

NAL TR-831

ISSN 0389-4010  
UDC 533.6.011.3:  
518.61

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-831

対角化IAF解法による非粘性遷音速流翼型解析

河合伸坦

1984年8月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 対角化IAF解法による非粘性遷音速流翼型解析\*

河合伸坦\*\*

## Analysis of Inviscid Transonic Flow around an Airfoil by Diagonal Form of IAF Scheme

by Nobuhiro KAWAI

### ABSTRACT

In order to analyze inviscid transonic flow around an airfoil, the program has been developed for solving two-dimensional Euler equations by the diagonal form of implicit approximate factorization scheme. Numerical results show two patterns of shocks. One is the flow from supersonic to subsonic, which exhibits nearly normal shock. The other, a flow from supersonic to supersonic, exhibits oblique shock. Numerical solutions of Euler equations are compared with those of potential flow, showing the differences in shock position, and pressure rise after shock.

### 1. まえがき

翼型まわりの非粘性遷音速流を解析するために、2次元 Euler 方程式を解くプログラムを研究開発したので、ここに報告する。このプログラムは、高レイノルズ数遷音速流翼型解析プログラム NSFOIL<sup>8)</sup> に非粘性流オプションとして組み込まれている。

数値解法として従来の陽解法を用いると、Courant-Friedrichs-Lewy の安定条件 (CFL 条件) を満たすために時間刻み  $\Delta t$  が小さくなる。この制限は高レイノルズ数の粘性流を解く場合ほど厳しくはないけれど、やはり CFL 条件による  $\Delta t$  の制限を受けない陰解法の方が魅力的である。Beam と Warming<sup>1)</sup> は IAF 法 (implicit approximate factori-

zation scheme) という陰解法を考案した。これは直交 (Cartesian) 座標系での定式化であるため、通常の翼型まわりの流れの数値解析には不適當である。そこでまず直交座標系から一般曲線座標系への Navier-Stokes 式, Euler 式の保存形の座標変換を Viviani<sup>2)</sup> が示した。次に Steger<sup>3)</sup> は翼型まわりの非直交曲線座標系で表わした薄層近似した (thin-layer) Navier-Stokes 式, Euler 式について IAF 法を適用した。IAF 法ではブロック 3 対角 (block tridiagonal) 方程式を数値的に解くことになるが、これの演算量がかなり大きい。演算量を減らすには一般に行列を対角化するとよい。そこで Warming と Beam と Hyett<sup>4)</sup> は Euler 方程式から生じる行列の対角化を示した。Pulliam と Chaussee<sup>5)</sup> は行列の対角化と IAF 法を組み合わせることで効率的な Euler 方程式の解法を考案した。この対角化 IAF 法の粘性流への適用は、著者の経験では、層流境界層の場合には適

\* 昭和59年7月19日 受付

\*\* 空気力学第二部

用可能であるが、乱流境界層の場合には wake cut 境界から発散しやすく、適用が困難である。

この報告書では、プログラムの作製にあたって必要であった理論を以上の研究成果に基づいて説明し、遷音速非粘性流の数値解析結果を示し、ポテンシャル流の数値計算結果との比較を示す。

## 2. 基礎方程式の変換

2次元保存形 Euler 方程式を基礎方程式とする。ここでは直交系の Euler 方程式が一般座標系へどのように座標変換されるかを述べよう。無次元化を、座標は翼弦長  $c$  によって、密度は一様流密度  $\rho_\infty$  によって、速度成分は一様流音速  $a_\infty$  によって、時間は  $c/a_\infty$  によって、圧力  $p$  と総エネルギー  $e$  は  $\rho_\infty a_\infty^2$  によって行なうと、無次元化された方程式は次元をもつ方程式と同じ形式になって、次のように表わされる。

$$\partial_t q + \partial_x E + \partial_y F = 0 \quad (1)$$

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u(e+p) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix} \quad (2)$$

ただし

$$p = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right] \quad (3)$$

任意の曲線座標系に対して数値計算できるように、一般の座標変換

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

を用いると、chain rule と行列の演算によって、Jacobian と metrics の関係式は、

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = 1 / (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \quad (5)$$

$$\begin{cases} \xi_x = J y_\eta, & \xi_y = -J x_\eta \\ \eta_x = -J y_\xi, & \eta_y = J x_\xi \end{cases} \quad (6)$$

と表わされる。

次に Euler 方程式の保存形の座標変換を示そう。

chain rule により

$$\frac{1}{J} \partial_x E = \frac{\xi_x}{J} \partial_\xi E + \frac{\eta_x}{J} \partial_\eta E$$

$$= \partial_\xi \frac{\xi_x}{J} E + \partial_\eta \frac{\eta_x}{J} E - E R^{(x)} \quad (7a)$$

ただし、

$$R^{(x)} = \partial_\xi \frac{\xi_x}{J} + \partial_\eta \frac{\eta_x}{J} \quad (7b)$$

(6) 式により

$$R^{(x)} = \partial_\xi (y_\eta) + \partial_\eta (-y_\xi) = 0 \quad (8)$$

となるから、(7a)式は

$$\frac{1}{J} \partial_x E = \partial_\xi \frac{\xi_x}{J} E + \partial_\eta \frac{\eta_x}{J} E \quad (9)$$

同様に chain rule により

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \partial_y F &= \frac{\xi_y}{J} \partial_\xi F + \frac{\eta_y}{J} \partial_\eta F \\ &= \partial_\xi \frac{\xi_y}{J} F + \partial_\eta \frac{\eta_y}{J} F - F R^{(y)} \end{aligned} \quad (10a)$$

ただし

$$R^{(y)} = \partial_\xi \frac{\xi_y}{J} + \partial_\eta \frac{\eta_y}{J} \quad (10b)$$

(6) 式により

$$R^{(y)} = \partial_\xi (-x_\eta) + \partial_\eta (x_\xi) = 0 \quad (11)$$

となるから、(10a)式は

$$\frac{1}{J} \partial_y F = \partial_\xi \frac{\xi_y}{J} F + \partial_\eta \frac{\eta_y}{J} F \quad (12)$$

(9)式と(12)式を基礎方程式(1)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \partial_\xi \frac{1}{J} q + (\partial_\xi \frac{\xi_x}{J} E + \partial_\eta \frac{\eta_x}{J} E) \\ + (\partial_\xi \frac{\xi_y}{J} F + \partial_\eta \frac{\eta_y}{J} F) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

並び換えると、

$$\begin{aligned} \partial_\xi \frac{1}{J} q + \partial_\xi \frac{1}{J} (\xi_x E + \xi_y F) \\ + \partial_\eta \frac{1}{J} (\eta_x E + \eta_y F) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

と、座標変換後も保存形となる。さらに

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \frac{1}{J} q, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} (\xi_x E + \xi_y F), \\ \hat{F} &= \frac{1}{J} (\eta_x E + \eta_y F) \end{aligned} \quad (15)$$

と置けば、(1)式と同じ形式

$$\partial_\xi \hat{q} + \partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F} = 0 \quad (16)$$

に表現できる。

次に  $\hat{E}$ ,  $\hat{F}$  の具体形を求めよう。(15)式に(2)式を代入すると,

$$\hat{q} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad (17a)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho (\xi_x u + \xi_y v) \\ \rho u (\xi_x u + \xi_y v) + \xi_x p \\ \rho v (\xi_x u + \xi_y v) + \xi_y p \\ (e+p)(\xi_x u + \xi_y v) \end{pmatrix}, \quad (17b)$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho (\eta_x u + \eta_y v) \\ \rho u (\eta_x u + \eta_y v) + \eta_x p \\ \rho v (\eta_x u + \eta_y v) + \eta_y p \\ (e+p)(\eta_x u + \eta_y v) \end{pmatrix} \quad (17c)$$

そこで反変速度

$$\begin{cases} U = \xi_x u + \xi_y v \\ V = \eta_x u + \eta_y v \end{cases} \quad (18)$$

を定義すると, (17b,c) 式は

$$\hat{E} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (e+p)U \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (e+p)V \end{pmatrix} \quad (19)$$

