

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-867

非圧縮流中の有限翼に対する空気力学伝達関数

松 下 洸

1985年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

ABSTRACT	1
概 要	1
記 号	1
1. 序 論	2
2. 非圧縮流中の2次元翼に対する空気力学伝達関数	4
3. 非圧縮流中の有限翼に対する空気力学伝達関数	11
3.1 Laplace変換された基礎方程式	11
3.2 変換された圧力分布の式と変形循環に対する微積分方程式	14
3.3 曲げ-振り-補助翼操舵に対する空気力学伝達関数	17
4. 有限翼の過渡空気力	23
4.1 Laplace変換による過渡空気力の算出	23
4.2 過渡揚力の数値計算例	25
5. 実験値との対応	31
5.1 縦揺れモーメント	31
5.2 補助翼駆動による非定常空気力	33
6. 結 論	35
参考文献	36
付録A 一般Theodorsen関数	38
付録B 3.2節の式の誘導	41
付録C 変形循環の解法の概要	48
付録D 揚力線型理論値と揚力面理論値の比較	49

非圧縮流中の有限翼に対する空気力学伝達関数*

松 下 洸**

Aerodynamic Transfer Functions for a Finite Wing in Incompressible Flow

Hiroshi MATSUSHITA

ABSTRACT

The aerodynamic transfer functions for a wing with a control surface in an incompressible flow are presented analytically using Laplace transform technique. The aerodynamic transfer function for an airfoil can be analytically represented with the generalized Theodorsen function as circulatory parts and the rational function as noncirculatory parts. The aerodynamic transfer function for a finite wing is obtained in a closed form which includes the nonrational function called "a modified circulation". A modified circulation function shows a finite wing effect and is governed by an integro-differential equation, which can be solved efficiently by numerical computation. These results extend the simple harmonic theory to a general transient motion. With the expression thus obtained, the characteristics of the aerodynamic transfer function for a finite wing clearly show that it should have a branch point at the origin and have no singularities along the negative real axis.

Transient aerodynamic forces in time domain such as an indicial lifts are obtained by inverse Laplace transforming the present results. Comparison of these results with the other methods and the experimental values shows a good agreement.

概 要

非定常空気力を複素領域の虚軸を外れた領域で表現する問題 — 特に空気力学伝達関数を効率的に、出来るだけ解析的に求める問題 — を取り扱う。そのために非圧縮の一樣流中で静止状態にあった翼が、突然運動を開始する場合を考えて、その翼に働く非定常空気力：過渡空気力を規定する積分方程式に Laplace 変換を施す。変換された積分方程式を反転公式を用いて解くことにより、空気力が Laplace 変換領域（複素領域）で空気力学伝達関数によって表わされることを示す。さらにその結果によって、2次元の場合と同様、複素領域の負の実軸上に特異点が存在しないなど、3次元翼の空気力学伝達関数の特徴を明らかにする。

記 号

A : 空気力学演算子

A_a^I, B_a^I, C_a^I : 一般空気力の有理部分の係数行列

$a_{ij}^I, b_{ij}^I, c_{ij}^I$: A_a^I, B_a^I, C_a^I の成分

$B_a^I(\bar{s}_0), C_a^I(\bar{s}_0)$: 一般空気力の非有理部分の伝達関数行列

$b_{ij}^I(\bar{s}_0), c_{ij}^I(\bar{s}_0)$: $B_a^I(\bar{s}_0), C_a^I(\bar{s}_0)$ の成分

* 昭和60年4月26日受付

** 新型航空機研究グループ

b	: 1/2 翼弦長
$C(k), C(ik)$: Theodorsen 関数 = $H_1^{(2)}(k) / [H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)]$
$C(\bar{s})$: 一般 Theodorsen 関数 = $K_1(\bar{s}) / [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]$
G	: 空気力学伝達関数
$H_\nu^{(2)}(k)$: ν 次の第 2 種 Hankel 関数
h	: 2次元翼の上下変位 (下向き正)
\tilde{K}	: 拡張した Cicala の関数
$K_\nu(\bar{s})$: ν 次の第 2 種変形 Bessel 関数
k	: 無次元振動数, $= \omega b / U$
k_1	: インディシャル揚力
L	: 揚力 (l は無次元量)
M_y	: 縦揺れモーメント (m_y は無次元量)
M_β	: 補助翼ヒンジモーメント (m_β は無次元量)
Q, Q_A	: 一般空気力
q	: 一般座標
s	: Laplace 変換のパラメーター (\bar{s} は無次元量, $= \sigma + ik$)
w_a	: 翼面上の吹き下ろし (上向き正)
x, y, z	: 翼面の座標
z_a	: 平均翼厚の z 座標
α	: 2次元翼の縦揺れ角 (前縁上げ正)
β	: 2次元翼のフラップ回転角 (後縁下げ正)
Γ	: 翼回りの循環
δ, r	: 渦度の x, y 成分
\tilde{Q}	: 変形循環
$\mathcal{L}(\quad), (\tilde{\quad})$: (\quad) の Laplace 変換
$(\quad)_a$: (\quad) の翼面上の値
$(\quad)_w$: (\quad) の後流中の値
Res	: 留数

1. 序 論

近年、制御理論の整備が進み、制御機器の性能が向上したことを背景に、航空機の飛行制御方式に所謂 Active Control Technology なる呼び名で総称される各種の新制御技術を取り入れようという研究開発が盛んである。それらの技術には大別すると 2 種類あって、一つは機体の剛体運動に関するもので

Auto Pilot, Relaxed Static Stability (静安定緩和) 等、他は機体の弾性振動に関するもので、操縦荷重軽減 (Manouver Load Alleviation), 突風荷重軽減 (Gust Load Alleviation), フラッターの自動制御 (Active Flutter Control) 等である。

フラッターの自動制御などの、空力弾性系の自動制御に関する研究にとって一つの重要な課題に、非定常空気を調和振動の状態に限らず、発散振動、減衰振動を含めて任意の運動状態に対しても表現できるようにすることがある。このことは、過渡空力の特性を複素領域で表現する空気力学伝達関数の概念を導入すれば、複素領域の虚軸を外れた領域で非定常空気を空気力学伝達関数を用いて表現することになり、特にその空気力学伝達関数を求めることが問題の中心になる。

一般に、空気力学系に働く空気力は境界条件に応じて生ずるのであるから、境界条件をそれによって表わすところの一般座標 q と、空気力 Q_A との関係

$$Q_A = \mathcal{A}(q) \quad (1)$$

と書き表すことができるだろう。式中、 \mathcal{A} は空気力学演算子とでも言うべきものである。ここで空気力としては、一般座標の選び方に応じて種々のものを考えてよい。例えば、揚力、空力モーメントはもとより、弾性翼に対する一般空気力、さらには空気力分布等をも考える。

さて (1) 式のように表わされた一般座標と空気力との関係は、一般座標を入力、空気力を出力とする系の表現と解釈することも出来る。そこでここに Laplace 変換を導入したとき、入力 q の Laplace 変換 \tilde{q} と出力 Q_A の Laplace 変換 \tilde{Q}_A との関係式が

$$\tilde{Q}_A = G(s)\tilde{q} \quad (2)$$

の形で得られたときに、演算子 \mathcal{A} の Laplace 変換による表現と見做せる Laplace 変換パラメータ s の関数 $G(s)$ を、空気力学伝達関数 (空力伝達関数) と呼ぶことにしよう。^{1), 2)} (空気力 Q_A が前述のように種々の意味を含むのに対応して、この空気力学伝達関数も各種のものが考えられる。)

所謂離散系の制御対象に対して制御系を設計するのに多変数制御理論が優れていることは周知のことだが、フラッターの制御のように、連続系である空

力弾性系に対する制御系の設計に対しても、多変数制御理論が有力な手段を提供することが次第に明らかになって来ている。この場合、この制御理論を適用するためには、制御対象を有限次元の数学モデル、所謂状態方程式で書き表す必要があるが、非定常空気力の部分に対してその特性を表現する有限次元の数学モデルを求める方法には未だ確立されたものはない。空気力学伝達関数を求めることは、このモデルを組み立てるためと、近似モデルに基づいて得られる制御系を評価するために必要となるのである。

非定常空気力の虚軸上での表現である調和振動空気力はよく研究されており、複雑な形状の3次元物体回りの振動空気力を求める電算機プログラムも現在ではいくつか存在する。そこで従来のフラッター制御系設計法では、虚軸を外れた領域の空気力を求めることはさておいて、有理関数を虚軸で調和振動空気力に当てはめて得た伝達関数を虚軸でも成り立つものとして取り扱っていた。しかし、非圧縮流中の2次元振動翼に働く空気力がTheodorsen関数によって表わされることから推測されるように（また有限翼に対して本論文で明らかにするように）正しい空気力学伝達関数は超越関数となる。従って有理関数によってはあくまでも近似的にしか表現されない。この点に関してVepa (1975)の研究がある。彼は調和振動空気力からPadé近似式(有理関数)の形の伝達関数を導く方法を示した。³⁾彼はPadé近似式が、その項数を多くして行くとLaplace変換領域(複素領域)で正しい伝達関数に一樣収束することをPadé近似の理論によって論証した。しかし実用の立場では少ない項数の近似式が正しい伝達関数をどの程度によく近似しているかを知りたい。その意味で、出来れば正しい伝達関数を直接求めたいのである。

最近、任意の非定常運動に対する空気力 — 即ち上述の虚軸を外れた複素領域での非定常空気力 — を求める方法が現われた。Edwards (1977)が、任意の微小運動をする翼に働く空気力をLaplace変換を使って求めた、所謂「一般非定常空気力学理論」がそれである。⁴⁾彼は調和振動空気力学理論が、任意運動の非定常空気力学理論に拡張できることを、非圧縮流中の2次元翼に対しては循環流による空気力に対する表

現式を求めて具体的に、また一般の圧縮流中の3次元翼に関しては速度ポテンシャルを支配する微分方程式をLaplace変換した式の段階で原理的に示した。このことから彼は既存の振動空気力を求める電算機プログラムが、容易に任意運動の非定常空気力を求めるプログラムに改造できるとして、いくつか実行している。ただ現在のところこれらの方法はフラッター制御系設計手順の中で繰り返し用いるには計算時間がかかり過ぎる。

本論文では、非定常空気力を複素領域の虚軸を外れた領域で表現する問題 — 空気力学伝達関数を求める問題 — を取り扱う。特に、フラッター制御系設計法に用いるべく、空気力学伝達関数の効率的な計算法として、非圧縮流中の有限翼に対する空気力学伝達関数を出来るだけ解析的に与える方法を示す。そのために非圧縮の一樣流中で静止状態にあった翼が、突然運動を開始する場合を考えて、その翼に働く非定常空気力：過渡空気力を規定する積分方程式にLaplace変換を施す。変換された積分方程式を反転公式を用いて解くことにより、空気力がLaplace変換領域(複素領域)で空気力学伝達関数によって表わされることを示す。このことによって非圧縮流中の有限翼に対しても調和振動空気力学理論が任意の運動の場合に拡張できることが示される。これが本論文の課題である。

