

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-863

フィルタリングサンプル装置について

多田章

1985年6月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

フィルタリングサンプル装置について*

多 田 章**

FILTERING SAMPLER

By
Akira TADA

ABSTRACT

This paper describes the algorithm and effect of the filtering sampler, which was recently developed as a part of a time series data acquisition system. The fundamental operation is a moving average with the weightings of binomial coefficients over discrete data. Each application of the above operation at every other input timing reduces the sampling rate by half and filters out high frequency noise components. Such fundamental operation is repeatedly applied to the data in cascade, so that the total operation reduces the sampling rate by a factor of any arbitrary number to the power of 2. The algorithm reduced the load of the micro-processor for the filtering. The anti-aliasing effect is also found to be excellent in the low frequency region.

1. はじめに

デジタル計算機とその利用技術が発達するにつれて、離散的に得られるデータは勿論として、元来は時間的に連続した量の制御や解析においてもデータをサンプルおよびデジタル量化したうえで、デジタル演算を施したり記録する場合が多くなって来た。

時系列データのサンプリングをする時、エイリアシング対策を施しておく必要がある。従来一般に行われている方法では、アナログデータにフィルタを掛けて高周波の雑音を減らしながら、サンプルおよびデジタルデータへの変換を行っている。本研究では所望のサンプリング頻度より十分高い頻度でアナログフィルタリングとサンプリングとA/D変換を行い、得られたデジタルデータに専用ハードウェアを用いてデジタルフィルタリングをオンライン

で施したりえて再度サンプルして、所望のサンプリング頻度の良質なデータを得る手段を求めた。その結果フィルタの構造と合わせて再サンプルの仕組みも工夫したフィルタリングサンプルと呼ぶ装置を開発して目的が達成された。開発された装置は性能的に納得がいくだけでなく扱い易いものであったから、汎用計算機のサブルーチンにしてオフラインのデータ処理にも用いられている。

本報告では理論的な裏付けを含めてフィルタリングサンプルについて述べる。2では研究の目的と装置開発にいたる経緯について述べる。3ではフィルタリングサンプルの概念を明らかにする。4ではフィルタの効果とサンプリングの効果を分離して従来の理論を適用しやすいようにする時系列離散関数を導入し、そのフーリエ変換を求めると。5では等価フィルタの周波数特性と過渡応答を示したりえてサンプリングの影響を時間領域と周波数領域で示す。6ではフィルタリングサンプル装置の特性について検討を行う。7に本研究で得られた結果をまとめる。

* 昭和60年5月1日受付

** 新型航空機研究グループ

記号と略号

A/D	: アナログ / デジタル
mC_r	: m 次, r 番目の二項係数
exp	: 指数関数
h	: 基本処理の係数に対応する時系列離散関数
H	: h のフーリエ変換
Hz	: 周波数単位 ヘルツ
j	: 虚数単位
k	: データの時間的順序を示すパラメタ
kHz	: 周波数単位 キロヘルツ
ℓ	: 基本処理のカスケード段数を示すパラメタ
L	: 所望の最大カスケード段数
m	: 二項係数の次数を示すパラメタ
M	: 二項係数の所望次数
ms	: 時間の単位 ミリ秒
n	: 定数 $2^{\ell} - 1$
p	: 記憶の番号を示すパラメタ
P	: パラメタ p の最大値
q	: エイリアシングを起こす周波数軸での位置関係を示すパラメタ
r	: 係数の順序を示すパラメタ
rad/sec	: 角速度単位
s	: 装置の処理状態を表わすパラメタ 一部では時間的順序を表わすパラメタ
S	: 装置の処理状態の最大値
sin	: 正弦関数
STOL	: 短距離離着陸
t	: 基本処理を行う時刻
T	: 2 個の基本処理の時間間隔
ΔT	: 初段の入力データのサンプリング間隔
T_{ℓ}	: ℓ 段目の出力データのサンプリング間隔
u	: 基本処理の入力となる時系列データ
U	: u のフーリエ変換
v	: 基本処理の出力となる時系列データ
V	: v のフーリエ変換
w	: フィルタリングサンプル装置の入力時系列関数にサンプルしないで等価フィルタをカスケードに掛けて得られる時系列離

散関数

W	: w のフーリエ変換
X	: レジスタ名
Y	: レジスタ名
Υ	: 等価フィルタの周波数特性
δ	: デルタ関数
π	: 円周率
ρ^2	: エイリアシング削減比
ω	: 角周波数をあらわすパラメタ
!	: 階乗の記号
[]	: ガウスの記号 (中味を越えない最大の整数)
	: 絶対値記号

2. 目的と経緯

時系列デジタルデータを収録するときのサンプリング頻度は、データに含まれる情報量を減らさない見地からは、高いほど好ましい。しかしながら、サンプリング頻度を増せば、データ収録や処理および整理や保存にかかる負担が増加するので、多額の経費と時間や手間が必要になる。実際には、解析時間や技術等を含めて利用可能なデータ処理システムの能力にサンプリング頻度を制限されて、解析結果の信頼性低下に悩まされている例が多いであろう。

データに含まれる成分のうちで、解析の対象としたい物理現象を表わす信号成分は、その現象についての知識や解析の性質などによって、周波数を予め特定の範囲に限定して考えられるものが多い。これに対して試験や計測の環境からデータに混入する雑音成分は、分布する周波数範囲が一般に広いばかりか、データ収録時に目につかなくても解析の結果に影響を及ぼすものがある。もし仮にもととのデータが雑音成分を含まず信号成分だけから成っているとすれば、サンプリング定理の教えるところから、信号の分布する周波数範囲の上限の周波数の 2 倍のサンプリング頻度でデータを収録するのが、データ処理システムにとって最良の選択である。ところが現実には、雑音成分がもともとのデータに混入することは避けられない。したがってデータ収録にあたっては、信号成分よりも高周波数領域の雑音成分が収録されるデータに、さらにそれによって解析結果

に与える影響について、十分に配慮する必要がある。

サンプリング自体によってもたらされるデータ情報量への影響は、エイリアシング¹⁾と呼ばれる現象により、サンプリング周波数の整数倍だけ離れた周波数を持つあらゆる成分が互いに区別できなくなることにある。すなわち、サンプリング頻度を信号成分の持つ情報量を保存するように選んでも、もともとのデータではサンプリング周波数の半分より高い周波数の雑音成分が、サンプルされた後では信号成分と区別できなくなってしまふ。また、エイリアシングの対策としてサンプリングする前にフィルタによって高周波数領域にある雑音成分のパワを削減するのは良い処置ではあるが、フィルタの副作用として信号成分にまで歪を与えてしまう点にも注意を払わなくてはならない。

本報告で紹介するフィルタリングサンプル装置は、エイリアシングと信号の歪とを極力避けながらデータをサンプルする手段として開発された²⁾。直接の動機は、航技研ファンジェットS T O L実験機の操縦システムの機能を試験するためのデータ収録システムを計画するにあたり、厳密な解析ができるだけのデータの質を確保するには、従来の処理方法では経費が膨大になるからであった。

アナログデータを入力としてサンプルする際のエイリアシング対策はその行き方で二通りに大別される。第一は、アナログ入力をローパスフィルタに通してサンプリング周波数の半分より高い周波数の成分を遮断してしまふやり方である。フィルタの遮断特性は急峻なものが市販されていて、エイリアシング自体を削減する効果としては申し分ない。けれどもそれに伴って低周波数の信号成分に対しても大きな位相遅れと利得の減少をもたらす。これらの補正は理論的には可能であるが、実際の問題としては、位相遅れが周波数に比例している場合や利得変化が周波数に関わりなく一定である場合を除いて、複雑でもあり時間も手間もかかる。位相直線性を持つフィルタも開発されているが、遮断周波数が可変のものが高価で、多チャンネル並べて使用するときには、遮断周波数のバラツキや計算機による制御が簡単でない点が好ましくない。

第二は、サンプリング周波数を信号成分の周波数

より遙かに高く設定して、アナログフィルタが信号成分に及ぼす影響を小さくするやり方である。収録されたデータに残る雑音成分については、オフラインでデジタルフィルタリング処理するなど、解析レベルに見合った処理ができる。しかしながらサンプリング頻度を高くすればそれだけ収録データ点数が増すから、チャンネル数が多い場合には必要なデータ転送速度や記憶媒体の容量が非現実的に大きくなる。このやり方の延長上に、オンラインでデジタルフィルタリングを施したうえで再度サンプルして、データ収録用の計算機システムに送ることが考えられる。オンラインデジタル処理に汎用計算機を用いるのは得策でなく、最近発達および普及のめざましいマイクロプロセッサなどの専用ハードウェアを用いるのがよい。