### 3. ヤコビ行列

後述するように, 対角化 IAF 解法の基礎となる IAF 解法では, 一般座標系におけるヤコビ行列  $\hat{A} = \partial \hat{E} / \partial \hat{q}$ ,  $\hat{B} = \partial \hat{F} / \partial \hat{q}$  が必要となるので,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  を求めよう。そのためには, まず比較的簡単な直交座標におけるヤコビ行列  $A = \partial E / \partial q$ ,  $B = \partial F / \partial q$  を計算し, それから  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  と  $A$ ,  $B$  との関係を求めることにより  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  を求める手順を踏もう。

運動量を

$$m = \rho u, \quad n = \rho v \quad (20)$$

とおくと(2)式, (3)式は

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ n \\ e \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} m \\ m^2/\rho + p \\ mn/\rho \\ (e+p)m/\rho \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} n \\ mn/\rho \\ n^2/\rho + p \\ (e+p)n/\rho \end{pmatrix} \quad (21)$$

ただし

$$p = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{1}{2} (m^2 + n^2) / \rho \right] \quad (22)$$

(21) 式, (22) 式から

$$A = \frac{\partial E}{\partial q}, \quad B = \frac{\partial F}{\partial q} \quad (23)$$

を計算すると,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)u^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u \\ -uv & v \\ \frac{\gamma e u}{-\rho} + 2\phi^2 u & \frac{\gamma e}{\rho} + \frac{1-\gamma}{2}(3u^2+v^2) \\ 0 & 0 \\ (1-\gamma)v & \gamma-1 \\ u & 0 \\ (1-\gamma)uv & \gamma u \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -uv & v \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)v^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & (1-\gamma)u \\ \frac{\gamma e v}{-\rho} + 2\phi^2 v & (1-\gamma)uv \\ 1 & 0 \\ u & 0 \\ (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ \frac{\gamma e}{\rho} + \frac{1-\gamma}{2}(3v^2+u^2) & \gamma v \end{pmatrix} \quad (25)$$

ただし

$$\phi^2 = \frac{1}{2} (\gamma - 1) (u^2 + v^2) \quad (26)$$

(15) 式と(23)式からヤコビ行列は

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial \hat{E}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \hat{q}} \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{J} (\xi_x E + \xi_y F) \cdot J \\ &= \xi_x A + \xi_y B \end{aligned} \quad (27a)$$

同様にして

$$\hat{B} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{q}} = \eta_x A + \eta_y B \quad (27b)$$

(27a,b) 式をまとめて

$$\hat{A} \text{ or } \hat{B} = k_1 A + k_2 B \quad (28)$$

ただし  $k_1 = \xi_x$  or  $\eta_x$ ,  $k_2 = \xi_y$  or  $\eta_y$  である。

(24)式と(25)式を(28)式に代入すると,

$$\hat{A} \text{ or } \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 & 0 \\ k_1 \phi^2 - u\theta & \theta & k_1(1-r)v & (r-1)k_1 \\ k_2 \phi^2 - v\theta & k_1 v & \theta & (r-1)k_2 \\ \theta(2\phi^2 - \tilde{e}) & k_1(\tilde{e} - \phi^2) & k_2(\tilde{e} - \phi^2) & r\theta \end{pmatrix} \quad (29)$$

ただし,

$$\theta = k_1 u + k_2 v \quad (30a)$$

$$\tilde{e} = r e / \rho \quad (30b)$$

#### 4. 直交系非保存形 Euler 方程式の係数行列の対角化

後述するように, 対角化 IAF 解法では, 一般座標系の保存形の Euler 方程式のヤコビ行列  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  の対角化が必要となる。直接  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  を対角化するのは難しいので, ここでは比較的簡単な直交座標の非保存形の Euler 方程式の係数行列  $\dot{A}$ ,  $\dot{B}$  を対角化しよう。ただし, 後での座標変換を考慮して  $\dot{A}$ ,  $\dot{B}$  の線型結合の行列  $\dot{D}$  を対角化しよう。そして後で  $\dot{D}$  の対角化を直交座標系の保存形のヤコビ行列  $A$ ,  $B$  (の線型結合) の対角化さらに  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  の対角化にむすびつけるのである。

直交 (Cartesian) 系で非保存形の Euler 方程式は次のとおりである。

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + \dot{A} \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} + \dot{B} \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} = 0 \quad (31)$$

ただし

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \dot{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho a^2 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad \dot{B} = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \rho a^2 & v \end{pmatrix} \quad (32)$$

$k_1, k_2$  を任意の係数として,

$$\dot{D} = k_1 \dot{A} + k_2 \dot{B} \quad (33)$$

と定義する。行列  $\dot{D}$  の対角化が, 一般座標系で保存形の Euler 方程式のヤコビ行列の対角化につながる。(33)式に(32)式を代入し, (30a)式を用いると,

$$\dot{D} = \begin{pmatrix} \theta & k_1 \rho & k_2 \rho & 0 \\ 0 & \theta & 0 & k_1 / \rho \\ 0 & 0 & \theta & k_2 / \rho \\ 0 & k_1 \rho a^2 & k_2 \rho a^2 & \theta \end{pmatrix} \quad (34)$$

$\dot{D}$  についての固有多項式は,

$$(\theta - \lambda)^2 [(\theta - \lambda)^2 - (k_1^2 + k_2^2) a^2] = 0 \quad (35)$$

そこで

$$L = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (36)$$

とおくと, 固有値は

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \theta, \quad \lambda_3 = \theta + La, \quad \lambda_4 = \theta - La \quad (37)$$

固有ベクトルを求めよう。 $\lambda_1 = \lambda_2 = \theta$  に対して

$$\dot{D} \mathbf{x} = \theta \mathbf{x} \quad (38)$$

から 2 条件

$$\left. \begin{aligned} k_1 x_2 + k_2 x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

が求まるから, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 / L \\ -k_2 / L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

と選ぶことができる。 $\lambda_3 = \theta + La$  に対して

$$\dot{D} \mathbf{x} = (\theta + La) \mathbf{x} \quad (41)$$

から

$$\left. \begin{aligned} \rho(k_1 x_2 + k_2 x_3) &= La x_1 \\ (k_1 / \rho) x_4 &= La x_2 \\ (k_2 / \rho) x_4 &= La x_3 \\ \rho a^2(k_1 x_2 + k_2 x_3) &= La x_4 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$k_1 / k_2 = x_2 / x_3$  から

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= k_1 t \\ x_3 &= k_2 t \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

とおくと,

$$\left. \begin{aligned} \rho(k_1^2 + k_2^2) t &= La x_1 \\ (1/\rho) x_4 &= La t \\ \rho a^2(k_1^2 + k_2^2) t &= La x_4 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

故に,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\rho}{a} L t \\ x_4 &= \rho a L t \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

(43)式, (45)式において, 任意パラメータ  $t$  を  $t = 1/\sqrt{2} L$  とすると, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \rho/a\sqrt{2} \\ k_1/L\sqrt{2} \\ k_2/L\sqrt{2} \\ \rho a/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (46)$$

と選ぶことができる。 $\lambda_4 = \theta - La$  に対しては、 $\lambda_3$  における  $L$  の符号を変えただけのものであるから、固有ベクトルも次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \rho/a\sqrt{2} \\ -k_1/L\sqrt{2} \\ -k_2/L\sqrt{2} \\ \rho a/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (47)$$

(40), (46), (47) の固有ベクトルを横に並べると、 $\dot{D}$  を対角化させる行列  $\dot{T}$  が構成される。

$$\dot{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho/(\sqrt{2}a) & \rho/(\sqrt{2}a) \\ 0 & \tilde{k}_2 & \tilde{k}_1/\sqrt{2} & -\tilde{k}_1/\sqrt{2} \\ 0 & -\tilde{k}_1 & \tilde{k}_2/\sqrt{2} & -\tilde{k}_2/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \rho a/\sqrt{2} & \rho a/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (48)$$

ただし

$$\tilde{k}_1 = k_1/L, \quad \tilde{k}_2 = k_2/L \quad (49)$$

(48) 式の逆行列を計算すると、

$$\dot{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/a^2 \\ 0 & \tilde{k}_2 & -\tilde{k}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_1/\sqrt{2} & \tilde{k}_2/\sqrt{2} & 1/(\sqrt{2}\rho a) \\ 0 & -\tilde{k}_1/\sqrt{2} & -\tilde{k}_2/\sqrt{2} & 1/(\sqrt{2}\rho a) \end{pmatrix} \quad (50)$$

