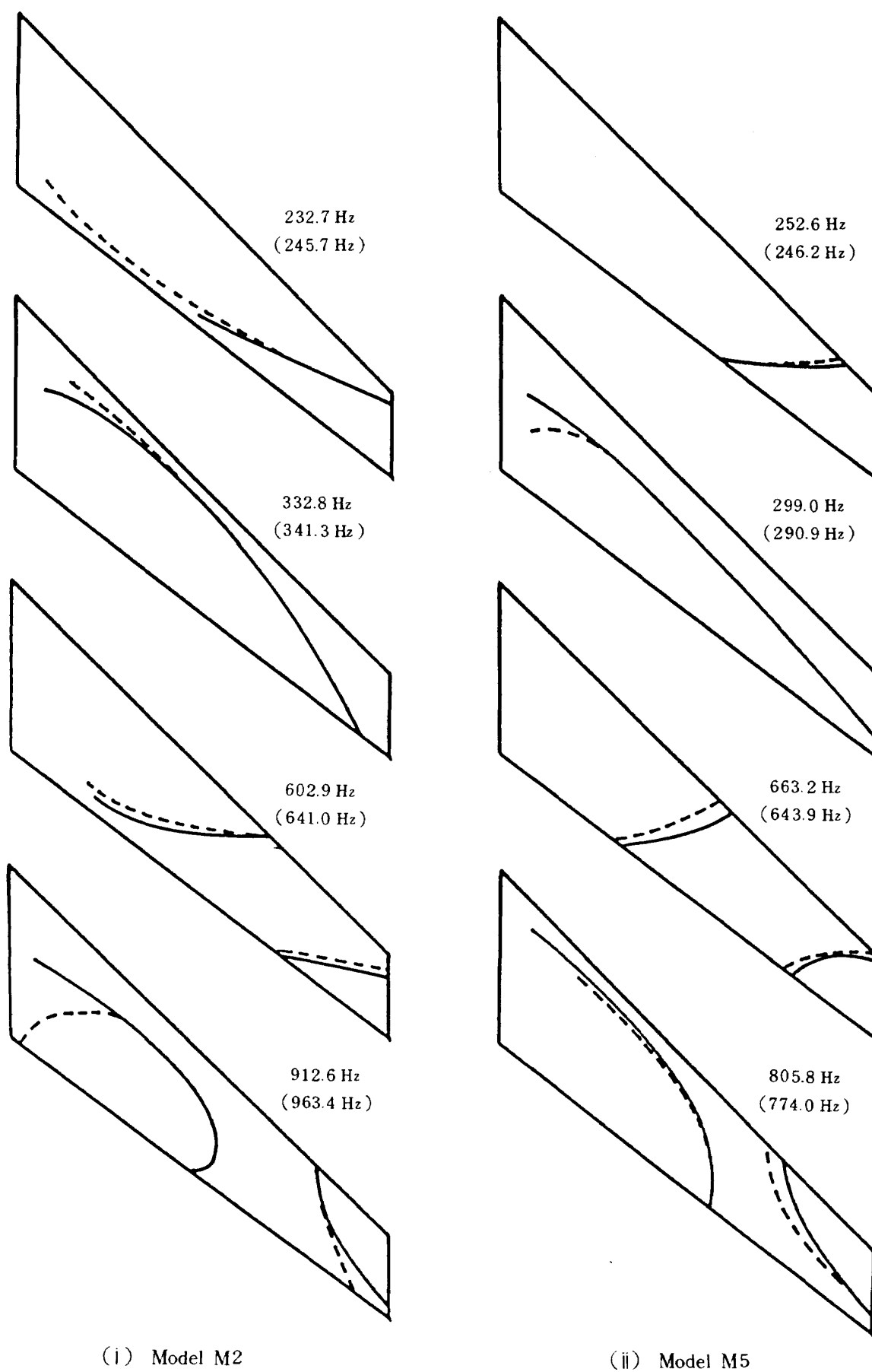
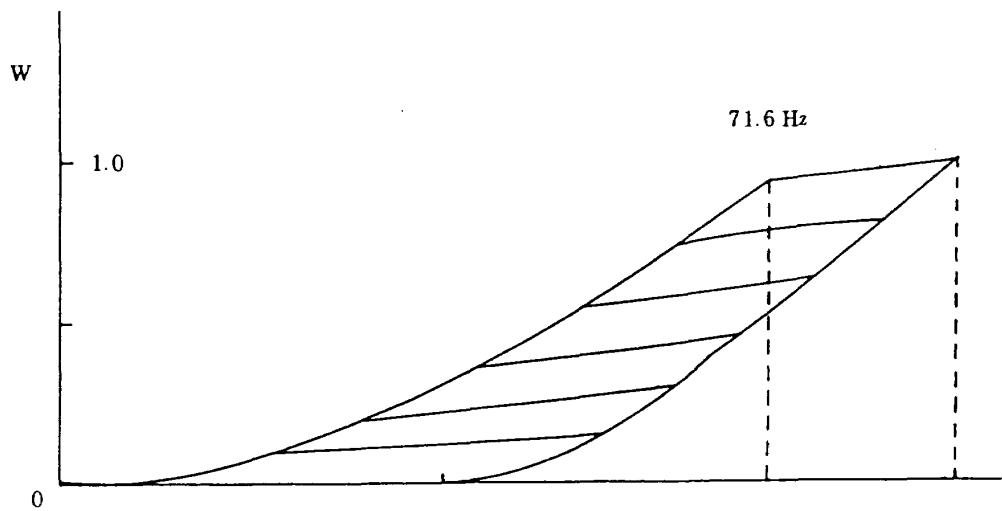
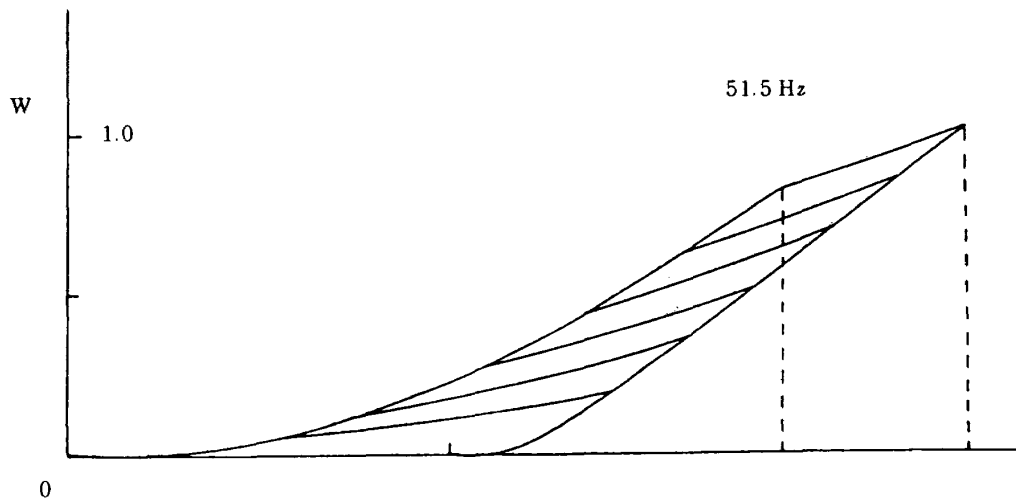


図 6 多層積層材試験片の振動モード



(i) First Bending Mode of Model M8



(ii) First Bending Mode of Model M2

 図7  $\beta = \pm 5^\circ$  の第1次振動モードの比較

## (ii) フラッタ翼模型の振動試験結果との比較

次に(i)で用いられた試験片に図8に示されるようなバルサ製の翼型を装着したフラッタ模型について解析した。装着した翼型は、NACA64A010であり、翼型を装着することにより、コード長は、各スパン一様に後縁側に20%延長される。このバルサの全体の付加分の質量は、公称板厚4mm、2.7mmおよび2.4mmの芯材に対してそれぞれ約14g、20gおよび24gとなった。ちなみに芯材自体の質量はそれぞれ121g、96g、および91gである。