アナログ入力をローパスフィルタに通した後、サンプリング周波数を信号成分の周波数より遙かに高く設定してサンプルおよびA/D変換し、オンラインでデジタルフィルタリングを施したうえで再度サンプルして、データ収録用の計算機システムに送る前処理装置の製作を検討してみると、従来の技術ではデジタルフィルタ部分の製作が困難であった。デジタルフィルタリング技術は大型計算機でオフライン処理を施すにはよく発達しているが、前処理装置でオンライン処理をするには、専用にプロセッサを割り当てても演算速度が足りず、フィルタ係数の所要ビット数がレジスタのビット数に比べて大きすぎた。

問題は、入力となる時系列デジタルデータをエイリアシングと信号の歪を極力避けながら再サンプルする仕組で、集積回路などのハードウェアで処理するのに適したものが製作可能かどうか、に絞られた。

その答がフィルタリングサンプル装置である。

フィルタリングサンプルとは、デジタル時系列データに対して、重みの割合が2項係数となる移動平均処理とデータ数が半分となるサンプル処理とを合わせて基本処理とし、基本処理を複数段繰り返して2, 4, 8, 16, ……倍のサンプル間隔を持つ出力時系列を得る処理を呼ぶものとする。またこの処理を行うハードウェアをフィルタリングサンプル

装置と呼ぶことにする。

こうした背景のもとに考案されたフィルタリングサンプル装置は、単一チャネルの試作を経て効果と実現性が確認された。操縦系統機能試験のデジタルデータ処理システムでは、デジタルデータ前処理装置に組み込まれて、25.6kHz から100Hz に再サンプルする処理を64チャネルについて行い、実用性も確認された³⁾。現在では、オフラインのデータ処理にも重宝なところから、サブルーチンソフトウェアが用意されて、グラフィックディスプレイに波形を表示するタスクなどにこの処理が利用されている。

理論的な裏付けについては、当初は装置の開発に必要な解析が進められ、装置やソフトウェアの実用性が確認されてから、証明やパラメタ拡張が研究された。

3. フィルタリングサンプルの概念

3.1 基本処理

m 次の二項係数を係数とする移動平均と m ビット桁下げする演算を、入力頻度の半分の頻度で行う処理を、(m 次の)基本処理と呼ぶことにする。得られた出力データもまた時系列データであるから、これを入力データとしてさらに基本処理を施すことができ、その結果出力データのサンプリング間隔は、はじめの入力データのサンプリング間隔の4倍になる。このように基本処理をカスケードに繰り返し施せば、つぎつぎにデータのサンプリング間隔が長くなってゆく。もともとのデータに施す処理を1段目の基本処理、その出力を入力データとして施す処理を2段目の基本処理、以下同様に $l-1$ 段目の出力を入力データとして施す処理を l 段目の基本処理と呼ぶことにしよう。 m 次、 l 段目の基本処理の入力となるデータを $u(m, l, k)$ で、また出力となるデータを $v(m, l, k)$ で表わすことにする。ここで k は時間的順序を表わす番号で整数値をとるものとする。

m 次の2項係数 ${}_m C_r$ は

$${}_m C_r = \frac{m!}{r!(m-r)!} \quad (3-1)$$

で表わせるから、 m 次、 l 段目の移動平均は

$$\sum_{r=0}^m 2^{-m} {}_m C_r \cdot u(m, l, k-r) \quad (3-2)$$

と表わせる。基本処理は入力の半分の頻度で行われることから、 k の代わりに $2k$ を代入したものが、 m 次、 l 段目の出力 $v(m, l, k)$ となっているので、

$$v(m, l, k) = \sum_{r=0}^m 2^{-m} {}_m C_r \cdot u(m, l, 2k-r) \quad (3-3)$$

が、 m 次、 l 段目の基本処理を表わす関係式である。次の $l+1$ 段目の入力との関係は

$$u(m, l+1, k) = v(m, l, k) \quad (3-4)$$

で表わせる。

3.2 基本処理のタイミング

l 段目の基本処理を時刻

$$t(l, k) = 2^{\ell-1} \Delta T + k \cdot 2^{\ell} \Delta T \quad (3-5)$$

に行うこととする。

同一時刻に2つの基本処理を行う場合がないことを示そう。

まず、同一の l では k が相異なる2つの基本処理を行うべき時刻は一致しないことは明らかである。

次に、 l が相異なる場合を考えると、任意の2つの基本処理の (l, k) を (l_1, k_1) と $(l_1 + l_2, k_1 + k_2)$ と表わし、 l_1 および l_2 を自然数、 k_1 および k_2 を整数と限定しても一般性を失わない。両基本処理のタイミングの間隔を T とすれば

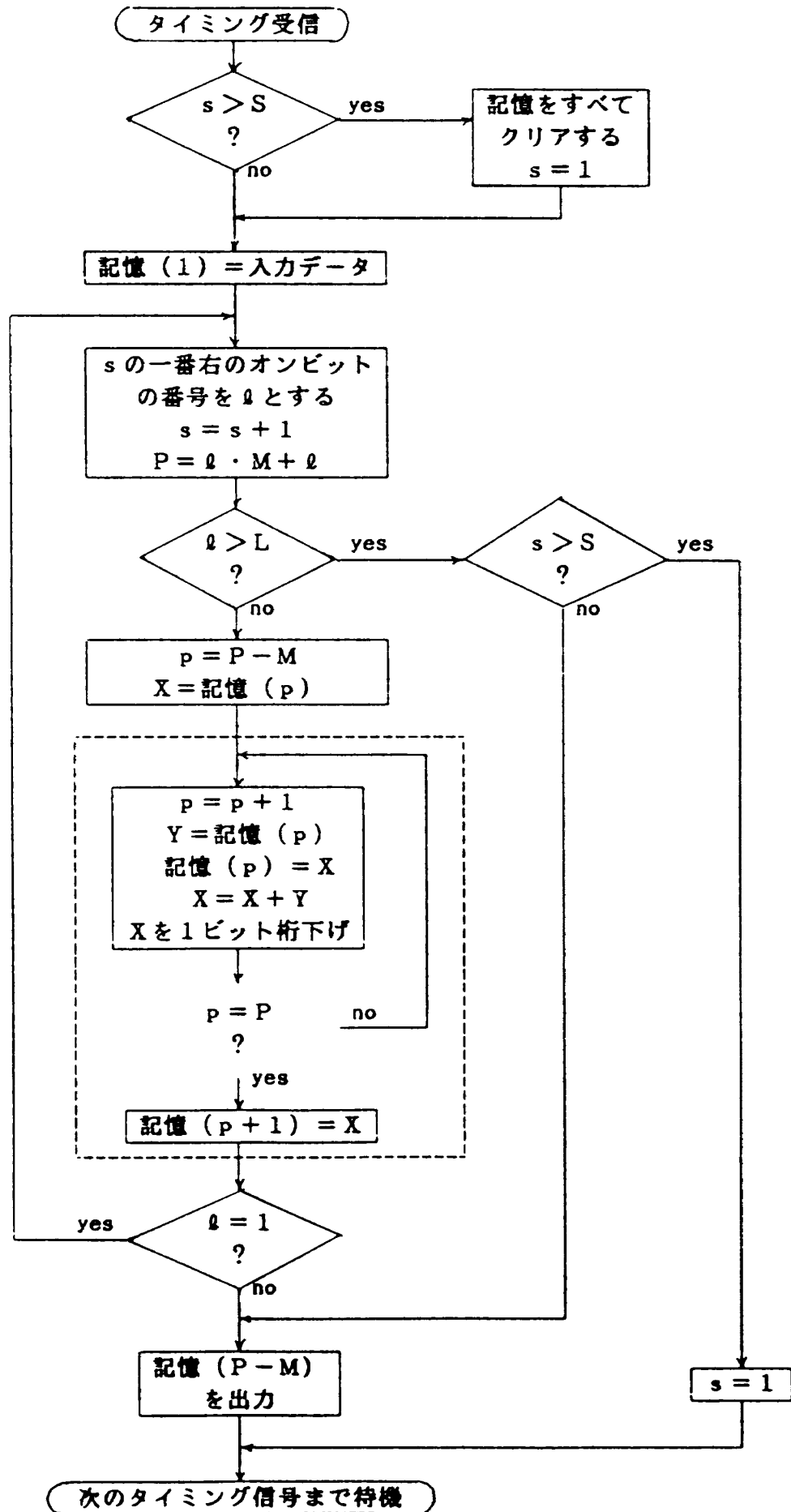
$$\begin{aligned} T &= (2^{\ell_1-1} \Delta T + k_1 \cdot 2^{\ell_1} \Delta T) \\ &\quad - \{ 2^{\ell_1+\ell_2-1} \Delta T + (k_1+k_2) \cdot 2^{\ell_1+\ell_2} \Delta T \} \end{aligned} \quad (3-6)$$