固有値の定義式  $\dot{D}\mathbf{x} = \mathbf{x}\lambda$  を横に並べた式が  $\dot{D}\dot{T} = \dot{T}A$  であるから

$$\dot{T}^{-1}\dot{D}\dot{T} = A \quad (51)$$

ただし  $A$  は次の対角行列である。

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta + La & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta - La \end{pmatrix} \quad (52)$$

即ち、(34) 式で定義された  $\dot{D}$  が (51) 式のように対角化されたのである。なお  $\dot{A}$  の対角化は  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0$  とすれば良く、 $\dot{B}$  の対角化は  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1$  とすれば良い。

## 5. Euler 方程式の非保存形と保存形の関係

ここでは直交座標系の Euler 方程式の非保存形の係数行列  $\dot{A}$ ,  $\dot{B}$  と保存形のヤコビ行列  $A$ ,  $B$  とを関係づけることにより、既に対角化された  $\dot{A}$ ,  $\dot{B}$  から  $A$ ,  $B$  の対角化を求めよう。

直交系の保存形 Euler 方程式 (1) 式をヤコビ行列 (23) 式を用いて非保存形化すると、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A \frac{\partial q}{\partial x} + B \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (53)$$

また非保存変数  $\dot{q}$  と保存変数  $q$  との間のヤコビ行列を

$$M = \frac{\partial q}{\partial \dot{q}}, \quad M^{-1} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \quad (54)$$

と定義し、(53) 式に代入すると、

$$M \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + AM \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} + BM \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} = 0 \quad (55)$$

左側から  $M^{-1}$  をかけると、

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + M^{-1}AM \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} + M^{-1}BM \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} = 0 \quad (56)$$

(56) 式と (31) 式を等置すると、

$$\dot{A} = M^{-1}AM, \quad \dot{B} = M^{-1}BM \quad (57)$$

座標変換との関連で、 $k_1$ ,  $k_2$  を任意の係数として、

$$D = k_1A + k_2B \quad (58)$$

と定義すると、(57) 式を代入して、

$$\begin{aligned} D &= k_1M\dot{A}M^{-1} + k_2M\dot{B}M^{-1} \\ &= M(k_1\dot{A} + k_2\dot{B})M^{-1} \end{aligned} \quad (59)$$

(33) 式を代入すると、

$$D = M\dot{D}M^{-1} \quad (60)$$

(51) 式を代入すると、

$$D = M\dot{T}A\dot{T}^{-1}M^{-1} \quad (61)$$

そこで

$$T = M\dot{T}, \quad T^{-1} = \dot{T}^{-1}M \quad (62)$$

とおけば、

$$D = TAT^{-1} \quad (63a)$$

即ち

$$T^{-1}DT = A \quad (63b)$$

即ち (58) 式で定義された  $D$  が (62) 式で定義された  $T$  によって (63a, b) 式のように対角化できるのである。任意係数を  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0$  とおくと  $D = A$  となり、

$k_1=0$ ,  $k_2=1$  とおくと  $D=B$  となり,  $A$  と  $B$  は (63a,b) 式によって対角化できる。

## 6. 一般曲線座標系での Euler 方程式の対角化

いままでの準備からいよいよ一般座標系での保存形の Euler 方程式のヤコビ行列  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  の対角化を具体的に求めよう。

一般曲線座標におけるヤコビ行列  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  と直交座標系におけるヤコビ行列  $A$ ,  $B$  との関係を再掲すると,

$$\hat{A} = \xi_x A + \xi_y B \quad (27a)$$

$$\hat{B} = \eta_x A + \eta_y B \quad (27b)$$

(27a,b) 式を (58) 式と比較すると,

$$\begin{cases} k_1 = \xi_x, k_2 = \xi_y \text{ とおくと } D = \hat{A} & (64a) \\ k_1 = \eta_x, k_2 = \eta_y \text{ とおくと } D = \hat{B} & (64b) \end{cases}$$

であるから,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  は (63a,b) 式によって対角化される。そこで  $T$ ,  $T^{-1}$  を具体的に求めよう。

$$e = \frac{p}{r-1} + \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \quad (65)$$

から

$$M = \frac{\partial(\rho, \rho u, \rho v, e)}{\partial(\rho, u, v, p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) & \rho u & \rho v & \frac{1}{r-1} \end{pmatrix} \quad (66)$$

逆に

$$u = \frac{\rho u}{\rho}, v = \frac{\rho v}{\rho}, p = (r-1) \left\{ e - \frac{(\rho u)^2 + (\rho v)^2}{2\rho} \right\} \quad (67)$$

から

$$M^{-1} = \frac{\partial(\rho, u, v, p)}{\partial(\rho, \rho u, \rho v, e)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 \\ \phi^2 & -(r-1)u & -(r-1)v & r-1 \end{pmatrix} \quad (68)$$

ただし  $\phi^2$  は (26) 式で与えられる。

(48) 式, (50) 式, (66) 式, (68) 式を (62) 式に代入して  $T$ ,  $T^{-1}$  を計算すると,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ u & \tilde{k}_2 \rho & \alpha(u + \tilde{k}_1 a) & \alpha(u - \tilde{k}_1 a) \\ v & -\tilde{k}_1 \rho & \alpha(v + \tilde{k}_2 a) & \alpha(v - \tilde{k}_2 a) \\ \frac{\phi^2}{r-1} & \alpha(\tilde{k}_2 u - \tilde{k}_1 v) & \alpha\left(\frac{\phi^2 + a^2}{r-1} + a\tilde{\theta}\right) & \alpha\left(\frac{\phi^2 + a^2}{r-1} - a\tilde{\theta}\right) \end{pmatrix} \quad (69)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \phi^2/a^2 & (r-1)u/a^2 & & \\ (-\tilde{k}_2 u + \tilde{k}_1 v)/\rho & \tilde{k}_2/\rho & & \\ \beta(\phi^2 - a\tilde{\theta}) & \beta(\tilde{k}_1 a - (r-1)u) & & \\ \beta(\phi^2 + a\tilde{\theta}) & \beta(-\tilde{k}_1 a - (r-1)u) & & \\ & (r-1)v/a^2 & -(r-1)/a^2 & \\ & -\tilde{k}_1/\rho & 0 & \\ & \beta(\tilde{k}_2 a - (r-1)u) & (r-1)\beta & \\ & \beta(-\tilde{k}_2 a - (r-1)u) & (r-1)\beta & \end{pmatrix} \quad (70)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\theta} &= \tilde{k}_1 u + \tilde{k}_2 v, \\ \alpha &= \rho/(\sqrt{2}a), \beta = 1/(\sqrt{2}\rho a) \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

後の準備のため,  $k_1 = \xi_x$ ,  $k_2 = \xi_y$  のときの  $T$ ,  $T^{-1}$  をそれぞれ  $T_\xi$ ,  $T_\xi^{-1}$  とする。また  $k_1 = \eta_x$ ,  $k_2 = \eta_y$  のときの  $T$ ,  $T^{-1}$  をそれぞれ  $T_\eta$ ,  $T_\eta^{-1}$  とする。行列の積を

$$N = T_\xi^{-1} T_\eta, N^{-1} = T_\eta^{-1} T_\xi \quad (72)$$

と定義して, 実際に行列の積を計算すると,

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & -\mu m_2 & \mu m_2 \\ 0 & \mu m_2 & \mu^2(1+m_1) & \mu^2(1-m_1) \\ 0 & -\mu m_2 & \mu^2(1-m_1) & \mu^2(1+m_1) \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & \mu m_2 & -\mu m_2 \\ 0 & -\mu m_2 & \mu^2(1+m_1) & \mu^2(1-m_1) \\ 0 & \mu m_2 & \mu^2(1-m_1) & \mu^2(1+m_1) \end{pmatrix} \quad (74)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \mu &= 1/\sqrt{2}, m_1 = \tilde{\xi}_x \tilde{\eta}_x + \tilde{\xi}_y \tilde{\eta}_y, m_2 = \tilde{\xi}_x \tilde{\eta}_y - \tilde{\xi}_y \tilde{\eta}_x, \\ \tilde{\xi}_x &= \xi_x/L = \xi_x/\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \tilde{\xi}_y = \xi_y/L = \xi_y/\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \\ \tilde{\eta}_x &= \eta_x/L = \eta_x/\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}, \tilde{\eta}_y = \eta_y/L = \eta_y/\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