本論文の構成は次のようになっている。まず第1章では、2次元翼について、調和振動空気力の理論式を任意運動の場合へ拡張することを試みる。そのために調和振動理論でTheodorsen関数を再誘導したSchwarzの方法を任意運動の場合に用いる。即ち、翼面上の誘導速度を翼面および後流中の渦度に関係付ける積分方程式、および境界条件式をLaplace変換した後、Söhngenの積分反転公式を用いて翼面上の渦度について方程式を解く。この解から翼面上の圧力分布、さらには揚力、縦揺れモーメント等の空気力がLaplace変換領域で計算される。上下動—縦揺れ動—フラップ回転の3自由度を有する翼型に対して得られる空気力の表現式は各自由度に依ずる一般座標のLaplace変換と、Laplace変換パラメタの関数との積の形で表わされ、その関数によって空気力学伝達関数が定義される。伝達関数は変形

Bessel 関数で表現される所謂、一般 Theodorsen 関数を含む超越関数として解析的に与えられる。

調和振動の場合に Reissner は、有限翼に対する振動空気力の表現式を Schwarz の方法に沿って誘導し、揚力線型の理論を発表した。⁵⁾ 第 2 章では Reissner に倣って、第 1 章の 2 次元の場合を 3 次元に拡張して、Reissner の理論を調和振動の場合として含む、任意運動の空気力を Laplace 変換領域で求める。得られる空気力の表現式は空気力学伝達関数によって表現される形をとることが示される。この場合には積分が 2 重積分であるのを調和振動空気力理論で Reissner が設けたのと同様の揚力線型の近似仮定によって 1 重積分に帰着させ、その方程式を Söhngen の反転公式で解いて渦度の表現を求める。この解から導かれる圧力分布は 2 次元翼の場合に表わされる一般 Theodorsen 関数の部分に有限翼の効果の修正を加えた形となる。それを然るべく翼弦方向に積分して得られる空気力の翼幅方向分布に対する空気力学伝達関数は、この有限翼効果を表わす関数（変形循環と名付ける）を含んで半解析的に求まる。変形循環は微積分方程式に支配されており個々の翼に対して数値的に求められる。

さて、我々が直接観測できるのは時間領域での空気力の変動である。そこで第 3 章では空気力学伝達関数による空気力の表現式を Laplace 逆変換することによって過渡空気力を求めておく。矩形翼および楕円翼のインディシャル揚力等をこの式によって計算した結果は過去に他の方法によって得られている計算値と比較してよく一致していることを示す。

以上得られた揚力線型の近似仮定に基づく非定常空気力の理論値が、実験的に得られる諸量と比較してどの程度の対応を示すかを第 4 章で検討する。そこでは新たに計画実施した補助翼駆動による非定常空気力の測定実験についても触れる。結果として、矩形翼の縦揺れ振動によって生ずる縦揺れモーメントについては実験値と理論値はかなりよい一致を示すこと、しかし粘性が関与する補助翼駆動による空気力では両者にある程度の食い違いが生ずること等が示される。

2. 非圧縮流中の 2 次元翼に対する空気力学伝達関数

いま、非圧縮性の一様流中で微小運動をする 2 次元平板翼に働く非定常空気力を考えよう。平板翼の迎角が突然一定量変化するとき生ずる揚力、即ちインディシャル揚力関数あるいは Wagner 関数を計算するのに、Sears は Laplace 変換の手法を用いた。Edwards はこの Sears の研究を利用して、任意の運動をする 2 次元平板翼に働く循環流による揚力の Laplace 変換が、翼の運動を表わす 3/4 翼弦での吹き下ろしの Laplace 変換と、所謂一般 Theodorsen 関数との積で表わされることを示した。⁴⁾ 即ちこの場合、一般 Theodorsen 関数が空気力学伝達関数である。そして付録 A に示したように、この伝達関数は調和振動の場合に Theodorsen 自身が求めた周波数応答関数であるところの Theodorsen 関数を解析接続によって複素関数へ拡張したものである。即ち Edwards は調和振動理論が、任意運動の非定常空気力理論に拡張できることを 2 次元翼の循環流について示した。

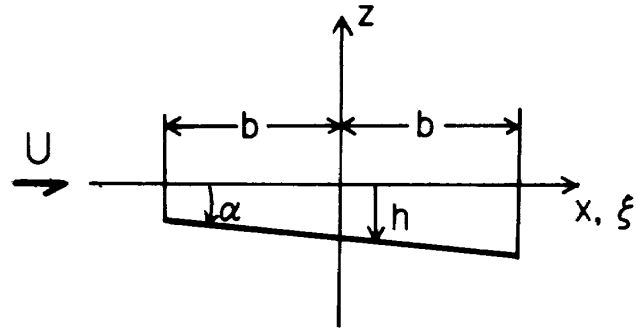
ここでは 2 次元翼について Edwards とは異なった方法をとって、循環流による部分ばかりでなく非循環流による部分をも含めた全空気力について調和振動空気力の理論式を任意運動の場合へ拡張することを試みる。そのために非圧縮流中のフラップを有する 2 次元翼が上下動および縦揺れ動を行う場合について、その空気力学伝達関数を具体的に求める。この場合入力であるところの一般座標は、上下変位 h 、縦揺れ角 α およびフラップ回転角 β であり、出力としての空気力は揚力 L 、縦揺れモーメント M_y およびヒンジモーメント M_β の 3 種であるから、それらを Laplace 変換領域で関係付ける空気力学伝達関数は、9 個の成分が考えられて、

$$\begin{bmatrix} \tilde{L} \\ \tilde{M}_y \\ \tilde{M}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

なる形の関係式が成立する筈である。Laplace 変換された空気力をこの形に導くのがこの章の目的である。

いま、一様流速 U の非圧縮流中で 2 次元平板翼が

時刻 $t = 0$ から鉛直面内の微小非定常運動を開始する場合を考える。 $t < 0$ に於いては翼は一様流に対して迎角 0 で x 軸上に静止しているものとする(本論文で採用する微小擾乱理論によれば擾乱速度ポテンシャルは線形である Laplace の方程式を満たすので、定常な迎角の影響は定常翼理論で取り扱って、ここでの結果に重ね合わせることができる)。座標を右図のようにとれば、翼面上の誘導速度(上向きが正) $w_a(x, t)$ と翼面上および後流中の渦度 $\gamma_a(\xi, t)$, $\gamma_w(\xi, t)$ とを関係付ける積分方程式は、



付図 1

$$w_a(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-b}^b \frac{\gamma_a(\xi, t)}{x-\xi} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_b^{b+Ut} \frac{\gamma_w(\xi, t)}{x-\xi} d\xi \quad (4)$$

で表わされる。⁶⁾ 右辺第 1 項の積分記号は Cauchy の主値をとることを示す。後流渦は翼の循環の時間的变化によって生ずるのであるから、翼の循環を $\Gamma(t)$ として

$$\Gamma(t) = \int_{-b}^b \gamma_a(\xi, t) d\xi \quad (5)$$

とすれば

$$\gamma_w(b, t) d\xi = -\frac{d\Gamma}{dt} dt \quad (6)$$

さらに、後流渦は一様流の流速 U で流れ去ると仮定すれば、時刻 t で ξ の位置に達した渦は後縁で時刻 $t - (\xi - b)/U$ に発生したことになるので

$$\begin{aligned} \gamma_w(\xi, t) &= \gamma_w(b, t - \frac{\xi - b}{U}) \\ &= -\frac{1}{U} \frac{d\Gamma(t - \frac{\xi - b}{U})}{dt} \quad (7) \end{aligned}$$

の関係がある。(7) 式を用いれば積分方程式 (4) は

$$w_a(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-b}^b \frac{\gamma_a(\xi, t)}{x-\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi U} \int_b^{b+Ut} \frac{d\Gamma(t - \frac{\xi - b}{U})}{x-\xi} d\xi \quad (8)$$

と書き直される。ここで $w_a(x, t)$ に対する境界条件は、翼面の位置 $z_a(x, t)$ によって

$$w_a(x, t) = \frac{\partial z_a(x, t)}{\partial t} + U \frac{\partial z_a(x, t)}{\partial x}; \quad z = 0, -b \leq x \leq b \quad (9)$$

で与えられる。

さらに翼上面(その圧力 P_U) と翼下面(その圧力 P_L) との圧力差 ΔP_a は翼面上の渦度 $\gamma_a(\xi, t)$ によって

$$\begin{aligned} \Delta P_a(x, t) &= P_U - P_L \\ &= -\rho \left[U \gamma_a(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^x \gamma_a(\xi, t) d\xi \right] \quad (10) \end{aligned}$$

と表わせる。

調和振動の場合に Schwarz は Söhngen の積分反転公式を巧みに用いて積分方程式を解いて空気力を求めた。ここではその方法に倣って、一旦全ての方程式を Laplace 変換した後、Söhngen の反転公式を使って変換された積分方程式を解き、任意の運動をする 2次元翼に働く空気力を Laplace 変換領域で求める。そして、そのことによって空気力学伝達関数を導く。

なお、本論文で採用した Laplace 変換の定義は、 $f(t)$ を $[0-, \infty]$ で定義された時間の関数とするとき

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s) \triangleq \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (11)$$

であって、積分範囲に時刻 0 でのステップ関数や Dirac のデルタ関数を取り込むように積分下限を $0-$ としたものである(文献 7 の P.536)。

さて、積分方程式 (8) の両辺を Laplace 変換すると

$$\begin{aligned} \tilde{w}_a(x, s) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{0-}^{\infty} e^{-st} \oint_{-b}^b \frac{\gamma_a(\xi, t)}{x-\xi} d\xi dt \\ & + \frac{1}{2\pi U} \int_{0-}^{\infty} e^{-st} \int_b^{b+Ut} \frac{\frac{d\Gamma(t-\frac{\xi-b}{U})}{dt}}{x-\xi} d\xi dt \end{aligned} \quad (12)$$

となるが右辺第 1 項は積分順序を交換することによって

$$-\frac{1}{2\pi} \oint_{-b}^b \frac{\tilde{\gamma}_a(\xi, s)}{x-\xi} d\xi$$

となる。

右辺第 2 項は、右図を参照しながら積分順序を交換すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi U} \int_{0-}^{\infty} e^{-st} \int_b^{b+Ut} \frac{\frac{d\Gamma(t-\frac{\xi-b}{U})}{dt}}{x-\xi} d\xi dt \\ & = \frac{1}{2\pi U} \int_b^{\infty} \int_{\frac{\xi-b}{U}}^{\infty} e^{-st} \frac{\frac{d\Gamma(t-\frac{\xi-b}{U})}{dt}}{x-\xi} dt d\xi \end{aligned}$$

