

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-835

境界要素法を用いた亜音速流中の
三次元揚力物体の空力特性の計算

柳 沢 三 憲

1984年9月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

境界要素法を用いた亜音速流中の 三次元揚力物体の空力特性の計算*

柳 沢 三 憲**

Calculations for Aerodynamic Characteristics on a 3-D Lifting Body in Subsonic Flow Using Boundary Element Method

Mitsunori YANAGIZAWA

ABSTRACT

A boundary element method for the evaluations of steady aerodynamic loads around complex configurations in subsonic flow has been developed using Green's function. Morino described the form of the integral equation, which is transformed into a set of linear algebraic equations. The velocity on the arbitrary point of the body surface is given by the derivative of the velocity potential on the point along the surface stream line.

The purpose of this paper is to present a new paneling and derivative technique which can be applied to any complex configuration. To evaluate the derivative of velocity potential on the surface, the surface element is replaced with the circular arc, which is determined by three collocation points in adjoining panels.

Aerodynamic quantities, such as pressure distributions, lift, pitching moment and drag of the actual airplane in compressible flow, are calculated as an example. Comparisons between numerical and experimental results show good agreement.

1. まえがき

近年、航空機の高性能化の要求に伴ない、その開発のための風洞試験の量および費用は膨大なものになって来た。⁹⁾従来、空力設計に必要な各種空力特性は主として風洞試験から得ていたがこれには高価な供試模型や多額の風洞試験費や時間と労力を必要とした。そこで大型電子計算機の発達に伴い、これらの空力特性を数値計算から求めようとするいわゆる数値風洞試験の概念が生まれた。

数値計算では、空力的なパラメータを自由に变化できるという利点がある。従来、三次元物体周りの計算は比較的簡単な理論模型を対象に行なわれたが、本報告ではどんな複雑な物体へも適用可能、すなわち、Prandtl-Glauert変換による圧縮性効果を考慮した亜音速流中における実機形状の計算プログラムの開発を目標として行った。

亜音速流中の実機形状の解析で解決しておかなければならない問題点は次の事項がある。①非圧縮流中と異なり、Prandtl-Glauert変換を行うので、その空間における境界条件の適用方法、②形状が複雑になるためのパネル数の増大、それに伴う連立一次方程式の元数が増し、計算機のメモリーの増大、③

* 昭和59年6月27日受付

** 空気力学第一部

主翼, 水平尾翼, ナセル・パイロン等の複数個の揚力面が存在するのでそれに随伴する複雑な後流渦面の設定, ④未知数として擾乱速度ポテンシャルが求まるが速度や圧力を求めるには三次元物体表面に沿う微分の方法, ⑤複雑な三次元数値模型の作成の時間の短縮化等の問題である。これらを解決すれば実機形状の空力特性も計算のみでほとんど風洞実験と同等な結果が得られる。

なお, 本報告で引用した実験データおよび数値模型作成のための座標の全ては三菱重工業株式会社の御好意により提供されました。⁷⁾

2. 記号

A_1, A_2	; パネル内の ξ, η 方向の基本ベクトル	n_r	; 円板の半径方向の単位ベクトル
a, b, c	; ベクトル, 図5参照	P	; 圧力
a, b, c	; 二次式の係数 (29) 式	$P_{++}, P_{+-}, P_{-+}, P_{--}$; パネルの四頂点の位置ベクトル
B_{hk}	; 境界条件による空力的影響係数	P_0, P_1, P_2, P_3	; パネル表面を局所座標系で表わすための係数ベクトル
C_p	; 圧力係数	R, R	; 変換された空間の二点間の距離, 同ベクトル
C_F	; 空力係数のベクトル	r	; 物理空間における二点間の距離
C_M	; 空気力のモーメント係数	R_e	; 翼弦を基準にしたレイノルズ数
C_{hk}	; 空力的影響係数	r_R	; 基準点の位置ベクトル
C_L	; 揚力係数	S	; 物体表面を表わす式
C_D	; 抗力係数	S_R	; 基準面積
C_{D0}	; 表面摩擦抵抗による抗力係数	ΔS_i	; パネルの面積
$C_{L\alpha}$; 揚力傾斜	s	; 物理空間の物体表面に沿う距離
$E(p)$; 領域関数	s_c	; 係数, (32)式参照
e_1, e_2	; パネル面内で互いに直交する単位ベクトル	T_R	; 基準長さ
G	; グリーン関数	t_R	; 基準点周りの単位ベクトル
i, j, k	; x, y, z 方向の単位ベクトル	t_c	; 係数, (32)式参照
L	; 直線を表わすベクトル	U_∞	; 一様流の速度
L_1	; 直線の始点を示す位置ベクトル	V	; 速度ベクトル
L_2	; 直線の方法を示すベクトル	X, Y, Z	; 変換された直交座標系
M_∞	; 一様流のマッハ数	x, y, z	; 物理空間の直交座標系
N	; 変換された空間におけるパネルの法線単位ベクトル	α	; 迎角
NC	; 広域的パネル内の翼弦方向のパネルの数	$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$; 圧縮性のパラメータ
NS	; 広域的パネル内の翼幅方向のパネルの数	γ	; 空気の比熱比
n	; 物理空間のパネルの法線単位ベクトル	δ	; Dirac のデルタ関数
n_r	; 円板の法線単位ベクトル	δ_{hk}	; Kronecker のデルタ
		η	; 半翼幅で無次元化した翼幅方向の位置, パネル内の局所座標
		θ	; 円周角
		λ	; 接線単位ベクトル
		ξ	; パネル内の局所座標
		ρ	; 密度
		Σ	; 変換された空間の物体表面
		σ	; 物理空間の物体表面
		Φ	; 速度ポテンシャル
		φ	; 擾乱速度ポテンシャル

3 亜音速定常流に関する積分方程式

流れは非粘性で、初期回転はなく (Irrotational), 等エントロピー的に変化する理想気体であるとする。以下、文献 2 および 5 から引用して記述すると、速度ポテンシャル Φ と擾乱速度ポテンシャル φ を次式の様

$$\Phi = U_\infty(x + \varphi) \quad (1)$$

亜音速定常流の擾乱速度ポテンシャル φ に関する線型方程式は次式ようになる。

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

ここに $\beta = (1 - M_\infty^2)^{1/2}$ である。さて、三次元物体の表面は一般に次式で表わせる。

$$S(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

また、流れが物体表面に沿って流れると言う境界条件は

$$\nabla \Phi \cdot \nabla S = 0 \quad (4)$$

(1), (3) 式を用いて (4) 式は

$$\nabla \varphi \cdot \nabla S = -\frac{\partial S}{\partial x} \quad (5)$$

$$\text{または} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{-\frac{\partial S}{\partial x}}{|\nabla S|} \quad (6)$$

一方、亜音速流の Green 関数は次式の解として与えられる。

$$\nabla^2 G - M_\infty^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x - x_*, y - y_*, z - z_*) \quad (7)$$

無限遠で $G = 0$ である。ここに δ は Dirac のデルタ関数である。

(7) 式に φ を掛け、(2) 式に G を掛けて差引き、さらに領域関数 E を掛けて積分する。また、(7) 式の解である G を代入する。付録 1 を参照。

$$G = \frac{-1}{4\pi r_\beta} \delta \quad (8)$$

さらに、ガウスの発散定理を用いて体積積分から面積積分に変えると次のような亜音速定常流に関する積分方程式が得られる。図 1。(A-12) 式より、

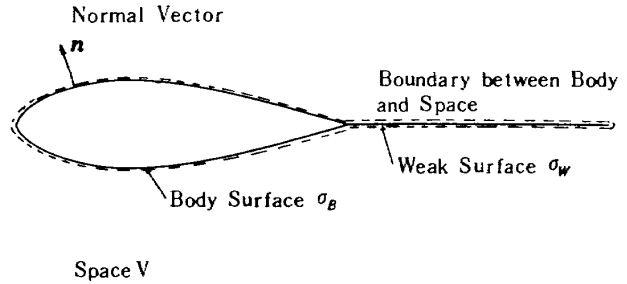


図 1 物体と流れ場の境界面

$$4\pi E(P_*) \varphi(P_*) = - \iint_{\sigma_B} [\nabla S \cdot \nabla \varphi - M_\infty^2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}] \frac{1}{r_\beta |\nabla S|} d\sigma + \iint_{\sigma_w} [\nabla S \cdot \nabla \left(\frac{1}{r_\beta} \right) - M_\infty^2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_\beta} \right)] \varphi \frac{1}{|\nabla S|} d\sigma \quad (9)$$

ここに

$$r_\beta = [(x - x_*)^2 + \beta^2 \{(y - y_*)^2 + (z - z_*)^2\}]^{1/2} \quad (10)$$

である。

ここで、 $\varphi(P_*)$ は P_* 点の φ であり、 $E(P_*)$ は領域関数 (Field function) と呼ばれ、次のように定義する。

$$\begin{aligned} P \text{ 点} \text{ が流体領域内にあるとき} & E = 1 \\ P \text{ 点} \text{ が物体表面上にあるとき} & E = \frac{1}{2} \\ P \text{ 点} \text{ が物体内部にあるとき} & E = 0 \end{aligned}$$

次に、この積分方程式に次の境界条件を課して解く。

BC 1 ; 流れは物体表面 σ_B に沿って流れる。(6) 式より

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{-U_\infty \cdot n}{U_\infty} \quad (11)$$

BC 2 ; 後流洞面 σ_w の上下面におけぬ速度ポテンシャルの差 $\Delta \varphi$ は流線に沿って一定である。

$$\Delta \varphi = \varphi_u - \varphi_l = \text{const} \quad (12)$$

翼について言えば kutta の条件に相当する。

BC 3 ; 流れは無限遠方で一様流と等しくなる。

$$\varphi = 0 \quad (13)$$

境界要素法ではこの積分方程式の中に境界条件が含まれているのが特徴であるが非圧縮流の場合と異なり境界条件がやや複雑になる。詳しくは後述する。

次に Prandtl-Glauert の変換を行う。

$$X = \frac{x}{\beta}, Y = y, Z = z, \varphi = \varphi \quad (14)$$

(9) 式は変換されて、次式になる。

$$4\pi E(P_*)\varphi(P_*) = -\oint\oint \frac{\partial\varphi}{\partial N} \frac{1}{R} d\Sigma + \oint\oint \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R}\right) \varphi d\Sigma \quad (15)$$

Prandtl-Glauert 変換では (14) 式から分かるように、物体を一様流方向に $\frac{1}{\beta}$ 倍引き伸ばした空間として記述される。したがって、法線ベクトル \mathbf{N} は X, Y, Z 空間における Σ 面上の法線ベクトルを表し、物理空間 (x, y, z) における σ 面上の法線ベクトル \mathbf{n} とは異なる。また、 R は変換された空間における P, Q 点間の距離を表す。

$$R(P, Q) = \{(X - X_*)^2 + (Y - Y_*)^2 + (Z - Z_*)^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

さらに物理空間の σ 面と変換された空間の Σ 面との関係は次の様に見える。

$$\frac{1}{r_\beta} \frac{d\sigma}{|\mathbf{r}_S|} = \frac{1}{R} \frac{d\Sigma}{|\mathbf{r}_0 S|} \quad (17)$$

法線ベクトルはそれぞれ、

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|}, \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_0 S}{|\mathbf{r}_0 S|} \quad (18)$$

ここで \mathbf{r} は x, y, z 空間の、 \mathbf{r}_0 は X, Y, Z 空間のハミルトンの演算子である。

選点 (Control point) を物体表面に取り、後流渦面の項を分離して書くと次式の様になる。

$$2\pi\varphi(P_*) = -\oint\oint_{\Sigma_B} \frac{\partial\varphi}{\partial N} \frac{1}{R} d\Sigma + \oint\oint_{\Sigma_B} \varphi \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R}\right) d\Sigma + \iint_{\Sigma_w} \Delta\varphi \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R}\right) d\Sigma \quad (19)$$

ここで、 $\Delta\varphi$ は後流渦面の擾乱速度ポテンシャルの上下面の差である。但し、 $\oint\oint$ は積分の Cauchy の主値を表わす。(19) 式は φ に関する第二種 Fredholm 型積分方程式である。

次に境界条件をもう少し詳細に検討する。ここでは物理空間における境界条件を用いて、(19) 式を解き、得られた擾乱速度ポテンシャルを物理空間で微分し、速度を求める。さらに、圧力係数を求めるのに理想気体の等エントロピー変化を仮定した関数式を用いることにする。付録 2。

物理空間と Prandtl-Glauert 変換した空間は次の関係がある。

$$\frac{|\mathbf{r}_0 S|}{|\mathbf{r}_S|} = \left[\frac{(1 - M_\infty^2) \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = (1 - M_\infty^2 n_x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

また、

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial N} &= \mathbf{N} \cdot \nabla\varphi = \frac{1}{|\mathbf{r}_0 S|} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}_0 S|} \left[(1 - M_\infty^2) \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right] \\ &= \frac{|\mathbf{r}_S|}{|\mathbf{r}_0 S|} \left(\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} - M_\infty^2 \frac{1}{|\mathbf{r}_S|} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{(1 - M_\infty^2 n_x^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} - M_\infty^2 n_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

もし、微少擾乱の仮定を用い $M_\infty n_x \approx 0$ のときは、

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N} \approx \frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad (22)$$

である。したがって、(19) 式は次式で近似される。

$$2\pi\varphi(P_*) = -\oint\oint_{\Sigma_B} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{1}{R} d\Sigma + \oint\oint_{\Sigma_B} \varphi \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R}\right) d\Sigma + \iint_{\Sigma_w} \Delta\varphi \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R}\right) d\Sigma \quad (23)$$

本報告では境界条件として、(22) 式を用いて計算を行った。しかし、比較のため、(21) 式の境界条件を用いて、繰返し (Iteration) 計算を行った。その結果は n_x の大きいところで少しの差異は存在したがその効果は小さく (22) 式で十分であることが示された。

4 パネルによる離散化

積分方程式 (23) 式をパネルを用いて離散化する。揚力物体の表面を図 3 のように四辺形要素に分割し、積分方程式を連立一次方程式に帰着する手順を述べる。特に実機形状の場合、全表面にわたり表面微分が効率的にでき、しかも、パネルが作成し易い方法が望ましい。

(1) 物体表面および後流渦面を四辺形要素 Σ_k, Σ_k' に分割する。 X, Y, Z 空間の分割で図 2 を参照されたい。

(2) 各要素上の変数 $\varphi, \Delta\varphi, \mathbf{n}$ は要素の中心における値で代表させる。要素内の分布は一定であると仮定する。

(3) $\Delta\varphi$ の値は、 C_w を一辺とする物体表面の上下面要素の φ の値の差で近似する。

ここに C_w は物体表面と後流渦面との交線である。

以上の方法により物体表面 Σ_B 上の擾乱速度ポテンシャル φ は要素の分割数の自由度に離散化されて、次の連立一次方程式が得られる。

$$[\delta_{hk} - C_{hk} - W_{hk}] \{\varphi_k\} = [B_{hk}] \left\{ \left(\frac{U_\infty}{U_\infty} \cdot \mathbf{n} \right)_k \right\} \quad (24)$$