### 7. IAF 解法

IAF法 (Implicit Approximate Factorization Scheme) は対角化 IAF法 (Diagonal Form of Implicit Approximate Factorization Scheme) の基礎となるので、ここでは IAF法について述べよう。

一般曲線座標系における基礎方程式(16)式を、時間ステップを  $n$  として次のように差分化する。

$$\frac{\hat{q}^{n+1} - \hat{q}^n}{\Delta t} + \partial_\xi \hat{E}^{n+1} + \partial_\eta \hat{F}^{n+1} = 0 \quad (76)$$

テイラー展開すると、

$$\hat{E}^{n+1} = \hat{E}^n + \hat{A}^n \Delta \hat{q} \quad (77a)$$

$$\hat{F}^{n+1} = \hat{F}^n + \hat{B}^n \Delta \hat{q} \quad (77b)$$

ただし

$$\Delta \hat{q} = \hat{q}^{n+1} - \hat{q}^n \quad (78)$$

(77a,b)式を(76)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \Delta \hat{q} + \Delta t \partial_\xi \hat{E}^n + \Delta t \partial_\xi \hat{A}^n \Delta \hat{q} \\ + \Delta t \partial_\eta \hat{F}^n + \Delta t \partial_\eta \hat{B}^n \Delta \hat{q} = 0 \end{aligned} \quad (79)$$

故に、

$$(I + \Delta t \partial_\xi \hat{A}^n + \Delta t \partial_\eta \hat{B}^n) \Delta \hat{q} = R \quad (80a)$$

$$R = -\Delta t \partial_\xi \hat{E}^n - \Delta t \partial_\eta \hat{F}^n \quad (80b)$$

ただし  $I$  は単位行列である。(80a)式を近似因子分解すると、

$$(I + \Delta t \partial_\xi \hat{A}^n)(I + \Delta t \partial_\eta \hat{B}^n) \Delta \hat{q} = R \quad (81)$$

(81)式、(80b)式に平滑化 (人工散逸) 項を加えると、

$$\begin{aligned} (I + \Delta t \partial_\xi \hat{A}^n - \frac{\epsilon_I}{J} \nabla_\xi \Delta_\xi J) \\ \times (I + \Delta t \partial_\eta \hat{B}^n - \frac{\epsilon_I}{J} \nabla_\eta \Delta_\eta J) \Delta \hat{q} = R \end{aligned} \quad (82a)$$

$$\begin{aligned} R = -\Delta t (\partial_\xi \hat{E}^n + \partial_\eta \hat{F}^n) \\ - \frac{\epsilon_E}{J} [(\nabla_\xi \Delta_\xi)^2 + (\nabla_\eta \Delta_\eta)^2] J \hat{q}^n \end{aligned} \quad (82b)$$

ただし  $\epsilon_I, \epsilon_E$  は  $O(\Delta t)$  である。また  $\nabla_\xi f_{jk} = f_{jk} - f_{j-1,k}$ 、 $\Delta_\xi f_{jk} = f_{j+1,k} - f_{jk}$ 、 $\nabla_\eta f_{jk} = f_{jk} - f_{j,k-1}$ 、 $\Delta_\eta f_{jk} = f_{j,k+1} - f_{jk}$  である。(82a,b)式が IAF 解法を表わす式である。

### 8. 対角化 IAF 解法

(63a)式、(64a,b)式から

$$\hat{A} = T_\xi A_\xi T_\xi^{-1}, \quad \hat{B} = T_\eta A_\eta T_\eta^{-1} \quad (83)$$

ただし  $A$  の式(52)式で  $k_1 = \xi_x, k_2 = \xi_y$  としたとき  $A_\xi$ 、 $k_1 = \eta_x, k_2 = \eta_y$  としたとき  $A_\eta$  である。

(83)式を(81)式に代入すると、

$$(I + \Delta t \partial_\xi T_\xi A_\xi T_\xi^{-1})(I + \Delta t \partial_\eta T_\eta A_\eta T_\eta^{-1}) \Delta \hat{q} = R \quad (84)$$

演算の順序を変更すると

$$(I + \Delta t T_\xi \partial_\xi A_\xi T_\xi^{-1})(I + \Delta t T_\eta \partial_\eta A_\eta T_\eta^{-1}) \Delta \hat{q} = R \quad (85)$$

この変更は 1 次精度の誤差を伴う。よって

$$T_\xi (I + \Delta t \partial_\xi A_\xi) T_\xi^{-1} T_\eta (I + \Delta t \partial_\eta A_\eta) T_\eta^{-1} = R \quad (86)$$

(72)式を代入すると、

$$T_\xi (I + \Delta t \partial_\xi A_\xi) N (I + \Delta t \partial_\eta A_\eta) T_\eta^{-1} = R \quad (87)$$

平滑化項を付け加えると、

$$\begin{aligned} T_\xi (I + \Delta t \partial_\xi A_\xi - \epsilon_I J^{-1} \nabla_\xi \Delta_\xi J) N \\ \times (I + \Delta t \partial_\eta A_\eta - \epsilon_I J^{-1} \nabla_\eta \Delta_\eta J) T_\eta^{-1} \Delta \hat{q} = R \end{aligned} \quad (88)$$

(88)式、(82b)式が対角化 IAF 解法を表わす式である。これを解くには、まず右辺(82b)式を計算する。それから次の手順で解く。

$$\phi^{(1)} = T_\xi^{-1} R \quad (89a)$$

$$(I + \Delta t \partial_\xi A_\xi - \epsilon_I J^{-1} \nabla_\xi \Delta_\xi J) \phi^{(2)} = \phi^{(1)} \quad (89b)$$

$$\phi^{(3)} = N^{-1} \phi^{(2)} \quad (89c)$$

$$(I + \Delta t \partial_\eta A_\eta - \epsilon_I J^{-1} \nabla_\eta \Delta_\eta J) \phi^{(4)} = \phi^{(3)} \quad (89d)$$

$$\Delta \hat{q} = T_\eta \phi^{(4)} \quad (89e)$$

$T_\xi^{-1}, N^{-1}, T_\eta$  は既に求まっているから(89a,c,e)式は単に行列の積を計算するだけである。(89b,d)式はブロック 3 項方程式であるが、対角項だけしかないので、それぞれ 4 個のスカラー 3 項方程式に帰する。それ故に(82a)式を直接に解くより(89a,b,c,d,e)式を解く方が演算量が少ない。



## 9. 境界条件

翼まわりのC形格子において、 $\xi$ 軸は翼に沿う軸、 $\eta$ 軸は翼から離れる方向の軸である。

(18)式で $U, V$ は反変速度であり、それぞれ $\xi$ 軸、 $\eta$ 軸方向の速度成分であるから、翼面では $V=0$ である。(18)式を $u, v$ について解き、 $V=0$ を代入すると、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \eta_y & -\xi_y \\ -\eta_x & \xi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} \quad (90)$$

これは速度ベクトルが翼に接する条件である。翼面上の $U$ は1次外挿によって求める。

$(\eta_x, \eta_y)$ は $\eta$ のgradientであるから、 $\eta = \text{const.}$ の線に垂直なベクトルを表わす。特に $\eta = 0$ は翼面を表わすから、 $\eta = 0$ で $(\eta_x, \eta_y)$ は翼面に垂直なベクトルを表わす。一方 $(\rho u, \rho v)$ は運動量ベクトルであるから、内積 $\eta_x \rho u + \eta_y \rho v$ は $\eta = 0$ で翼面に垂直な運動量成分を表わす。従って $\eta_x \cdot (x\text{-mom. eq.}) + \eta_y \cdot (y\text{-mom. eq.})$ は翼面に垂直な運動量の方程式を表わす。これを(31)式、(32)式の非保存形の運動量の式から導びこう。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (91a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (91b)$$

まず(91a)式を座標変換しよう。chain ruleにより、

$$u_t + u(\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) + v(\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta) + \frac{1}{\rho}(\xi_x p_\xi + \eta_x p_\eta) = 0$$

反変速度(18)式を用いて、

$$u_t + U u_\xi + V u_\eta + \frac{1}{\rho}(\xi_x p_\xi + \eta_x p_\eta) = 0 \quad (92)$$

次に(91b)式を座標変換しよう。chain ruleにより、

$$v_t + u(\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta) + v(\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta) + \frac{1}{\rho}(\xi_y p_\xi + \eta_y p_\eta) = 0$$