ここで、変数変換 $t - (\xi - b)/U = \tau$ によって独立変数 t を τ に変えると

$$= \frac{1}{2\pi U} \int_b^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi-b}{U}s}}{x-\xi} d\xi \int_{0-}^{\infty} e^{-\tau s} \frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} d\tau$$

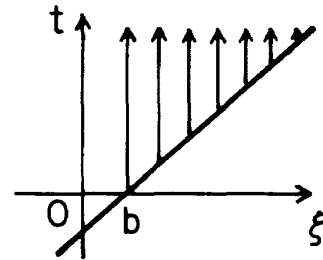
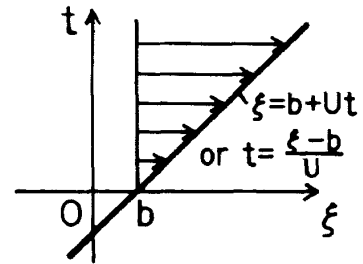
となる。然るに $t < 0$ のとき $\Gamma(t) = 0$ であることを用いると

$$\begin{aligned} \int_{0-}^{\infty} e^{-\tau s} \frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} d\tau & = \left[\Gamma(\tau) e^{-s\tau} \right]_{0-}^{\infty} \\ & + s \int_{0-}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{-s\tau} d\tau = s\tilde{\Gamma}(s) \end{aligned} \quad (13)$$

以上によって (12) から

$$\begin{aligned} \tilde{w}_a(x, s) = & -\frac{1}{2\pi} \oint_{-b}^b \frac{\tilde{\gamma}_a(\xi, s)}{x-\xi} d\xi \\ & + \frac{e^{\frac{bs}{U}} s\tilde{\Gamma}(s)}{2\pi U} \int_b^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi}{U}s}}{x-\xi} d\xi \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。さらに上式を補足する式として (5) 式を Laplace 変換した式



付図 2

$$\tilde{\Gamma}(s) = \int_{-b}^b \tilde{\gamma}_a(\xi, s) d\xi \quad (15)$$

が必要である。

境界条件 (9) 式を Laplace 変換すると、右辺第 1 項から z の初期値の項が現われ

$$\tilde{w}_a(x, s) = \left(s + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{z}_a(x, s)$$

$$-z_a(x, 0-); z=0, -b \leq x \leq b$$

(16)

となる。然るに初めに規定したように、翼は $t < 0$ に於いて x 軸上に静止しているのであるから、 $z_a(x, 0-) = 0$ 、従って

$$\tilde{w}_a(x, s) = \left(s + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{z}_a(x, s)$$

$$; z=0, -b \leq x \leq b \quad (17)$$

となる。結局、(14)、(15)、(17) 式は、 $\tilde{z}_a(x, s)$ を既知関数とし、 $\tilde{\gamma}_a(x, s)$ を未知関数とする積分方程式を構成する。

ここで

$$\tilde{Q}(s) \triangleq \frac{\tilde{\Gamma}}{b} e^{\frac{bs}{U}} \quad (18)$$

なる量を導入すると、(14) 式は次のように書き換えられる。

$$-\tilde{w}_a(x^*, s) + \frac{s\tilde{Q}(s)}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-s\xi^*}}{x^* - \xi^*} d\xi^*$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\tilde{\gamma}_a(\xi^*, s)}{x^* - \xi^*} d\xi^* \quad (19)$$

ただし、上式中の変数には次のような無次元量を用いた。

$$\bar{s} = bs/U, \quad x^* = x/b, \quad \xi^* = \xi/b \quad (20)$$

(19)式に於いて $s = i\omega$ とすれば、Schwarzが調和振動の場合に取り扱った積分方程式(文献6, p275の(5-329)式)に帰着する。このことは、調和振動での取り扱いが、実はFourier変換に他ならないことと、Fourier変換とLaplace変換との関係⁸⁾とを考え合わせれば、(19)式の妥当性を立証することになる。

以後の推論はSchwarzにならって行くことができる。まずKuttaの条件によって $\gamma_a(\xi, t)$ が後縁で0となり、従って $\tilde{\gamma}_a(\xi^*, s)$ も0であることから(19)式にSöhngenの反転公式(Carleman-Betzの積分方程式の解として文献9)が適用でき、その結果をいくらか演算することによって次の中間式を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_a(x^*, s) = & -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \\ & \left\{ \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi^*}{1+\xi^*}} \frac{\tilde{w}_a(\xi^*, s)}{x^* - \xi^*} d\xi^* \right. \\ & \left. + \frac{\bar{s}\tilde{Q}(s)}{2} \int_1^\infty \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{x^* - \lambda} d\lambda \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

この式を翼面に亘って積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \tilde{\gamma}_a(x^*, s) dx^* &= \tilde{Q}(s) e^{-\bar{s}} \\ &= -2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, s) d\xi^* \\ &\quad - \bar{s}\tilde{Q}(s) \int_1^\infty \left[\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} - 1 \right] e^{-\bar{s}\lambda} d\lambda \quad (22) \end{aligned}$$

ここに於て、0次と1次の第2種変形Bessel関数 $K_0(\bar{s})$, $K_1(\bar{s})$ を導入し、その積分表示(付録Aの(A-15)式)から得られる式:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \left[\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} - 1 \right] e^{-\bar{s}\lambda} d\lambda \\ = [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})] - \frac{e^{-\bar{s}}}{\bar{s}} \quad (23) \end{aligned}$$

を適用すると、結局 $\tilde{w}_a(\xi, s)$ による $\tilde{Q}(s)$ の表現が次のように求まる。

$$\tilde{Q}(s) = \frac{4 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, s) d\xi^*}{\pi \bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} \quad (24)$$

次に、この $\tilde{Q}(s)$ を用いて圧力分布のLaplace変換の表現式を求めよう。まず(10)式をLaplace変換して、無次元量を用いると

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{P}_a(x^*, s) = & -\rho U \left[\tilde{\gamma}_a(x^*, s) + \bar{s} \int_{-1}^{x^*} \tilde{\gamma}_a(\xi^*, s) d\xi^* \right. \\ & \left. - \frac{b}{U} \int_{-1}^{x^*} \gamma_a(\xi^*, 0-) d\xi^* \right] \quad (25) \end{aligned}$$

ここに於ても $t < 0$ で翼は x 軸上に静止していることから $\gamma_a(\xi^*, 0-) = 0$ であって

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{P}_a(x^*, s) = & -\rho U \left[\tilde{\gamma}_a(x^*, s) \right. \\ & \left. + \bar{s} \int_{-1}^{x^*} \tilde{\gamma}_a(\xi^*, s) d\xi^* \right] \quad (26) \end{aligned}$$

となる。

(21)式を(26)式に用いてSchwarzが調和振動に対して行なったのと同様の演算をすることによって次式を得る。(なお、演算過程については次章の有限翼の場合に対する付録B参照。)

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta \tilde{P}_a(x^*, s)}{\rho U} = & -\frac{\bar{s}\tilde{Q}(s)}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_1^\infty \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-1}} d\lambda \\ & + \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{x^* - \xi^*} \right. \\ & \left. - \bar{s} A_1(x^*, \xi^*) \right] \tilde{w}_a(\xi^*, s) d\xi^* \quad (27) \end{aligned}$$

ただし

$$A_1(x^*, \xi^*) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x^*\xi^* + \sqrt{1-\xi^{*2}} \sqrt{1-x^{*2}}}{1-x^*\xi^* - \sqrt{1-\xi^{*2}} \sqrt{1-x^{*2}}} \quad (28)$$

(27)式右辺第1項の積分が

$$\int_{-1}^\infty \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-1}} d\lambda = K_0(\bar{s}), \quad \text{Re}(\bar{s}) > 0 \quad (29)$$

によって変形Bessel関数で表わされることと(24)式とを用いると(27)式は最終的に次のように変形

される。

$$\begin{aligned}
 -\frac{\Delta \tilde{P}_a(x^*, s)}{\rho U} &= \frac{2}{\pi} [1 - C(\bar{s})] \\
 &\times \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, s) d\xi^* \\
 &+ \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{x^* - \xi^*} \right. \\
 &\left. - \bar{s} A_1(x^*, \xi^*) \right] \tilde{w}_a(\xi^*, s) d\xi^* \quad (30)
 \end{aligned}$$

ただし

$$C(\bar{s}) = \frac{K_1(\bar{s})}{K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})} \quad (31)$$

であって、この関数 $C(\bar{s})$ は W.P. Jones が名付け¹⁰⁾、Edwards⁴⁾ が Sears の方法¹¹⁾ に従って Laplace 変換を用いて誘導して、Theodorsen 関数から解析接続によって得られることを示したところの一般 Theodorsen 関数である。なお Edwards による一般 Theodorsen 関数の導入およびそれに関連した議論を付録 A に示した。

(30) 式で $s = i\omega$ (従って $\bar{s} = ik$) とすれば Schwarz が調和振動の場合に得た圧力分布の式 (文献 6 の式 (5-342), p277) に帰着する。このことは非循環流による部分をも含めた全空気力についても調

和振動理論が任意運動の場合に拡張できたことを示すものである。

図 1(a) は一般 Theodorsen 関数の実部および虚部の等高線を描いた図である。図には複素面の上半面のみを示したが、下半面は共役の関係にあって、関数の実部は等しく虚部は符号が変わる。正の実軸は虚部の等高線 ($Im C(\bar{s}) = 0$) でもあって、そこでは実部の等高線と直交しており関数は正則である。しかし、負の実軸上では関数は不連続で、Edwards が指摘したように、そこが分枝切断線となっている。同図によればそれが視覚的に明らかである。通常の Theodorsen 関数は同図では虚軸上の関数として与えられることになる。なお図中第 3 象限に破線で示した部分は関数の基本変域 (定義域) : $-\pi < arg(s) \leq \pi$ を超えた部分であるから物理的な意味を持たない領域であるが、そこにこの関数 $C(\bar{s})$ の特異点があることを示したものである。

図 1(b) は一般 Theodorsen 関数をベクトル線図として描いた図で、この図によれば通常の Theodorsen 関数が $arg(s) = 90^\circ$ に対してよく見馴れた形に表わされている。

さて、圧力分布に関する (30) 式は、境界条件 (17) 式と合わせて考えれば、Laplace 変換領域で圧力分布 ΔP_a (出力) を翼面の座標 z_a (入力) に結びつけ