となる。 $2^{\ell_1-1} \Delta T$ を単位として T を計算すれば

$$\begin{aligned} T/2^{\ell_1-1} \Delta T &= (1 + 2k_1) \\ &\quad - \{ 2^{\ell_2} + (k_1+k_2) \cdot 2^{\ell_2+1} \} \\ &= (1 + 2k_1 - 2^{\ell_2} - 2k_1 \cdot 2^{\ell_2}) \\ &\quad - 2k_2 \cdot 2^{\ell_2} \end{aligned}$$

第1表 演算時刻と入出力の関係

ℓ	k	入力	演算時刻	出力
1	0	$u(m, 1, -m) \sim u(m, 1, 0)$	ΔT	$v(m, 1, 0)$
	1	$u(m, 1, 2-m) \sim u(m, 1, 2)$	$3\Delta T$	$v(m, 1, 1)$
	-	-----	-----	-----
	k	$u(m, 1, 2k-m) \sim u(m, 1, 2k)$	$(1+2k)\Delta T$	$v(m, 1, k)$
2	0	$u(m, 2, -m) \sim u(m, 2, 0)$	$2\Delta T$	$v(m, 2, 0)$
	1	$u(m, 2, 2-m) \sim u(m, 2, 2)$	$6\Delta T$	$v(m, 2, 1)$
	-	-----	-----	-----
	k	$u(m, 2, 2k-m) \sim u(m, 2, 2k)$	$2(1+2k)\Delta T$	$v(m, 2, k)$
ℓ	0	$u(m, \ell, -m) \sim u(m, \ell, 0)$	$2^* \Delta T$	$v(m, \ell, 0)$
	1	$u(m, \ell, 2-m) \sim u(m, \ell, 2)$	$2^* \cdot 3\Delta T$	$v(m, \ell, 1)$
	-	-----	-----	-----
	k	$u(m, \ell, 2k-m) \sim u(m, \ell, 2k)$	$2^* (1+2k)\Delta T$	$v(m, \ell, k)$



第 1 図 フィルタリングサンプルの機能の流れ

$$= (1 + 2k_1) \cdot (1 - 2^{\ell_2}) - 2k_2 \cdot 2^{\ell_2} \quad (3-7)$$

と表わせる。右辺第1項は奇数で第2項が偶数であるから右辺は0になることはない。したがってこの場合も両基本処理のタイミングは一致しない。(証明終)

3.3 機能の流れ

フィルタリングサンプルを行う機能の流れを第1図に示す。破線で囲まれた部分が基本処理を表わし、他の部分は処理順序の制御を行っている。

所望のカスケード段数をL段とし、二項係数の所望の次数をMとする。この例では $(L \cdot M + L + 1)$ 個の記憶を装置に備える必要があり、そのためLとMを装置固有の定数と考えている。これらの記憶をそれぞれ記憶(1), 記憶(2)……, 記憶 $(L \cdot M + L + 1)$ と表わすことにする。

所望のカスケード段数Lにたいして、全段の入力データの更新状態は 2^{L+1} 個ある。図では装置固有の定数となる 2^{L+1} をSで示してある。処理状態を表わすパラメタをsとすれば、sは1から始まって、タイミング信号を受信するたびに2ずつ増加し、S+1になった時に1サイクルを完了して再び1に戻る。sは処理状態を表わすものであるから、装置の内部と外部で共通に読めなければならないが、値を設定するのはどちらが行っても構わない。図の例では装置内部で設定することとしている。

フィルタリングサンプル装置はデータ入力の頻度に等しい頻度でタイミング信号を受信して各回の処理を開始する。始めに内部記憶を外部から強制的にクリアしたい場合を配慮して、外部で $s > S$ なる値を設定すれば内部記憶をすべてクリアする流れが組み込まれている。通常は一連のデータの先頭で $s > S$ なる値を設定し、それ以外には外部ではsの値を変えないようにする。

装置は入力データを記憶(1)に保存したのち、与えられたsの値を調べてsの最も右のオンビット番号を ℓ とする。s=1, 3, 5, ………, S-1のときは $\ell=1$ で、s=2, 6, 10, ………, S-2のときは $\ell=2$, 途中同様にして、s=Sのときは $\ell=L$

+2になる。 ℓ は次の基本処理が施されるべき段数を表わしている。 ℓ の値が決定されたのちsは1増加され、続いてランニングパラメタpの最大値Pとして $(\ell \cdot M + \ell)$ が計算される。

基本処理をL段で打ち切るために ℓ の判定が行われる。さらにsの判定も行われS+1の場合にはsを1に戻し、出力もしないで次のタイミング信号まで待機する。これらの判定はL+1段目に相当する記憶へのアクセスを避けるため、通常はM+1個分の記憶領域を余分に確保するほうが実用的である。

基本処理の準備としてランニングパラメタpをP-Mとし、レジスタXに記憶 $(P-M)$ の内容をセットする。これによって基本処理の次数Mと ℓ 段目の基本処理の入力である $\ell-1$ 段目の最新の出力とが設定された。

さて、移動平均の重みがM次の二項係数のフィルタは単純加算M段のカスケードフィルタに変換できる。この例では基本処理を加算平均のカスケード処理によって施している。既に設定されている $p (= \ell \cdot M + \ell - M)$ より始めて、pを1ずつ増加し、判定部分でpがPに至るまで、M回次の処理を繰り返す。pを1増加したのち記憶(p)の値をレジスタYに入れておいて、レジスタXの値を記憶(p)に入れ、レジスタYの値をレジスタXに加え、合計されたレジスタXの値を1ビット桁下げする。pがPに至る繰り返しの間に、記憶 $(\ell \cdot M + \ell - M + 1)$ より記憶 $(\ell \cdot M + \ell)$ までM個の記憶の値が変化する。 ℓ 段目の出力は記憶 $(\ell \cdot M + \ell + 1)$ に保存される。

カスケードフィルタでは入力頻度と処理頻度が一致するから、この例では初段の入力があるたびに初段の処理とそれ以外の段の処理のうちひとつとを行っている。 ℓ の値を判定して1であればもう一度sの値から ℓ の値を設定する所から繰り返し、 ℓ の値が1でなければ $\ell-1$ 段目の出力データとして記憶 $(P-M)$ を出力してから次のタイミング信号まで待機する。

4. 時系列離散関数としての定式化

4.1 hおよびWの導入

整数kに対し $t = k \Delta T$ で値をとる離散関数

$$h(m, \ell, k) = \begin{cases} 2^{-m} \cdot {}_m C_r & r = 0, 1, 2, \dots, m \text{ として} \\ & k = r \cdot 2^{\ell-1} \text{ で表わせるとき} \\ 0 & \text{その他の } k \text{ のとき} \end{cases} \quad (4-1)$$

を定義する。

入力 $u(m, 1, k)$ に対して、重み $h(m, 1, r)$ の移動平均を施したものを $w(m, 1, k)$ と定義すれば、

$$\begin{aligned} w(m, 1, k) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(m, 1, r) u(m, 1, k-r) \\ &= \sum_{r=0}^m 2^{-m} \cdot {}_m C_r \cdot u(m, 1, k-r) \end{aligned} \quad (4-2)$$