反変速度(18)式を用いて、

$$v_t + U v_\xi + V v_\eta + \frac{1}{\rho}(\xi_y p_\xi + \eta_y p_\eta) = 0 \quad (93)$$

$\eta_x \cdot (92)$ 式 +  $\eta_y \cdot (93)$ 式を計算すると、

$$\begin{aligned} & \eta_x u_t + \eta_y v_t + U(\eta_x u_\xi + \eta_y v_\xi) \\ & + V(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta) + \frac{1}{\rho}[(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_\xi \\ & + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta] = 0 \end{aligned} \quad (94)$$

最初の2項については、反変速度(18)式を用い、境界条件 $V=0$ を用い、定常格子の条件を用いると、

$$\begin{aligned} \eta_x u_t + \eta_y v_t &= \partial_t(\eta_x u + \eta_y v) - u \partial_t \eta_x - v \partial_t \eta_y \\ &= \partial_t V - u \partial_t \eta_x - v \partial_t \eta_y = 0 \end{aligned} \quad (95)$$

境界条件 $V=0$ および(95)式を(94)式に代入して、

$$\begin{aligned} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta \\ = -\rho U(\eta_x u_\xi + \eta_y v_\xi) \end{aligned} \quad (96)$$

特に格子が翼面上で直交する場合 $\text{grad } \xi \cdot \text{grad } \eta = 0$ から、

$$\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0 \quad (97)$$

故に、

$$(\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta = -\rho U(\eta_x u_\xi + \eta_y v_\xi) \quad (98)$$

(98)式が圧力 $p$ に関する境界条件である。なお密度 $\rho$ については1次外挿する。

以上は翼境界の条件についてであったが、今度は他の境界条件について述べよう。まず境界の名称を図1に定める。遠方境界ではベクトルの4成分のすべてを一様流の値で与える。これは過剰な境界条件であるので、安定ではあるが精度が落ちる可能性がある。そこで翼面から翼弦長の10倍程度以上に遠方境界を置く必要がある。下流境界では超音速流である場合だけを興味の対象とするから、行列 $\hat{A}$ の固有値の正のものが3個、負のものが1個であるから、

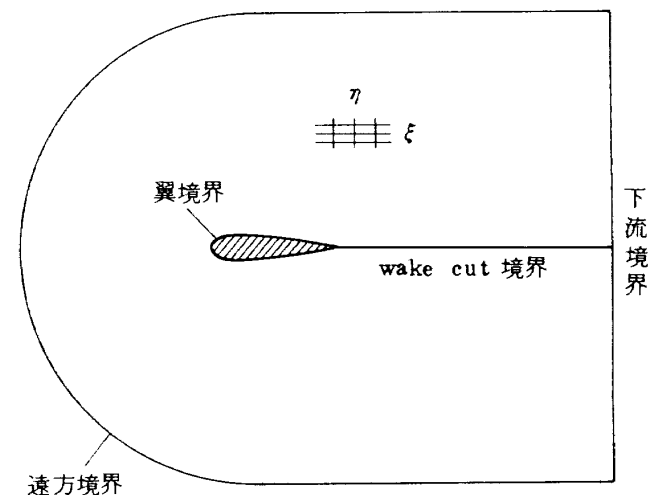


図1 境界

情報の1成分が下流側から決定されなければならない。そこで圧力を下流境界で一樣流の値に与えることにする。他の3成分  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  については  $\xi$  方向に1次外挿する。wake cut 境界では, 4成分すべてについて  $\eta$  方向に上下面から4点内挿する。

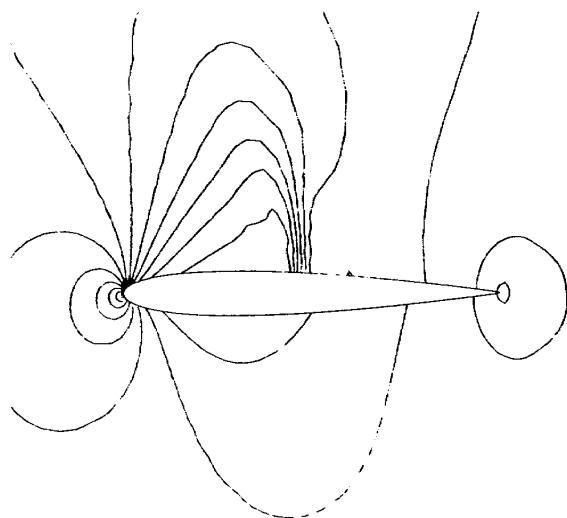
### 10. 数値計算結果

NACA0012翼型に対して, 迎角  $\alpha = 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ$  についてそれぞれ一樣流マッハ数  $M_\infty = 0.75, 0.8, 0.85, 0.9$  について合計12ケースについて数値計算を行なった。 $\alpha = 6^\circ, M_\infty = 0.9$  の場合には発散して数値解が求まらなかった。つまり(3)式で定義される圧力  $P$  が負になり, 従って音速の自乗  $a^2 = rP / \rho < 0$  となり, 音速  $a$  を求めることができなくなり, 計算が止まってしまう。 $\alpha = 6^\circ, M_\infty = 0.85$  の場合には計算は遂行されたが, 揚力係数やモーメント係数が繰返し回数2500回程で1周期になる長周期の振動解になり, 定常な解に達しなかった。これら非収束の原因は良く分らないが, 高迎角・高マッハ数では翼上面の超音速領域が遠方境界に達し, 遠方境界で一樣流を与える境界条件が不適當になるのかもしれない。

他の10ケースでは定常な数値解が得られた。格子は  $\xi$  方向に125点, うち翼面上に93点,  $\eta$  方向に35点である。計算時間は, 3000回の繰返し計算を費や

して, FACOM M380で約22分である。

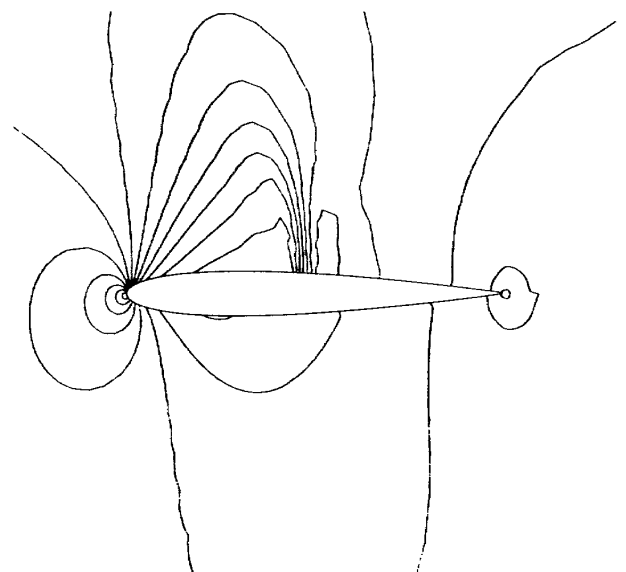
図2から図9は, 一樣流マッハ数  $M_\infty = 0.75$ , 迎角  $\alpha = 2^\circ$  の場合の計算結果である。図2, 図3, 図4ではそれぞれ圧力, 密度, 局所マッハ数の等高線図が描かれ, 翼面にはほぼ垂直な衝撃波の様子がわかる。図5には Euler 方程式による数値解(当プログラム使用)とポテンシャル方程式による数値解<sup>6)</sup>(非保存形)との比較を示す。Euler 方程式の解の方が, 衝撃波の位置が後方にあり, 衝撃波直後の圧力上昇が高いことがわかる。その他の場所では相異はあまり大きくない。図6は使用した格子の翼近くの分布図である。この格子は, 翼型解析用の格子形成プログラム AFMESH<sup>7)</sup> を使って作られたものである。翼のごく近くでは適度に格子が密になっている。なおこの格子は各ケース共通である。図7は揚力係数  $C_L$ , 抵抗係数  $C_D$ , 1/4翼弦長まわりのモーメント係数  $C_M$  の収束状況図である。横軸には一樣流の流速と翼弦長で無次元化した時間をとってある。各曲線とも500ステップごとに印がつけられている。各係数とも最終的に一定となり, 定常解に収束していることがわかる。図8には圧力の代表として圧力の翼面上の最小値をとり, その収束状況を表わす図である。かなり早くから定常解に収束していることが



```

JMAX = 125 KMAX = 35 KEDGE = 23 LV15 = 1
IUPRND = 1 NSFULL = 0 NTCOL = 3000
FSMACH = 0.75000 ALPHA = 2.00000 AN = .42000+05
CLT = 0.41412 CDT = 0.01109 CMTOC = 0.00250
MAX = 1.00000 MIN = 0.40000 DELT = 0.05000
    
```