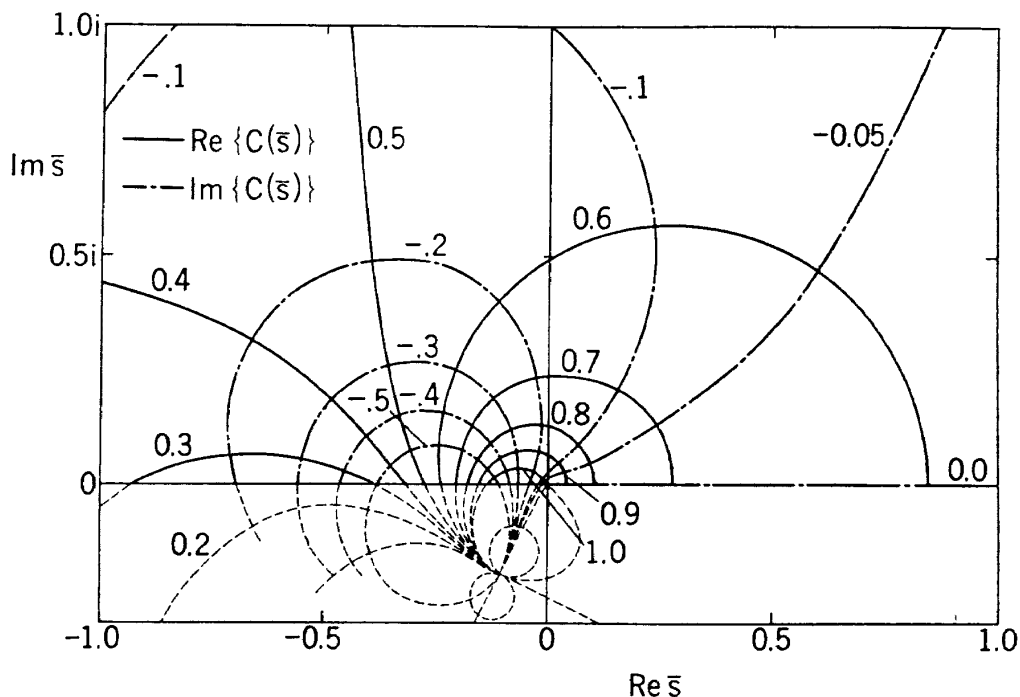


図 1(a) 一般 Theodorsen 関数の複素面表示

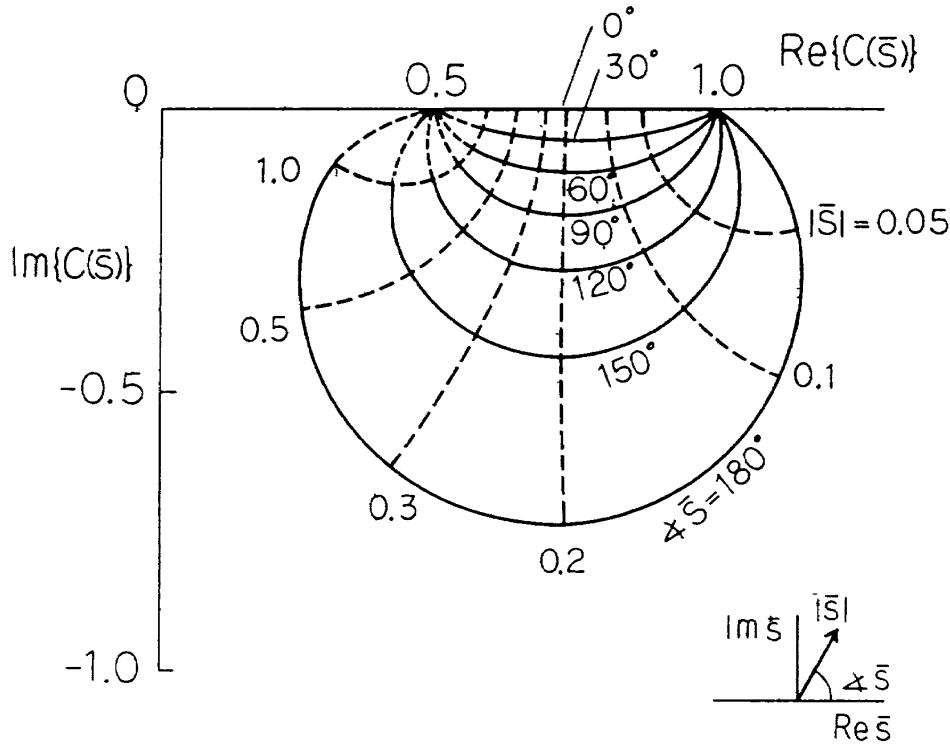
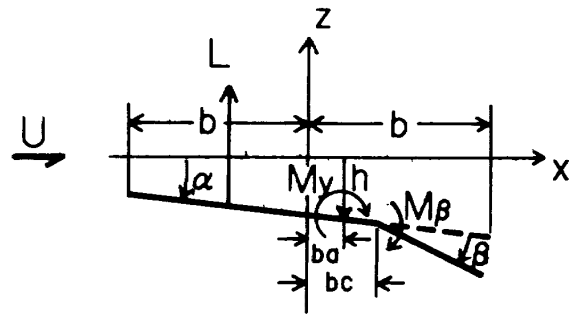


図 1 (b) 一般 Theodorsen 関数のベクトル線図

る関係式であるから、離散系での伝達関数と同等の意味を既に持っている。しかし、この段階では、入力が被積分関数に現われることになるので、これを直ちに空気力学伝達関数と言うにはいささか無理があるろう（関数 $\tilde{z}_a(x, s)$ を関数 $\Delta P_a(x, s)$ に結びつけるから、伝達関数とでも言おうか）。そこで以下にはこの式を然るべく積分して得られるところの、翼型全体に働く空気力を計算してその中で空気力学伝達関数を見い出そう。対象に選ぶ翼型は右図に示すようにその中心から bc 点がヒンジであるフラップを有する。翼の運動を ba 点回りの縦揺れ角 α とその点の上下変位 h 、およびフラップ回転角 β とで表わす。この場合、翼面の変位は

$$z_a(x, t) = \begin{cases} -h - (x - ba)\alpha & ; -b \leq x \leq bc \\ -h - (x - ba)\alpha - (x - bc)\beta & ; bc \leq x \leq h \end{cases} \quad (32)$$

となるから境界条件 (17) 式から



付図 3

$$\tilde{w}_a(x^*, s) = \begin{cases} U \{ -\tilde{s}h/b - [1 + (x^* - a)\tilde{s}] \tilde{\alpha} \} & ; -1 \leq x^* \leq c \\ U \{ -\tilde{s}h/b - [1 + (x^* - a)\tilde{s}] \tilde{\alpha} - [1 + (x^* - c)\tilde{s}] \tilde{\beta} \} & ; c \leq x^* \leq 1 \end{cases} \quad (33)$$

となる。

揚力 L 、縦揺れモーメント M_y 、ヒンジモーメント M_β は圧力分布を積分して

$$L = - \int_{-b}^h \Delta P_a dx \quad (34a)$$

$$M_y = \int_{-b}^b \Delta P_a(x-ba) dx \quad (34b)$$

$$M_\beta = \int_{bc}^b \Delta P_a(x-bc) dx \quad (34c)$$

によって求められるから、それらに対応する Laplace 変換 $\tilde{L}(s)$, $\tilde{M}_y(s)$, $\tilde{M}_\beta(s)$ は (33) 式を (30) 式に代入し、上式に対応する積分を実行することによって以下のように求まる。各式は本章冒頭に与えた (3) 式の形を取っているため、空気力学伝達関数が各式右辺の一般座標 $(\tilde{h}/b, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ の係数として求まったことになる。

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{L}(s)}{2\rho U^2 b} = & \pi \left\{ \frac{\bar{s}^2}{2} + \bar{s} C(\bar{s}) \right\} \frac{\tilde{h}}{b} + \pi \left\{ \frac{-a}{2} \bar{s}^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} \bar{s} + \left[\left(\frac{1}{2} - a \right) \bar{s} + 1 \right] C(\bar{s}) \left. \right\} \tilde{\alpha} + \left\{ \frac{-T_1}{2} \bar{s}^2 \right. \\ & \left. - \frac{T_4}{2} \bar{s} + \left(\frac{T_{11}}{2} \bar{s} + T_{10} \right) C(\bar{s}) \right\} \tilde{\beta} \quad (35a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{M}_y(s)}{2\rho U^2 b^2} = & \pi \left\{ \frac{a}{2} \bar{s}^2 + \left(\frac{1}{2} + a \right) \bar{s} C(\bar{s}) \right\} \frac{\tilde{h}}{b} \\ & - \pi \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \bar{s}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - a \right) \bar{s} \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{2} + a \right) \left[\left(\frac{1}{2} - a \right) \bar{s} + 1 \right] C(\bar{s}) \right\} \tilde{\alpha} \\ & - \left\{ T_{13} \bar{s}^2 + \frac{T_{16}}{2} \bar{s} + \frac{T_{15}}{2} - \left(\frac{1}{2} + a \right) \left(\frac{T_{11}}{2} \bar{s} \right. \right. \\ & \left. \left. + T_{10} \right) C(\bar{s}) \right\} \tilde{\beta} \quad (35b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{M}_\beta(s)}{2\rho U^2 b^2} = & \left\{ \frac{T_1}{2} \bar{s}^2 - \frac{T_{12}}{2} \bar{s} C(\bar{s}) \right\} \frac{\tilde{h}}{b} - \left\{ T_{13} \bar{s}^2 \right. \\ & + \frac{T_{17}}{2} \bar{s} + \frac{T_{12}}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - a \right) \bar{s} + 1 \right] C(\bar{s}) \left. \right\} \tilde{\alpha} \\ & - \left\{ \frac{1}{2\pi} \left(-T_3 \bar{s}^2 + T_{19} \bar{s} + T_{18} \right) + \frac{T_{12}}{2\pi} \left[\frac{T_{11}}{2} \bar{s} \right. \right. \\ & \left. \left. + T_{10} \right] C(\bar{s}) \right\} \tilde{\beta} \quad (35c) \end{aligned}$$

見やすさのために (35) 式を行列表示すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{L}/\pi \\ \tilde{m}_y/\pi \\ \tilde{m}_\beta \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{L}(s)/2\pi\rho U^2 b \\ \tilde{M}_y(s)/2\pi\rho U^2 b^2 \\ \tilde{M}_\beta(s)/2\pi\rho U^2 b^2 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \frac{\bar{s}^2}{2} & -\frac{a}{2} \bar{s}^2 + \frac{1}{2} \bar{s} & -\frac{T_1}{2} \bar{s}^2 - \frac{T_4}{2} \bar{s} \\ \frac{a}{2} \bar{s}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \bar{s}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - a \right) \bar{s} & -T_{13} \bar{s}^2 - \frac{T_{16}}{2} \bar{s} - \frac{T_{15}}{2} \\ \frac{T_1}{2} \bar{s}^2 - T_{13} \bar{s}^2 - \frac{T_{17}}{2} \bar{s} & T_3 \bar{s}^2 - T_{19} \bar{s} - T_{18} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + a \\ -\frac{T_{12}}{2} \end{bmatrix} \left[\bar{s} C(\bar{s}), \left[\left(\frac{1}{2} - a \right) \bar{s} + 1 \right] C(\bar{s}), \left(\frac{T_{11}}{2} \bar{s} + T_{10} \right) C(\bar{s}) \right] \right\} \begin{bmatrix} \tilde{h}/b \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta}/\pi \end{bmatrix} \quad (36) \end{aligned}$$