と表わされる。

$\ell \geq 2$ のとき、 $w(m, \ell-1, k)$ に対して、重み $h(m, \ell, r)$ の移動平均を施したものを

$$\begin{aligned} w(m, \ell, k) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(m, \ell, r) w(m, \ell-1, k-r) \end{aligned} \quad (4-3)$$

と定義する。(4-1)式を代入すれば

$$w(m, \ell, k) = \sum_{s=0}^m 2^{-m} \cdot {}_m C_s \cdot w(m, \ell-1, k-s \cdot 2^{\ell-1}) \quad (4-4)$$

となる。

このように定義された $w(m, \ell, k)$ はサンプリング間隔 ΔT 秒の離散関数である。

$w(m, \ell, k)$ からサンプリングによって新たな離散関数を作り $v(m, \ell, k)$ に一致させられることを示そう。

$w(m, 1, k)$ の k が偶数の点を選び出してサンプリング間隔 $2 \Delta T$ 秒の離散関数を作れば、 k の代わりに $2k$ を代入して

$$w(m, 1, 2k)$$

$$= \sum_{r=0}^m 2^{-m} \cdot {}_m C_r \cdot u(m, 1, 2k-r) \quad (4-5)$$

であるから、 $v(m, 1, k)$ と一致する。

$\ell \geq 2$ のとき、 $w(m, \ell, k)$ の k が 2^ℓ の整数倍の点を選び出してサンプリング間隔 $2^\ell \Delta T$ 秒の離散関数を作れば、 k の代わりに $k \cdot 2^\ell$ を代入して

$$\begin{aligned} w(m, \ell, k \cdot 2^\ell) &= \sum_{s=0}^m 2^{-m} \cdot {}_m C_s \cdot w(m, \ell-1, (2k-s) \cdot 2^{\ell-1}) \end{aligned} \quad (4-6)$$

と表わされる。ここで $w(m, \ell-1, (2k-s) \cdot 2^{\ell-1})$ は $v(m, \ell-1, (2k-s))$ と一致することが示してあるとすれば、

$$\begin{aligned} w(m, \ell, 2k \cdot 2^{\ell-1}) &= \sum_{s=0}^m 2^{-m} \cdot {}_m C_s \cdot v(m, \ell-1, 2k-s) \\ &= \sum_{r=0}^m 2^{-m} \cdot {}_m C_r \cdot u(m, \ell, 2k-r) \end{aligned} \quad (4-7)$$

となって、 $v(m, \ell, k)$ と一致する。

ところで $w(m, \ell-1, (2k-s) \cdot 2^{\ell-1})$ は $w(m, \ell-1, k)$ の k が $2^{\ell-1}$ の整数倍の点を選び出した離散関数の $(2k-s)$ 番目の値であるから、 $\ell=2$ の場合は $v(m, \ell-1, (2k-s))$ と一致することがすでに示されており、 $\ell > 2$ の場合は順次 $\ell-1$ の場合で $v(m, \ell-1, (2k-s))$ と一致することが示される。

以上で $\ell \geq 1$ の任意の ℓ について、 $w(m, \ell, k)$ の k が 2^ℓ の整数倍の点を選び出して作られたサンプリング間隔 $2^\ell \Delta T$ 秒の離散関数は $v(m, \ell, k)$ に一致すること、すなわち

$$v(m, \ell, k) = w(m, \ell, k \cdot 2^\ell) \quad (4-8)$$

であることが示された。

4.2 逐次サンプルと一括サンプル

従来のサンプリングでは、プリフィルタを通した

のち一挙に所望のサンプリング間隔にサンプルするのが通例であった。フィルタリングサンプル装置では、移動平均するたびに半数化のサンプリングを逐次おこなっている。フィルタリングおよびサンプリングがデータに及ぼす影響を検討するためには、等価なフィルタを通してから一括してサンプルする構造のモデルを利用するのが適切である。

第2図に逐次サンプルしてゆく構造とサンプリングを一括して行う構造との処理を対比して示す。フィルタリングサンプル装置で行われる処理は左側の列で示される。入力データ $u(m, 1, k)$ に対して二項係数を重みとする移動平均と正規化および半数化のサンプリングを施すと $v(m, 1, k)$ が得られる。これをカスケードに l 回繰り返したデータが、 l 段目の出力 $v(m, l, k)$ になる。装置の記憶容量で決定される l の最大値を L とすれば、フィルタリングサンプル装置は $v(m, 1, k)$ から $v(m, L, k)$ までのすべての $v(m, l, k)$ を生成しつづける。

所望の出力が $v(m, l, k)$ として、等価なフィルタリングを施したのち、 2^l 分の1に一括してサンプルする処理の構造は右側の列で示される。入力データ $u(m, 1, k)$ と $h(m, 1, k)$ との畳み込みを行ったものが $w(m, 1, k)$ である。ここに h と w は前節で定義された時系列関数である。 $w(m, 1, k)$ と $h(m, 2, k)$ との畳み込みを行ったものが $w(m, 2, k)$ である。さらに3から l までの l について、 $w(m, l-1, k)$ と $h(m, l, k)$ との畳み込みを順次行ったものが $w(m, l, k)$ である。これを 2^l 個ごとにサンプルして得られる時系列データは $v(m, l, k)$ に一致する。

フィルタリングサンプル装置がデータに及ぼす処理効果は、フィルタリング効果については $u(m, 1, k)$ と $w(m, l, k)$ との関係から、またサンプリング効果については $w(m, l, k)$ と $v(m, l, k)$ との関係から、それぞれ調べることができる。

4.3 フーリエ変換

$u(m, 1, k)$ のフーリエ変換 $U(m, 1, \omega)$ は、サンプリング間隔が ΔT 秒であるから

$$\begin{aligned} U(m, 1, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(m, 1, k) \delta(t - k \Delta T) \\ &\quad \cdot \exp(-j \omega t) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(m, 1, k) \exp(-j \omega k \Delta T) \end{aligned} \quad (4-9)$$

と定義される⁴⁾。

この式からも明らかなように、サンプリング間隔が ΔT 秒であるので、 $U(m, 1, \omega)$ は $u(m, 1, k)$ の値にかかわらず周期 ($2\pi/\Delta T$) rad/sec の周期性を持ち、

$$-\frac{\pi}{\Delta T} < \omega \leq \frac{\pi}{\Delta T} \quad (4-10)$$

はナイキストインタバルと呼ばれる⁵⁾。

同様に $h(m, l, k)$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} H(m, l, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m, l, k) \delta(t - k \Delta T) \\ &\quad \cdot \exp(-j \omega t) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m, l, k) \exp(-j \omega k \Delta T) \end{aligned} \quad (4-11)$$