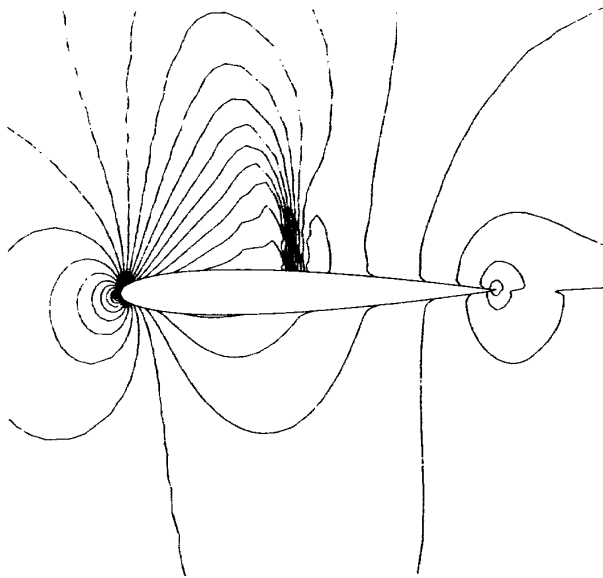
図2 等圧力線図



```

JMAX = 125 KMAX = 35 KEDGE = 23 LV15 = 1
IUPRND = 1 NSFULL = 0 NTCOL = 3000
FSMACH = 0.75000 ALPHA = 2.00000 AN = .42000+05
CLT = 0.41412 CDT = 0.01109 CMTOC = 0.00250
MAX = 1.25000 MIN = 0.55000 DELT = 0.05000
    
```

図3 等密度線図



JMAX = 125 KMAX = 35 KEDGE = 23 IVIS = 1  
 IUPWND = 1 NSFULL = 0 NTOTAL = 3000  
 FSIACH = 0.75000 ALPHA = 2.00000 AN = .42000+06  
 CLT = 0.41412 COT = 0.01109 CMTQC = -0.00250  
 MAX = 1.30000 MIN = 0.15000 DELT = 0.05000

— SONIC

図 4 等マッハ数線図

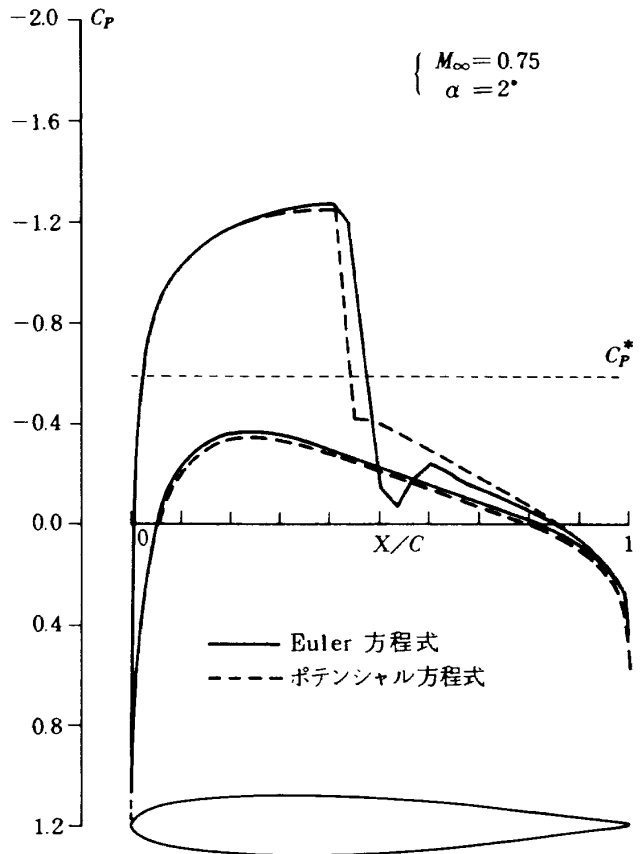
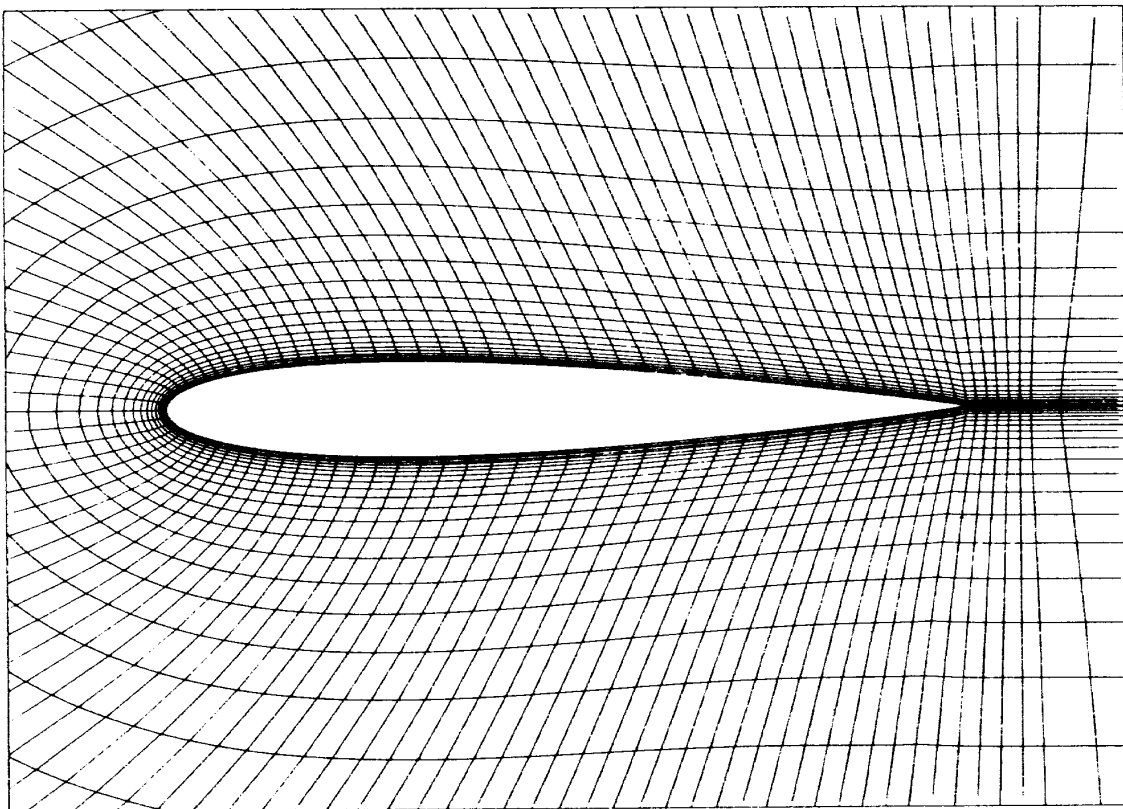