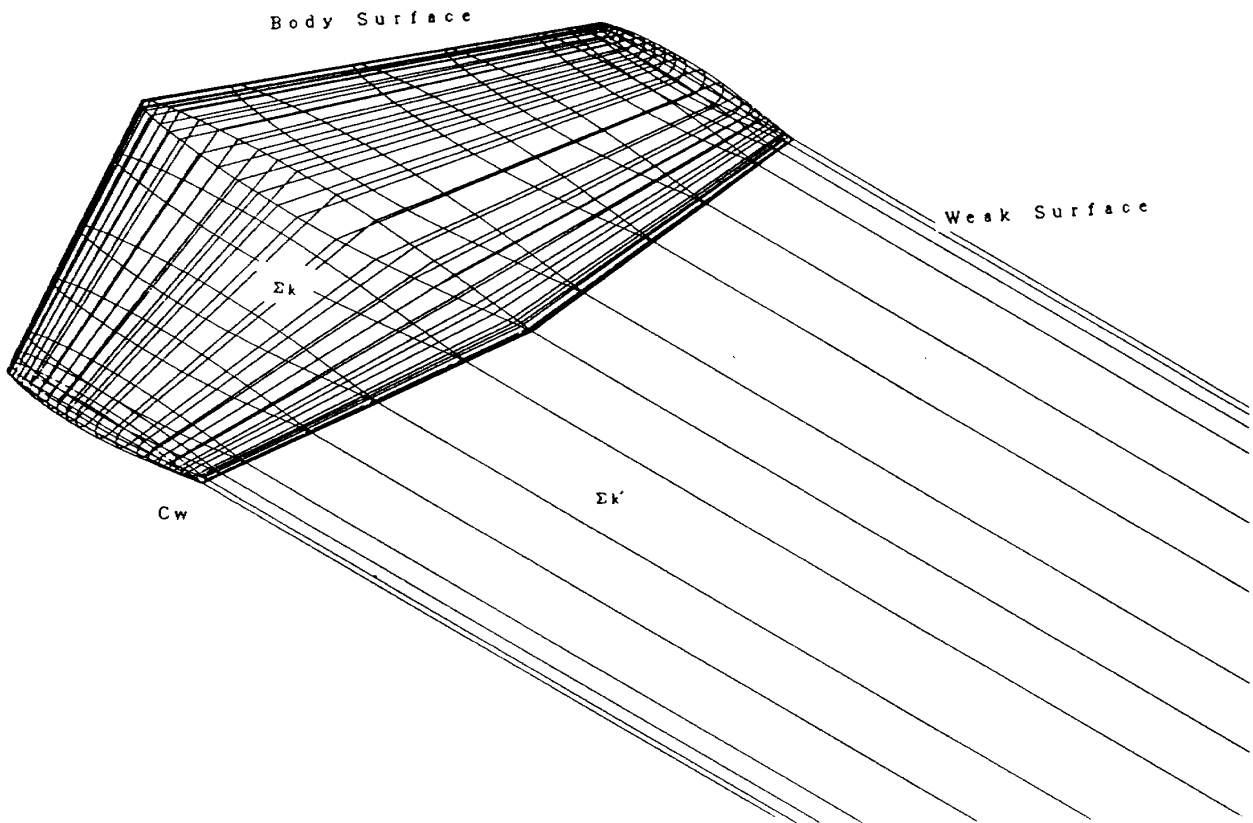


図2 物体表面と後流渦面

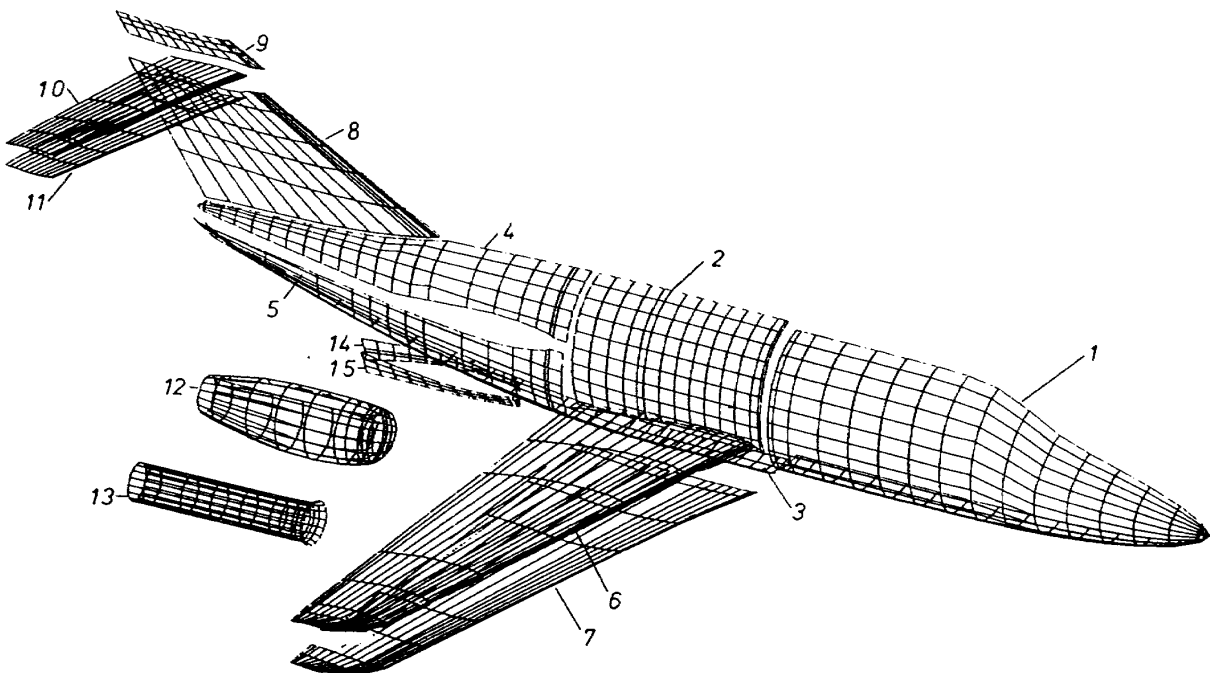


図3 広域的パネルとパネルの分割法

ここに δ_{hk} は Kronecker のデルタであり、 \mathbf{n} は物理空間の法線ベクトルである。また、空力的影響係数 C_{hk} , B_{hk} , W_{hk} は次のようになる。

$$C_{hk} = \left[\frac{1}{2\pi} \oint_{\Sigma_k} \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R} \right) d\Sigma \right]_{P=P_k} \quad (25)$$

$$B_{hk} = \left[\frac{1}{2\pi} \oint_{\Sigma_k} \frac{1}{R} d\Sigma \right]_{P=P_k} \quad (26)$$

$$W_{hk} = \left[\frac{\pm 1}{2\pi} \iint_{\Sigma_k'} \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R} \right) d\Sigma \right]_{P=P_k} \quad (27)$$

W_{hk} は要素 Σ_k が C_w と隣り合う場合上面(下面)では + (-) の符号をとる。

擾乱速度ポテンシャルは空力的影響係数の逆行列を右辺の列ベクトルに掛けることにより求められる。

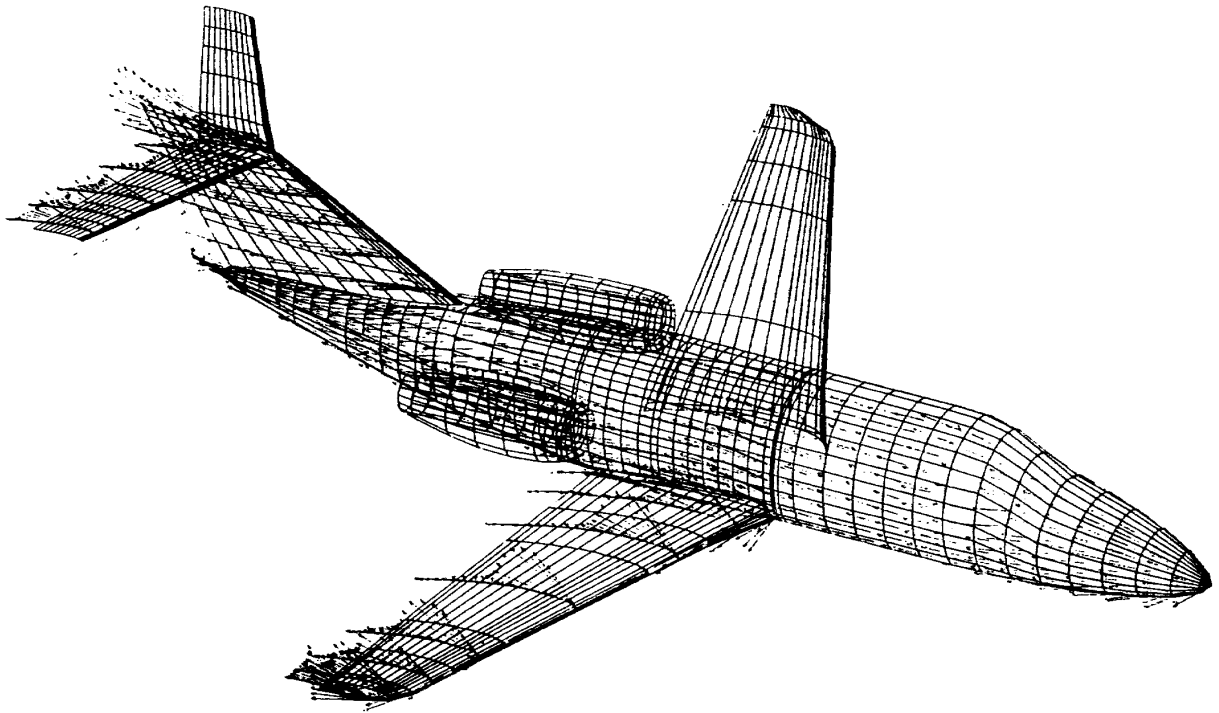


図 4 a 迎角 4.47° の場合の速度ベクトル

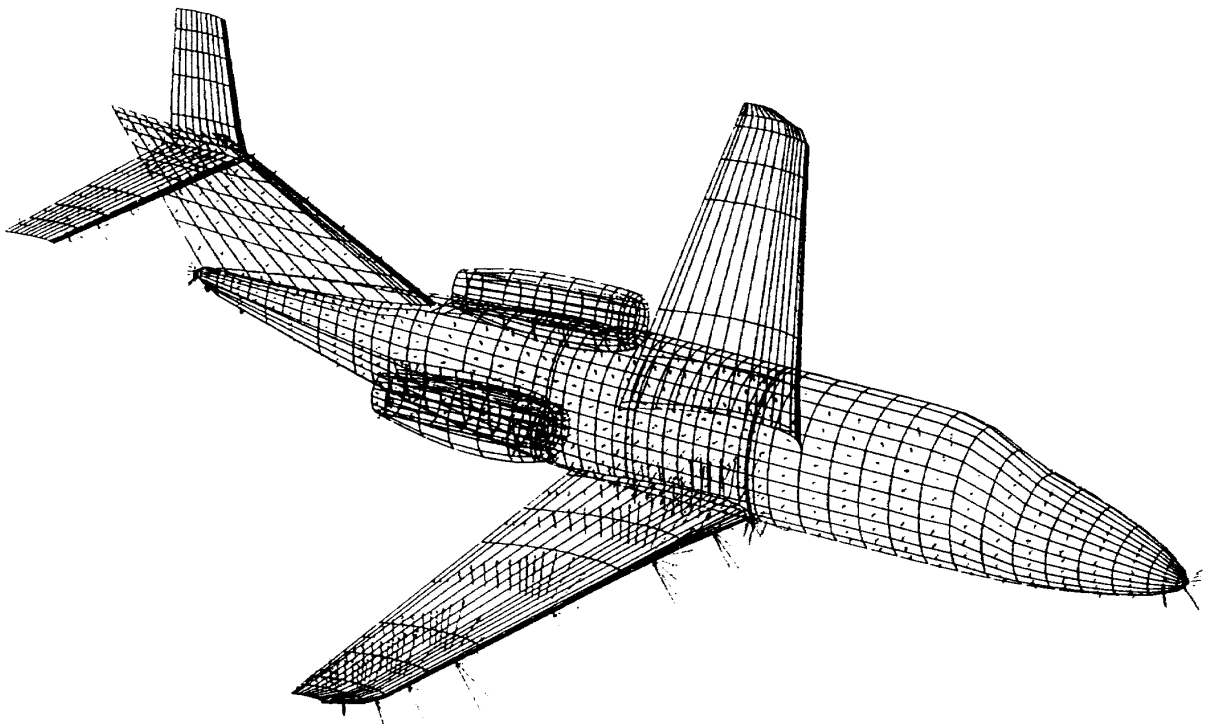


図 4 b 迎角 4.47° の場合の圧力分布

$$\{\phi_k\} = [\delta_{hk} - C_{hb} - W_{hk}]^{-1} [B_{hk}] \{(n_x)_k\} \quad (28)$$

境界条件は物理空間で合せ、空力的影響係数は変換された空間の値を用いて得られた ϕ_k を物理空間で微分を行う。

5 速度ポテンシャルの微分

得られた擾乱速度ポテンシャルに一樣流の速度ポテンシャルを加えて、物理空間座標で微分し速度ベクトルや圧力係数を求める⁸⁾

Morino の行っている①積分方程式を微分して速度を求める方法¹⁾や②求めようとするパネルを含め周辺9枚のパネルの速度ポテンシャルから中心のパネルの速度を求める方法⁵⁾等がある。

①の方法では新に影響係数を計算することになるので計算時間が非常に掛る。②の方法では計算時間は速いが翼の後縁や広域的領域の境界付近が複雑になる。また、胴体上の後流渦面放出線の近くの条件が考慮されていない。

そこで、翼の後縁や広域的領域の境界付近の微分が簡単に行え、パネルの中心すなわち ϕ と同じ位置の速度が得られ、しかも計算時間が非常に速い本方法を採用する。

隣り合う連続する三つのパネルのポテンシャル ϕ

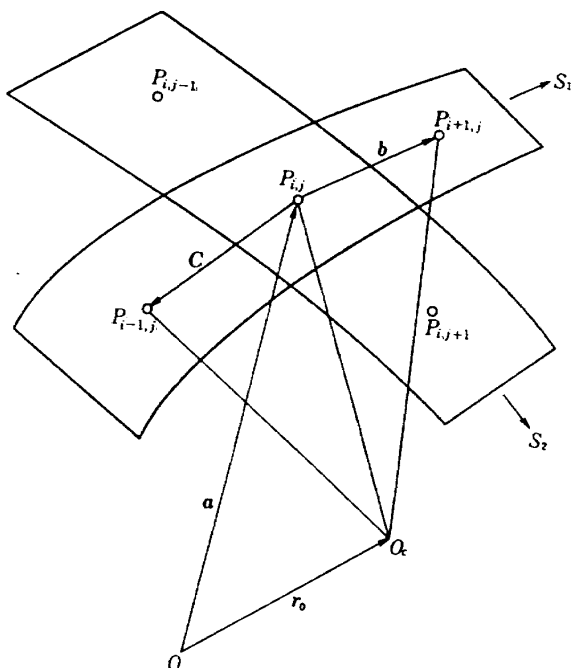


図5 三点を通る円による微分の方法

について、その変化は表面距離 s に関して二次式で表わされると仮定して、微分を行う。図5。

$$\phi = U_\infty (x + \varphi) = as^2 + bs + c \quad (29)$$

a, b, c は二次曲線の係数で三点の速度ポテンシャルから計算して求められる。従って、 s_1, s_2 方向の微分は

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds_1} &= \phi_{s_1} = 2a_1 s_1 + b_1 \\ \frac{d\phi}{ds_2} &= \phi_{s_2} = 2a_2 s_2 + b_2 \end{aligned} \quad (30)$$

次に、点 P における s_1, s_2 方向の接線単位ベクトルは次のようにして求める。隣り合う三点が一直線上に並んでいる場合の接線単位ベクトルは

$$\lambda = \frac{b}{|b|} \quad (31)$$

また、隣り合う三点が直線に並んでいない場合は、その三点を通る円を考える。円の中心の位置ベクトルは r_0 、 P 点の位置ベクトル a, P_{ij} と $P_{i-1,j}$ 間のベクトルを c, P_{ij} と $P_{i+1,j}$ 間を b とする。 r_0 はベクトル a, b, c を用いて次のように書ける。

$$r_0 = a + s_c b + t_c c \quad (32)$$

ここに

$$s_c = \frac{(b^2 - b \cdot c) c^2}{2(b^2 c^2 - (b \cdot c)^2)} \quad (33)$$

$$t_c = \frac{(b \cdot c - c^2) b^2}{2((b \cdot c)^2 - b^2 c^2)} \quad (34)$$

従って、 P_{ij} 点における接線単位ベクトル λ は r_0, a, b, c および n_n, n_r を用いて、次の様に表わされる。

$$\lambda = n_n \times n_r \quad (35)$$

ここで、 n_n は三点を通る平面に垂直なベクトルであり、 n_r はその円の中心から P 点へ向う半径方向のベクトルである。

$$n_n = \frac{b \times c}{|b \times c|} \quad (36)$$

$$n_r = \frac{a - r_0}{|a - r_0|} \quad (37)$$

結局、 s_1, s_2 方向のそれぞれの接線単位ベクトル λ_1, λ_2 は

$$\lambda_1 = \frac{b_1}{|b_1|}, \quad \lambda_2 = \frac{b_2}{|b_2|} \quad \text{三点が直線の場合} \quad (38)$$