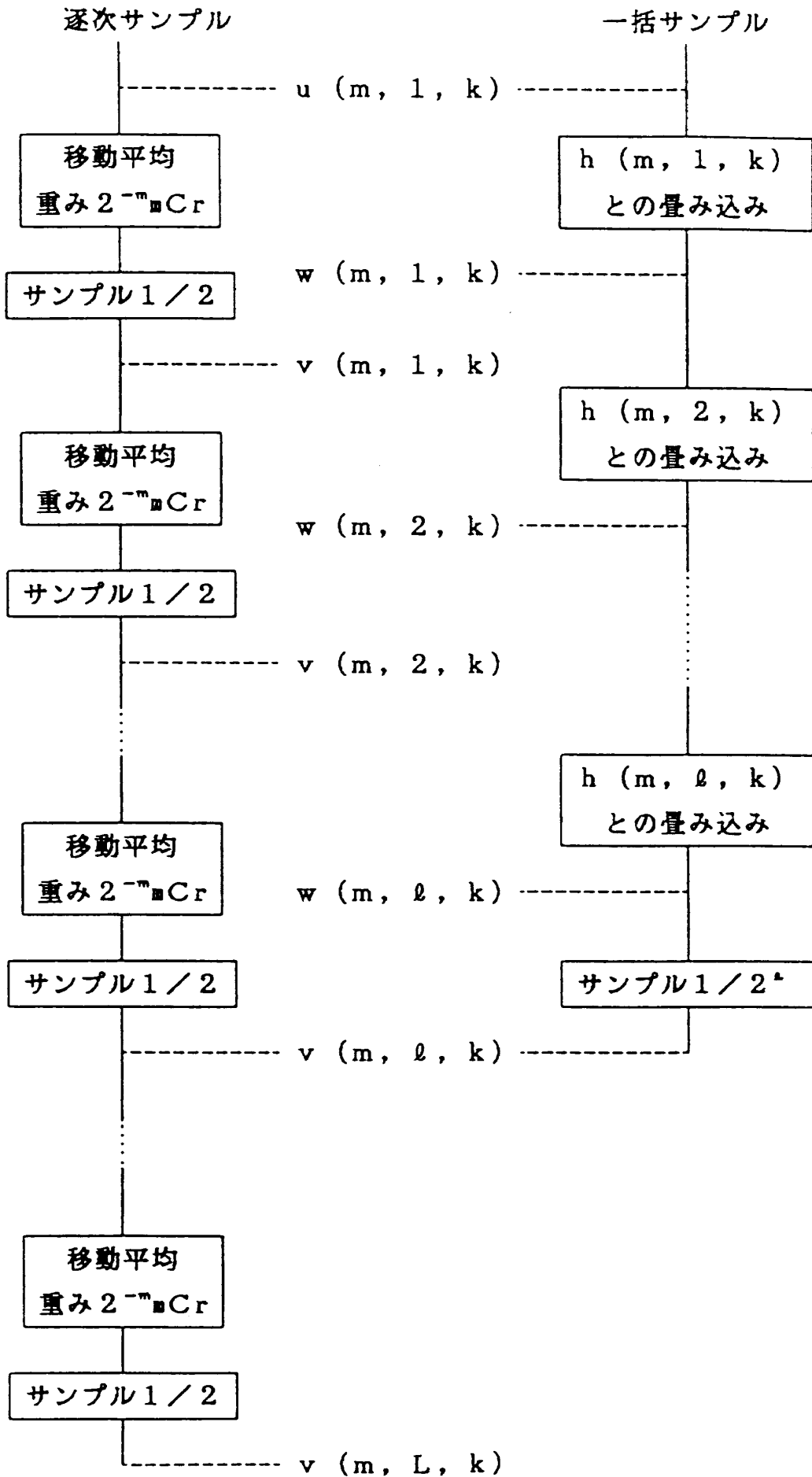
と定義される。 $h(m, l, k)$ の定義(4-1)式を代入すれば、

$$\begin{aligned} H(m, l, \omega) &= \sum_{r=0}^m 2^{-m} \cdot {}_m C_r \cdot \exp(-j \omega r 2^{l-1} \Delta T) \end{aligned} \quad (4-12)$$

と表わされる。

$w(m, 1, k)$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} W(m, 1, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(m, 1, k) \delta(t - k \Delta T) \\ &\quad \cdot \exp(-j \omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(m, 1, r) u(m, 1, k-r) \end{aligned}$$



第 2 図 逐次サンプルと一括サンプルの対比

$$\cdot \delta(t - k \Delta T) \exp(-j \omega t) dt \quad (4-13)$$

であるから、さらに

$$\begin{aligned} & W(m, 1, \omega) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(m, 1, r) \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(m, 1, k-r) \\ &\quad \cdot \delta(t - k \Delta T) \exp(-j \omega t) dt \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(m, 1, r) \\ &\quad \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(m, 1, k-r) \exp(-j \omega k \Delta T) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(m, 1, r) \exp(-j \omega r \Delta T) \\ &\quad \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(m, 1, k-r) \\ &\quad \cdot \exp\{-j \omega(k-r) \Delta T\} \\ &= H(m, 1, \omega) U(m, 1, \omega) \end{aligned} \quad (4-14)$$

となる。

$\ell \geq 2$ に対して、 $w(m, \ell, k)$ のフーリエ変換は、 $w(m, \ell-1, \omega)$ のフーリエ変換が $W(m, \ell-1, \omega)$ であれば、上式と同様にして

$$\begin{aligned} & W(m, \ell, \omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(m, \ell, r) \\ &\quad \cdot w(m, \ell-1, k-r) \\ &\quad \cdot \delta(t - k \Delta T) \exp(-j \omega t) dt \\ &= H(m, \ell, \omega) W(m, \ell-1, \omega) \end{aligned} \quad (4-15)$$

となる。

したがって W は H と U で表わされて

$$\begin{aligned} & W(m, \ell, \omega) \\ &= \left\{ \prod_{s=1}^{\ell} H(m, s, \omega) \right\} U(m, 1, \omega) \end{aligned} \quad (4-16)$$

となる。これに (4-12) 式を代入すれば、

$$\begin{aligned} & W(m, \ell, \omega) \\ &= \left[\prod_{s=1}^{\ell} \left\{ \sum_{r=0}^m 2^{-m} \cdot {}_m C_r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \exp(-j \omega r 2^{s-1} \Delta T) \right\} \right] \cdot U(m, 1, \omega) \end{aligned} \quad (4-17)$$

と表わされる。

$v(m, \ell, k)$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} & V(m, \ell, \omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(m, \ell, k) \\ &\quad \cdot \delta(t - k \cdot 2^{\ell} \Delta T) \exp(-j \omega t) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(m, \ell, k) \exp(-j \omega k 2^{\ell} \Delta T) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(m, \ell, k \cdot 2^{\ell}) \exp(-j \omega k 2^{\ell} \Delta T) \end{aligned} \quad (4-18)$$

であるが、 $v(m, \ell, k)$ が $w(m, \ell, k)$ を 2^{ℓ} 個ごとにサンプルしたものであるから、両者のフーリエ変換の間には

$$\begin{aligned} & V(m, \ell, \omega) \\ &= \frac{1}{2^{\ell}} \sum_{q=0}^{2^{\ell}-1} W(\ell, m, \omega + \frac{2\pi}{\Delta T} \cdot \frac{q}{2^{\ell}}) \end{aligned} \quad (4-19)$$

の関係がある⁶⁾。

5. フィルタリングサンプルの特性

5.1 等価フィルタの周波数特性

$u(m, 1, k)$ に処理を施して $w(m, \ell, k)$ とするフィルタの周波数特性は

$$Y(m, \ell, \omega) = \frac{W(m, \ell, \omega)}{U(m, 1, \omega)} \quad (5-1)$$

として定義される。(4-17) 式に二項定理を適用すれば

$$Y(m, \ell, \omega)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{s=1}^{\ell} \left\{ \sum_{r=0}^m 2^{-m} \cdot {}_m C_r \cdot \exp(-j \omega r 2^{s-1} \Delta T) \right\} & \Rightarrow \left\{ \frac{\sin(\omega T_{\ell}/2)}{\omega T_{\ell}/2} \right\}^m \\
&= \prod_{s=1}^{\ell} 2^{-m} \{ 1 + \exp(-j \omega 2^{s-1} \Delta T) \}^m & \cdot \exp\{-j \omega m (T_{\ell} - \Delta T)/2\} \\
&= \left[\frac{1 - \exp(-j \omega 2^{\ell} \Delta T)}{2^{\ell} \cdot \{ 1 - \exp(-j \omega \Delta T) \}} \right]^m & (5-6) \\
&= \left\{ \frac{\sin(\omega 2^{\ell-1} \Delta T)}{2^{\ell} \sin(\omega \cdot 2^{-1} \Delta T)} \right\}^m \\
&\quad \cdot \exp\{-j \omega m (2^{\ell} - 1) \Delta T/2\}
\end{aligned}$$

(5-2)

と表わされる。二項係数の次数 m は式の指数となっていることから、この周波数特性を両対数のグラフに描けば縦軸のスケールのみが m に依存することがわかる。

$v(m, \ell, k)$ のサンプリング間隔を T_{ℓ} とすれば

$$T_{\ell} = 2^{\ell} \Delta T \quad (5-3)$$

であり、これを用いて(5-2)式は

$$\begin{aligned}
Y(m, \ell, \omega) &= \left\{ \frac{\Delta T \sin(\omega T_{\ell}/2)}{T_{\ell} \sin(\omega \Delta T/2)} \right\}^m \\
&\quad \cdot \exp\{-j \omega m (T_{\ell} - \Delta T)/2\} \\
& \quad (5-4)
\end{aligned}$$

と表わされる。右辺第一項は実数であるから、フィルタの位相遅れは直線性を持ち、無駄時間 $m(T_{\ell} - \Delta T)/2$ に相当することが知られる。すなわち、フィルタリングサンプル装置の出力 $v(m, \ell, k)$ は、 ℓ の如何に関わらず、時標原点を出力の $m/2$ 点遅らせ、初段の入力の $m/2$ 点進ませて考えれば、位相遅れが完全に補償される。