計算では、バルサの付加質量を図9に示すように翼上下面および後縁の適切な位置に集中化し、本文中の汎関数(4-2)式にそれぞれの集中質量の慣性の影響(2-7)式を加え込む方法で計算した。又、

バルサの翼型スリーブに図9に示す如く、スリットを設けることにより、剛性に関しては、バルサの影響は、無視出来ると仮定した。

用意された模型は、それぞれM1、M2、M5およびM8を芯材とするもので(i)で定義された呼称の前にWを付けて呼ぶことにする。(表3)

表4に、それぞれの模型に対して計算された振動

表3 フラッタ模型の種類

h: 公称値

$\beta$ \ h	3mm	4mm	2.7mm	2.4mm
$\beta = +5^\circ$	...	WM1	WM2	...
$\beta = 0^\circ$	...	...	...	...
$\beta = -5^\circ$	...	WM8	WM5	...

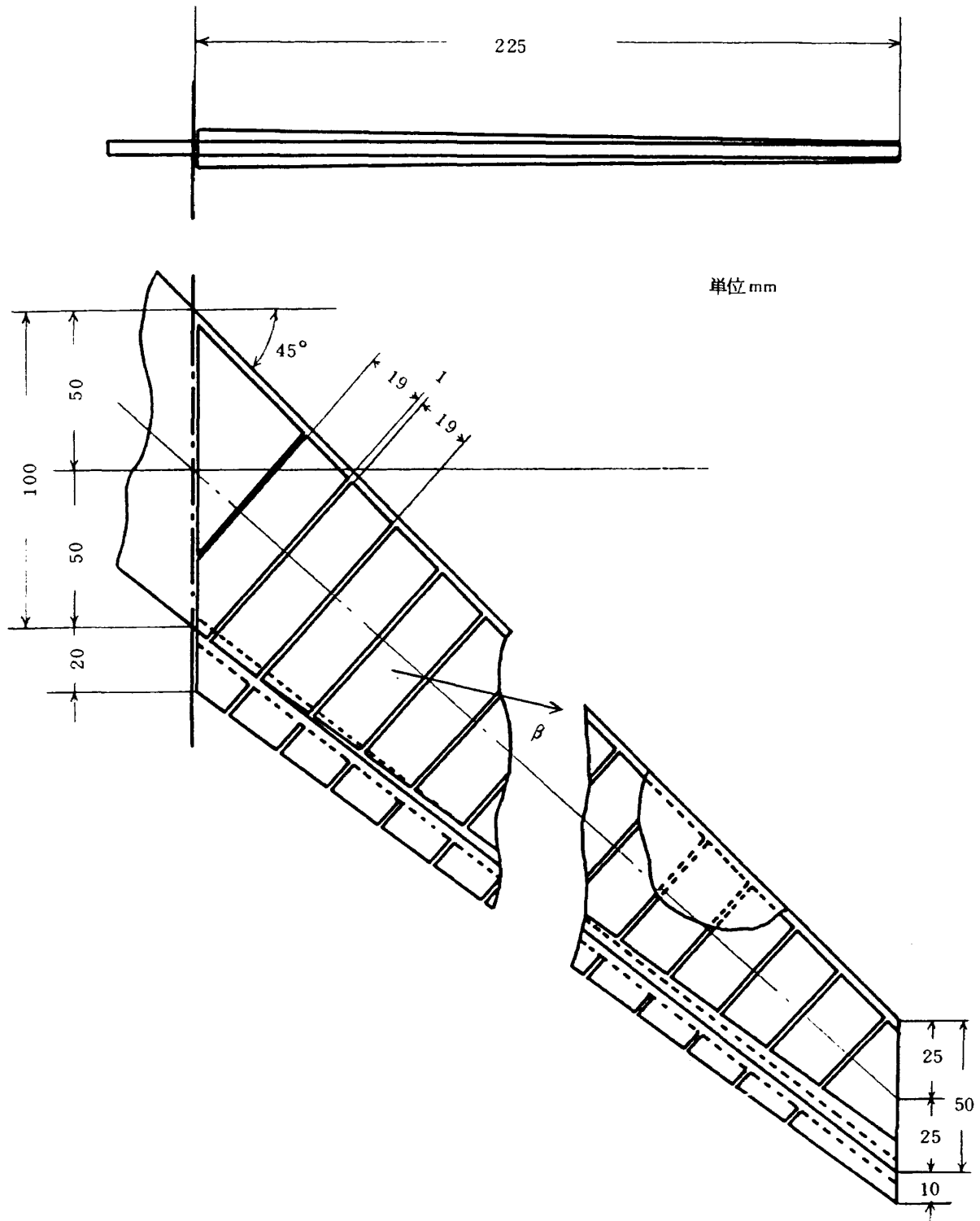


図 8 翼型フラッタ模型の構造と寸法

数を整理した。3次のモードまで試験結果と比較した。図10にWM1, WM2 図11にWM8, WM5の振動モードのノードラインと振動数を示した。先と全く同様計算で得られたノードラインを実線で、実験で得られたそれらを破線で示し、振動数については( )内に実験値が示されている。4 図中、後縁に沿う破線は、後縁側から20%コードを示すもので

あり、フラッタ模型において、破線より後方には芯材は存在しない。例えば、図6のM2, 図10のWM2 2に着目することにより、翼型スリーブの装着による振動モードおよび振動数の変化、あるいは、計算値と実験値の一致の度合等を知ることができる。当然のことながらバルサの付加質量の影響でWM2はM2の場合に比べ振動数はすべて低下する。計算値

表 4 振動数一覧 (b)

MODEL	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
WM1	74.7 (67.0) <u>-10.3</u>	334.5 (326.0) <u>-2.54</u>	477.6 (436.9) <u>-8.52</u>	856.0 ( ... )	1302.0 ( ... )
WM2	49.2 (51.1) <u>3.86</u>	218.5 (245.5) <u>12.4</u>	311.8 (338.3) <u>8.50</u>	551.4 ( ... )	845.5 ( ... )
WM5	46.2 (45.4) <u>-1.73</u>	235.0 (235.2) <u>0.09</u>	282.0 (322.9) <u>14.5</u>	600.1 ( ... )	750.6 ( ... )
WM8	69.9 (66.2) <u>-5.29</u>	360.4 (344.8) <u>-4.33</u>	428.8 (417.7) <u>-2.59</u>	933.5 ( ... )	1148.0 ( ... )