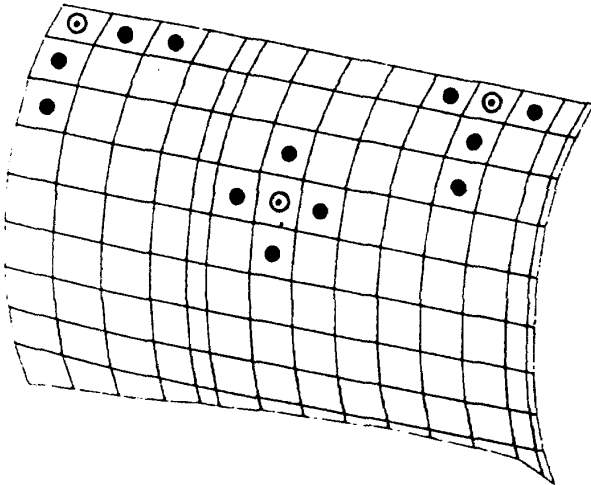


図 6 三次元物体表面に沿う微分の方法

$$\lambda_1 = \mathbf{n}_{n1} \times \mathbf{n}_{r1}, \quad \lambda_2 = \mathbf{n}_{n2} \times \mathbf{n}_{r2} \quad (39)$$

三点が曲線の場合

パネル P に接し, s_1 方向に \mathbf{e}_1 をとり, s_1 に直角方向を \mathbf{e}_2 とする直交化を行うとそれぞれの方向の微分は次の式で表わせる。

$$\phi_{e1} = \frac{d\phi}{de_1} = \frac{d\phi}{ds_1} \quad (40)$$

$$\phi_{e2} = \frac{d\phi}{de_2} = \frac{1}{1 - (\lambda_1 \cdot \lambda_2)^2} \{ \phi_{s2} - (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \phi_{s1} \} \quad (41)$$

次に, 理想気体が等エントロピー的变化すると考えて, 定常流の場合の無次元圧力係数は次の式で表わせる。

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{2}{r M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{r-1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{\nabla\phi \cdot \nabla\phi}{U_\infty^2} - 1 \right) \right]^{\frac{r}{r-1}} - 1 \right\} \quad (42)$$

ここに $\nabla\phi \cdot \nabla\phi = \phi_{e1}^2 + \phi_{e2}^2$ で, r は比熱比である。速度ベクトル \mathbf{V} は

$$\mathbf{V} = \phi_{e1} \lambda_1 + \phi_{e2} (\lambda_2 - (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \lambda_1) \quad (43)$$

で表わせる。

6 各種空力係数の計算

各パネルの中心における圧力が求められたので各要素の面積と法線ベクトルを掛けて, 各種空力係数は次式により求められる。なお, 要素の面積はヘロンの公式を用いた。

$$C_F = \frac{1}{S_R} \iint_{SA} C_P \mathbf{n} ds = \frac{1}{S_R} \sum_{i=1}^N C_{Pi} \mathbf{n}_i \Delta S_i \quad (44)$$

$$\begin{aligned} C_M &= \frac{1}{S_R T_R} \mathbf{t}_R \cdot \iint_{SA} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_R) \times \mathbf{n} C_P ds \\ &= \frac{1}{S_R T_R} \sum_{i=1}^N \mathbf{t}_R \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_R) \times \mathbf{n}_i C_{Pi} \Delta S_i \end{aligned} \quad (45)$$

ここに S_R は基準面積, T_R は基準長さ, \mathbf{t}_R は基準点回転方向の単位ベクトル, \mathbf{r}_R は基準点の位置ベクトル, \mathbf{n} は各パネルの法線ベクトル, ΔS_i は各要素の面積である。

7 実機形状のパネル化の方法

複雑な構造のパネル化の方法を高速民間小型機を例に述べる。

まず, 胴体は右舷側について, 5 個の広域的なパネルに分割する。その際, 図 3 に示すように揚力面すなわち, 主翼, パイロン, 水平尾翼等を取付ける位置で後流へ向って, 各揚力面の後縁とそれに続く胴体母線上から後流渦面を放出する必要があるので広域的な分割線をこの線に沿って取る。

さらに, 主翼, 水平尾翼, パイロンの上下面およびナセルの外側, 内側の面で各 1 枚ずつ取ってある。また, 垂直尾翼は下部と上部の各 1 枚である。したがって, この機体の形状の広域的なパネルは右舷側だけで, 合計 15 枚である。

一枚の広域的なパネル内では翼弦方向と翼幅方向それぞれ, NC と NS 箇のサブパネルに分割する。その際, 胴体の先端部や最後部の様に三角形になる部分も一辺が対辺とくらべ非常に短い一辺 (10^{-5}) の四辺形を作り, これを三角形と見做して用いる。

表 1 に各広域的パネルの分割数を示した。また, 左舷側も右舷側と全く同一の並び方で配置した。これらの数値模型は今回は鏡面对称の場合の計算を行ったが横滑り用計算の入力データとしてもそのまま使えるように配慮したものであり, この例では総パネル数は 3174 枚である。

表1 広域的パネルの分割

要素名	NC	NS
胴体 1	16	13
胴体 2	14	9
胴体 3	26	4
胴体 4	21	5
胴体 5	16	4
主翼上面	18	8
主翼下面	18	8
垂直尾翼下部	16	5
垂直尾翼上部	16	3
水平尾翼上面	16	5
水平尾翼下面	16	5
ナセル外側	10	16
ナセル内側	10	16
パイロン上面	14	3
パイロン下面	14	3
右舷側の合計		1587

8 後流渦放出線の設定

実機形状において、胴体部の後流渦面の条件〔(23)式の右辺第三項〕、すなわち、胴体部の揚力に関連する問題であるがこれらをどの様に取り扱うかということである。これは翼について言えば翼後縁のKuttaの条件に相当するもので翼胴結合体では、主翼の後縁に続く胴体母線上に沿って胴体後部まで、この後流渦放出線（後流渦面と物体表面との交差線）を設定することにより解決された。^{3),6)}

これと同様な考え方で複数個の揚力面がある場合、すなわち、主翼、水平尾翼、ナセル、パイロン等の付いた場合、各揚力面の後縁から続く胴体上の母線に沿って放出することにする。

また、ナセルの内部流と外部流が後縁でKuttaの条件を満すものとして、この部分からも後流渦面を放出させている。したがって、実機形状の後流渦面の設定は図7に示す如く一連の連続した渦面になる。後流渦放出線 C_w を機体の後方から見たところを実線で示した。図7(a)。また、図7(b)は機体と後流渦面の鳥瞰図である。

9 三次元数値模型の作製

本計算プログラムの入力データに当る三次元数値模型の作製には可成の時間を要する。製作方法としては胴体部の模型、主翼の模型、T型尾翼の模型、ナセルおよびパイロンの模型等を順次製作し、個別のファイルに書いて行く。こうして、各部品ごとに作製したデータを基に全機形状に組立を行う。その際、三次元曲面同志で交線を作り、その交線に従って整形するプログラムを作成した。その原理図を図8に示す。数学的には曲面 S_A と直線 L_B との交点を求めることになる。

今、四辺形の双曲面を考える。曲面の四隅の座標を用いて、面内の一点は次式のように局所座標で表わされる。（付録3）。

$$P = P_0 + \xi P_1 + \eta P_2 + \xi \eta P_3 \quad (46)$$

ここで、 P_0, P_1, P_2, P_3 は四隅の座標とは(C-2)式の関係があり、曲面 S_A 内の任意の一点は ξ, η の関数として与えられる。つまり、 ξ, η を $0 \leq |\xi| \leq 1, 0 \leq |\eta| \leq 1$ の範囲変化すれば、1パネルの全表面を表わすことになる。

次の交差するパネルの辺を直線 L_B で表わすと次式のように書ける。

$$L = L_1 + t L_2 \quad (47)$$

交点は $P = L$ として、 ξ, η, t を求めればよい。

(46),(47)式を連立させ、 $\xi \eta$ の項を消去するため、両辺に P_3 のベクトル積を取る。

$$(L_1 - P_0) \times P_3 = \xi P_1 \times P_3 + \eta P_2 \times P_3 - t L_2 \times P_3 \quad (48)$$

この式は ξ, η, t を未知数とする三元連立一次方程式であるから解ける。

交点の解の内、 $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$ かつ $0 \leq t \leq 1$ の条件が成立するとき、その直線はその平面と交わるとする。今、パネルAの四隅の座標を $P_{++}^A, P_{+-}^A, P_{-+}^A, P_{--}^A$ 、パネルBの四隅の座標を $P_{++}^B, P_{+-}^B, P_{-+}^B, P_{--}^B$ とすれば、直線に沿う接線方向の単位ベクトルを n_B とし、曲面の法線単位ベクトルを n_A とするとこれらのベクトルの内積 $n_A \cdot n_B$ の符号を用いて、 P_{++}^B 点の座標を交点Cに移すか、 P_{-+}^B 点に移すかを判断する。この例では P_{-+}^B 点を交点Cに移せばよい。こうして、自動的に求めた座標の一例を図9に示す。

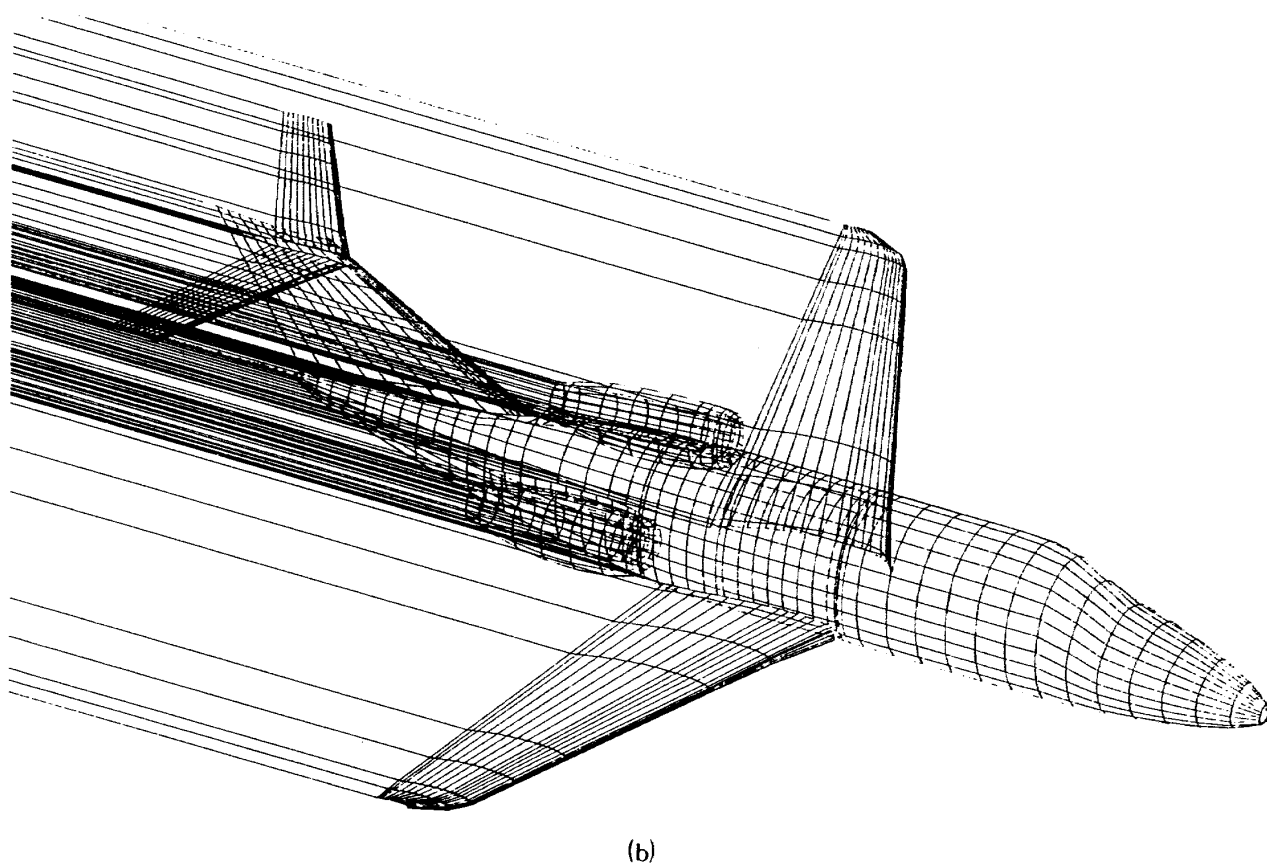
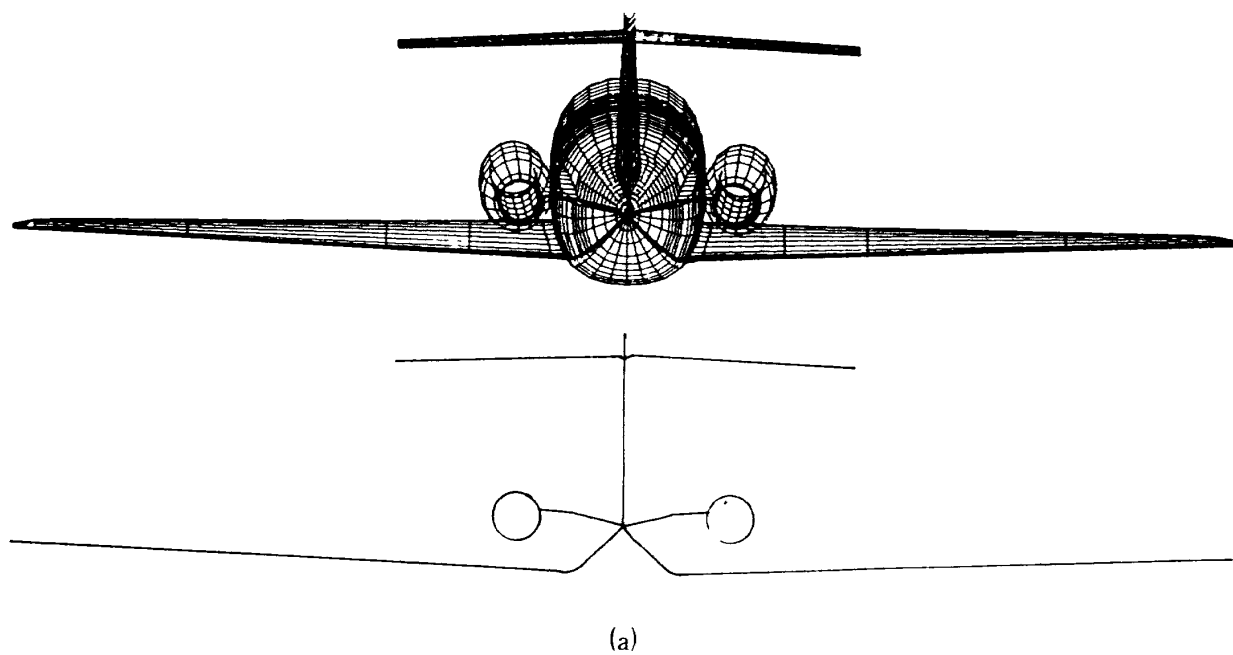