ω が $\pi/\Delta T$ に比べて非常に小さければ、

$$\frac{\Delta T}{\sin(\omega \Delta T/2)} \approx \frac{2}{\omega} \quad (5-5)$$

であるから

$$Y(m, \ell, \omega)$$

と近似できて、 T_{ℓ} で正規化すれば利得は ℓ に依存しないことが知られる。

5.2 等価フィルタの過渡特性

等価フィルタのインパルス応答の計算式を第2表に示す。すなわち、 $k=0$ のとき1でその他のときつねに0であるような入力 $u(m, 1, k)$ が印加されたときの $w(m, \ell, k)$ が、 $m=1, 2, 3, 4$ について m, ℓ および k を用いて表わされている。 w の値は非負であり、 k に関して $k=m(2^{\ell}-1)/2$ を中心として対称になっている。 k が負であるような点では零であり、 $k=0$ から非零の値をとり、中心まで次第に増加し、 m が偶数の場合は対称の中心点で、また m が奇数の場合はその前後の2点で最大値をとり、さらに k が増すと w の値は減少し、 $k=m(2^{\ell}-1)$ を過ぎると再び零になる。 w の値が1に比べて小さいところに高周波成分を遮断する性質が表れている。入力の1点の影響は出力 w の $m(2^{\ell}-1)+1$ 点に及んでいる。

等価フィルタのステップ応答の計算式を第3表に示す。すなわち、 k が負のとき0で k が0または正のときつねに1であるような入力 $u(m, 1, k)$ が印加されたときの $w(m, \ell, k)$ が、 $m=1, 2, 3, 4$ について m, ℓ および k を用いて表わされている。 w の値は、 k が0から増加し始め、 k が $m(2^{\ell}-1)$ のとき1に達し、さらに大きな k に対してはつねに1となる。定常値となる番号が有限であることに移動平均型フィルタの特徴が表れている。

5.3 出力データに見る過渡応答

フィルタリングサンプル装置の出力 $v(m, \ell, k')$ が $w(m, \ell, k)$ を 2^{ℓ} 個ごとにサンプルしたものと一致することを既に示した。ここで等価フィルタのインパルス応答を 2^{ℓ} 個ごとにサンプルすることを考えてみる。 $k=0$ から $k=2^{\ell}-1$ までのいずれかの $w(m, \ell, k)$ をサンプルしたものが始

第2表 等価フィルタのインパルス応答

$n = 2^k - 1$ とする

k m	$0 \leq k \leq n$	$n < k \leq 2n$	$2n < k \leq 3n$	$3n < k \leq 4n$
1	$\frac{1}{2^k} \cdot 1$	0	0	0
2	$\frac{1}{2^{2k}} \cdot (k+1)$	$\frac{1}{2^{2k}} \cdot (2n - k + 1)$	0	0
3	$\frac{1}{2^{3k}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (k+1)(k+2)$	$\frac{1}{2^{3k}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2k^2 + 6nk - 3n^2 + 3n + 2)$	$\frac{1}{2^{3k}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3n - k + 1)(3n - k + 2)$	0
4	$\frac{1}{2^{4k}} \cdot \frac{1}{6} \cdot (k+1)(k+2)(k+3)$	$\frac{1}{2^{4k}} \cdot \frac{1}{6} \cdot (4n^3 - 12n^2k - 12n^2 + 12nk^2 + 24nk + 8n - 3k^3 - 6k^2 + 3k + 6)$	$\frac{1}{2^{4k}} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-44n^3 + 60n^2k - 12n^2 - 24nk^2 + 24nk + 20n + 3k^3 - 6k^2 - 3k + 6)$	$\frac{1}{2^{4k}} \cdot \frac{1}{6} \cdot (4n - k + 1) \cdot (4n - k + 2) \cdot (4n - k + 3)$

第3表 等価フィルタのステップ応答

$n = 2^a - 1$ とする

k m	$0 \leq k \leq n$	$n < k \leq 2n$	$2n < k \leq 3n$	$3n < k \leq 4n$
1	$\frac{1}{2^a} \cdot (k+1)$	1	1	1
2	$\frac{1}{2^{2a}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (k^2 + 3k + 2)$	$\frac{1}{2^{2a}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2n^2 + 2n + 2 + 4nk + k - k^2)$	1	1
3	$\frac{1}{2^{3a}} \cdot \frac{1}{6} \cdot (k^3 + 6k^2 + 11k + 6)$	$\frac{1}{2^{3a}} \cdot \frac{1}{6} \cdot (3n^3 - 9n^2 + 6n + 6 - 2k^3 + 9nk^2 - 3k^2 - 9n^2 k + 18nk + 5k)$	$\frac{1}{2^{3a}} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-21n^3 - 9n^2 + 12n + 6 + k^3 - 9nk^2 - 3k^2 + 27n^2 k + 18nk + 2k)$	1
4	$\frac{1}{2^{4a}} \cdot \frac{1}{24} \cdot (k^4 + 10k^3 + 35k^2 + 50k + 24)$	$\frac{1}{2^{4a}} \cdot \frac{1}{24} \cdot (-4n^4 + 24n^3 - 44n^2 + 24n + 24 - 3k^4 + 16nk^3 - 14k^3 - 24n^2 k^2 + 72nk^2 - 9k^2 + 16n^3 k - 72n^2 k + 88nk + 26k)$	$\frac{1}{2^{4a}} \cdot \frac{1}{24} \cdot (92n^4 - 72n^3 - 68n^2 + 48n + 24 + 3k^4 - 32nk^3 - 2k^3 + 120n^2 k^2 - 15k^2 - 176n^3 k + 72n^2 k + 112nk + 14k)$	$\frac{1}{2^{4a}} \cdot \frac{1}{24} \cdot (-232n^4 - 288n^3 - 32n^2 + 72n + 24 - k^4 + 16nk^3 + 6k^3 - 96n^2 k^2 - 72nk^2 - 11k^2 + 256n^3 k + 288n^2 k + 88nk + 6k)$

めに $k = 0$ で印加されたインパルスの影響を受ける。最後に影響を受けるのは、 $k = (m-1) \cdot (2^{\ell} - 1)$ から $k = m(2^{\ell} - 1)$ までのいずれかの $w(m, \ell, k)$ をサンプルしたものである。入力インパルスの影響を受ける出力 $v(m, \ell, k)$ の数はサンプリングとインパルス印加のタイミングによって異なるが、 $[\]$ をガウスの記号(中味を越えない最大の整数)として、少なくとも $[m - 2^{-\ell} \cdot (m-1)]$ 個、多くて $[m + 1 - 2^{-\ell} \cdot m]$ 個である。通常は m が 2^{ℓ} に比べて小さいので $m-1$ 個あるいは m 個になる。

等価フィルタのステップ応答について 2^{ℓ} 個ごとにサンプルする場合を考えると、 $k = 0$ から $k = m \cdot (2^{\ell} - 1) - 1$ までの $w(m, \ell, k)$ をサンプルした、少なくとも $[m - 2^{-\ell} \cdot m]$ 個、多くて $[m + 1 - 2^{-\ell} \cdot (m+1)]$ 個の $v(m, \ell, k')$ に過渡的な値が生じる。データ処理の際に配慮を要する問題の一つに、定常値を求める解析に用いるデータの範囲の決定がある。たとえばスペクトル解析をする際に、フィルタを含む試験システムの特徴が定常値に達するまでのデータは捨てなければならない。フィルタリングサンプル装置の場合に捨てるべき出力データは、入力が定常になってから最大 m 個そして通常も m 個である。

5.4 反エイリアシング効果

(4-19) 式を W を Y と U で表わせば

$$V(m, \ell, \omega) = \frac{1}{2^{\ell}} \sum_{q=0}^{2^{\ell}-1} Y(m, \ell, \omega + \frac{2\pi q}{\Delta T 2^{\ell}}) \cdot U(m, 1, \omega + \frac{2\pi q}{\Delta T 2^{\ell}}) \quad (5-7)$$