( ) Experiments , — = (1 - 試験値/計算値) × 100.0

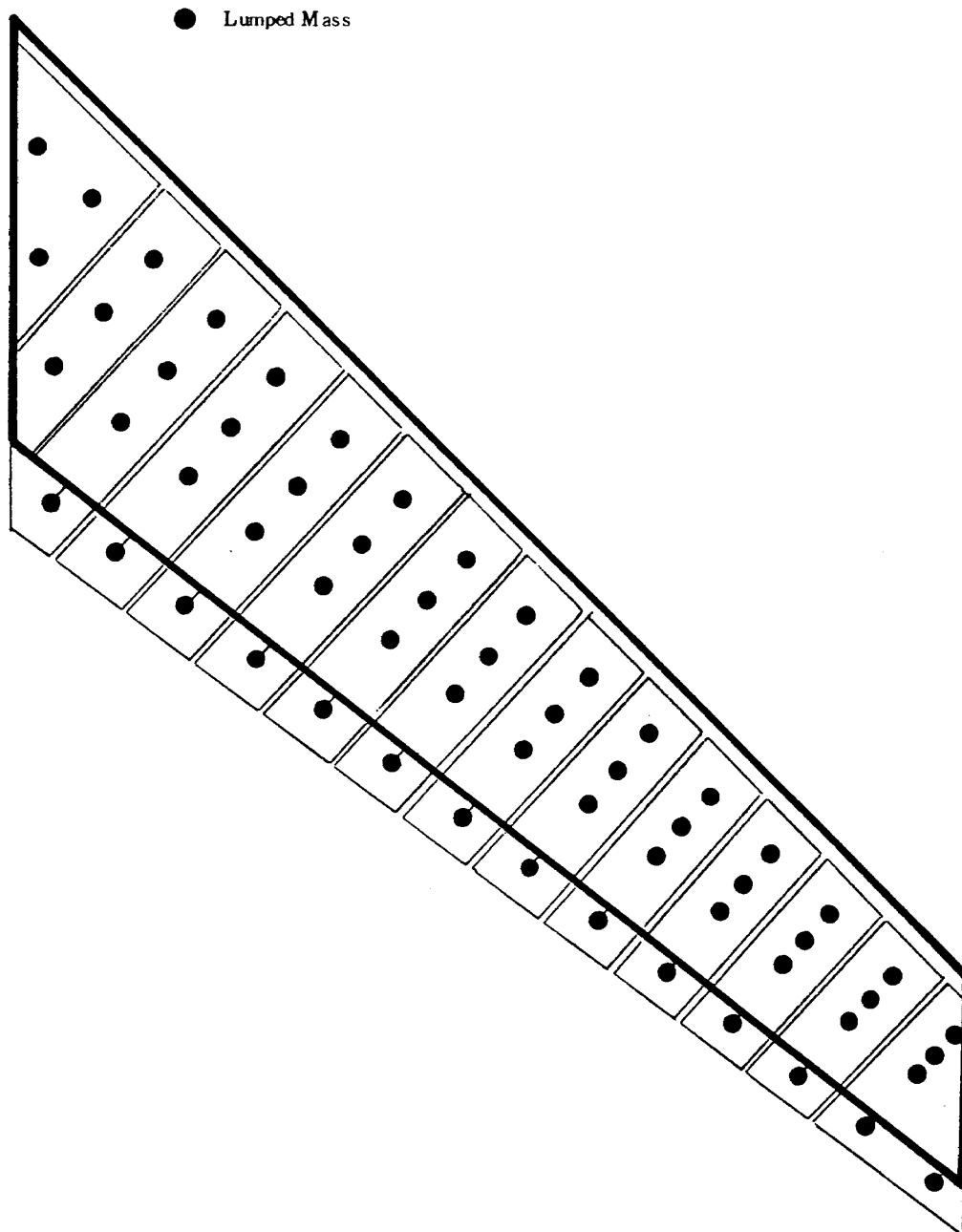


図 9 翼型フラッタ模型のモデル化

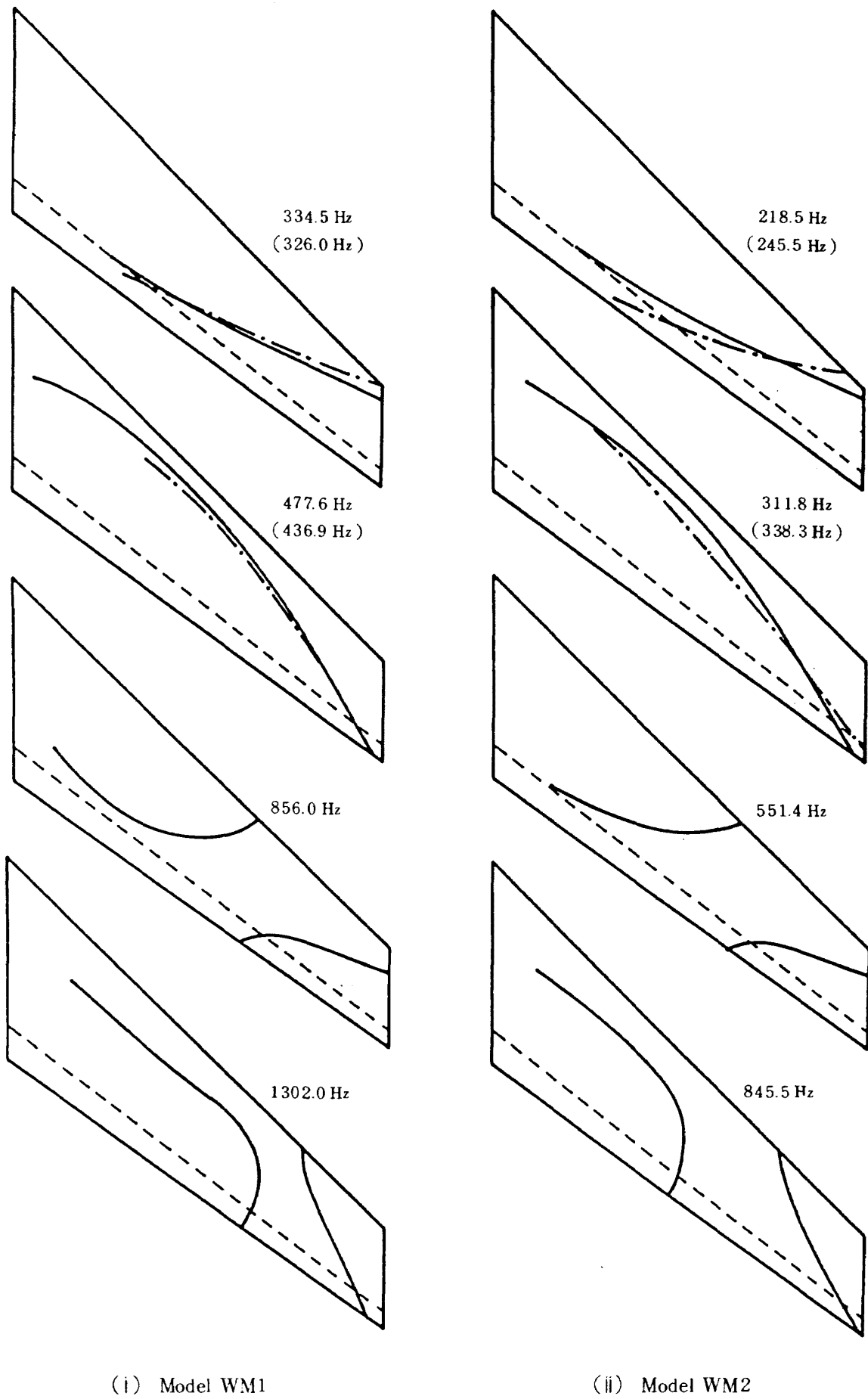


図 10 翼型フラッタ模型の振動モード (a)