図7 実機形状の後流渦面の放出線(太線)の仮定

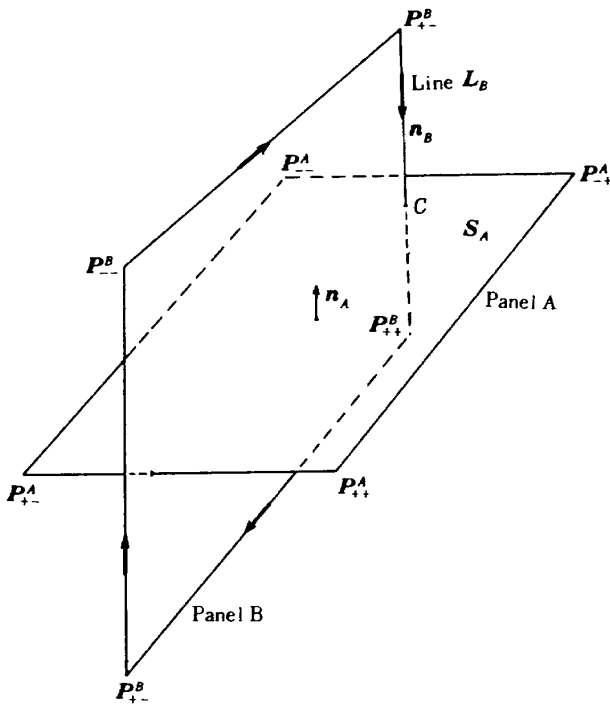


図 8 三次元パネルの交線を求める原理図

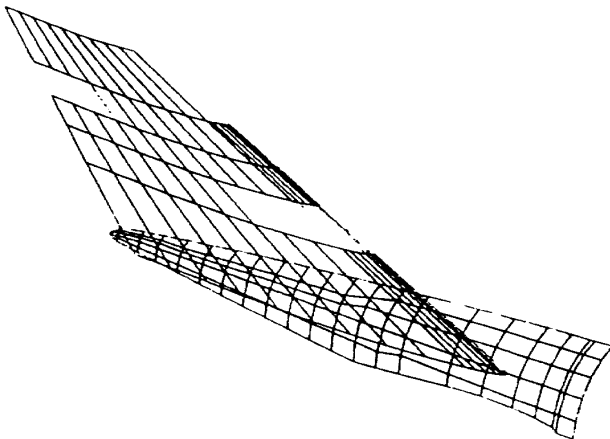
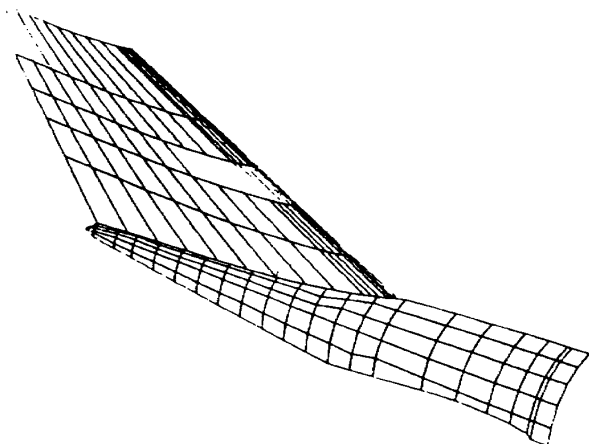
図 9 a 胴体後部パネルと垂直尾翼パネル
(整形前)

図 9 b 交線を求め自動的に整形されたパネル

この例では胴体尾翼と垂直尾翼の下部とを干渉させて作ったもので図 9 a は整形前の座標のパネルである。整形後のパネルを図 9 b に示したが、パネルの交線が正確に求められている。

主翼と胴体、垂直尾翼と胴体、パイロンとナセル、パイロンと胴体と言う様に順次組合せて行き、その度に交線を求めるプログラムを通して整形すると全機模型形状に仕上げて行くことができる。

9 計算結果および考察

超音速流で圧縮性の影響を考慮した(23)式を用いて計算した。その圧縮性の変化が線型の範囲のデータと比較するため、マッハ数 $M = 0.6$ の場合の高速民間小型機を例として、全機形態について計算を行い、測定値と比較し、この開発したプログラムの実用性等を検討した。

① 圧力係数について

全体的な機体周りの流れの様子を見るため、マッハ数 $M = 0.6$ で迎角 $\alpha = 4.47^\circ$ の場合の速度ベクトルを図 4 a に示した。また、圧力分布を図 4 b に示す。なお、ナセル上の速度ベクトルや圧力分布は煩雑さを避けるため記入していない。

同機体については、 $M = 0.6$ で $\alpha = 6.63^\circ, 4.47^\circ, 0.07^\circ, -3.21^\circ, -6.45^\circ$ の 5 ケースについて計算を行った。その内、代表的な例について、説明し、他の迎角では特徴のある部分の説明に留める。

図 10 a は $M = 0.6, \alpha = 4.47^\circ$ の場合の機体上の圧力分布を示す。横軸は機体軸方向の距離を機体長で無次元化したものである。機体の円周角 θ は機体底部(腹側)を $\theta = 0^\circ$ とし、機体上部(背側)を $\theta = 180^\circ$ として示してある。 $\theta = 180^\circ$ のコックピット ($x/l = 0.23$) 付近の負圧のピーク値や $\theta = 90^\circ$ の主翼 ($x/l = 0.44$) やパイロン ($x/l = 0.63$) 付近の負圧のピーク値は計算結果と測定値との圧力の傾向およびその絶対値等は良く一致していることが分る。また、 $\theta = 0^\circ$ における分力分布値もその変化の傾向が一致していることからこの様な複雑な形状に対する表面圧力分布は全体的に良好に予測できていると言える。

図 10 b は同じ条件の場合の主翼面上の圧力分布を示す。半翼幅で無次元化した翼幅方向の位置を η

で定義し、 $\eta = 0.19, 0.32, 0.55, 0.85$ の4つの翼幅位置における値を示した。迎角がある程度小さい場合、今の例では $\pm 4^\circ \sim 5^\circ$ 以下の場合には主翼全体にわたり非常に良い精度で一致しているが $\pm 6^\circ$ 以上では局所的に非線型性が表われている。

次に図10cには水平尾翼面上の圧力分布を示す。翼根に近い $\eta = 0.12$ では計算値と測定値のずれが少し見られるが、その他の翼幅位置ではほとんど一致していると見做される。

さらに図10dは垂直尾翼面上の圧力分布を示す。 $Z = 0.29$ が機体に近い位置で、 $Z = 0.81$ は水平尾翼のすぐ下の位置に相当する。興味ある現象は水平尾翼との干渉のため、 $Z = 0.81$ の位置における負圧のピーク値が迎角によって変化するがその傾向を良く表わしているのが他の迎角の場合の図を参照すれば分かる。

以上で、 $\alpha = 4.47^\circ$ の場合の説明を終るが他の迎角の場合も同様の見方である。他の迎角については、特徴的なものについてのみ説明する。図11bは $M = 0.6$ で $\alpha = 6.63^\circ$ の場合の主翼面上の圧力分布である。この迎角では、部分的に超音速領域が発生することが予想される。事実、翼幅方向 $\eta = 0.55$ 、 $\eta = 0.85$ における圧力分布を観察すると翼弦長方向位置($x/c = 0.18$)付近の翼上面では衝撃波の発生が見られる。したがって、本計算の線型理論の範囲内では流れの非線型性による圧力の変化を表わすことができない。衝撃波の前方では線型理論と負圧側に大きく、また、衝撃波の後方では線型理論と比べ小さくなっていることが分る。 $\eta = 0.85$ では特に顕著に表われている。

図14bは $M = 0.6$ で $\alpha = -6.45^\circ$ の場合の主翼面上の圧力分布を示したものだが、翼幅方向位置 $\eta = 0.55$ では $x/l = 0.15$ の付近で翼面衝撃波が見られる。さらに翼端に近い位置 $\eta = 0.85$ では翼端剥離による現象と思われ全翼弦しかも上下面で計算値と大きくずれているのが見られる。

この様に部分的に剥離現象があっても、その剥離領域を除く部分では、依然、この計算は成立しているのである。主翼の翼端部以外の各部分では、 $\alpha = \pm 6^\circ$ の範囲で測定値との一致は依然良い。

これらの圧力分布との比較から言えることは、マ

ッハ数 $M = 0.6$ では $\alpha = \pm 6^\circ \sim 7^\circ$ の範囲で部分的に剥離領域や超音速領域ができるが機体全体としては未だこの線型理論が成立する範囲と考えられる。

次に図15は境界条件を厳密に適用するため、(21)式を用いた繰返し計算を行った。第1回目の計算では(21)式の $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ として境界条件式を用い、(23)式を解く。得られた φ を x について微分を行い、第2回目を解く方法である。この方法で4回までの繰返し計算を行ったが n_x の大きい付近でわずかに変化するのみで、繰返し計算の必要はあまりないようである。図15は2回の繰返し計算の結果である。

② 各種空力係数について

計算から得られた圧力係数を物体表面に渡って、(44)、(45)式を用いて揚力係数、モーメント係数、抗力係数として求めることができる。

図16は揚力係数を示す。マッハ数 $M = 0.6$ で、翼弦長を基準としたレイノルズ数 $R_e = 1.5 \times 10^5$ である。○印は測定値であり、□印は本方法による計算値である。揚力係数 C_L および揚力係数 C_L の値も共に精度良く求められている。

次に機体軸上の $x_0/L = 0.3375$ の点の周りのモーメント係数を図17に示した。横軸は迎角 α で縦軸はモーメント係数である。 C_M は正の迎角の計算値で C_M の絶対値がやや小さく計算されているが全体的には合っていると見える。

最後に、抗力係数 C_D について述べる。図18。迎角に対する抗力係数は計算では誘導抵抗(Induced drag)が求められる。したがって、測定値では表面摩擦抵抗係数 C_{D0} を差引いた量を縦軸にプロットした。 $\alpha = -6.45^\circ$ の C_D を除いて、測定値と一致している。 $\alpha = -6.45^\circ$ の C_D を吟味すると、誘導抵抗は揚力に関連して発生する抵抗であることから、正側の迎角 $\alpha = 4.47^\circ$ の揚力係数が $C_L = 0.62$ であり、負側の迎角 $\alpha = -6.45^\circ$ の揚力係数が $C_L = -0.63$ である。このことから $\alpha = -6.45^\circ$ の $C_D = 0.017$ と $\alpha = 4.47^\circ$ の $C_D = 0.016$ とがほとんど等しく計算されていることは妥当であると判断される。ところで、測定値 $C_{DE} = 0.0385$ は翼端剥離の現象やスティングの干渉等の別の要素が加わって大きな値が得られたものと推測される。

③ 計算機のメモリーおよび計算時間

開発した本計算プログラムは当所の計算センターの大型電算機、FACOM M-380 を使用し計算を行った。実機形状の数値模型ではパネルの枚数がどうしても増大し、連立一次方程式の元数が増大する。本数値模型の例では 1587×1587 の行列が必要で、プログラム全体では 21_{Mb} のメモリーを要する。

また、計算時間は1ケースで2352秒掛った。その内訳は空力的影響係数の計算に1212秒、連立一次方程式の解法に1137秒である。表面微分を行い速度および圧力係数の計算および空力係数の計算で3秒である。この最後の部分の計算時間では本方法が非常に速い。ちなみに、Morinoの文献1に示されている方法は新たに空力影響係数を求めるのに似た計算を2回行う必要があり非常に時間が掛る。例えばこの部分だけの計算時が2038秒であった。

また、同じくMorinoの文献5の方法は計算時間は速い。しかし、広域的な領域の境界に接するパネルの取扱いについて、翼の後縁に接するパネルについては述べてあるが、胴体上のそれについては取扱いが不明瞭である。

次に文献3の方法は微分を行った際、速度および圧力の着眼点パネルの中心からはずれた位置で求め、広域的な領域の境界に接するパネルの速度が求めにくい難点がある。

10 結 論

以上のような考察から次のことが言える。

- (1) 超音速流中で実機形状の模型に対して各種空力係数すなわち圧力係数、揚力係数、モーメント係数および抗力係数等が求められる。
- (2) この三次元物体の複雑な形状に対する後流渦放出線の設定方法を明らかにした。
- (3) 複雑な形状の数値模型を「交線を求めるプログラム」を使用することにより短時間で作成できる。
- (4) 圧縮性に関して $M = 0.6$ では局所的には遷音速非線型性が現われるが、全体的にはこの線型理論で十分な精度で各種空力係数が求められることが分った。
- (5) 計算速度では1ケースで2352秒程掛った。

さらにプログラムを改良して行き高速化を計る必

要がある。

あとがき

本方法は非圧縮流中における簡単な理論模型に対する計算法として文献4ですでに報告したので基本的な記述はほとんど同じである。しかし、本報告では圧縮流への拡張を第一の目的とした。マッハ数 $M = 0.6$ の実験データと比較し、計算された空力特性から判断し十分な精度である。このことから圧縮性の効果は十分記述できたと思う。

第二の目的は実機形状への適用性である。本報告のようなパネルの分割法を用いれば、どんな複雑な三次元物体でも適用できるので、産業界において充分使用に耐えるものと確信する。

本研究を遂行するに当たり、空気力学第一部和田勇部長に終始激励された。次に、模型座標および風洞試験データ等については三菱重工業(株)の協力を得た。ここに深く感謝致します。