この式において { } 内が空気力学伝達関数である。再び、これらの式は対応する調和振動の式を任意の運動に拡張できたことを示している。

なお、(35), (36) 式とも Laplace 変換によって各項は時間の次元を持っている。また、上 2 式中、フラップに関して用いられている係数 T_i は Theodorsen と Garrick が定義したもの¹²⁾と等しく、フラッ

プの位置を示すパラメタ c によって以下のように定義されるものである。

$$\begin{aligned} T_1 = & -\frac{1}{3} (2 + c^2) \sqrt{1 - c^2} + c \cos^{-1} c \\ T_3 = & -\frac{1}{8} (1 - c^2) (5c^2 + 4) \\ & + \frac{1}{4} c (7 + 2c^2) \sqrt{1 - c^2} \cos^{-1} c \end{aligned}$$

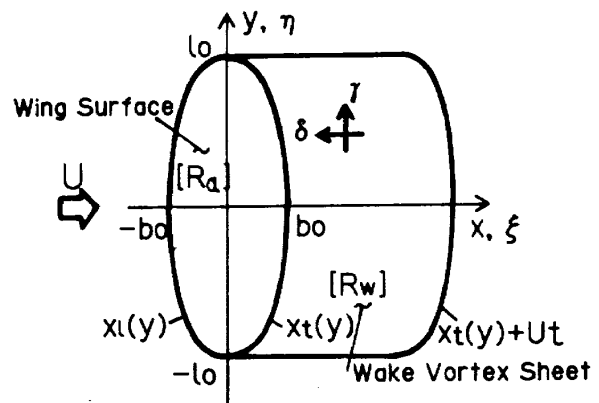
$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{1}{8} + c^2 \right) (\cos^{-1} c)^2 \\
 T_4 &= c \sqrt{1 - c^2} - \cos^{-1} c \\
 T_5 &= - (1 - c^2) + 2c \sqrt{1 - c^2} \cos^{-1} c \\
 & - (\cos^{-1} c)^2 \\
 T_7 &= - \frac{1}{8} c (7 + 2c^2) \sqrt{1 - c^2} \\
 & - \left(\frac{1}{8} + c^2 \right) \cos^{-1} c \\
 T_{10} &= \sqrt{1 - c^2} + \cos^{-1} c \\
 T_{11} &= (2 - c) \sqrt{1 - c^2} + (1 - 2c) \cos^{-1} c \\
 T_{12} &= (2 + c) \sqrt{1 - c^2} - (1 + 2c) \cos^{-1} c \\
 T_{13} &= - \frac{1}{2} (T_7 + (c - a) T_1) \\
 T_{15} &= (1 + c) \sqrt{1 - c^2} \\
 T_{16} &= \frac{2}{3} (1 - c^2)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{2} - a \right) T_4 \\
 T_{17} &= - \frac{1}{3} (1 - c^2)^{\frac{3}{2}} - T_1 - \frac{1}{2} T_4 \\
 T_{18} &= T_5 - T_4 T_{10} \\
 T_{19} &= - \frac{1}{2} T_4 T_{11} \tag{37}
 \end{aligned}$$

3. 非圧縮流中の有限翼に対する空気力学伝達関数

前章の2次元翼に対する空気力学伝達関数の誘導と同様の方法で、ここでは有限翼に対する空気力学伝達関数を導く。誘導は調和振動空気力に対するReissnerの理論を任意運動の場合に拡張することによる。即ち非定常空気力を規定する積分方程式をLaplace変換した後、Reissner流の揚力線型近似仮定をたて、空気力をLaplace変換領域で求めるのである。空気力学伝達関数はこうして求めた変換された空気力の表現式の中に、一般座標に乗せられる関数として求まる。

3.1 Laplace変換された基礎方程式

いま上図に示すような有限翼が、前節と同様に時刻 $t = 0$ から非定常運動を開始する場合を考える。その時刻までは ($t < 0$ では) 翼は一様流に対して



付図4

迎角 0 で静止しているものとする。このとき翼面を表わす渦度と後流にはき出される渦度をそれらの誘導速度と結びつける積分方程式は

$$\begin{aligned}
 w_a(x, y, t) &= \frac{-1}{4\pi} \iint_{R_a} \frac{\gamma_a(\xi, \eta, t)(x - \xi)}{\{(x - \xi)^2} \\
 & + \frac{\delta_a(\xi, \eta, t)(y - \eta)}{+(y - \eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \\
 & + \frac{-1}{4\pi} \iint_{R_w} \frac{\gamma_w(\xi, \eta, t)(x - \xi)}{\{(x - \xi)^2} \\
 & + \frac{\delta_w(\xi, \eta, t)(y - \eta)}{+(y - \eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \tag{38}
 \end{aligned}$$

である^{5),6)}ここで γ , δ は渦度の x , y 成分で、添え字 a は翼面上のもの、 w は後流中のものを指す。左辺の w_a は垂直方向の誘導速度である。さらに、積分範囲 R_a , R_w は各々翼面上および後流中である。

γ と δ には渦の連続性を示す次の関係がある。

$$\frac{\partial \gamma_a}{\partial y} = \frac{\partial \delta_a}{\partial x}, \quad \frac{\partial \gamma_w}{\partial y} = \frac{\partial \delta_w}{\partial x} \tag{39a, b}$$

さらに、3次元翼の場合でも後流渦は主翼の循環が変化することが原因で発生し、その変化分を相殺するだけの強さとなるから、翼の回りの循環を $\Gamma(y, t)$ として

$$\Gamma(y, t) = \int_{x_f(y)}^{x_t(y)} \gamma_a(\xi, y, t) d\xi \tag{40}$$

とすれば

$$\gamma_w(x_t(y), y, t) d\xi = - \frac{\partial \Gamma(y, t)}{\partial t} dt \tag{41}$$

また後流渦は強さを変えずに一様流速 U で流れるとすれば

$$\begin{aligned} r_w(\xi, \eta, t) &= r_w(x_t(\eta), \eta, t - \frac{\xi - x_t(\eta)}{U}) \\ &= -\frac{1}{U} \frac{\partial \Gamma(\eta, t - \frac{\xi - x_t(\eta)}{U})}{\partial t} \quad (42) \end{aligned}$$

となる。境界条件は

$$w_a(x, y, t) = \frac{\partial z_a(x, y, t)}{\partial t} + U \frac{\partial z_a(x, y, t)}{\partial x} \quad ; \text{ in } R_a \quad (43)$$

で与えられる。

以上要するに、(38) 式中の未知関数 r_a , r_w , δ_w は (39), (40), (42) 式によって全て r_a に関係付けられるので、問題は (43) 式の境界条件下で積分方程式 (38) 式を解いて r_a を求めることに帰着する。そして空気力は翼面上の圧力差を与える式：

$$\begin{aligned} \Delta P_a(x, y, t) &= -\rho [UR_a(x, y, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_t(y)}^x r_a(\xi, y, t) d\xi] \quad (44) \end{aligned}$$

を通じて r_a から計算される。

さて、後流渦は一様流速 U で移動するからその後端は時刻 t には前図に示したように $x_t(y) + Ut$ に達しており (38) 式右辺第 2 項の積分範囲 R_w は従って、 $R_w = \{-l_0 \leq \eta \leq l_0, x_t(\eta) \leq \xi \leq x_t(\eta) + Ut\}$ である。

次に (39a, b), (40), (42) 式を用いて後流中の trailing vortex $\delta_w(\xi, \eta, t)$ を翼の循環で表わそう。まず (39a, b) 式を積分することによって

$$\delta_w(\xi, \eta, t) = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial r(\xi', \eta, t)}{\partial \eta} d\xi'$$

$r_a(x_t(\eta) - 0, \eta, t) = 0$, $r_a(x_t(\eta), \eta, t) = r_w(x_t(\eta), \eta, t)$ なる条件下で

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \int_{x_t(\eta)}^{x_t(\eta)} r_a(\xi', \eta, t) d\xi' \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_t(\eta)}^{\xi} r_w(\xi', \eta, t) d\xi' \right\} \end{aligned}$$

第 1 項に (40) 式, 第 2 項に (42) 式を用いて

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma(\eta, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{U} \int_{x_t(\eta)}^{\xi} \frac{\partial \Gamma(\eta, t - \frac{\xi' - x_t(\eta)}{U})}{\partial t} d\xi' \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma(\eta, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{U} \int_{x_t(\eta)}^{\xi} (-U) \frac{\partial \Gamma(\eta, t - \frac{\xi' - x_t(\eta)}{U})}{\partial \xi'} d\xi' \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma(\eta, t) \right. \\ &\quad \left. + \left[\Gamma(\eta, t - \frac{\xi' - x_t(\eta)}{U}) \right]_{\xi' = x_t(\eta)}^{\xi' = \xi} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma(\eta, t) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma(\eta, t - \frac{\xi - x_t(\eta)}{U}) - \Gamma(\eta, t) \right\} \quad (45) \end{aligned}$$

従って

$$\delta_w(\xi, \eta, t) = \frac{\partial \Gamma(\eta, t - \frac{\xi - x_t(\eta)}{U})}{\partial \eta} \quad (46)$$

$\delta_w(\xi, \eta, t)$ は本来、現在 (時刻 t) の翼面上の循環と、過去の循環の積分によって成り立っているが ((45) 式), 演算を進めると結局、等価的に、後縁で翼面回りの循環の傾斜によって発生した trailing vortex が、強さを変えず速度 U で流れて ξ に至ったと見做すことができることになった。

(40), (46) 式によって後流中の渦度を翼の循環で表わし、積分範囲を明示すると、積分方程式 (38) 式は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} w_a(x, y, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_t(\eta)}^{x_t(\eta)} \frac{r_a(\xi, \eta, t)(x - \xi) + \delta_a(\xi, \eta, t)(y - \eta)}{\{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi U} \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_t(\eta)}^{x_t(\eta) + Ut} \frac{\frac{\partial \Gamma(\eta, t - \frac{\xi - x_t(\eta)}{U})}{\partial t} (x - \xi) + \frac{\partial \Gamma(\eta, t - \frac{\xi - x_t(\eta)}{U})}{\partial \eta} (y - \eta)}{\{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \quad (47) \end{aligned}$$