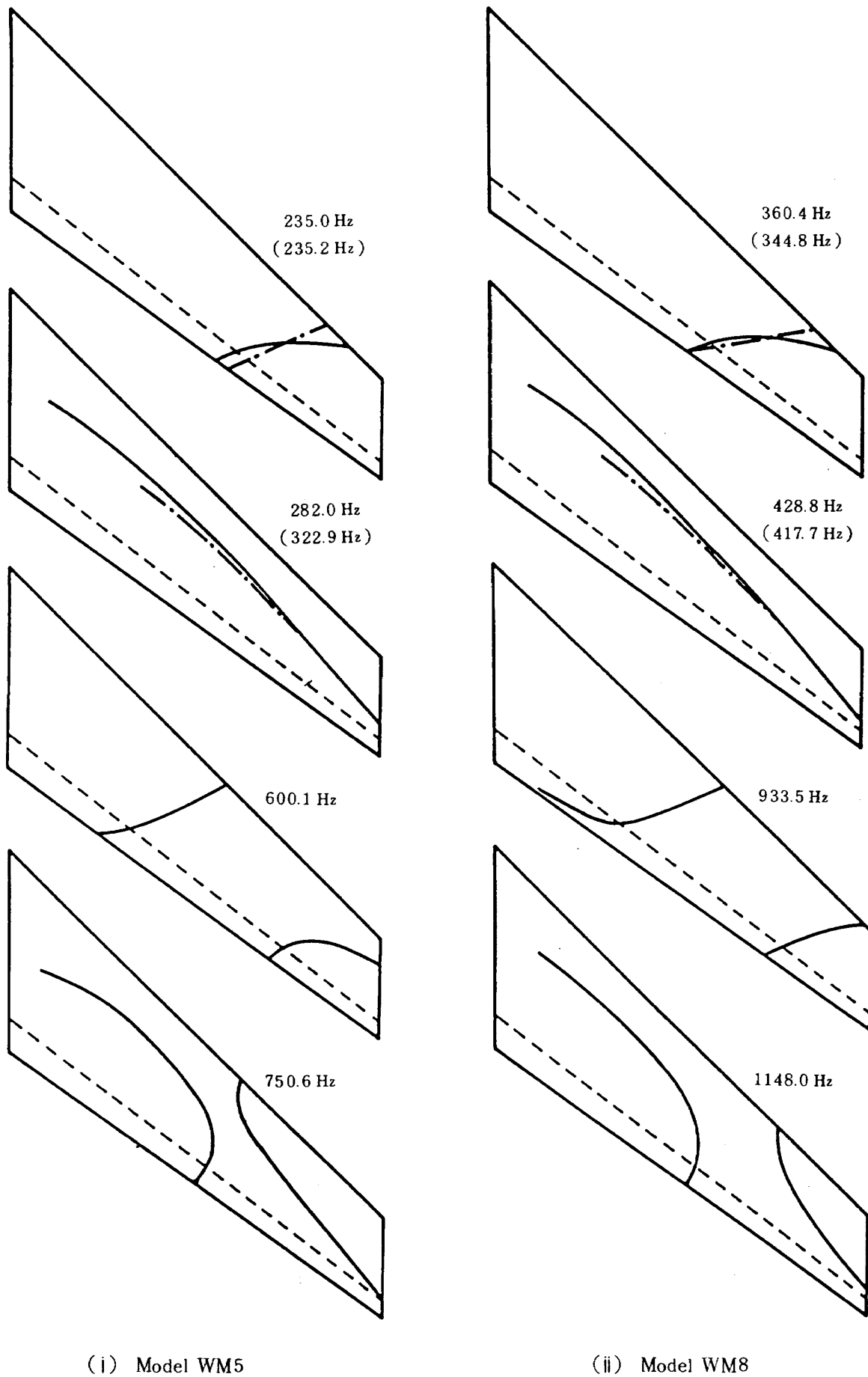


図 11 翼型フラッタ模型の振動モード (b)



と実験値の一致の程度については、M2 の場合の方がWM2に比べはるかに優れており、又WM1の場合がWM2に比べ優れている。これは、M2は付加質量なく、WM1はWM2に比べ翼全体の質量に対する付加質量の割合が小さいとと考えられる。このことから、計算精度は付加質量の算定、モデル化、あるいは、集中化する位置等にかなり左右されることが予想される。

## 6. カーボン／エポキシ複合材の弾性特性値

### 6.1 素材と成形方法

カーボン／エポキシ複合材には、カーボン繊維とエポキシ樹脂の組合せによる一方向プリプレグ（トレカ P305，東レ）を使用した。カーボン繊維の主な特性およびプリプレグの仕様を表5に示す。積層構成は、プリプレグの厚さが0.25mmの繊維方向を引揃えて12層積層した一方向材と、プリプレグの厚さが0.25mm、0.17mmおよび0.15mmのそれぞれを使用して、板厚中立面に対して対称となる $[0_4, (\pm 45^\circ)_2]_s$ <sup>注)</sup>の16層積層材が3種類である。

成形には、プリプレグを各積層後、ホットプレスにより次の手順で行った。まず、1.18MPaで加圧して、120℃で1時間の加熱硬化をさせた。その後、130℃で2時間の後硬化を行った。成形板の仕上がり寸法は、長さ700mm（繊維の0°方向）×幅500mmである。公称板厚は、一方向材が3.0mm、 $[0_4,$

注) 積層表示の添字の数字は積層数を表わしている。  
また添字のsは板厚中立面に対して対称積層であることを表わす。

表5 素材の特性と仕様

カーボン繊維	T 300
引張り弾性率	230 GPa
引張り強度	3430 MPa
伸度	1.3 %
密度	1.74g/cm <sup>3</sup>
プリプレグ	
樹脂	エポキシ樹脂 # 2500
硬化温度	120 ~ 130℃
厚さ	0.25 mm    0.17 mm    0.15 mm
重量	390 g/m <sup>2</sup> 273 g/m <sup>2</sup> 250 g/m <sup>2</sup>
繊維含有率	64W <sub>f</sub> %    64W <sub>f</sub> %    60W <sub>f</sub> %

(カタログ値)

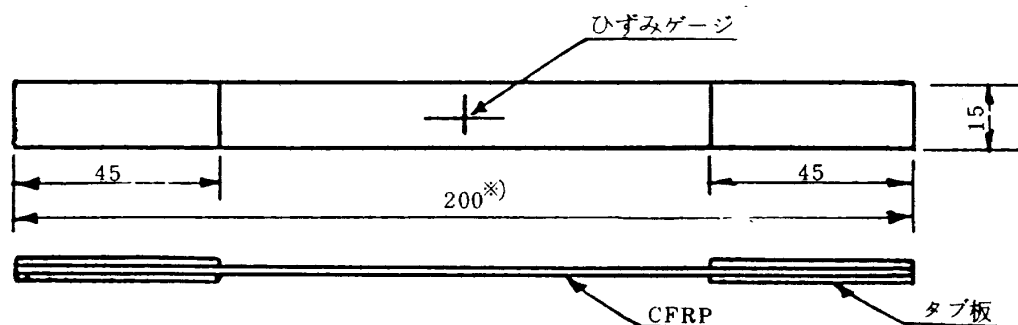
$(\pm 45^\circ)_2]_s$  材は、プリプレグ厚さによりそれぞれ4.0mm、2.7mmおよび2.4mmである。なお、繊維体積含有率( $V_f$ )は、59～62%にある。ただし、 $[0_4, (\pm 45^\circ)_2]_s$ 材で板厚2.4mmのものは $V_f$ が56～57%である。

4種類の積層構成およびこれらから試験片を切り出す主軸方向により、表1に示す試験片の呼び記号を以下でも用いる。

### 6.2 弾性係数の測定

U2の一方向材とM6、M4、M7の $[0_4, (\pm 45^\circ)_2]_s$ 材について、引張り試験を行い、基礎的弾性特性値を求める。

試験は、温度23～25℃、相対湿度64～66%の恒温室内で行った。試験片形状は、図12に示すような長さが200mmで幅が15mmの短冊形である。



※) U2の45°方向については長さを230mmとした。

図12 試験片形状

両端部には、アルミニウム合金のタブ補強を行い、引張り用つかみ具のスリップなどの不具合を生じないようにした。試験片中央部の両面には、ゲージ長5mmの直交2軸箔ひずみゲージを貼付してひずみ測定を行った。最大ひずみ量が0.05%程度までの引張り荷重を万能試験機により加え、応力とひずみの関係を求めた。その直線部分を用いて、引張りによる弾性率を次式により算出した。

$$E_x = \Delta\sigma_x / \Delta\epsilon_x \quad (6-1)$$

ここで、 $E_x$ は弾性率、 $\Delta\sigma_x$ は直線上の2点間の応力の差、 $\Delta\epsilon_x$ は同じ2点間の縦方向ひずみの差である。