となる。ここに q は 0 から $2^{\ell} - 1$ までであるが、 U 自体が周波数領域で周期 $2\pi / \Delta T$ の周期性を持っているから、ナイキストインタバルに合わせて q は $-2^{\ell-1}$ から $2^{\ell-1} - 1$ と考えても差し支えない。この式でエイリアシングは、出力 V の成分のうち解析上着目している周波数 ω の成分が、入力 U の周波数 $\omega + 2\pi q / (\Delta T 2^{\ell})$ と記述できるようなあらゆる成分からなっている点に表れている。

通常は $V(m, \ell, \omega)$ に含まれる信号成分は $Y(m, \ell, \omega) \cdot U(m, 1, \omega) / 2^{\ell}$ であり、 ℓ 段までのサンプルによる雑音成分は

$$\frac{1}{2^{\ell}} Y(m, \ell, \omega + \frac{2\pi q}{\Delta T 2^{\ell}}) \cdot U(m, 1, \omega + \frac{2\pi q}{\Delta T 2^{\ell}})$$

である。ここに q は $-2^{\ell-1}, 1 - 2^{\ell-1}, 2 - 2^{\ell-1}, \dots, -1$ および $1, 2, \dots, 2^{\ell-1} - 1$ とする。

雑音信号比を (5-2) 式を用いて計算すれば、各 q についてパワ比で

$$\frac{\sin^{2m}(\frac{\omega \Delta T}{2}) \cdot |U(m, 1, \omega + \frac{2\pi q}{\Delta T 2^{\ell}})|^2}{\sin^{2m}(\frac{\omega \Delta T}{2} + \frac{q\pi}{2^{\ell}}) \cdot |U(m, 1, \omega)|^2}$$

と表わされる。

反エイリアシング効果は U のパワ比に対し雑音信号比がいかにか削減されるかで評価できる。ここで雑音信号比を入力のパワ比で除した値をエイリアシング削減比と呼び ρ^2 で表わすことにする。

フィルタリングサンプル装置のエイリアシング削減比は正弦関数の比で

$$\rho^2 = \frac{\sin^{2m}(\frac{\omega \Delta T}{2})}{\sin^{2m}(\frac{\omega \Delta T}{2} + \frac{q\pi}{2^{\ell}})} \quad (5-8)$$

となる。

フィルタリングサンプル装置の ℓ 段目の出力データを用いる通常の場合には、着目する信号成分の周波数 ω は出力のナイキストインタバルの非負の範囲に含まれているから

$$0 \leq \omega < \pi / 2^{\ell} \Delta T \quad (5-9)$$

と考えられる。 ω を $2\pi / 2^{\ell} \Delta T$ で正規化したものを p とすれば

$$0 \leq p = \frac{\omega \cdot 2^{\ell} \Delta T}{2\pi} < \frac{1}{2} \quad (5-10)$$

であって、これを用いて(5-8)式は

$$\rho^2 = \frac{\sin^{2m} \left(p \frac{\pi}{2\ell} \right)}{\sin^{2m} \left\{ (p+q) \frac{\pi}{2\ell} \right\}} \quad (5-11)$$

とも表わせる。この式から $p+q$ の絶対値が大きくなれば、 ρ^2 は減少して良好な削減比となることが判る。一方、 $p+q$ の絶対値が 2^ℓ に比べて十分小さいときは

$$\rho^2 \approx \frac{p^{2m}}{(p+q)^{2m}} \quad (5-12)$$

と近似できる。この式によって、仮に q が -1 の場合であっても、 p が小さければ、すなわち信号の周波数に対して十分小さなサンプリング間隔になるように ℓ を選べば、良好な削減比を得られることが判る。

6. 検 討

6.1 製作に関して

指定したパワ周波数特性を持つデジタルフィルタを設計する方法は理論的には既知の技術であるが、項数の少ないごく単純なものでないとオンライン処理には負担が重かった。フィルタリングサンプル装置にしても製作実績があるのは、二項係数の次数 m が 2 の場合だけであるから、始めにパラメタが一般的な範囲にあるとき実用的に製作が可能であるか検討しよう。

まず、フィルタリングサンプル処理の基本処理演算は、デジタルプロセッサにとって扱い易い係数の移動平均演算になっていることを示す。機能の流れの例に挙げたように、基本処理のフィルタをさらに変換して、二項の単純加算と 1 ビット桁下げをカスケードに m 回繰り返すものにもできる。その例から明らかなように正規化は m ビット桁下げするだけで完了する。処理のしかたによって、仮に基本処理が終るまで正規化を行わないとしても、桁落ちをおこさないために必要なレジスタのビット数はデータのビット数に m ビット加えただけである。これに対して等価フィルタを通してから一括サンプル

する処理ではどうだろうか。移動平均フィルタのインパルス応答はフィルタ係数の順番を逆転したものである事実と、(フィルタリングサンプル装置の基本処理のフィルタ係数が時間に関して前後対称であることに起因して)等価フィルタの係数が前後対称である事実とを考え合わせると、結局、第 2 表のインパルス応答はそのままフィルタ係数と見てもよい。等価フィルタの処理では一つの係数をバイナリ表現するだけでも所要ビット数が膨大になる。演算時の所要ビット数の点で、フィルタリングサンプル処理はデジタル演算器に与える負担を非常に軽くしていることがわかる。

演算に関するデータを保存するために必要な記憶容量の点でも、フィルタリングサンプル装置は等価フィルタに比べて、少なくなっている。フィルタリングサンプル装置といっても、構成のしかたによって所要記憶量は多少異なるが、第 1 図に挙げた構成で $m=5$ 、 $L=31$ の場合を例にとれば、187 個の記憶が必要である。これに対して一括サンプリングをする等価フィルタでは $(5 \cdot 2^{31} - 4)$ 個の記憶が必要になる。前者はマイクロプロセッサに容易に装備される量であるのに対し、後者は、装置を製作するのが不可能ではないにしろ、現実的な記憶容量とは言えない。

ところで、フィルタリングサンプル処理では、基本処理の演算を専用の回路素子あるいはプログラム要素(以下では基本処理演算器と呼ぶ)に担当させ、この演算器の入出力をスケジュールに従って制御するのをコントローラに担当させ、両者を中心にシステムを構成することが可能で有効である。じっさい、機能の流れを説明する例に挙げた第 1 図は、点線で囲んだ基本処理演算と、 s から ℓ を決定し点線部に入出力するデータの記憶番地を指定する機能を中心に構成されている。したがって、基本処理の演算と入出力の記憶番地決定を効率良く実行することにより、フィルタリングサンプル処理全体の効率が高められる。以下に基本処理演算器とコントローラが実用的に製作できることを示し、若干の検討を加えよう。

基本処理の演算は、二項係数の次数 m の値は通常 2 位で十分であるが仮に 4 とし、デジタルデータ

の精度を12ビットとして、16ビットの演算器で処理できる。したがって、基本処理演算器は加算およびシフト機能をもつ回路で製作できる。勿論簡単なプログラムを汎用レジスタで走らせてもよい。ハードウェアの効率から見れば、専用の回路を設計してチップ化するのが一番良い。基本処理演算器の速度については、オンライン処理の場合に要求が厳しくなる。基本処理のタイミングから明らかなように、出力段がいくら増しても基本処理演算の頻度はたかだか入力頻度と同じで良い。またチャンネルの処理を並行して実行する場合にも、基本処理演算器は共通に使用できる。逆に演算速度が足りない場合は、複数の基本処理演算器を装備することによって演算速度を上げることもできる。システムを製作するときには、チャンネル数も考慮して、システム全体の入力頻度に見合う処理能力を持つような数の基本処理演算器を装備すればよい。

コントローラについては、さまざまなアルゴリズムが工夫できるだろう。第1図には、順次増加する s の値をバイナリで表わしたとき、オンとなるビットの番号を調べ最小のものを検出する例を挙げた。これはカウンタ s の最小オンビット番号を検出するという単純な命令あるいはハードウェア機能で実行できる。カウンタの所要ビット数は設定した入力頻度と所望出力頻度のサンプリング比で定まる。一例として、第1図で入力のサンプリング頻度が25.6kHzの場合を挙げれば、32ビットのカウンタでは 2^{32} 個の状態が表わせるから、31段まで処理可能で、23時間余りに1回の頻度の出力までコントロールできる。