なお、東京理科大学の植木俊孝君には数値模型の作成を手伝ってもらいました。日本タイムシア社の岩本福子氏にはこのプログラムの汎用化を行ってもらった。

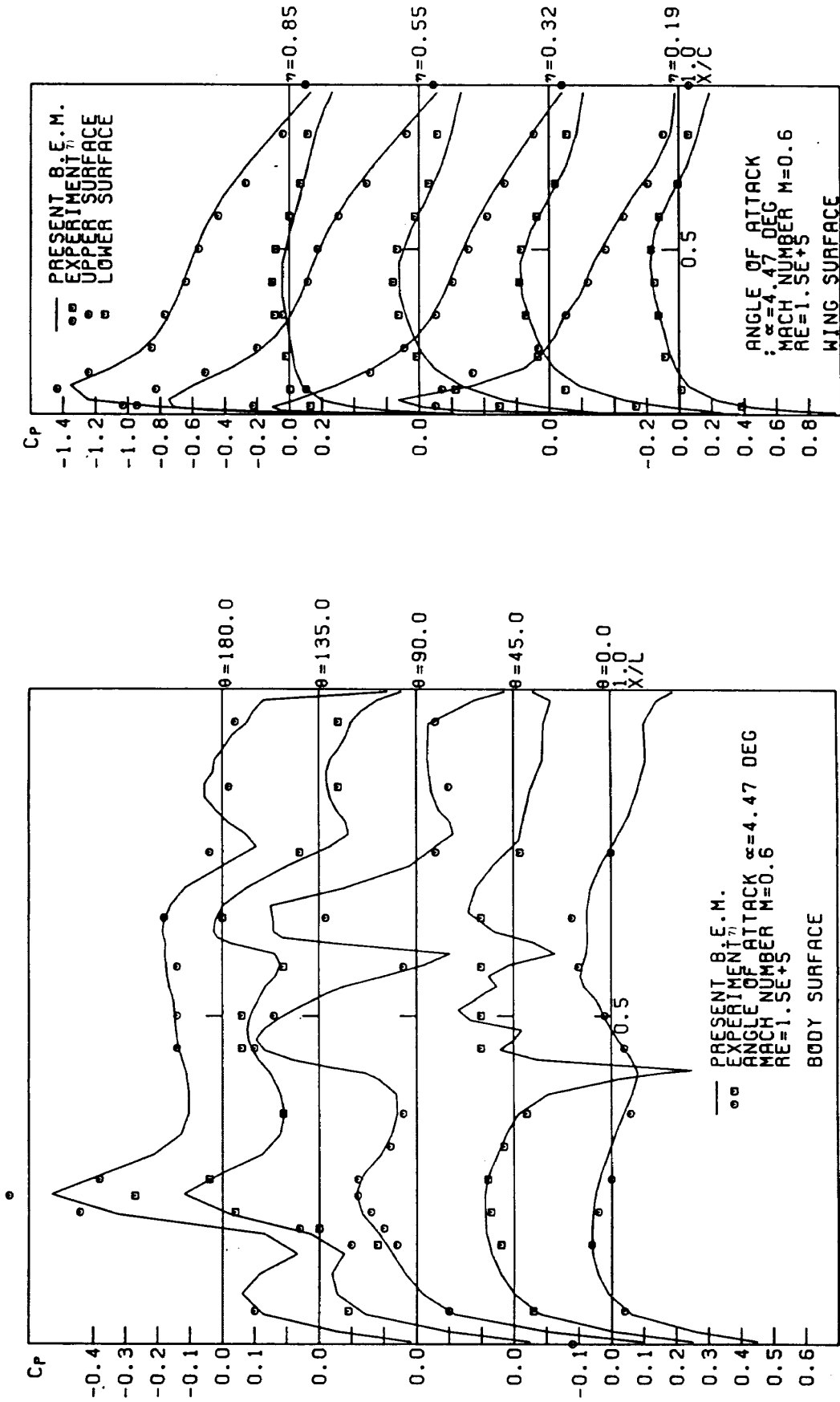


図 10 b $\alpha = 4.47^\circ$, $M = 0.6$ の主翼面上の圧力分布

図 10 a 迎角 $\alpha = 4.47^\circ$, マッハ数 $M = 0.6$ の場合の胴体上の圧力分布

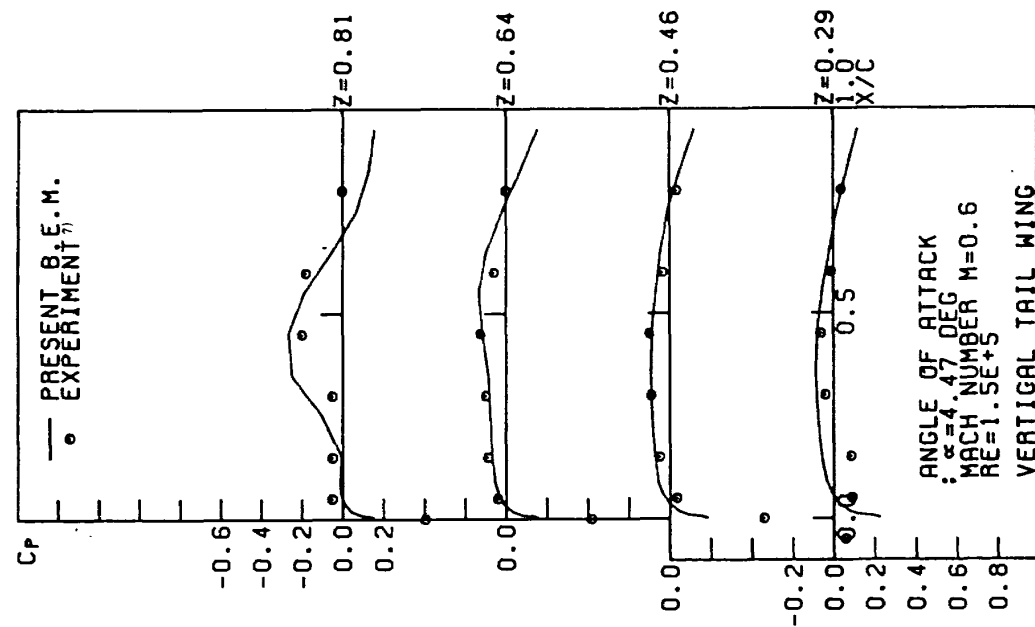


図 10 d $\alpha = 4.47^\circ$, $M = 0.6$ の垂直尾翼面上の圧力分布

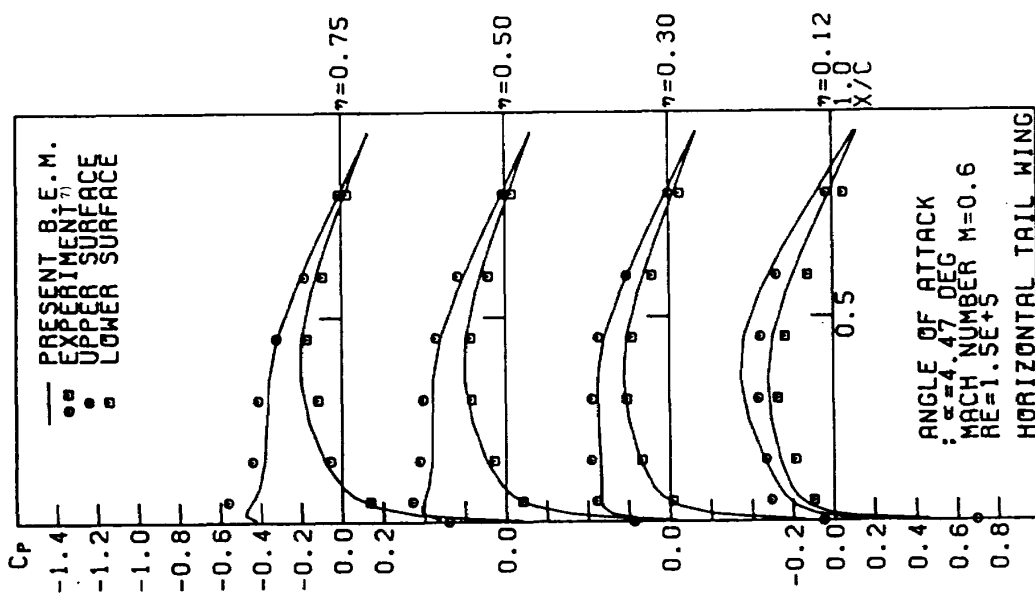


図 10 c $\alpha = 4.47^\circ$, $M = 0.6$ の水平尾翼面上の圧力分布

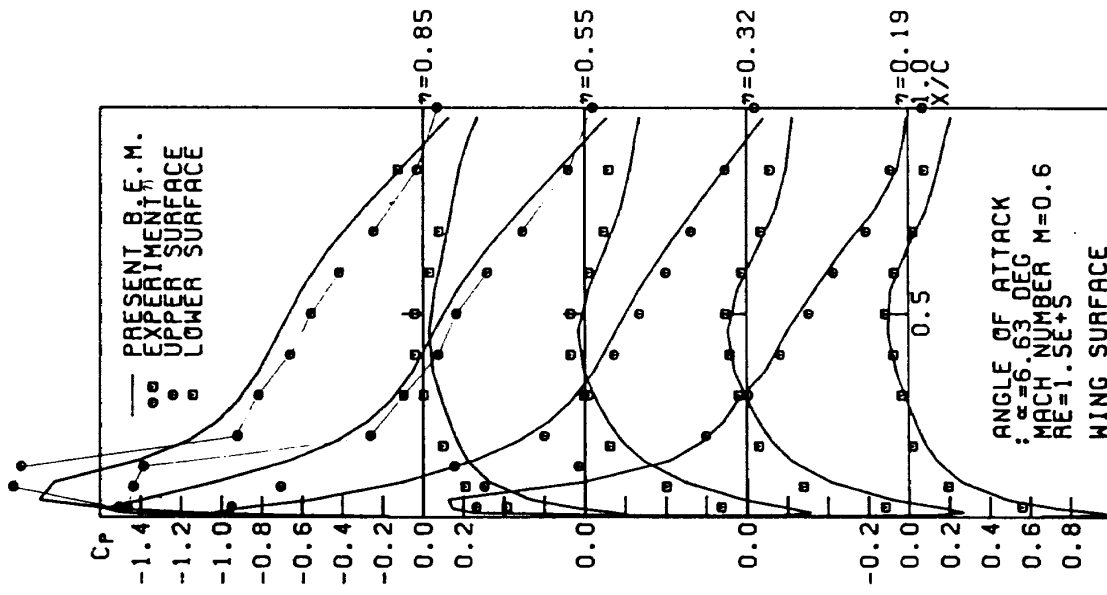


図 11 b $\alpha = 6.63^\circ$, $M = 0.6$

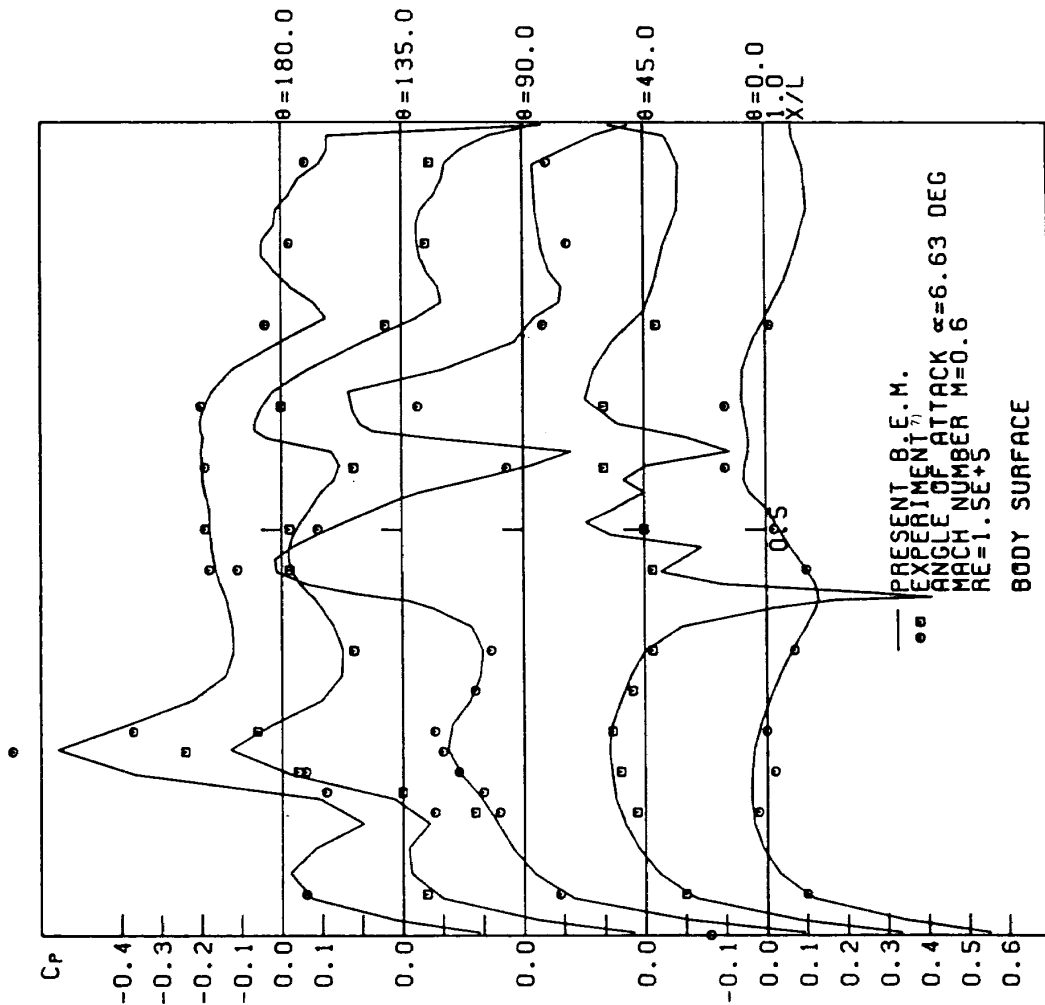
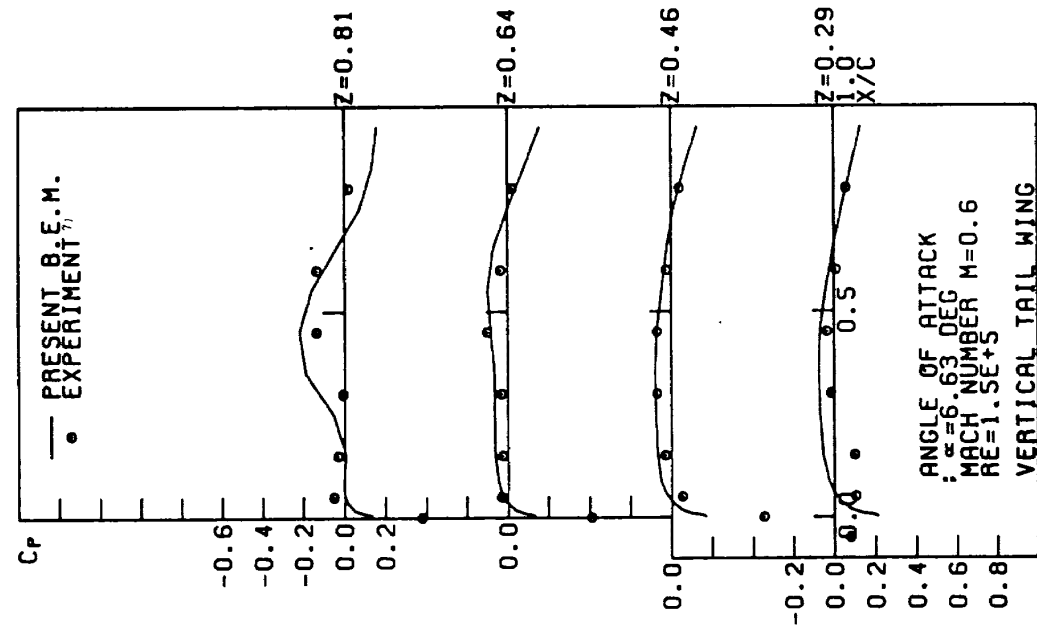
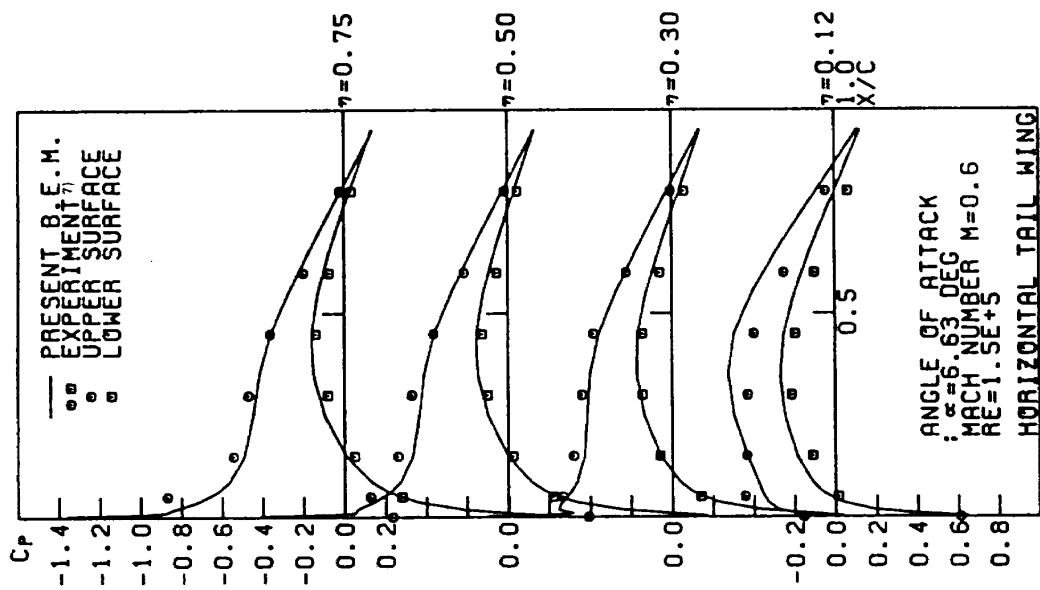