ポアソン比は、直交する両軸方向のひずみ関係による次式で算出した。

$$\nu_x = |\epsilon_y / \epsilon_x| \quad (6-2)$$

ここで、 $\nu_x$ はポアソン比、 $\epsilon_y$ は横方向ひずみ、 $\epsilon_x$ は縦方向ひずみである。

U2のせん断弾性率は、繊維に45°方向での弾性率とポアソン比による次式で算出した。

$$G_{LT} = E_{45} / \{2(1 + \nu_{45})\} \quad (6-3)$$

ここで、 $G_{LT}$ はせん断弾性率、 $E_{45}$ は45°方向の弾性率、 $\nu_{45}$ は45°方向のポアソン比である。

基本的なU2は、繊維方向、繊維に垂直方向および繊維に45°方向についての弾性率とポアソン比を、さらに(6-3)式によるせん断弾性率の算出を各5本の試験片について行った。また、M6、M4およびM7は、繊維の0°方向について弾性率とポアソン比の測定を各3本の試験片について行った。これらの試験結果と平均値 $\bar{X}$ および変動率C.V.(%)を表6、表7に示す。

## 7. 異方性材の弾性特性測定に際する留意事項

カーボン/エポキシ複合材に代表される異方性複合材料の、しかも薄い板の材料試験には、通常の等方性材料とは異った留意点が幾つか存在する。本節では、それらについて簡単な解説を与える。前節の実験には、このような事項が考慮されている。

表6 一方向材の弾性特性値 ( $V_f = 59 \sim 61\%$ )

No.	U2-0		U2-90		U2-45		
	$E_L (GPa)$	$\nu_L$	$E_T (GPa)$	$\nu_T$	$E_{45} (GPa)$	$\nu_{45}$	$G_{LT} (GPa)$
1	114	0.342	8.63	0.0236	11.4	0.308	4.37
2	117	0.338	8.82	0.0257	11.5	0.327	4.33
3	114	0.361	8.56	0.0237	11.6	0.328	4.36
4	112	0.333	8.78	0.0272	11.9	0.325	4.48
5	110	0.355	8.66	0.0203	11.5	0.329	4.34
$\bar{X}$	114	0.346	8.69	0.0241	11.6	0.323	4.38
C.V. (%)	2.3	3.4	1.2	11	1.7	2.7	1.4

表7  $[0^\circ, (45^\circ)_2]_S$ 材の弾性特性値

No.	M6 ( $V_f = 59 \sim 60\%$ )		M4 ( $V_f = 60 \sim 62\%$ )		M7 ( $V_f = 56 \sim 57\%$ )	
	$E_x (GPa)$	$\nu_x$	$E_x (GPa)$	$\nu_x$	$E_x (GPa)$	$\nu_x$
1	61.9	0.695	65.1	0.698	59.3	0.667
2	66.2	0.680	65.9	0.689	59.8	0.666
3	65.1	0.689	62.0	0.720	59.9	0.675
$\bar{X}$	64.4	0.688	64.3	0.702	59.7	0.669
C.V. (%)	3.5	1.1	3.2	2.3	0.54	0.74

まず第一に留意すべきは、試験片に軽い“そり”が入っていることが多く、引張によって、曲げを生じ、歪ゲージにより測定される弾性係数に大きく影響する。これを取除くために、必ず、試験片の厚さ方向の中央平面について鏡像の位置になるような表裏の場所にゲージを貼付せねばならない。

第2は、ゲージそれ自体による補強効果である。この存在は、文献15によって既に明らかであり、大略、ゲージそれ自体の弾性係数と断面積の積と、試験片の弾性係数と断面積の積との比によって補正係数が決定される。しかし、前者が不明のため、その後、定量的に議論されてないのが現状である。著者の一人のカーボン/エポキシ複合材に対する実験<sup>16)</sup>では、幅12.5mmの試験片で、板厚が0.5mm以下では、データは全く信用できないが、1.5mmを越せばゲージのデータは信頼性が高くなることが経験的に示されている。もちろん、この較正は非接触歪み測定システムを用いて行なったものである。本報告に於ては、最も薄いもので  $h = 2.6\text{mm}$  であり、最も弾性係数の低い U2-90 では  $h = 3.1\text{mm}$  となっているので、この効果は、現れていないものと考えられる。

第3は、ゲージ貼付に際し、その方向が人的要因により、測定方向から偏差することの影響がある。これは、例えば、 $0^\circ$  方向の弾性率  $E_L$  を測定する場合、 $\theta$  だけ誤差があり、それを測定したものとすると、 $E(\theta)$  は次式で評価<sup>13)</sup>される。

$$\frac{1}{E(\theta)} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L} + \frac{\sin^4 \theta}{E_T} + \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_L}{E_L} \right) \times \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (7-1)$$

角度誤差が  $3^\circ$  になると、カーボン/エポキシ方向材の例では、表6の結果を用いて0.5%の  $E_L$  の低下が生ずる。本実験では、貼付作業は注意深く行なわれており、この程度以上の角度誤差はなく、この影響は認められなかった。

上記までの注意を払えば、異方性材の主軸方向の弾性係数  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_L$ ,  $\nu_T$  (ただしこのうち一つは従属) は精度良く測定できる。しかし、二次元直交異方性材の残った一つの独立な弾性定数  $G_{LT}$  は未だ求められない。これは、理想的には文献17のようなねじり試験を行うべきであるが、薄板でこれを行う

と、St. Venant のねじりの仮定からの差異が甚しく、適当と考えにくい。そこで、薄板の場合には、 $45^\circ$  方向の引張試験を行なって、以下に示す最初の方法で  $G_{LT}$  を算出するのが得策である。

その最初の方法とは、ポアソン比の off-axis 特性を表わす次式、

$$\nu(\theta) = \left[ \frac{\nu_L}{E_L} + \left\{ \frac{1}{G_L} - \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{2\nu_L}{E_L} \right) \right\} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right] E(\theta) \quad (7-2)$$

(ここで  $E(\theta)$  は(7-1)式から求められる)

に  $\theta = 45^\circ$  を代入して若干の変形を行なって得られる式(前述の6-3式と同一)

$$G_{LT} = \frac{E_{45}}{2(1 + \nu_{45})} \quad (7-3)$$

を利用する方法である。ところが、異方性弾性学の標準的な教科書、例えば文献13, 18 などにはこの方法は示してなく、代わりに、やはり(7-1)式から得られる次式

$$G_{LT} = 1 / \left( \frac{4}{E_{45}} + \frac{2\nu_L - 1}{E_L} - \frac{1}{E_T} \right) \quad (7-4)$$

から  $G_{LT}$  を求める方法が述べられている。しかし、前者の方法が、一つの試験片から得られる  $E_{45}$ ,  $\nu_{45}$  の実測値から  $G_{LT}$  を計算できるのに対し、後者の方法は少なくとも3種類の試験片から得られる  $E_{45}$ ,  $E_L$ ,  $\nu_L$ ,  $E_T$  の実測値の情報を必要とするので、 $\nu_{45}$  が零に近くなく精度良く計測される限りは、前者を利用すべきである。幸い、本例のカーボン/エポキシ方向材では  $\nu_{45}$  は0.3程度であり、この後に述べる留意事項に配慮すれば、(7-3)式を十分な精度を以て、 $G_{LT}$  の計算に用いることができる。ところで、(7-3)式は形式的には等方性の関係式と似ているが、 $45^\circ$  方向のみになり立つ特殊な関係式であることに注意する必要がある。