図 5 圧力係数分布比較図



OXMIN = -0.20000 FXMAX = 1.20000  
 FYMIN = -0.50000 FYMAX = 0.50000  
 SCALE = 20.00000 UVSCL = 0.02500

MESH DISTRIBUTION IN WINDOW

図 6 格子分布図

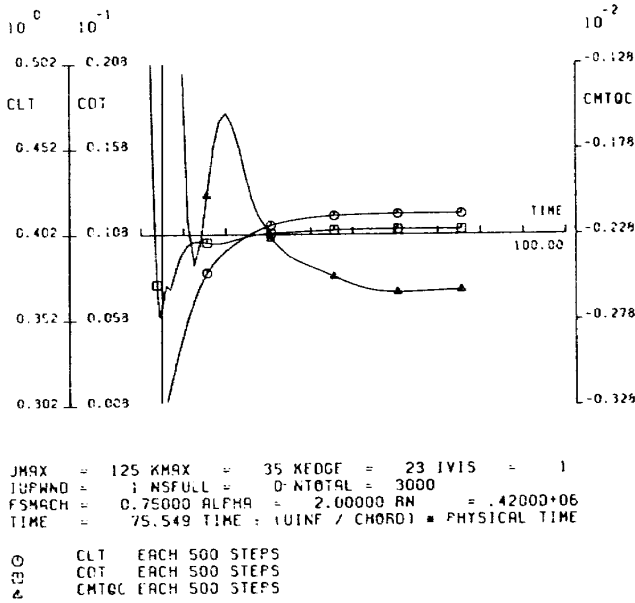


図7 空力係数収束状況図

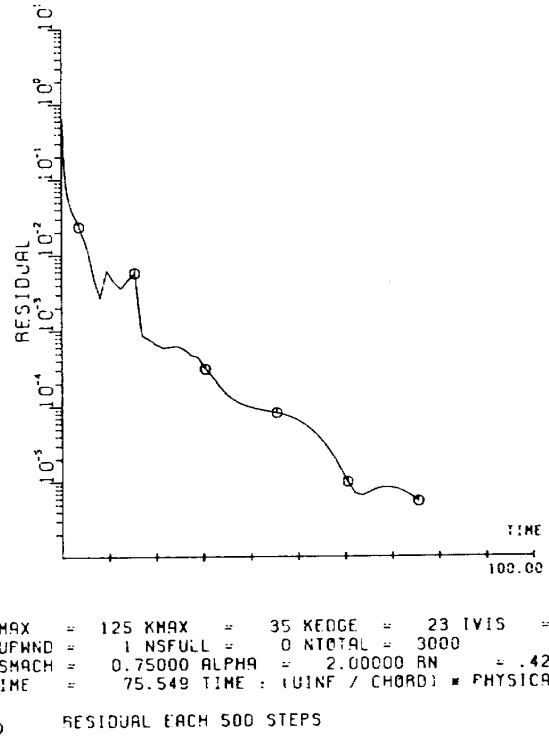


図9 残差収束状況図

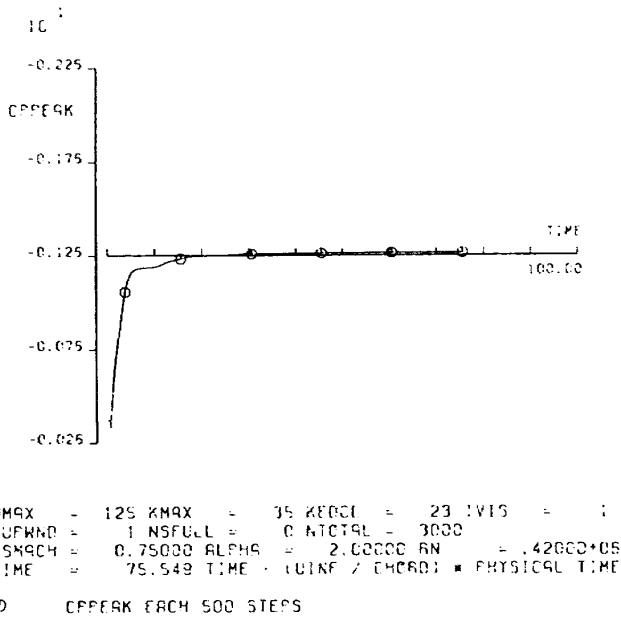


図8 圧力最小値収束状況図

わかる。図9は残差の収束状況図である。繰返し計算が進むにつれて残差が十分に小さくなる様子がわかる。

図10は一様流マッハ数 $M_\infty=0.75$ 、迎角 $\alpha=4^\circ$ の場合の、図11は $M_\infty=0.80$ 、 $\alpha=2^\circ$ の場合の圧力係数分布の比較図である。実線はEuler方程式の数値解(保存形)、破線はポテンシャル方程式の数値解(非保存形)である。どちらの場合も図5と傾向は同じであり、Euler式の方、衝撃波位置が後

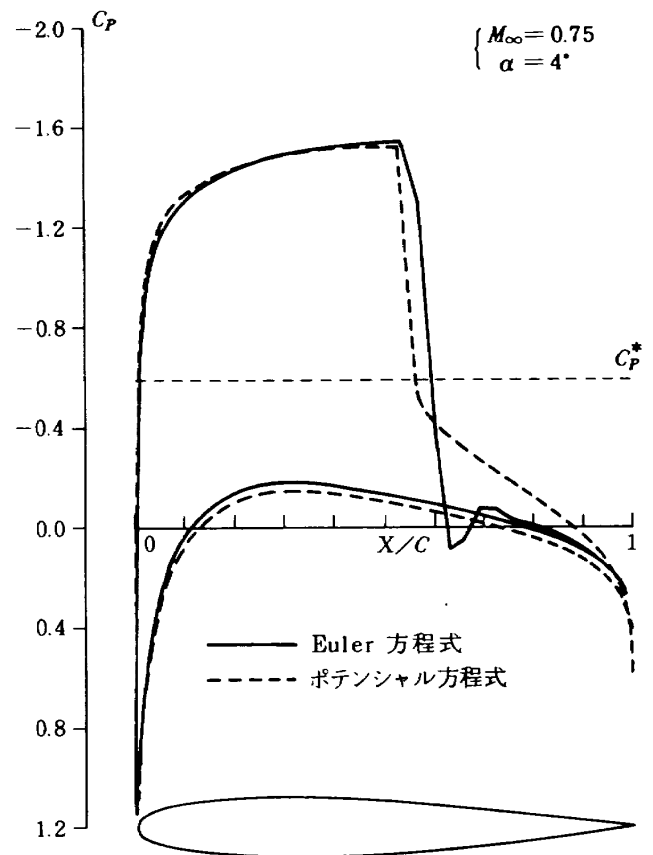


図10 圧力係数分布比較図

方にあり、衝撃波直後の圧力上昇が大きくなっていることがわかる。翼下面および上面の前縁から衝撃

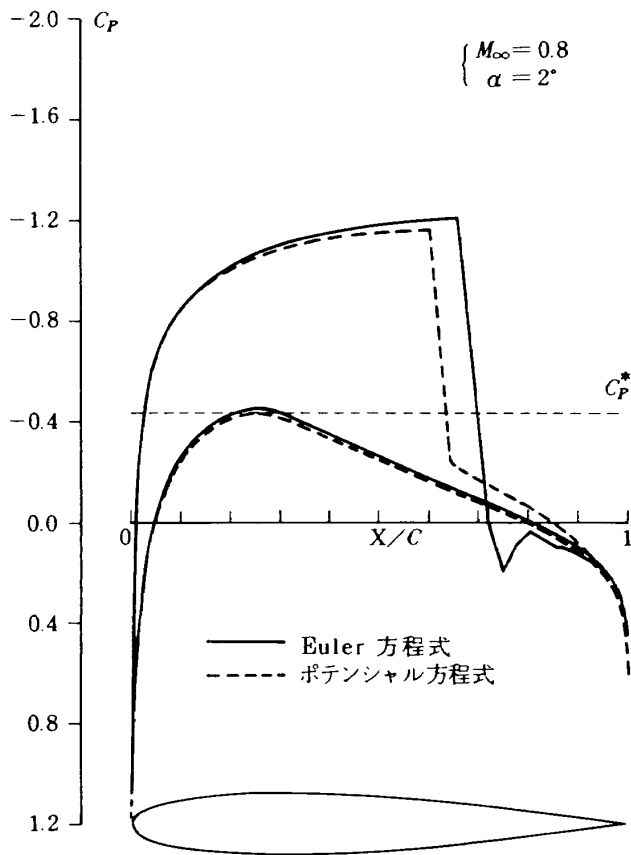
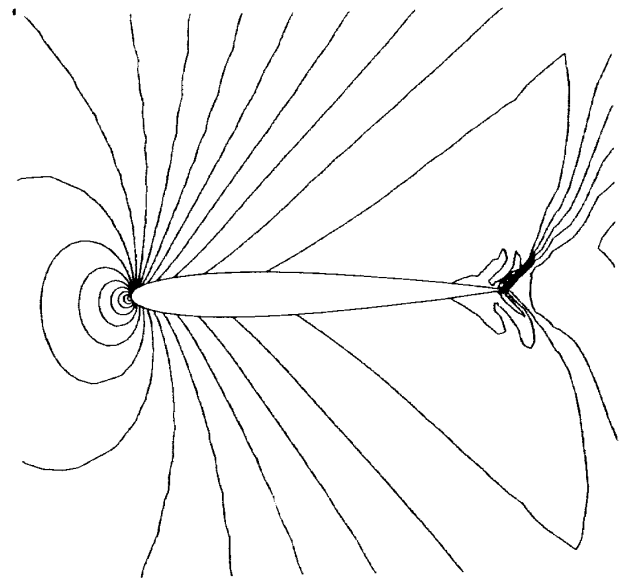