図 11 a $\alpha = 6.63^\circ$, $M = 0.6$



11 d $\alpha = 6.63^\circ$, $M = 0.6$



11 c $\alpha = 6.63^\circ$, $M = 0.6$

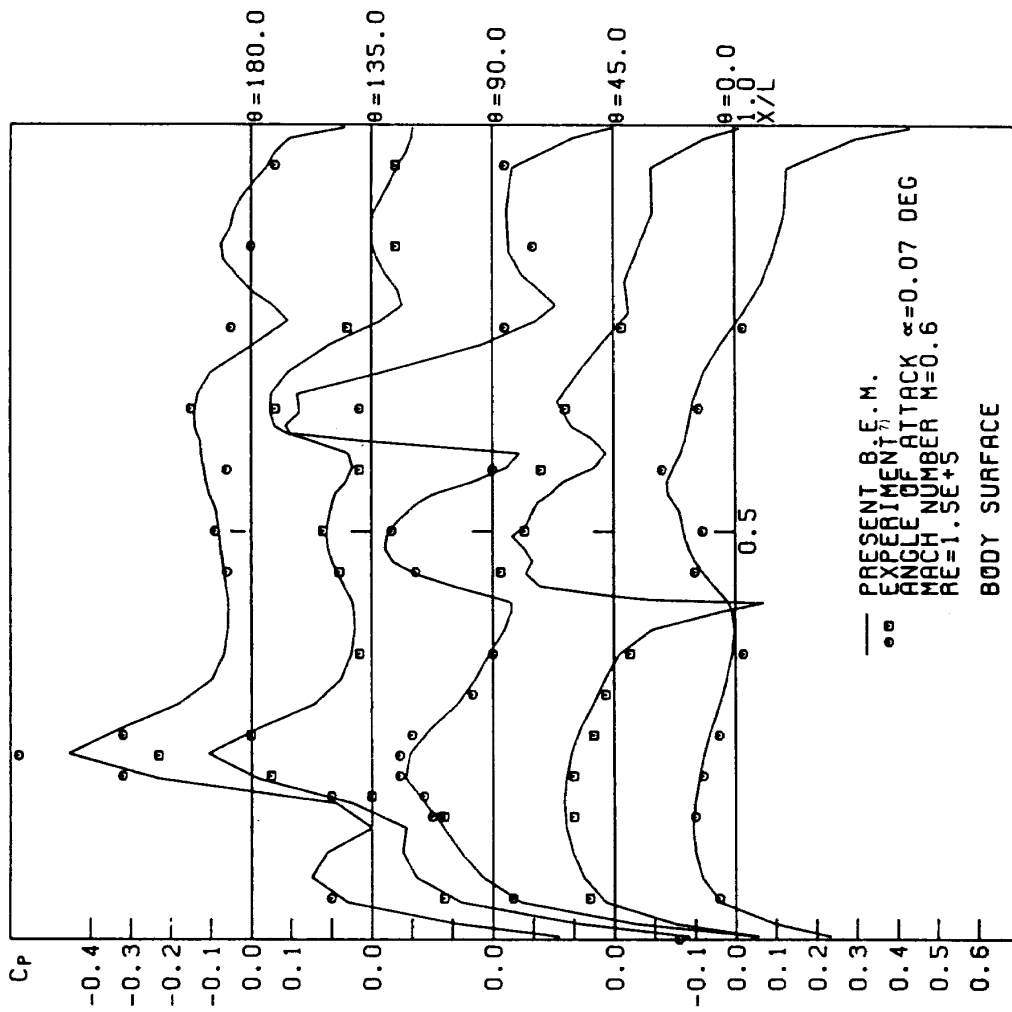


図 12 $\alpha = 0.07^\circ$, $M = 0.6$

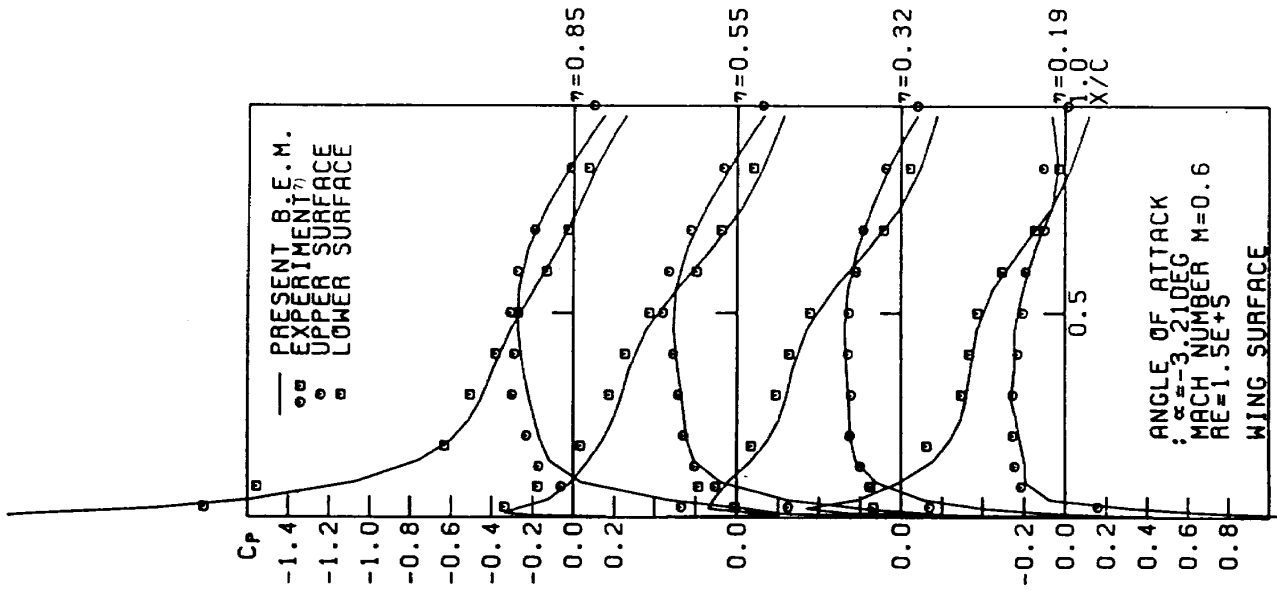


図 13 b $\alpha = -3.21^\circ$, $M = 0.6$

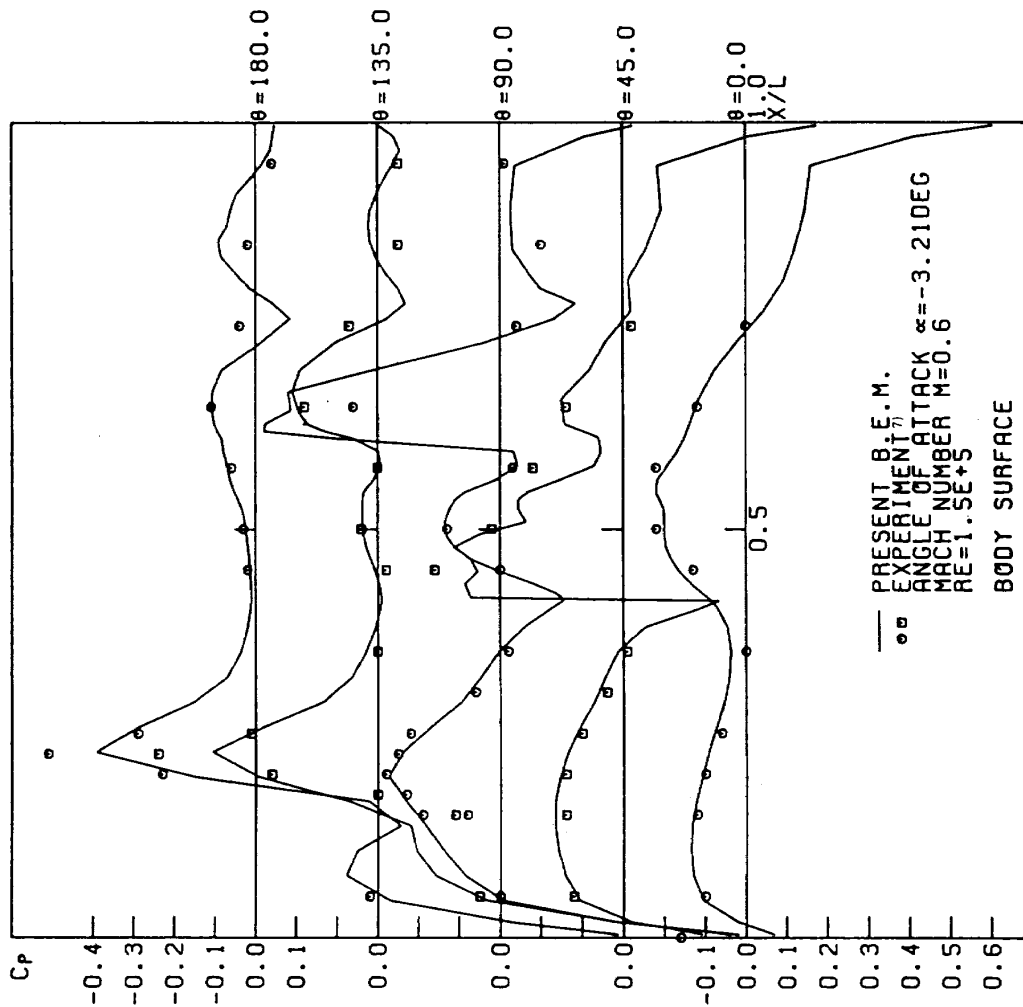


図 13 a $\alpha = -3.21^\circ$, $M = 0.6$

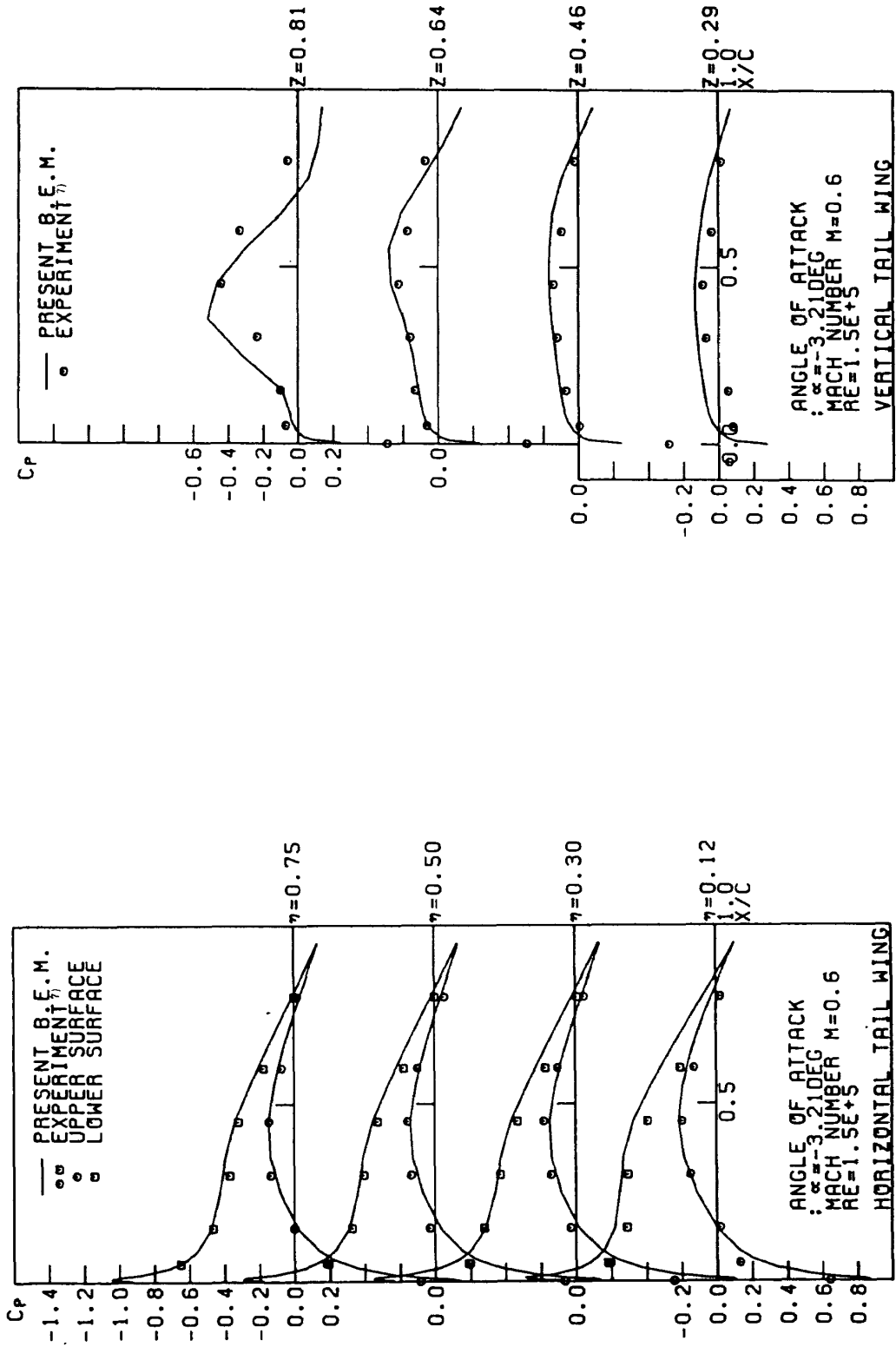


Figure 13 d: $\alpha = -3.21^\circ$, $M = 0.6$

Figure 13 c: $\alpha = -3.21^\circ$, $M = 0.6$

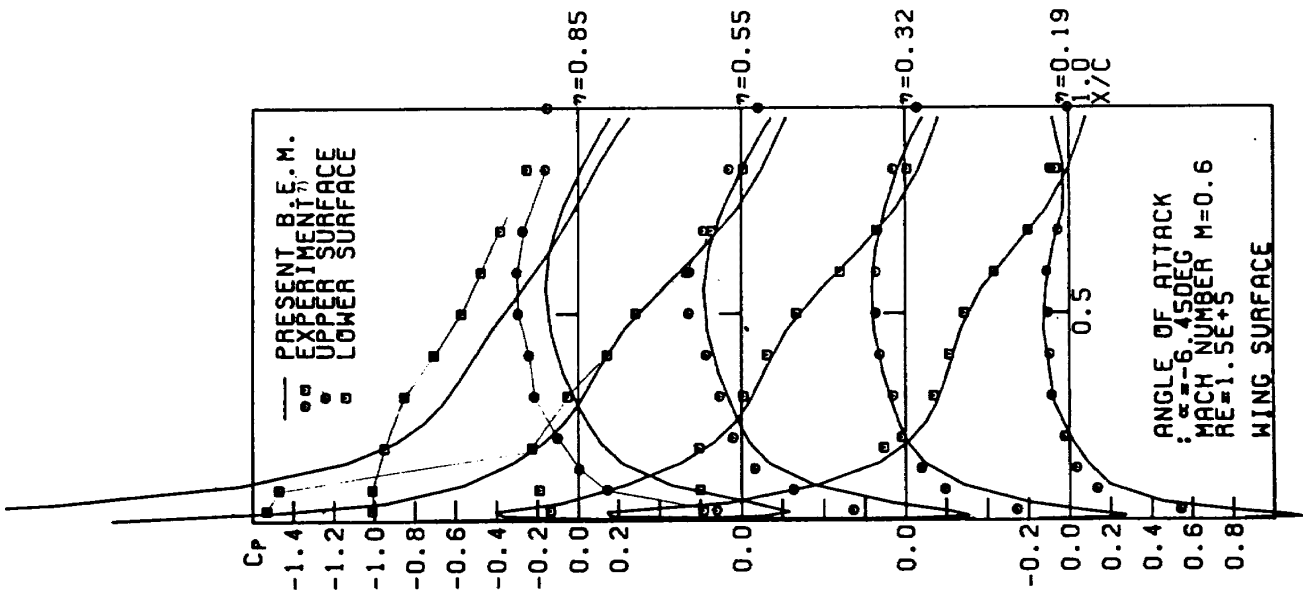


図 14 a $\alpha = -6.45^\circ$, $M = 0.6$

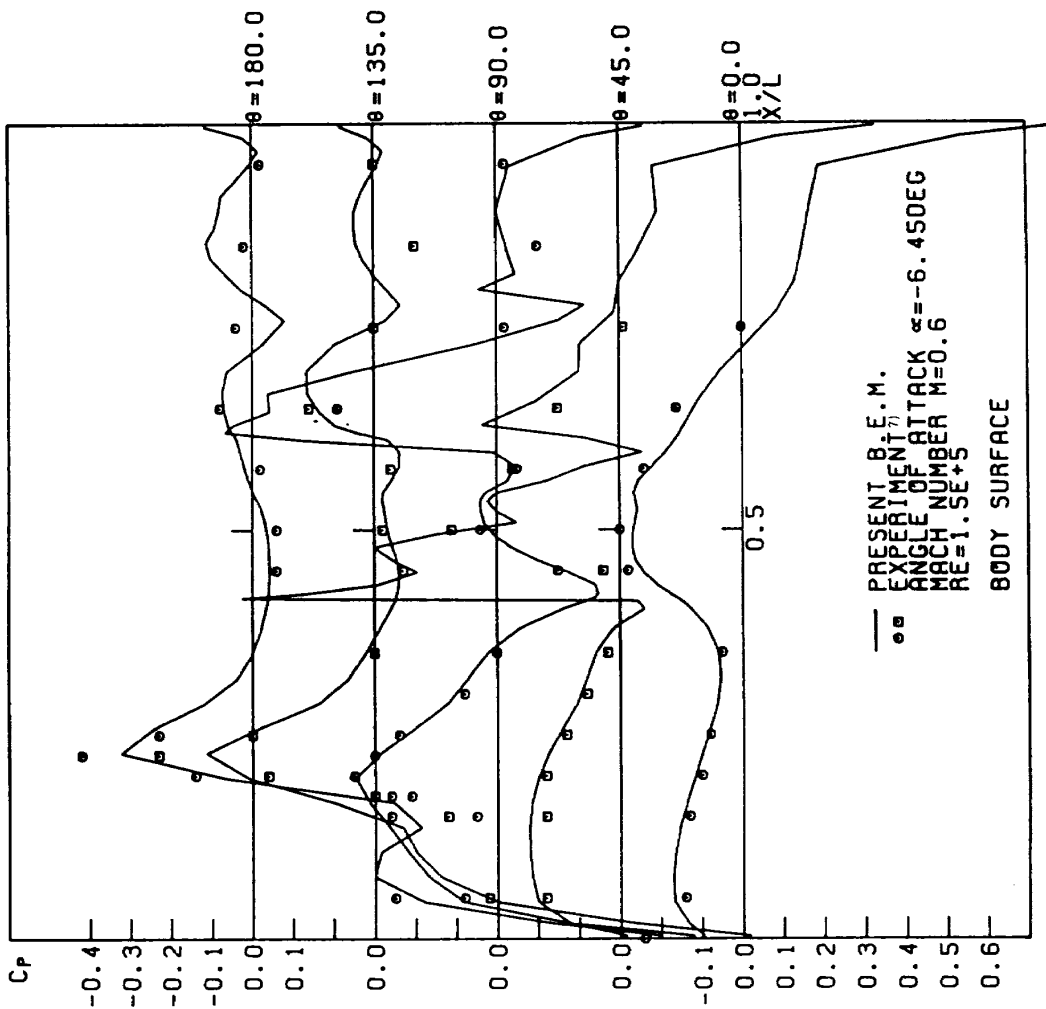


図 14 b $\alpha = -6.45^\circ$, $M = 0.6$

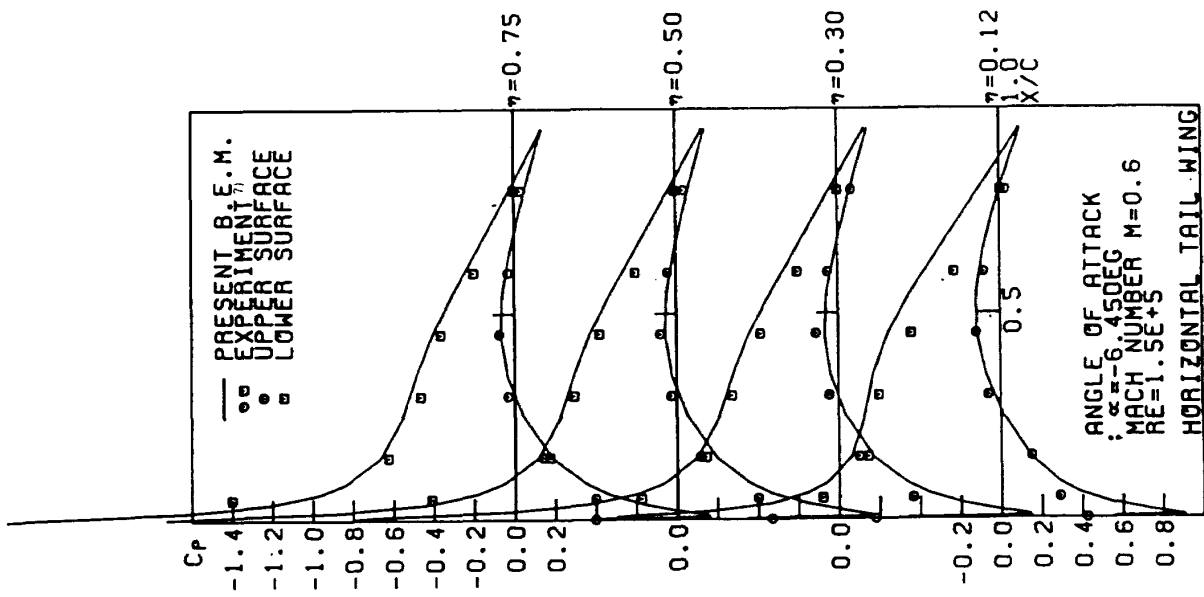


図 14 c $\alpha = -6.45^\circ$, $M = 0.6$

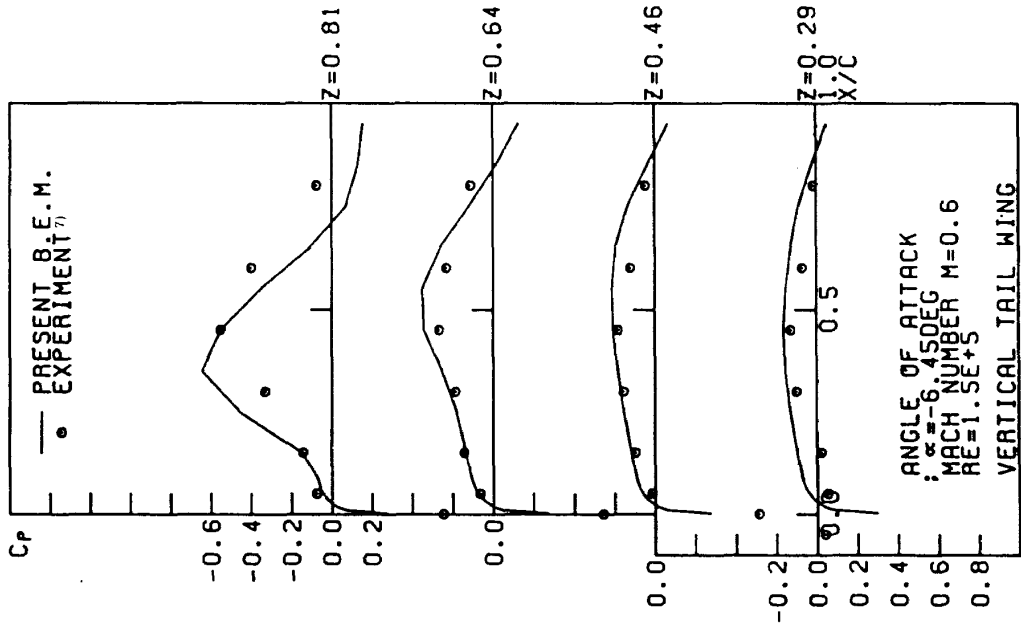


図 14 d $\alpha = -6.45^\circ$, $M = 0.6$

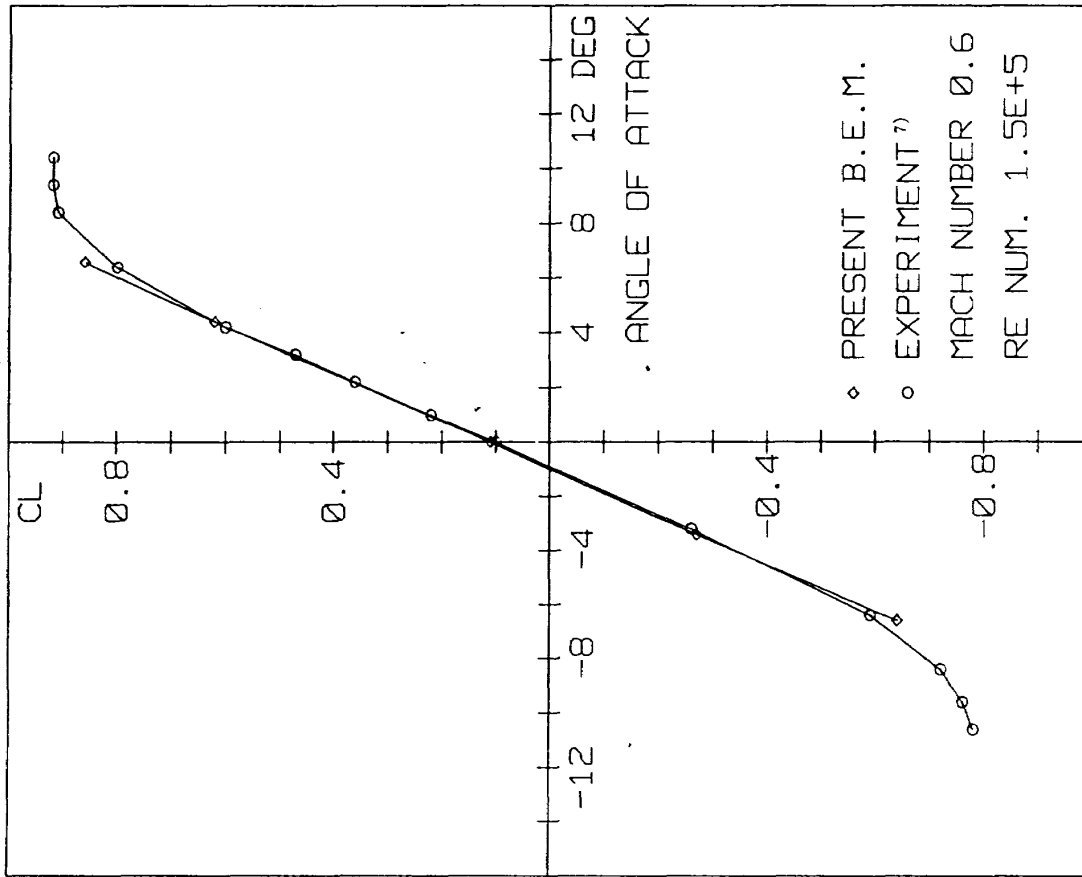


図 16 $M = 0.6$ の場合の揚力係数

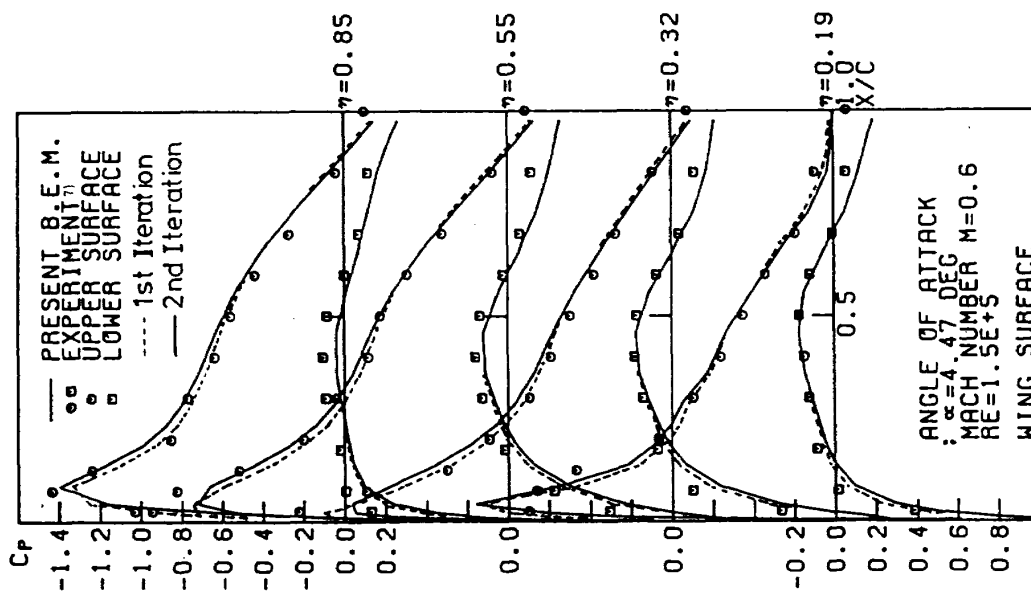


図 15 $\alpha = 4.47^\circ$, $M = 0.6$ の場合で 2 回の繰返し計算を行った例

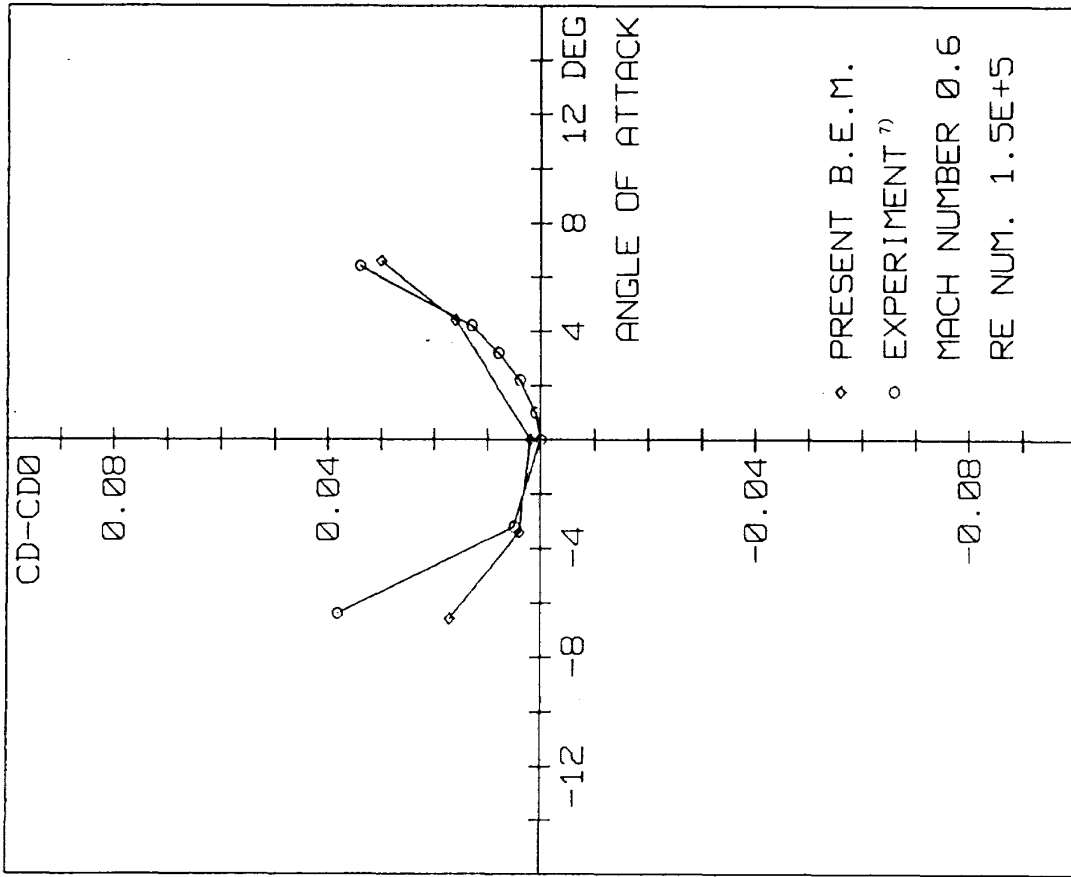


図 18 M = 0.6 の場合の抗力係数

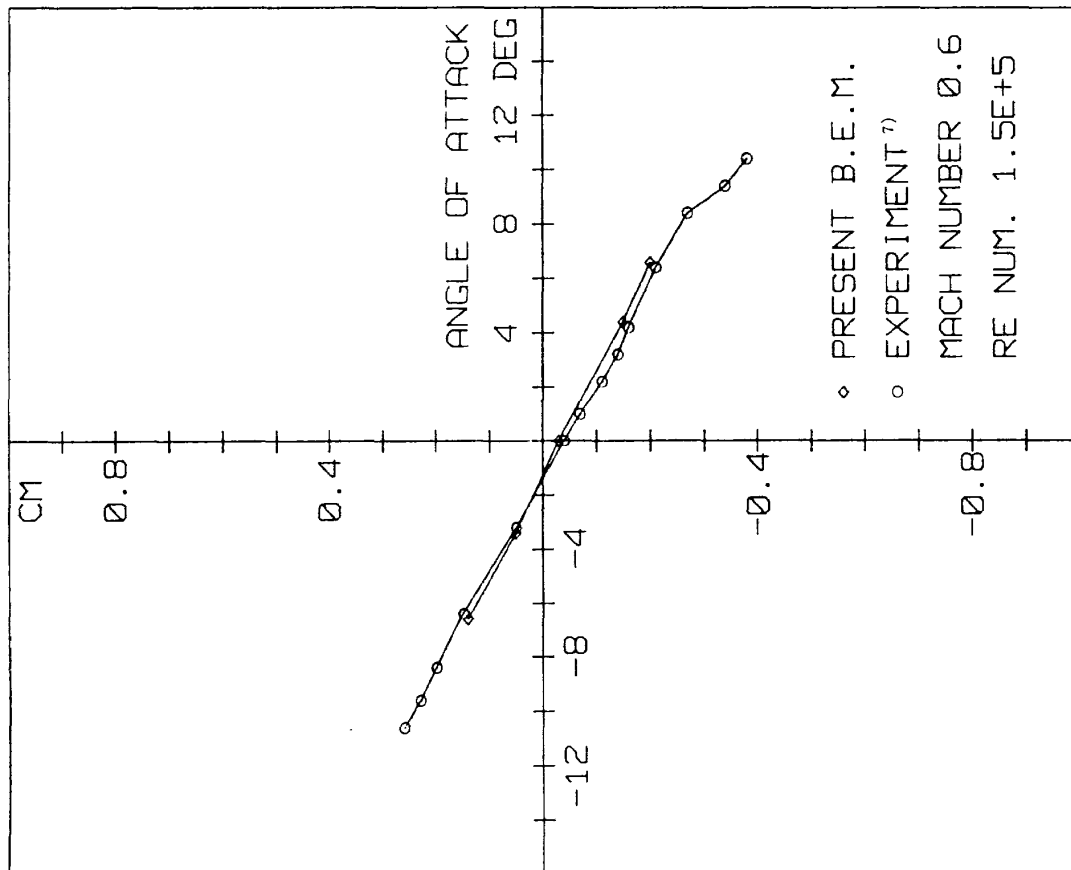


図 17 M = 0.6 の場合のモーメント係数

付録1 亜音速流のGreenの定理

物体の体積 V_b および後流渦面の体積 V_w を除いた全空間を V とすると領域関数 E は次のように定義する。

$$E(x, y, z) = 1 \quad V \text{ 内では,} \quad (\text{A-1})$$

$$= 0 \quad \text{他では,} \quad (\text{A-2})$$

E の不連続な表面, すなわち, 物体と後流渦面を含む表面 σ を考えると一般に次式で表わされる。

$$S(x, y, z) = 0 \quad (\text{A-3})$$

次に表面 σ の法線方向のベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{1}{|\nabla S|} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial S}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{k} \right\} \quad (\text{A-4})$$

であり, また, $|\nabla S| = \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\}^{1/2}$ である。今, E は法線ベクトル \mathbf{n} の方向に沿って階段関数として振舞うので, \mathbf{n} 方向の E の導関数は表面 σ 上で Dirac のデルタ関数となる。したがって,

$$\nabla E = \delta \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \quad (\text{A-5})$$

(2) 式に G を乗じ, (7) 式に φ を乗じ減算を行うと次式が得られる。

$$G(\nabla^2 \varphi - M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}) - \varphi(\nabla^2 G - M^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}) = -\varphi \delta \quad (\text{A-6})$$

さらに, 脚注の公式を用いると次式になる。

$$\nabla \cdot (G \nabla \varphi - \varphi \nabla G) - M^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial G}{\partial x} \right) = -\varphi \delta \quad (\text{A-7})$$

両辺に E を掛けて, 積分すると

$$\begin{aligned} & \iiint E \left[\nabla \cdot (G \nabla \varphi - \varphi \nabla G) \right. \\ & \quad \left. - M^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial G}{\partial x} \right) \right] dV \\ & = \iiint E (-\varphi \delta) dV \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

(A-5) 式を用いて変形すると

$$- \iiint \left[\nabla S \cdot (G \nabla \varphi - \varphi \nabla G) \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. - M^2 \frac{\partial S}{\partial x} \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial G}{\partial x} \right) \right] \frac{\delta}{|\nabla S|} dV \\ & = \iiint E (-\varphi \delta) dV \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

ここで, 亜音速流の場合の Green 関数の解を代入する。

$$G = \frac{-1}{4\pi r_\beta} \quad (\text{A-10})$$

$$\begin{aligned} 4\pi E(P_*) \varphi(P_*) & = - \iiint \left[\nabla S \cdot \nabla \varphi \right. \\ & \quad \left. - M^2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{1}{r_\beta} \frac{\delta}{S} dV + \iiint \left[\nabla S \cdot \nabla \left(\frac{1}{r_\beta} \right) \right. \\ & \quad \left. - M^2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_\beta} \right) \right] \varphi \frac{\delta}{\nabla S} dV \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

ガウスの発散の定理を用いて体積積分を面積積分に書き換えると (9) 式が得られる。