上記のように、弾性主軸方向以外の試験(off-axis試験と呼称)を行なう場合に考慮すべき点がいくつかあるので、ここにそれを述べる。まず、このような off-axis 状態での構成方程式をコンプライアンス形で書くと、

$$\begin{Bmatrix} \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \\ \epsilon'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} \quad (7-5)$$

(ここで歪みは工学的歪みを用いている)となる。  
ここで注意すべきは, on-axis では零であった,  
16, 26 の添字の付いた項が非零のことである。こ  
れを具体的に記述すると,

$$S'_{16} = - \left( \frac{\cos^2 \theta}{E_L} - \frac{\sin^2 \theta}{E_T} \right) \sin 2\theta \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_L}{E_L} \right) \cos 2\theta \sin 2\theta \quad (7-6)$$

$$S'_{26} = - \left( \frac{\sin^2 \theta}{E_L} - \frac{\cos^2 \theta}{E_T} \right) \sin 2\theta \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_L}{E_L} \right) \cos 2\theta \sin 2\theta \quad (7-7)$$

となる。 $E_L \approx E_T$ であるから  $\theta = 0^\circ, 90^\circ$  以外はこ  
れが消えないことは明白である。このような試験片  
に引張試験で  $\sigma'_1$  のみを生じさせると, (7-5) 式  
から

$$\epsilon'_6 = S'_{16} \sigma'_1 \quad (7-8)$$

だけのせん断ひずみが生ずる。これを模式的に示し  
た<sup>19)</sup>のが図13である。図13(a)は, 試験片が無  
限に長い場合は, 中央部でこのような一様せん断歪  
状態が実現されることを示している。しかし, 実際  
は, 試験片は有限長であり, 端末の回転は自由で  
はない。この時は, 誇張して書けば図13(b)のよ  
うな変形が生ずる。このため, 試験中央部の歪みゲ  
ージから測定された弾性係数  $E^+(\theta)$  が, 真の弾性係  
数  $E^*(\theta)$  と異なってくる。この平面問題を, 現実  
的な境界条件で解いた解が, 文献19に示されてお  
り, それによれば,  $E^+(\theta)$  と  $E^*(\theta)$  の関係は次式で与  
えられる。

$$E^+(\theta) = \frac{E^*(\theta)}{1 - \eta} \quad \text{ここに} \\ \eta = \frac{6S'_{16}{}^2}{S'_{11} \left\{ 6S'_{66} + S'_{11} \left( \frac{l}{b} \right)^2 \right\}} \quad (7-9)$$

上記で,  $S'_{11} (= 1/E(\theta))$  は (7-1) 式,  $S'_{16}$  は  
(7-6) 式で与えられ, 他はここでは特に示さない。  
文献13, 18等を参照されたい。 $l/b$ は試験片の細  
長比( $b$ は半幅)である。 $l$ としてはタブ部を除い

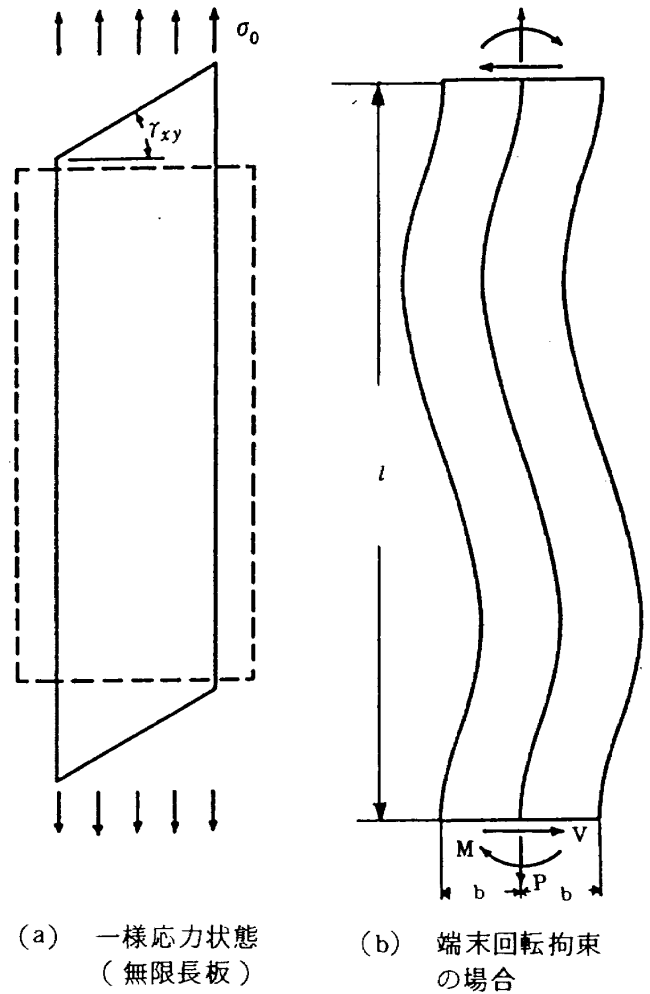


図13 直交異方性平板の off-axis 試験に  
於ける変形の模式図<sup>19)</sup>

た試験片長さをとる。カーボン/エポキシ方向材  
の弾性率を基に計算すると,  $\theta = 45^\circ$  ではこの修正  
係数  $\eta$  は, 次式の値の程度となる。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 0.00124 \quad \text{at } l/b = 40 \\ \eta &= 0.00552 \quad \text{at } l/b = 20 \end{aligned} \right\} \quad (7-10)$$

つまり,  $l/b = 20$  で, ほぼ真の値より 0.5%, み  
かけの方が大きくなることがわかる。第6節の図  
12によれば,  $45^\circ$  方向試験片については,  $l/b$   
 $\approx 19$  と計算されるから, 約 0.6% の差となり, こ  
れは他の実験誤差に隠れるものと期待される。以上  
のような注意を払って off-axis の引張試験を行な  
えば, これによって充分精度ある  $G_{LT}$  を求めること  
ができる。

これらが, 6節の実験の実施に際して払われた注  
意事項と, その理論的根拠である。

## 8. 弾性係数の測定結果の検討・吟味

第6節に記述された、直交異方性材としてのカーボン/エポキシ一方向材の弾性係数には、本来成立すべき関係が種々存在し、これらの成立の程度を確認することにより、実験が正しく行なわれたか否かを部分的に判定することができる。また、一方向材の結果と、積層材の間に成り立つべき関係をチェックすることによって、第2節で述べられた理論の重要な基礎仮定の一つである積層板理論を、少なくとも引張材料試験に適用することの可否を論じられる。より細く言えば、試験片側縁で生じている自由縁における変位・応力の三次元性が、試験片の平均弾性係数に及ぼす影響の程度が判明する。

まず、一方向材の弾性係数で成立すべき関係の第一は、次式に示す相反定理である。これを用いた  $\nu_T$ ,

$$\nu_L/E_L = \nu_T/E_T \quad (8-1)$$

の計算値は  $\nu_T = 0.0264$ 、実験値の平均は  $0.0241$  であり、小さなポアソン比の測定値には誤差が入りやすいこと（表6から  $C.V. = 11\%$ ）を考えると、これは十分に納得すべき結果と考えられる。もう一つの関係として、(7-1)、(7-2)、(7-4)式を用いて  $E_{45}$ ,  $\nu_{45}$  について吟味することができる。これによれば、 $E_{45}$ ,  $\nu_{45}$  の計算値は、それぞれ  $11.6 \text{ GP}_a$ ,  $0.319$  で、それぞれの実験値、 $11.6 \text{ GP}_a$ ,  $0.323$  とよい一致を示している。もちろん、この前提条件として、(7-3)式を用いて  $G_{LT}$  を計算し、これを基礎値としていることに注意すべきである。