ここで(47)式両辺を Laplace 変換するのだが、右辺第1項の Laplace 変換を L_1 、第2項の Laplace 変換を L_2 として、Laplace 変換された(47)式を

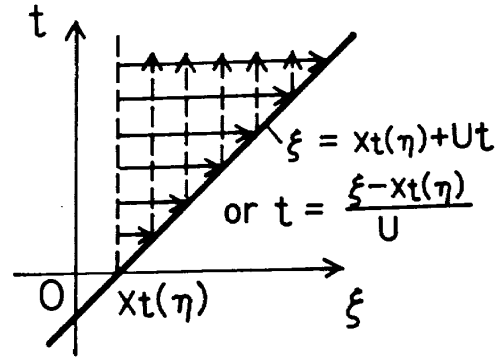
$$\tilde{w}_a(x, y, s) = L_1 + L_2 \quad (48)$$

と書いておく。ただし、前節同様 Laplace 変換された量を \sim を付けて表わす。

(47)式右辺第1項の積分範囲は時刻に関係しないから、積分順序の交換に際して問題は生ぜず

$$L_1 = \frac{-1}{4\pi} \oint_{-l_0}^{l_0} \oint_{x_f(\eta)}^{x_f(\eta)+Ut} \frac{\tilde{\gamma}_a(\xi, \eta, s)(x-\xi)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} + \frac{\tilde{\delta}_a(\xi, \eta, s)(y-\eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \quad (49)$$

となる。問題は第2項の Laplace 変換である。まず、shedding vortex の寄与分は積分順序の交換と変数変換 $t - \frac{\xi - x_f(\eta)}{U} = \tau$ とによって(下図参照)



付図5

$$\begin{aligned} & \int_{0-}^{\infty} e^{-st} \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{x_f(\eta)+Ut} \frac{x-\xi}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} \frac{\partial \Gamma(\eta, t - \frac{\xi - x_f(\eta)}{U})}{\partial t} d\xi d\eta dt \\ &= \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{\infty} \int_{\frac{\xi - x_f(\eta)}{U} - 0}^{\infty} e^{-st} \frac{x-\xi}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} \frac{\partial \Gamma(\eta, t - \frac{\xi - x_f(\eta)}{U})}{\partial t} dt d\xi d\eta \\ &= \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{\infty} \frac{x-\xi}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} e^{-\frac{\xi - x_f(\eta)}{U}s} \int_{0-}^{\infty} e^{-s\tau} \frac{\partial \Gamma(\eta, \tau)}{\partial \tau} d\tau d\xi d\eta \\ &= \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{\infty} e^{-\frac{\xi}{U}s} b_0 s \tilde{Q}(\eta, s) \frac{x-\xi}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \quad (50) \end{aligned}$$

ただし $t - \frac{\xi - x_f(\eta)}{U} = \tau$ 、さらに最後の辺の誘導で、 $t < 0$ では $\Gamma(y, t) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} & \int_{0-}^{\infty} e^{-s\tau} \frac{\partial \Gamma(\eta, \tau)}{\partial \tau} d\tau = [\Gamma(\eta, \tau) e^{-s\tau}]_{0-}^{\infty} \\ & + s \int_{0-}^{\infty} \Gamma(\eta, \tau) e^{-s\tau} d\tau = s \tilde{\Gamma}(\eta, s) \quad (51) \end{aligned}$$

を用いた。また、(50)式最終辺で

$$\tilde{Q}(\eta, s) \triangleq \frac{\tilde{\Gamma}(\eta, s)}{b_0} e^{\frac{x_f(\eta)}{U}s} \quad (52)$$

なる量を導入した。この関数は Reissner の "reduced circulation" \tilde{Q} に対応するもので、本論文ではこれを変形循環 (modified circulation) と呼ぼう。

これは、y 軸から翼後縁までの "遅れ" $e^{\frac{x_f(\eta)}{U}}$ を考慮した変換された循環の意味を持つ。

次に L_2 の残りの部分: trailing vortex の寄与分を計算しよう。前述の積分順序の交換と、変数変換

$$t - \frac{\xi - x_f(\eta)}{U} = \tau \text{ によって}$$

$$\begin{aligned} & \int_{0-}^{\infty} e^{-st} \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{x_f(\eta)+Ut} \frac{y-\eta}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} \frac{\partial \Gamma(\eta, t - \frac{\xi - x_f(\eta)}{U})}{\partial t} dt d\xi d\eta \\ &= \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{\infty} \frac{y-\eta}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} e^{-\frac{\xi - x_f(\eta)}{U}s} \int_{0-}^{\infty} e^{-s\tau} \frac{\partial \Gamma(\eta, \tau)}{\partial \eta} d\tau d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{\infty} \frac{y-\eta}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{3/2}} e^{-\frac{\xi-x_f(\eta)}{U}s} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \Gamma(\eta, \tau) d\tau d\xi d\eta \\
&= \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{\infty} \frac{y-\eta}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{3/2}} b_0 \frac{\partial \tilde{Q}(\eta, s)}{\partial \eta} e^{-\frac{\xi}{U}s} d\xi d\eta \quad (53)
\end{aligned}$$

を得る。

従って (50), (53) 式から (47) 式右辺第 2 項の Laplace 変換 L_2 は

$$L_2 = \frac{-1}{4\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{\infty} e^{-\frac{s\xi}{U}} \frac{\left\{ -\bar{s}_0 \tilde{Q}(\eta, s)(x-\xi) + b_0 \frac{\partial \tilde{Q}(\eta, s)}{\partial \eta} (y-\eta) \right\}}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \quad (54)$$

となる。(49) 式と (54) 式を (48) 式に用いれば、基礎方程式 (47) の Laplace 変換が、

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_a(x, y, s) &= -\frac{1}{4\pi} \oint_{-l_0}^{l_0} \oint_{x_f(\eta)}^{x_f(\eta)} \frac{\tilde{r}_a(\xi, \eta, s)(x-\xi) + \tilde{\delta}_a(\xi, \eta, s)(y-\eta)}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{\infty} e^{-\frac{s\xi}{U}} \frac{\left\{ -\bar{s}_0 \tilde{Q}(\eta, s)(x-\xi) + b_0 \frac{\partial \tilde{Q}(\eta, s)}{\partial \eta} (y-\eta) \right\}}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \quad (55)
\end{aligned}$$

と求まる。ただし、(54), (55) 式中 $\bar{s}_0 = \frac{b_0 s}{U}$ 。

一方、境界条件 (43) 式を Laplace 変換すると

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_a(x, y, s) &= \left(s + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{z}_a(x, y, s) \\
&\quad - z_a(x, y, 0-) ; \quad i n R_a \quad (56)
\end{aligned}$$

となるが、前節同様 $z_a(x, y, 0-) = 0$ だから

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_a(x, y, s) &= \left(s + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{z}_a(x, y, s) \\
&\quad ; \quad i n R_a \quad (57)
\end{aligned}$$

となる。以上で積分方程式と境界条件式が Laplace 変換された。

3.2 変換された圧力分布の式と変形循環に対する微積分方程式

次に積分方程式を解いて変換された圧力分布の式を求める。その式は微積分方程式に支配される関数 \tilde{Q} (変形循環) を含んでいるが、その方程式を導く。

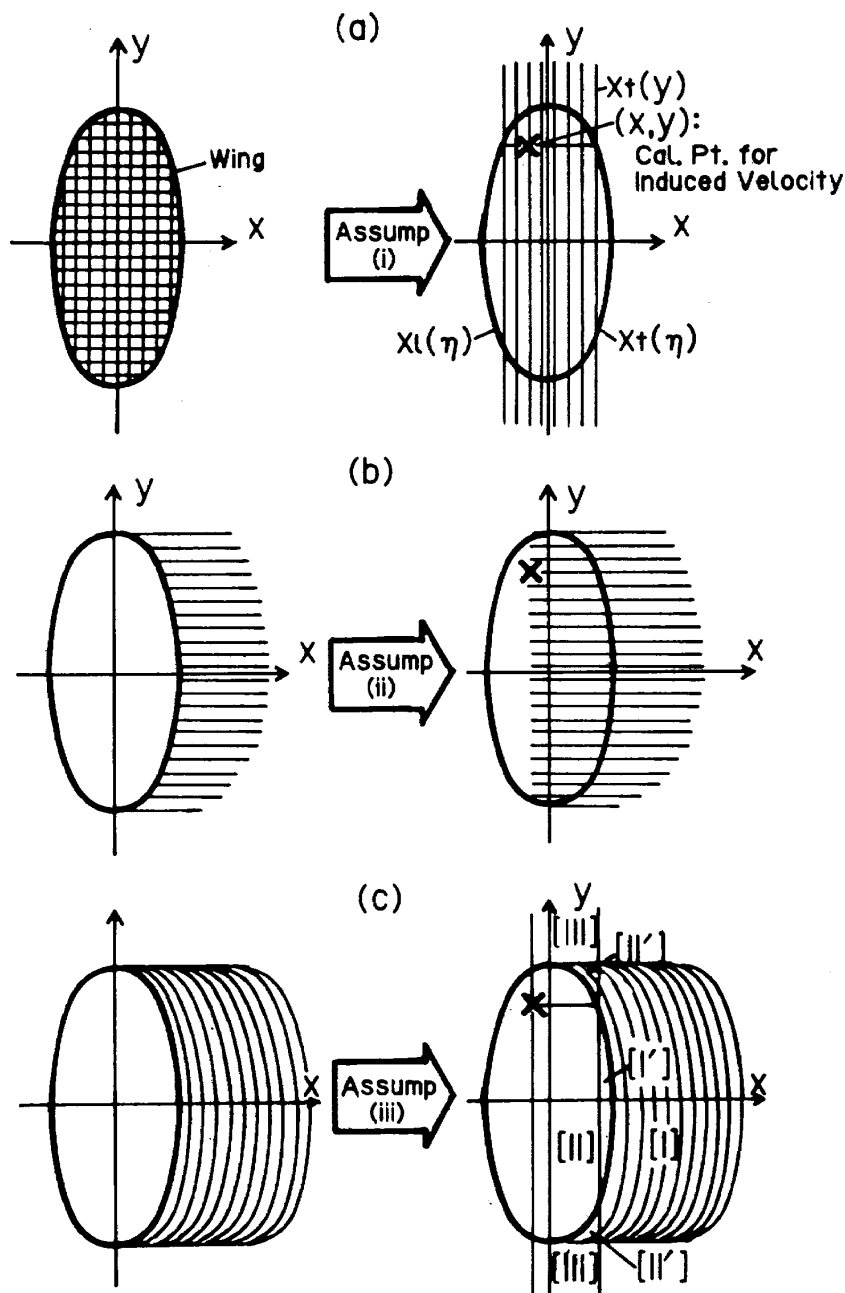
(55) 式を解くに当たって、調和振動の場合に Reissner が立てたと同様の近似仮定を立てて、同式の 2 重積分を 1 重積分に簡単化する。即ち、