$$\begin{aligned} 4\pi E(P_*) \varphi(P_*) & = - \iint \left[\nabla S \cdot \nabla \varphi - M^2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \\ & \quad \frac{1}{r_\beta} \frac{1}{|\nabla S|} d\sigma + \iint \left[\nabla S \cdot \nabla \left(\frac{1}{r_\beta} \right) - M^2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. \left(\frac{1}{r_\beta} \right) \right] \varphi \frac{1}{|\nabla S|} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

付録2 圧縮流への拡張

亜音速流の方程式を変換して, 非圧縮流の方程式に帰着させるには, Prandtl-Glauert の亜音速相似則を用いる。三次元物体を対象としたものに Göthert の拡張された Prandtl の方法がある。その説明の詳細は文献 10 を参照されたい。これが本来の Göthert の方法であるが MBB (Messerschmitt-Bölkow-Blohm)⁸⁾ では経験に基づく半実験的な Göthert の方法 II として用いられている。その場合, 前者を Göthert の方法 I とする。両者について説明する。

(2), (3) 式を再び書くと

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{B-1})$$

$$S(x, y, z) = 0 \quad (\text{B-2})$$

ここに, $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ であり, 一様流の方向に x 軸を取る。今, 細長物体 (Slender body) を仮定し, 一様流 U_∞ と比較して $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ が小さいとすれば, 境界条件は

$$(1 + \varphi_x) S_x + \varphi_y S_y + \varphi_z S_z = 0 \quad (\text{B-3})$$

また物体表面は $|S_x| \ll \sqrt{S_y^2 + S_z^2}$ であるから $\varphi_x S_x$

$$\nabla \cdot (a \nabla b) = \nabla a \cdot \nabla b + a \nabla^2 b$$

$$\iiint \frac{f \delta}{|\nabla S|} dV = \iint \frac{f}{|\nabla S|} d\sigma$$

は 2 次のオーダーとなる。これを無視すると境界条件は、

$$S_x + \varphi_y S_y + \varphi_z S_z = 0$$

ここで、Prandtl-Glauert 変換を施すと、

$$X = \frac{x}{\beta}, Y = y, Z = z$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

$$\frac{1}{\beta} S_x + \varphi_y S_y + \varphi_z S_z = 0 \quad (\text{B-4})$$

境界条件の (B-4) 式を見ると一様流が $1/\beta$ 倍速い流れの非圧縮流体の流れ場を表わすと見做される。擾乱速度ポテンシャルを新たに $\varphi_0 = \beta\varphi$ とすると

$$\varphi_{0xx} + \varphi_{0yy} + \varphi_{0zz} = 0$$

$$S_x + \varphi_{0y} S_y + \varphi_{0z} S_z = 0 \quad (\text{B-5})$$

新たに定義した擾乱速度ポテンシャル φ_0 を用いて書くと一様流速は変わらず、形式的に非圧縮流体中の基礎方程式と境界条件式と一致したものになる。速度ポテンシャルも次の様に定義する。

$$\varphi_0 = U_\infty (X + \varphi_0) \quad (\text{B-6})$$

この圧縮流への変換は微少擾乱の仮定のもとに成立するものである。

(1) Göthert の方法 I

物理空間を Prandtl-Glauert 変換を施し、その空間における空力的影響係数を求める。また、境界条件は変換された物体表面座標に沿って流れると言う条件を用いる。

$$\varphi_0 = U_\infty (X + \varphi_0)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial N} = -N_x \quad (\text{B-7})$$

これらを用いて擾乱速度ポテンシャル φ_0 を求め、 X, Y, Z 空間で微分すると非圧縮流における擾乱速度 u', v', w' が求められる。これと物理空間の擾乱速度 u, v, w との間には、(B-2) 式から次の関係がある。

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\beta \partial X} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial X} = \frac{1}{\beta^2} u' \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi_0}{\partial Y} = \frac{1}{\beta} v' \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial Z} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi_0}{\partial Z} = \frac{1}{\beta} w' \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

これらの擾乱速度 u, v, w を用いて、速度や圧力を求める。¹⁰⁾

(2) Göthert の方法 II

Prandtl-Glauert 変換を施した空間で空力的影響係数を求める。しかし、境界条件は物理空間の物体表面に沿って流れると言う条件を用いる。

$$\Phi = U_\infty (x + \varphi)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -n_x \quad (\text{B-9})$$

ただし、本文で述べた様に微少擾乱の仮定を用い、 $M_\infty n_x \approx 0$ の条件のとき $\frac{\partial \varphi}{\partial N} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ になる。こうして求めた擾乱速度ポテンシャルを x, y, z 空間で微分して、直接、物理空間の擾乱速度 u, v, w を得る。すなわち、

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{B-10})$$

無次元速度 \mathbf{v} と圧力係数 C_p は次の様に書ける。

$$\mathbf{v} = (1 + u)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

$$C_p = f(\gamma, M_\infty, u, v, w) \quad (\text{B-11})$$

ここに、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトルであり、 γ は空気の比熱比、 M_∞ は一様流のマッハ数である。

方法 I と方法 II の違いを端的に言うと方法 I では境界条件は「流れは変換した物体表面に沿う」と言う条件を用いる。一方、方法 II では「流れは物理面の物体表面に沿う」と言う条件を用いる。どちらの方法も微少擾乱を仮定しなければ成立しない。方法 II の方が半実験的仮定 (Semiempirical assumption) が入るが良い結果が得られる。事実、両者の違いは部分的なもので大部分は一致した結果が得られた。但し、部分的に大きな違いを生ずるところは垂直尾翼の付け根の胴体上の圧力分布である。迎角が正のとき、方法 I ではこの部分で大きな負圧が計算される。

以上のことから本計算では方法 II を採用することにした。

付録 3 四辺形要素の積分

四辺形要素の積分は解析的に次の様に計算される。双曲面の部分では局所座標系 (ξ, η) を用いて次式で表わされる。