第2のチェックポイント、即ち、積層材と一方向材の弾性係数の照合については、以下のように取り扱う。まず、一方向材の  $0^\circ$  方向の  $Q_{ij}^{(0)}$  (Reduced Modulus<sup>18)</sup>) は表6の値を用いて以下のように求められる。なお(8-2)式から(8-5)式まで単位は  $\text{GP}_a$  とする。

$$Q_{ij}^{(0)} = \begin{bmatrix} 115.05 & 3.06 & 0 \\ \text{sym.} & 8.77 & 0 \\ & & 4.38 \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

これから  $Q_{ij}$  の変換式（文献13, 18）を用いて、 $45^\circ$  方向の  $Q_{ij}^{(45)}$  が以下のように求められる。

$$Q_{ij}^{(45)} = \begin{bmatrix} 36.87 & 28.11 & -26.57 \\ \text{sym.} & 36.87 & -26.57 \\ & & 29.43 \end{bmatrix}$$

$-45^\circ$  方向の  $Q_{ij}^{(-45)}$  は、(8-3)式の16, 26の添字の項の符号を変えたものである。これらの数値と次式を用いて、 $[0_4, (\pm 45)_2]_S$  の層構成の積層材の  $A_{ij}/h$  を求める。

$$A_{ij}/h = \frac{1}{h} \int_0^h Q_{ij}(z) dz \quad (8-4)$$

その結果は次式で与えられる。

$$A_{ij}/h = \begin{bmatrix} 75.96 & 15.58 & 0 \\ 15.58 & 22.82 & 0 \\ 0 & 0 & 16.91 \end{bmatrix} \quad (8-5)$$

これから  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $\nu_x$  に換算しなおすと、 $E_x = 65.3 \text{ GP}_a$ ,  $\nu_x = 0.683$ ,  $E_y = 19.6 \text{ GP}_a$  となる。これらの理論値と、表7の実験値を比べると、M6とM4の  $E_x$ ,  $\nu_x$  についてはかなりよく一致していることが認められる ( $E_y$  の実験値はなし)。一致の程度の良くないM7の試験片について考察すると、 $V_f$  がM6, M4と比べ低下しているのがその主原因と考えられる。そこで、 $V_f = 56.5\%$  として、付録で言及した手法と、そこで推定された繊維それ自体の弾性係数とから計算された一方向材の弾性係数  $E_L = 107.3 \text{ GP}_a$ ,  $E_T = 8.33 \text{ GP}_a$ ,  $\nu_L = 0.330$ ,  $G_{LT} = 4.05 \text{ GP}_a$  を用いて、上記のように  $A_{ij}/h$  を求める。結果は、

$$A_{ij}/h = \begin{bmatrix} 70.38 & 14.63 & 0 \\ 14.63 & 20.48 & 0 \\ 0 & 0 & 15.91 \end{bmatrix} \quad (8-6)$$

上記のようになる。これから  $E_x$  等に換算すると、 $E_x = 59.9 \text{ GP}_a$ ,  $E_y = 17.4 \text{ GP}_a$ ,  $\nu_x = 0.714$  となる。これと表7の実験値を比べると、 $\nu_x$  については、実験値とずれるけれども、 $E_x$  については、よく合っていることが認められる。

以上のような検証の結果、側縁端末効果の影響は小さく、少なくとも材料試験における積層板理論適用の妥当性は保証されたものと考えられる。本報告の最大の目的である振動解析プログラムの検証のためにも、材料試験段階での、このような議論は有効であろう。なお、このような検証から得られた副次的

結論として繊維の体積含有率の変動による複合材の弾性係数の変動が、予測可能であることも一部の例について確められた。

## 9. 結 論

複合材平板翼および平板に付加質量が分布したフラッタ翼模型の双方の場合において、本解析プログラムの計算結果は、振動数および振動モードについて、実験結果と比較的良好な合致をみることが示された。

とりわけ、本解析に用いられた弾性定数は、注意深く且つ正確になされた試験結果であり、特に異方性材の構造解析に於ける入力データの精度の重要性が認識された。

## 参 考 文 献

- 1) Krohe, N.J. Jr., "Divergence Elimination with Advanced Composite," AIAA Paper 75-1009, Aug. 1975.
- 2) Sherrer, V.C., Hertz, T.J. and Shink, M.H., "A Wind Tunnel Demonstration of the Principle of Aeroelastic Tailoring Applied to Forward Swept Wings," AIAA Paper 80-0796, 1980.
- 3) 小林, 奈良; "CFRPを用いた前進(又は後退)翼のフラッタ速度とダイバージェンス速度", CAS研究報告 No.27(B), pp.143-150, 1984年3月.
- 4) Terrence A. Weisshaar and Brian L. Foist, "Vibration and Flutter of Advanced Composite Lifting Surfaces," AIAA Paper 83-0961, 1983.
- 5) Lansing, W., Lerner, L. and Taylor, R.E., "Applications of Structural Optimization for Strength and Aeroelastic Design Requirements," AGARD-R-664, Presented at the 45th Structures and Materials Panel Meeting, Voss, Norway, Sept. 1977.
- 6) 磯貝他; "複合材平板を芯材にした後退翼フラッタ模型の遷音速フラッタ試験(空力弾性テイリングの効果の検討)"第31回風洞研究会議前刷, 1983年11月.
- 7) 磯貝他; "複合材平板を芯材にした後退翼の遷音速フラッタ試験"第26回構造強度に関する講演会講演前刷集, 昭和59年7月 pp. 172-175.
- 8) 外崎他; "繊維方向の異なる複合材平板の振動試験と解析"第26回構造強度に関する講演会講演前刷集, 昭和59年7月 pp.168-171.
- 9) Washizu, K., "*Variational Method in Elasticity and Plasticity*," 3rd ed. Pergamon Press, Oxford, 1983.
- 10) 鷺津; "弾性学の変分原理概論"コンピューターによる構造工学講座, 培凡館, 1972.
- 11) Zienkiewicz, O.C., "*The Finite Element Method in Engineering Science*," 2nd ed. McGraw-Hill, London, 1971.
- 12) 鷺津他; "有限要素法ハンドブック"培凡館, 1981年.
- 13) 林 編; "複合材料工学", 日科技連, 1971年.
- 14) Whitney, J.M. and Leissa, A.W., "Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates" *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, June 1969, pp. 261-266.
- 15) 市田和夫, 熊井規, 砂川恵; "抵抗線歪ゲージの忠実性に関する一考察", 日本航空宇宙学会誌, 20巻, 216号, 1972年1月, pp. 16-21.
- 16) 石川隆司, 松嶋正道, 林洋一; "織布複合材料の弾性係数の理論の実験的検証", 日本複合材料学会誌, 10巻, 2号, 1984年4月, pp.77-85.
- 17) T. Ishikawa, K. Koyama & S. Kobayashi, "Elastic Moduli of Carbon-Epoxy Composites and Carbon Fibers," *Journal of Composite Materials*, Vol. 11, July 1977, pp. 332-344.
- 18) R.M. Jones, "*Mechanics of Composite Materials*," McGraw-Hill, New York, 1975.
- 19) N.J. Pagano & J.C. Halpin, "Influence of End Constraints in the Testing of Anisotropic Bodies," *Journal of Composite Materials*, Vol. 2, Jan. 1968, pp. 18-31.