これらの結果は、フィルタリングサンプル装置がごくありふれた能力のデジタル演算素子によって構成できることを示している。なおここで、基本処理の演算と等価フィルタの演算を対比して論じたのは、一般的にデジタルフィルタがハードウェアに掛けがちな負担を示すためであって、フィルタリングサンプル装置の優位性を一般論として述べたわけではない。同様に基本処理演算のアルゴリズムやコントローラのアルゴリズムについて挙げた例も、最適を論じたわけではないことを指摘しておく。

6.2 使用面から見た特性に関して

時系列離散関数 $h(m, \ell, k)$ および $w(m, \ell, k)$ を導入することによって、フィルタリングサンプル処理の効果を、等価なフィルタリングの効果と一挙に2の ℓ 乗分の1にデータ点数を減らすサンプリングの効果とに分離できた。したがって従来のフィルタ利用技術とサンプリングに対する知識がフィルタリングサンプル処理にも適用できる。

オフラインでの処理を目的としたデータ収録では、フィルタ特性が位相直線性をもつことは、非常に好ましいものである。フィルタリングサンプル処理の位相遅れは、時標原点を $\{m \cdot (2^\ell - 1) / 2\} \Delta T$ 秒だけずらして考えることによって容易に補正できることを示したが、デジタル処理だけにチャンネル間誤差が無いばかりでなく、出力段の異なるデータを並行して収録したときでも出力点 $m / 2$ 個ずつ時標をずらせば相対的に正しい比較ができる。

出力データのサンプリング間隔で正規化すると等価フィルタの特性が出力段数 ℓ に依存しないことは、利得特性にも近似的に成り立っている。これは使用者には便利なことである。低周波数領域での利得の平坦さは m の値に依存するので一概に評価できない。時間領域での解析には、波形をチェックする必要などによって、通常信号成分の周波数に比べて高いサンプリング頻度を採用するから、出力ナイキストインタルに比べてごく低周波数領域に信号が存在することになるので、特に不都合は考えられない。周波数領域での解析には、補正量が明瞭でしかも簡単な式から求められるので都合が良い。

信号の非定常部分を計測するとき、たとえばインパルスやステップ型の入力に対する出力データの形状を目視する場合のように、出力形状から入力形状を直感的に想起しにくいのは、等価フィルタの過渡応答によるもので、フィルタを使用する目的から見てやむを得ない。対象とする非定常現象を測定するに足るだけサンプル頻度を増す、すなわち m に比べて十分多い点で非定常現象を測定する必要がある。ただし環境によっては、高周波雑音が少なくエイリアシングが実用上無視できる場合もある。そのような場合の利用を考えて、サンプル装置の中に任意に指定する段以降の段の基本処理ではフィルタせず

サンプルするモードを、予め組み込んで置くのが実用的かもしれない。

反エイリアシング効果は大変に良い。もし入力データに含まれている雑音のパワーが大き過ぎる場合は大きな m を用いれば指数的に雑音 / 信号比が向上する。ただし大きな m を用いれば等価フィルタの利得の平坦性も同時に減少するから、やはりサンプリング頻度を高めるのが好ましい。

フィルタリングサンプル装置の使用例として、さきに触れた操縦系統機能試験設備のデータ前処理装置について述べよう。64種類の計測物理量をセンサで ± 10 ボルトのアナログ電圧に変換した入力データを受けた前処理装置は、どのチャンネルのデータについてもカットオフ 2 kHz の簡単なアナログフィルタを通したのち、25.6 kHz の間隔でサンプルおよび A / D 変換したものを初段の入力としフィルタリングサンプル処理を施している。デジタルデータ処理システムのプログラムによって指定された8段目の出力はサンプリング頻度が 100 Hz であるから、前処理装置は 10 ms ごとに 64 チャンネル分のデジタルデータをシリアルに並べインターフェイスに送りだしている。デジタルデータ処理システムのミニコンピュータは、主記憶およびディスク上の形式通りのデータを受け取ることになり、オンラインのデータ収録が容易にできる。

航空機の運動は基本的にはパイロットによって制御されるから、操縦システムの試験データのうち 2 Hz 以下の成分が最も重要な信号と考えられる。ところが実験機「飛鳥」の場合は操縦システム内にデジタル計算機が組み込まれて 25 Hz の頻度でデータを更新し、制御信号を送りだしている⁸⁾。そこで、プリフィルタやポストフィルタが適切にエイリアシングを押えているか見当をつける程度に調べる意図も含んで、収録データのサンプリング頻度を 100 Hz とした。 m は 2 だから (5-11) 式から $q = -1$ について ρ^2 を計算すると、常時信号と見なされる 2 Hz で 0.000000173、搭載計算機のナイキストインタバルの上限 12.5 Hz で 0.000417、搭載計算機のサンプリングによって人間の駆動周波数に影響を及ぼす可能性が一番高い 25 Hz で 0.0123 が得られる。試験期間を通して目につく範囲では、ディジ

タルデータ収録システムの作動は余裕をもって安定し、他のモニタ機器に時折見られた高周波雑音の影響も発生しなかった。

当初意図しなかったが、オフラインで汎用のデジタルデータ処理システムで行う作業でも使用された。詳しい解析にそなえて 100 Hz という高い頻度でサンプルしたデータをディスクに蓄えてはいるが、通常の処理ではサンプリング間隔は疎らでよいからデータ長を大きくしたい場合も多い。たとえばデータの形状を収録時間の全体にわたって目視で観察したい場合には、グラフィックディスプレイやプロッタの分解能あるいは速度から、表示するデータ点数を減らしたい。このような目的でソフトウェアとしてもフィルタリングサンプル処理のサブルーチンを用意してみると、手軽にサンプリング頻度を選べるので重宝であった。

出力のサンプリング間隔が入力のその 2 の整数乗倍しか選べない点については、100 Hz を通る系列の他に 60 Hz と 1 Hz を通る系列用に合計 3 個のクロックを切り換えられる仕組みになっている。

7. 結 論

本報告ではフィルタリングサンプルの概念を紹介し、その特性を明らかにした。

フィルタリングサンプルは重みが互いに二項係数の割合をなす移動平均とデータ間隔を 2 倍にするサンプルを合わせて基本処理とし、時系列デジタルデータに対して何段もカスケードに繰り返し施す手法で、とくに専用ハードウェアで演算するのに適している。エイリアシングによる雑音信号比を削減する性質に優れ、二項係数の次数が増すと雑音信号比はその次数乗の影響を受ける。等価フィルタの位相特性は完全な直線性を持つ。ユーザにとって都合の好いことは、デジタルコントロールが容易なことと出力のサンプリング頻度が変わってもそのサンプリング周波数で正規化した特性はほとんど変わらないことが挙げられる。

今後に残された研究課題は集積回路によってワンチップにするときに最適な回路構成を見出すことであると思われる。

本研究に関して国際技術開発協会の平沢正憲氏には

装置開発上の問題点のご指摘を戴き、フィルタリングサンプル装置に思い至るきっかけとなった。そのほかにも多くの方々にお世話になった。深く感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) Blackman, R.B. and Tukey, J.W., THE MEASUREMENT OF POWER SPECTRA From the Point of View of Communications Engineering, Dover Publications, Inc., 1958.
- 2) 多田章, データ処理のためのフィルタリングサンプル装置, 飛行機シンポジウム講演集, 1983.
- 3) 多田章, 小川敏雄, 大和裕幸, S T O L実験機の操縦系統機能試験の計測, 飛行機シンポジウム講演集, 1984.
- 4) Papoulis, A., THE FOURIER INTEGRAL AND ITS APPLICATIONS, McGraw-Hill Book Co., 1962.
- 5) Schwartz, M., Information, Transmission, Modulation, and Noise, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1970.
- 6) Truxal, J.G., AUTOMATIC FEEDBACK CONTROL SYSTEM SYNTHESIS, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1955.
- 7) Blackman, R.B., LINEAR DATA-SMOOTHING AND PREDICTION IN THEORY AND PRACTICE, ADDISON-WESLEY PUBLISHING CO., INC., 1965.
- 8) 内田忠夫, 小川敏雄, 多田章, 岡田典秋, 大和裕幸, 内川五十六, 竹内康郎, S T O L実験機の操縦系統機能試験, 飛行機シンポジウム講演集, 1984.

航空宇宙技術研究所報告 863号

昭和 60 年 6 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社実業公報社
東京都千代田区九段南4-2-12

Printed in Japan