(i) 翼面上の点 (x, y) での誘導速度 $\tilde{w}_a(x, y, s)$

を計算するときに限って、翼面上の渦度は y を含む断面での分布を 2 次元的に持つとする。図形的に表現すれば付図 6(a) のようになる。即ち、本来は翼面上に r_a, δ_a 2 成分の渦度が分布しているのを、 (x, y) 点での誘導速度を計算するときには右側の図のように $r_a(\xi, y)$ の渦度を 2 次元的に分布させるのである。この仮定によって、 $\tilde{\delta}_a(x, y, s) \cong 0$, $\tilde{r}_a(\xi, \eta, s) \cong \tilde{r}_a(\xi, y, s)$, さらに (55) 式右辺第 1 項の η に関する積分の上下限はそれぞれ $\infty, -\infty$ となって、1, 2 項に現われる ξ の積分上下限としての前後縁座標は $x_l(y), x_t(y)$ となる。

(ii) 後流あとひき渦 (trailing vortex) δ_w は、誘導速度を計算する翼面上の点 (x, y) を通る y 軸に平行な直線まで延長して分布させる。付図 6(b) のように表わせよう。この仮定によって (55) 式右辺の第 2 項の $d\tilde{Q}/d\eta$ を含む部分の ξ に関する積分下限 $x_l(\eta)$ を x とする。

(iii) 後流はき出し渦 (shedding vortex) r_w は、誘導速度を計算する点 (x, y) を含む断面に対する 2 次元分布 (即ち、(i) で仮定した 2 次元渦



付図 6

度分布の時間的変化分としてはき出される渦分布)と、本来3次元的に分布するはき出し渦との差分を、(ii)でいうところの直線まで延長して分布させる。この場合仮定された渦の場合は、付図6(c)に示すように5種類の領域から成ることになる。即ち、Iの領域は本来の渦分布のままであり、I'は本来の渦分布のまま $x=x_t(y)$ まで延長されることになる。IIの領域は2次元分布と本来の渦分布との差分が分布している領域であって、誘導速度を計算する点を含む断面 y においてはその差分は0であり、誘導速度に対する

寄与が大きいその近傍ではその差分は0に近い。II'では本来の分布が、「差分」の分布に置き換わっている。最後にIIIの領域、即ち、 $x \leq x \leq x_t(y)$ の細い帯状の限られた領域には、(i)で仮定した2次元の渦度分布がはきだす渦が分布することになる。

以上の仮定は定常空気力に対する揚力線理論での仮定に見合う(定常に於いてはそれに帰着する)ものである。揚力線型の近似仮定とも呼ぶべきものである。その有効性の検定については後に第5章で触れる。

さて、上記の仮定をたてると(55)式は次式のよう
に変換される。変換の過程の詳細は付録B(1)に示
した。

$$\begin{aligned} \tilde{w}_a(x, y, s) = & -\frac{1}{2\pi} \oint_{x_f(y)}^{x_f(y)} \frac{\tilde{\gamma}_a(\xi, y, s)}{x-\xi} d\xi \\ & + \frac{\bar{s}_0 \tilde{Q}(y, s)}{2\pi} \int_{x_f(y)}^{\infty} \frac{e^{-\frac{s\xi}{U}}}{x-\xi} d\xi \\ & - \frac{e^{-\frac{sx}{U}}}{4\pi} \oint_{-l_0}^{l_0} \frac{d\tilde{Q}(\eta, s)}{d\eta} \tilde{K}\left(\frac{y-\eta}{b_0}, \bar{s}_0\right) d\eta \end{aligned} \quad (58)$$

ここで関数 \tilde{K} はCicalaの関数⁶⁾を拡張したもので

$$\begin{aligned} \tilde{K}\left[\frac{y-\eta}{b_0}, \bar{s}_0\right] = & \tilde{K}[q, \bar{s}_0] \\ = & \int_0^{\infty} \frac{qe^{-\bar{s}_0\lambda}}{(\lambda^2+q^2)^{3/2}} d\lambda + \bar{s}_0 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\bar{s}_0\lambda}}{\lambda} \\ & \times \left[\frac{q}{\sqrt{\lambda^2+q^2}} - \frac{|q|}{q} \right] d\lambda \end{aligned} \quad (59)$$

である。

無次元量,

$$\begin{aligned} x^* = & \frac{2x-x_t-x_l}{2b}, \quad y^* = \frac{y}{b_0}, \\ \bar{s}_m = & \frac{\bar{s}_0}{2b_0}(x_t+x_l), \quad l_0^* = \frac{l_0}{b_0} \end{aligned} \quad (60)$$

を導入して(58)式を書き直すと

$$\begin{aligned} \tilde{w}_a(x^*, y^*, s) = & -\frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\tilde{\gamma}_a(\xi^*, y^*, s)}{x^*-\xi^*} d\xi^* \\ & + \frac{\bar{s}_0}{2\pi} e^{-\bar{s}_m} \tilde{Q}(y^*, s) \int_1^{\infty} \frac{e^{-\bar{s}\xi^*}}{x^*-\xi^*} d\xi^* \\ & - \frac{e^{-\bar{s}x^*-\bar{s}_m}}{4\pi} \oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^*-\eta^*, \bar{s}_0) d\eta^* \end{aligned} \quad (61)$$

後縁でのKuttaの条件： $r_a(x_t(y), y, t) = 0$ 、即ち
 $\tilde{\gamma}_a(1, y^*, s) = 0$ によってSöhngenの反転公式を
用いると

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_a(x^*, y^*, s) = & \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \left\{ \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \right. \\ & \times \frac{\tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s)}{x^*-\xi^*} d\xi^* + \frac{\bar{s}_0 e^{-\bar{s}_m}}{2} \tilde{Q}(y^*, s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{x^*-\lambda} d\lambda + \frac{e^{-\bar{s}_m}}{4\pi} \\ & \times \left[\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^*-\eta^*, \bar{s}_0) d\eta^* \right] \\ & \times \left[\oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{e^{-\bar{s}\xi^*}}{x^*-\xi^*} d\xi^* \right] \end{aligned} \quad (62)$$

となる。(付録B(2))

なお、(61)、(62)式中、無次元座標で表わした
変形循環は

$$\tilde{Q}(y^*, s) = \frac{b}{b_0} e^{(\bar{s}_m+\bar{s}_m)} \int_{-1}^1 \tilde{\gamma}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \quad (63)$$

であって、後に誘導する微積分方程式の解として与
えられる。

圧力分布の変換は圧力分布を翼面上の循環 r_a に
関係付ける(44)式から次のように求まる。まず
(44)式をLaplace変換して無次元変数を用いると、

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{P}_a(x^*, y^*, s) = & -\rho U \left[\tilde{\gamma}_a(x^*, y^*, s) \right. \\ & + \bar{s} \int_{-1}^{x^*} \tilde{\gamma}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \\ & \left. - \frac{b}{U} \int_{-1}^{x^*} r_a(\xi^*, y^*, 0-) d\xi^* \right] \end{aligned} \quad (64)$$

然るに $r_a(\xi^*, y^*, 0-) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{P}_a(x^*, y^*, s) = & -\rho U \left[\tilde{\gamma}_a(x^*, y^*, s) \right. \\ & \left. + \bar{s} \int_{-1}^{x^*} \tilde{\gamma}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \right] \end{aligned} \quad (65)$$

となる。(62)式を(64)式に代入してかなり演算す
ると結局次の式を得る。(演算の詳細は付録B(4)参
照)

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta \tilde{P}_a(x^*, y^*, s)}{\rho U} = & \frac{2}{\pi} \left[1 - \{C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}(y^*, s)\} \right] \\ & \times \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \\ & + \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left\{ \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{x^*-\xi^*} \right. \\ & \left. - \bar{s} A_1(x^*, \xi^*) \right\} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \end{aligned} \quad (66)$$

ただし、式中の種々の関数のうち、 $A_1(x^*, \xi^*)$ 、 $C(\bar{s})$ は前節の2次元の場合に現われたものと等しく、それぞれ(28)式、(31)式で定義されるもので、新たに定義される関数は次のものである。

$$\tilde{\sigma}(y^*, \bar{s}) = \left[\frac{\tilde{Q}(y^*, s)}{\tilde{Q}^{(2)}(y^*, s)} - 1 \right] \cdot \left[C(\bar{s}) + \frac{I_1(\bar{s})}{I_0(\bar{s}) - I_1(\bar{s})} \right] \quad (67)$$

$$\tilde{Q}^{(2)}(y^*, s) = -2 \frac{b}{b_0} e^{\bar{s}m} \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^*}{\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} \quad (68)$$

ただし、 $I_\nu(s)$ 、 $\nu=0, 1$ は ν 次の第1種変形 Bessel 関数である。

さて変形循環 $\tilde{Q}(y^*, s)$ を支配する微積分方程式を求めよう。(62)式両辺を翼弦方向に積分して、途中に現われる定積分を変形 Bessel 関数に關係付けていくらか演算すれば次の式を得る。(誘導の詳細は付録 B 参照)

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(y^*, s) + \frac{I_0(\bar{s}) - I_1(\bar{s})}{2\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} \\ \times \frac{b}{b_0} \oint_{-l_0}^{l_0} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, \bar{s}_0) d\eta^* \\ = -2 \frac{b}{b_0} e^{\bar{s}m} \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^*}{\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} \end{aligned} \quad (69)$$

さて変換された圧力分布を与える式(66)式を2次元の場合の前章(30)式と比較すると、両者の違いは $C(\bar{s})$ と $C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}(y^*, s)$ とが入れ替わっている点だけであることに気付く。空気力や、一般空気力は圧力分布を積分して得られるものであることを考えれば、3次元に対するこれらの伝達関数を求めるには、2次元に対する表式に於いて、一般 Theodorsen 関数 $C(\bar{s})$ を $C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}(y^*, s)$ で置き換えればよいことになる。従って方程式(69)によって変形循環 $\tilde{Q}(y^*, s)$ を求めることが、3次元の空気力学伝達関数を求めることとなる。

3.3 曲げ—振り—補助翼操舵に対する空気力学伝達関数

圧力分布の Laplace 変換が(66)式で与えられたので、それを然るべく翼弦方向に積分すれば、各種空気力の翼幅方向分布が得られる。前章の2次元翼に於いてと同様、その形は一般座標の Laplace 変換と Laplace 変換パラメタ s の関数との積の形で得られるので、その関数として空気力学伝達関数の具体的な表現が得られる。