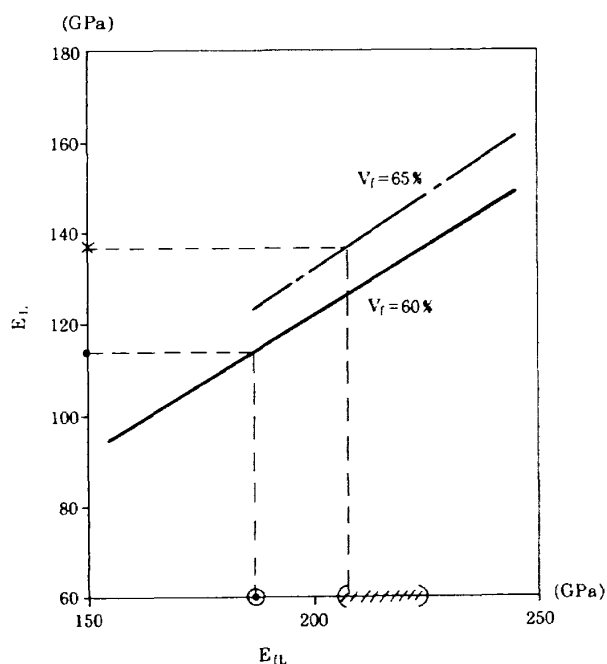
## 付 録

## カーボン繊維それ自身の弾性係数に関する議論

本文で述べられた一方向材の弾性係数は、材料試験の段階における比較的詳細な検討、及び振動試験のモード・振動数における理論と実験の比較検討の両側面から見て、本実験に用いられた試験片の基礎数値としては、極めて妥当な値と考えることができる。然るに、これらの数値は、繊維の体積含有率の割には小さく、特に、最も重要な繊維方向の $E_L$ がかなり小さい。

この疑問を定量化するために、図A-1～A-3に、繊維自身の弾性係数値の推定を示す。図A-1は、繊維のそれ自身の方向の弾性係数 $E_{fL}$ の推定プロセス<sup>(A-1)</sup>である。図中○は本実験に対応する値、括弧で囲まれたハッチ部で示されるのは、現在の高強度カーボン繊維に於て、妥当な値と考えられる数値の範囲<sup>(A-2, A-3)</sup>である。今回の試験片に用いられたカーボン繊維の $E_{fL}$ が、通常のものより10%以上低いことがわかる。

図A-2に、繊維自身の弾性係数の異方性パラメータ $K(=E_{fT}/E_{fL})$ の推定プロセスを示す。推定用の理論曲線としては、六角形配列モデルに基づく<sup>(A-1)</sup>

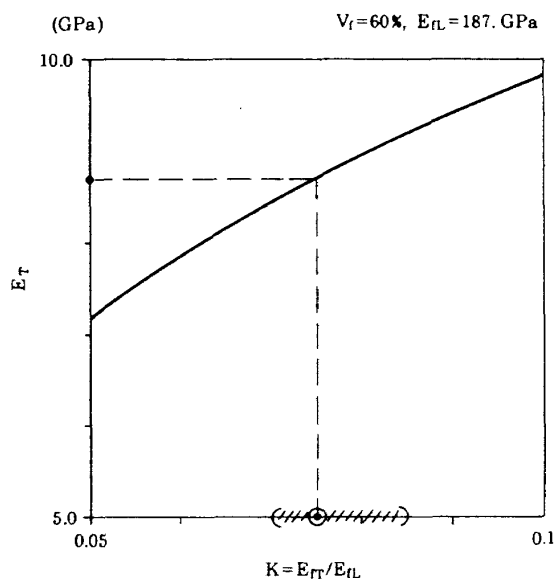


図A-1 繊維のL方向の弾性率の推定

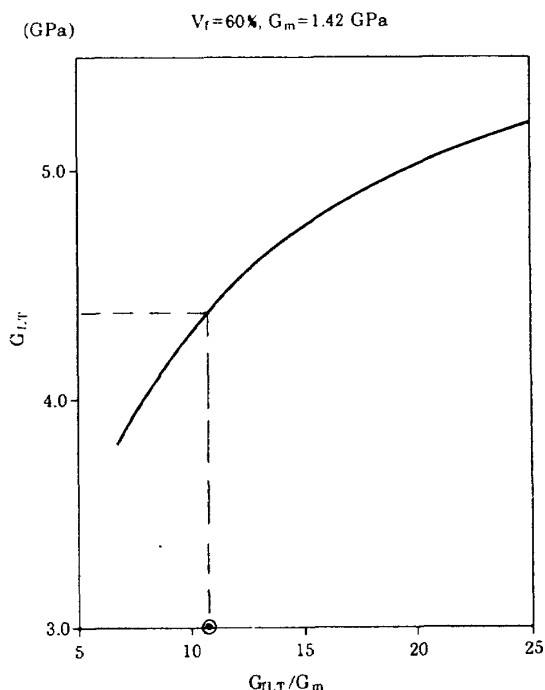
●：本実験の結果，×：製造会社における最近の平均実験値（A-3）

結果を用いた。図中の○，括弧で囲まれたハッチ部などの記号の意味は前と同様であり，後者の範囲は，文献A-1, A-4から求めている。 $K$ については，本実験の繊維は，通常のものとは大差ないことがわかった。

図A-3に、繊維自身の無次元化せん断弾性係数 $(G_{fLT}/G_m)$ と $G_{LT}$ の関係に基づく、前者の推定のプロセスを示す。この関係は、繊維配列の空間的ラン



図A-2 繊維自身の異方性係数の推定



図A-3 繊維自身の無次元化せん断弾性係数の推定

ダム性を受けやすいことが示唆されており、<sup>(A-5, A-6)</sup>  
これまでの推定値はあまり信頼性がおけないので、  
特に通常の値との比較はできなかった。しかし、大  
略の傾向を述べれば、本文文献 17 の値などに比べ、  
かなり小さくなっている。

以上を総合すると、本試験片に用いられているカ  
ーボン繊維の弾性係数は、通常の高強度糸のそれよ  
りかなり低く、低グレードの糸のそれ<sup>(A-7)</sup>にかな  
り近いことが判明した。このような事実が試験片製  
造者に於いて発生した原因は明らかではなく、今後  
の究明を待たねばならない。

### (参 考 文 献)

- (A-1) 石川隆司, 小山一夫, 小林繁夫: カーボ  
ンコンポジットとカーボン繊維の弾性係  
数, 日本航空宇宙学会誌, 23 巻, 263  
号, 1975.12, PP.678-684.
- (A-2) 川崎重工業株式会社: 社内資料.
- (A-3) 東レ株式会社編: トレカ技術資料, “ト  
レカ”プリプレグ・高温硬化型エポキシ  
樹脂 #3601, 1982.6.
- (A-4) 小山一夫, 小林繁夫, 石川隆司, 有賀輝  
: CFRP 一方向材とエポキシ樹脂の低  
温における強度と弾性係数, 日本複合材  
料学会誌, 5 巻, 4 号, 1979.10, PP.155  
-159.
- (A-5) 石川隆司, 小林繁夫: 一方向繊維強化複  
合材料の弾性係数(第 2 報), 日本航空  
宇宙学会誌, 23 巻, 260 号, 1975.9,  
PP.516-525.
- (A-6) D. F. Adams & S. W. Tsai: The In-  
fluence of Random Filament Packing  
on the Transverse Stiffness of Unid-  
irectional Composites, J. Composite  
Materials, Vol.3 (1969), p.368.
- (A-7) 東レ株式会社: 私信.



---

## 航空宇宙技術研究所報告 825号

昭和59年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社三興印刷  
東京都新宿区信濃町12三河ビル

---

Printed in Japan