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \xi \mathbf{P}_1 + \eta \mathbf{P}_2 + \xi \eta \mathbf{P}_3 \quad (\text{C-1})$$

\mathbf{P}_i ($i = 0 \sim 3$) は四辺形の 4 頂点の位置ベクトル ($\mathbf{P}_{++}, \mathbf{P}_{+-}, \mathbf{P}_{-+}, \mathbf{P}_{--}$) と次の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{++} \\ P_{+-} \\ P_{-+} \\ P_{--} \end{Bmatrix} \quad (C-2)$$

面内において, ξ, η はそれぞれ

$$\begin{aligned} -1 \leq \xi \leq 1 \\ -1 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (C-3)$$

ξ および η 方向の基本ベクトルを導入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \xi} = \mathbf{P}_1 + \eta \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \eta} = \mathbf{P}_2 + \xi \mathbf{P}_3 \end{aligned} \quad (C-4)$$

法線方向の単位ベクトルは次式で与えられる。

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2|} \quad (C-5)$$

一方, 面素は次のように ξ, η で表わされる。

$$dS = |\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2| d\xi d\eta \quad (C-6)$$

そこで, 全ての積分は, この ξ, η を用いて次の形に書ける。

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (C-7)$$

もし, $f(\xi, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} F(\xi, \eta)$ の形で記述すると定積分 I は次のように書ける。

$$I = F(1, 1) - F(1, -1) - F(-1, 1) + F(-1, -1) \quad (C-8)$$

空力的影響係 C_{hh}, B_{hh} は次式を用いて計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \tan^{-1} \left(\frac{\mathbf{R} \times \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{A}_2}{|\mathbf{R}| \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R} \right) |\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2| \end{aligned} \quad (C-9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left\{ -\mathbf{R} \times \mathbf{A}_1 \cdot \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{A}_1|} \sinh^{-1} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_1}{|\mathbf{R} \times \mathbf{A}_1|} \right) \right. \\ \left. + \mathbf{R} \times \mathbf{A}_2 \cdot \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{A}_2|} \sinh^{-1} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_2}{|\mathbf{R} \times \mathbf{A}_2|} \right) \right. \\ \left. + \mathbf{R} \cdot \mathbf{N} \tan^{-1} \left(\frac{\mathbf{R} \times \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{A}_2}{|\mathbf{R}| \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2} \right) \right\} \\ = \frac{1}{R} |\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2| \end{aligned} \quad (C-10)$$

但し, $\tan^{-1} \theta$ は $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$ の範囲で主値をとる。また,

$$\mathbf{R}(\xi, \eta) = \mathbf{P} - \mathbf{P}_h = \mathbf{P}_0 + \xi \mathbf{P}_1 + \eta \mathbf{P}_2 + \xi \eta \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_h \quad (C-11)$$

である。

参考文献

- 1) Morino, L. ; A General Theory of Unsteady Compressible Potential Aerodynamics, NASA CR-2464, December 1974.
- 2) Kuo, C. C. and Morino, L. ; Steady Subsonic Flow around Finite-Thickness Wings NASA CR-2616, november 1975.
- 3) Suzuki, S. and Washizu, K. ; Calculation of Wing-Body Pressures in Incompressible Flow Using Green's Function Method, Journal of Aircraft, Vol.17, No.5, May 1980.
- 4) 柳沢三憲, 菊地一雄 ; 有限要素法を用いた三次元物体の空気力学的係数の計算, 航技研報告, TR-724, 1982年8月.
- 5) Morino, L. ; Steady, Oscillatory and Unsteady Subsonic and Supersonic Aerodynamics-Production Version (SOUSSA-P1, 1)-Volume I-Theoretical Manual, NASA CR-159130, Jan. 1980.
- 6) 柳沢三憲, 菊地一雄, 小山忠勇 ; 翼胴結合体の空気力学的特性に関する研究, 第2報 低翼機について. 航技研報告 NAL TR-796, 1984年1月.
- 7) 三菱重工株式会社 ; 名航資料, 小型民間機高速全機風洞試験報告書, No.884, 1978年1月.
- 8) Wirz, H. J. and Smolderen, J. J. ; Numerical Methods in Fluid Dynamics, A Von Karman Institute Book, p.237-297.
- 9) 谷岡忠幸 ; 航空機の空力設計における流れ解析, 日本機械学会誌, 6月号, Vol, 87/ No.787, 1984, pp.567-572.
- 10) Sears, W. R. ; General Theory of High Speed Aerodynamics, Princeton University Press, 1954.

航空宇宙技術研究所報告 835号

昭和59年9月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)千182
印刷所 株式会社三興印刷
東京都新宿区信濃町12三河ビル

Printed in Japan