図 11 圧力係数分布比較図



JMAX = 125 KMAX = 35 KEDEG = 23 IVIS = 1  
 IUPWNO = 1 NSFULL = 0 NITRAL = 3000  
 FSMACH = 0.90000 ALPHA = 4.00000 AN = .42000+06  
 CLT = 0.40930 COT = 0.14059 CMTQC = -0.03705  
 MAX = 1.15000 MIN = 0.20000 DELT = 0.65000

図 13 等圧力線図

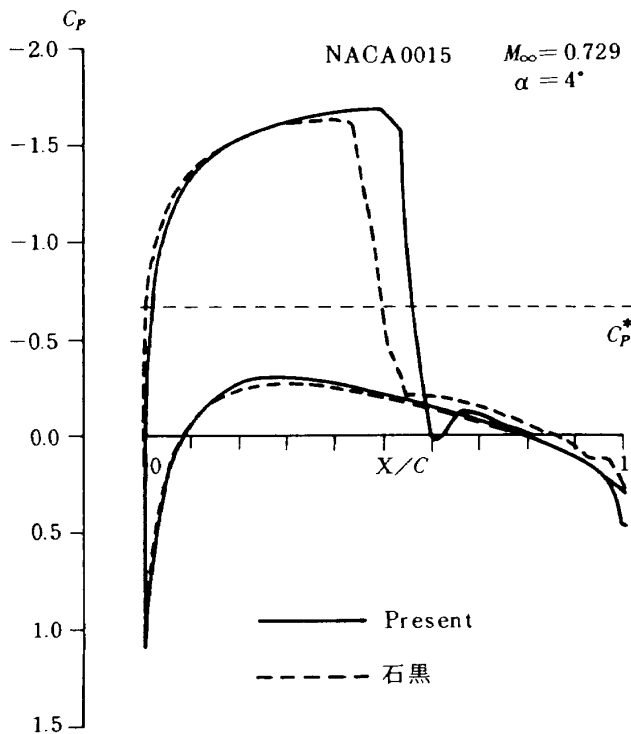
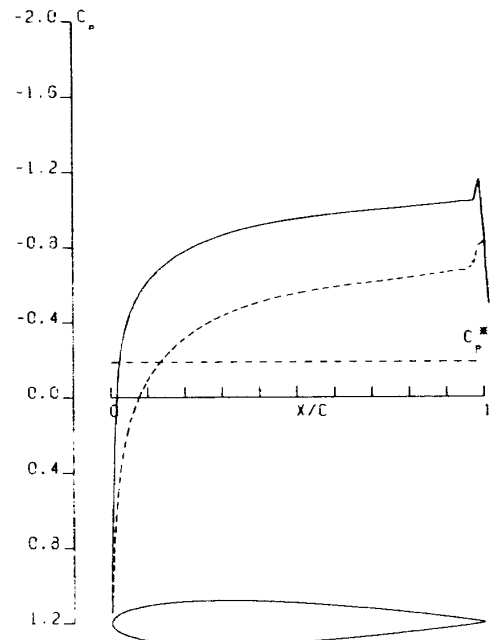


図 12 圧力係数分布比較図



JMAX = 125 KMAX = 35 KEDEG = 23 IVIS = 1  
 IUPWNO = 1 NSFULL = 0 ITER = 3000  
 FSMACH = 0.90000 ALPHA = 4.00000 AN = .42000+06  
 DT = 0.04000 SMU = 0.09000 SMUIM = 0.18000  
 CLT = 0.40930 COT = 0.14059 CMTQC = -0.03705  
 CPSTAG = -0.13735 CPPEAK = -1.15056

— UPPER  
 - - - LOWER

図 14 圧力係数分布図

波までの圧力分布にあまり相異はない。

図 12 は NACA0015 翼型, 一様流マッハ数  $M_\infty = 0.729$ , 迎角  $\alpha = 4^\circ$  の場合の圧力係数分布の比較図である。どちらも Euler 方程式の数値解であるが, 実線は保存形の対角比 IAF 法 (Present) であり, 破線は非保存形の 2 段階 Lax-Wendroff 法 (石黒<sup>9)</sup>) である。衝撃波の前までの上面および後縁付近を除く下面において, 圧力係数分布は非常に良く一致している。衝撃波の位置および衝撃波直後の圧力上昇は著しく相違している。この相違の原因は主として保存形と非保存形の違いにあると思われる。なぜなら, もしも計算法の違いに起因するならば, 圧力係数分布全体に相違することが予想されるからである。

図 13, 図 14 は一様流マッハ数  $M_\infty = 0.90$ , 迎角  $\alpha = 4^\circ$  の場合のそれぞれ等圧力線図と圧力係数分布図である。図 13 では後縁から上下面ともに斜め衝撃波が発生している様子がわかる。図 14 ではそれが超音速流から超音速流への衝撃波であることがわかる。衝撃波の直前で  $C_p$  分布にピークが見られるが, これはおそらく数値的な振動であろう。斜め衝撃波の後方が超音速流であり一様流が亜音速流であるから, 斜め衝撃波の下流に超音速流から亜音速流へ移るための垂直に近い衝撃波が存在するはずであるが, これらの図の範囲には残念ながら見られない。

## 11. まとめ

理論については, 基礎方程式の変換, ヤコビ行列, 直交系非保存形 Euler 方程式の対角化, Euler 方程式の非保存形と保存形の関係, 一般曲線座標系での Euler 方程式の対角比, IAF 解法, 対角化 IAF 解法, 境界条件の各項目について解説した。これらの理論に基づいて, 翼型まわりの非粘性遷音速流を解析するための, 2次元 Euler 方程式を解くプログラムを開発した。数値計算結果では, 翼面上で超音速流から亜音速流へ変わる垂直に近い衝撃波が生じる例と, 後縁の上下面で超音速流から超音速流への斜め衝撃波が生じる例とを示した。前者の例では非保存形のポテンシャル方程式の数値解および他の計算法による非保存形の Euler 方程式の数値解との比較

を行ない, 衝撃波の位置, 衝撃波直後の圧力上昇に相異がみられた。

## 参 考 文 献

- 1) Beam, R. & Warming, R.F., "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation - Law - Form," J. Comp. Phys., Vol.22, (1976) pp.87-110.
- 2) Viviand, H., "Conservative Forms of Gas Dynamic Equations," La Recherche Aerospaciale, No.1, (1974) pp.65-68.
- 3) Steger, J.L., "Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries," AIAA J., Vol.16, (1978) pp.679-686.
- 4) Warming, R.F., Beam, R.M. & Hyett, B.J., "Diagonalization and Simultaneous Symmetrization of the Gas-Dynamic Matrices," Math. Comp., Vol.29, No.132 (1975) pp.1037-1045.
- 5) Pulliam, T.H. & Chaussee, D.S., "A Diagonal Form of an Implicit Approximate-Factorization Algorithm," J. Comp.Phys., Vol.39, (1981) pp.347-363.
- 6) 河合伸坦, 石黒登美子, 神谷信彦, "二次元翼まわり遷音速流数値計算の汎用プログラム," 航空宇宙技術研究所資料, NAL TM-357 (1978).
- 7) 廣瀬直喜, 河合伸坦, 伊沢隆男, 菊地路子, "遷音速翼型解析法のための格子形成コード AFMESH の開発," 日本航空宇宙学会第13期年会講演会講演集, (1982) pp.158-161.
- 8) 河合伸坦, 廣瀬直喜, "高レイノルズ数遷音速流翼型解析プログラム NSFOIL の開発," 航空宇宙技術研究所報告, NAL TR-816(1984).
- 9) 石黒登美子, "二次元翼まわりの非粘性圧縮流の数値計算," 日本航空宇宙学会誌, 第25巻, 第278号 (1977) pp.118-124.

---

## 航空宇宙技術研究所報告831号

昭和59年8月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊎182  
印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山5-6-17

---

Printed in Japan