境界条件を与える(57)式と圧力分布の(66)式とは、翼面の変位 z_a と圧力分布 ΔP_a とが線形の關係にあることを示している。従って、いま、補助翼を持つ弾性翼を考え、弾性変位は固有モードの和で表わすとした場合に、補助翼操舵と弾性変位に伴う各種空気力を求めるには、補助翼操舵をもう1つのモードとして、各モードに対する空気力を個別に求めて加え合わせればよいことになる。ここではアスペクト比が比較的大きな翼を念頭に置いて、曲げモード、振りモード、補助翼操舵に対しての各種空気力(揚力、縦揺れモーメント、ヒンジモーメント)の翼幅方向分布の Laplace 変換を求めよう。(前章2次元翼の場合にも勿論、線形關係はあって、重ね合わせの方法はとれたが、2次元の場合には高々3モードを考えればよかったので、いきなり全体の空気力を求めた。)

各モード形は基準翼幅位置 y_R での一般座標を $w_R(t)$ 、 $\theta_R(t)$ 、 $\delta_c(t)$ として、翼面の座標を各々次のように表わす。

(a) 曲げモード:

$$z_a(x, y, t) = f_w(y^*) w_R(t)$$

(b) 振りモード:

$$z_a(x, y, t) = -(x - ab) f_\theta(y^*) \theta_R(t)$$

(c) 補助翼操舵:

$$z_a(x, y, t) = -(x - cb) \delta_c(t) \\ ; l_1 \leq y \leq l_2 \text{ かつ } x_c \leq x \leq x_l$$

ただし、変数 a は弾性軸の位置を表わし、変数 c は補助翼ヒンジ位置を表わす。

各種空気力を求める手順は:

(i) 各振動モード毎に微積分方程式(69)式を書き直した次式を数値的に解いて $\tilde{Q}_j(y^*, s)$ を求める。ただし j はモードを表わし、曲げ、振り、補助翼

に応じてそれぞれ $j = w, \theta, \delta$ となる。

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_j(y^*, s) + \frac{b}{b_0} \mu(\bar{s}) \left[\int_{-\ell_0^*}^{\ell_0^*} \frac{d\tilde{Q}_j(\eta^*, s)}{y^* - \eta^*} \right. \\ \left. - \bar{s}_0 \int_{-\ell_0^*}^{\ell_0^*} \frac{y^* - \eta^*}{|y^* - \eta^*|} \tilde{F}(|y^* - \eta^*|, \bar{s}_0) \right. \\ \left. \cdot d\tilde{Q}_j(\eta^*, s) \right] = \tilde{Q}_j^{(2)}(y^*, s) \end{aligned} \quad (70)$$

ただし

$$\mu(\bar{s}) = \frac{I_0(\bar{s}) + I_1(\bar{s})}{2\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} \quad (71)$$

関数 \tilde{F} は (59) 式の関数 \tilde{K} と

$$\tilde{K} \left[\frac{y - \eta}{b_0}, \bar{s}_0 \right] = \frac{b_0}{y - \eta} - \bar{s}_0 \tilde{F}(|y - \eta|, \bar{s}_0) \quad (72)$$

なる関係で結ばれるもので、 $\chi = y - \eta$ としたとき

$$\tilde{F}(\chi, \bar{s}_0) = \int_0^\infty e^{-\bar{s}_0 \lambda} \left[\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\lambda} - \frac{\sqrt{\chi^2 + \lambda^2}}{\chi \lambda} d\lambda \right] \quad (73)$$

である。さらに右辺の関数 $\tilde{Q}_j^{(2)}(y^*, \bar{s})$ は 2次元の場合に (24) 式で定義された $\tilde{Q}(\bar{s})$ に相当する準 2次元量で、(68) 式から

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_j^{(2)}(y^*, s) = \\ -2 \frac{b}{b_0} e^{\bar{s}m} \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_j(\xi^*, y^*, s) d\xi^*}{\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} \end{aligned} \quad (74)$$

であって、各モードに対して次のように書ける。

(a) 曲げモード

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Q}_w^{(2)}(y^*, s)}{U} = \\ -2\pi e^{\bar{s}m} \frac{\bar{s}}{\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} f_w(y^*) \tilde{w}_R^* \end{aligned} \quad (75a)$$

ただし $w_R^* = w_R / b_0$

(b) 振りモード

$$\frac{\tilde{Q}_\theta^{(2)}(y^*, s)}{U} =$$

$$-2\pi \frac{b}{b_0} e^{\bar{s}m} \frac{1 + \left(\frac{1}{2} - a\right)\bar{s}}{\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} f_\theta(y^*) \tilde{\theta}_R \quad (75b)$$

(c) 補助翼操舵

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Q}_\delta^{(2)}(y^*, s)}{U} = \\ -2 \frac{b}{b_0} e^{\bar{s}m} \frac{T_{10} + \frac{T_{11}\bar{s}}{2}}{\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} \tilde{\delta}_c \end{aligned} \quad (75c)$$

(ii) (70) 式を解いて得られた関数 $\tilde{Q}_j(y^*, s)$ を (67) 式をモード毎に表わした式：

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_j(y^*, s) = \left[\frac{\tilde{Q}_j(y^*, s)}{\tilde{Q}_j^{(2)}(y^*, s)} - 1 \right] \left[C(\bar{s}) \right. \\ \left. + \frac{I_1(\bar{s})}{I_0(\bar{s}) - I_1(\bar{s})} \right] \end{aligned} \quad (68a)$$

に用いて $\tilde{\sigma}_j(y^*, s)$ を求め、前章 (35) 式中の対応する一般 Theodorsen 関数 $C(\bar{s})$ に加えれば、各モードに対する変換空気力の翼幅方向分布が求まる。

なお舵足ながら、以上の記述に於いて、翼の弾性変位を単に、曲げ、振り各 1 個のモードで近似した訳ではない。弾性変位を固有モードの重ね合わせで表わしたときの各要素のモードに対してそれぞれ上記の手順をそのままとることを意味している。例えば、所謂 2 次曲げモードのモード形が $f_{w_2}(y^*)$ であれば、その一般座標を $w_2(t)$ として、上記の手順中 $f_w(y^*)$ を $f_{w_2}(y^*)$ に、 $w_R(t)$ を $w_2(t)$ に置き換えることによって、そのモードに対する空気力を求めることを意味する。

手順中 (70) 式を解くには数値解法によらなければならないが、本研究でその電算機プログラムを開発した。解法の概要を付録 C に述べた。

得られる各種空気力は結局次のような形になる。

揚力： 曲げ、振り、補助翼操舵による揚力をそれぞれ L^w, L^θ, L^δ として

$$\tilde{L}^{w\Delta} \triangleq \frac{\tilde{L}^w}{2\rho U^2 b_0} = \pi \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \bar{s}_0^2 \right.$$

$$-\frac{b}{b_0} [C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_w] \bar{s}_0 \left\} f_w(y^*) \tilde{w}_R^* \right. \quad (76a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}^\theta \triangleq \frac{\tilde{L}^\theta}{2\rho U^2 b_0} = & \pi \left\{ \frac{1}{2} \left[-a \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \bar{s}_0^2 + \frac{b}{b_0} \bar{s}_0 \right] \right. \\ & + [C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_\theta] \left[\left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{b}{b_0} \bar{s}_0 \right. \\ & \left. \left. + 1 \right] \right\} \frac{b}{b_0} f_\theta(y^*) \tilde{\theta}_R \quad (76b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}^\delta \triangleq \frac{\tilde{L}^\delta}{2\rho U^2 b_0} = & \left\{ -\frac{1}{2} \left[T_1 \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \bar{s}_0^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + T_4 \left(\frac{b}{b_0} \right) \bar{s}_0 \right] + [C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_\delta] \right\} \\ & \times \left[\frac{T_{11}}{2} \left(\frac{b}{b_0} \right) \bar{s}_0 + T_{10} \right] \left\} \frac{b}{b_0} f_\delta(y^*) \tilde{\delta}_c \quad (76c) \end{aligned}$$

縦揺れモーメント：曲げ，振り，補助翼操舵による縦揺れモーメントをそれぞれ M_y^w , M_y^θ , M_y^δ ，として

$$\begin{aligned} \tilde{m}_y^w \triangleq \frac{\tilde{M}_y^w}{2\rho U^2 b_0^2} = & \pi \left\{ -\frac{a}{2} \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \bar{s}_0^2 - \left(a + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. \times \left(\frac{b}{b_0} \right) [C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_w] \bar{s}_0 \right\} \left(\frac{b}{b_0} \right) f_w(y^*) \tilde{w}_R^* \quad (76d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_y^\theta \triangleq \frac{\tilde{M}_y^\theta}{2\rho U^2 l_0^2} = & -\pi \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \bar{s}_0^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{b}{b_0} \right) \bar{s}_0 - \left(a + \frac{1}{2} \right) [C(\bar{s}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \tilde{\sigma}_\theta] \left[\left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{b}{b_0} \bar{s}_0 + 1 \right] \right\} \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 f_\theta(y^*) \tilde{\theta}_R \quad (76e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_y^\delta \triangleq \frac{\tilde{M}_y^\delta}{2\rho U^2 b_0^2} = & - \left\{ T_{13} \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \bar{s}_0^2 + \frac{T_{16}}{2} \left(\frac{b}{b_0} \right) \bar{s}_0 \right. \\ & \left. + \frac{T_{15}}{2} - \left(a + \frac{1}{2} \right) [C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_\delta] \right\} \\ & \times \left[\frac{T_{11}}{2} \left(\frac{b}{b_0} \right) \bar{s}_0 + T_{10} \right] \left\} \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 f_\delta(y^*) \tilde{\delta}_c \quad (76f) \end{aligned}$$

ヒンジモーメント：曲げ，振り，補助翼操舵によるヒンジモーメントをそれぞれ M_β^w , M_β^θ , M_β^δ として

$$\begin{aligned} \tilde{m}_\beta^w \triangleq \frac{\tilde{M}_\beta^w}{2\rho U^2 b_0^2} = & \frac{1}{2} \left\{ -T_1 \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \bar{s}_0^2 + T_{12} [C(\bar{s}) \right. \\ & \left. + \tilde{\sigma}_w] \frac{b}{b_0} \bar{s}_0 \right\} \frac{b}{b_0} f_w(y^*) \tilde{w}_R^* \quad (76g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_\beta^\theta \triangleq \frac{\tilde{M}_\beta^\theta}{2\rho U^2 b_0^2} = & - \left\{ T_{13} \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \bar{s}_0^2 + \frac{T_{17}}{2} \frac{b}{b_0} \bar{s}_0 \right. \\ & \left. + \frac{T_{12}}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{b}{b_0} \bar{s}_0 + 1 \right] [C(\bar{s}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \tilde{\sigma}_\theta] \right\} \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 f_\theta(y^*) \tilde{\theta}_R \quad (76h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_\beta^\delta \triangleq \frac{\tilde{M}_\beta^\delta}{2\rho U^2 b_0^2} = & - \frac{1}{2\pi} \left\{ -T_3 \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \bar{s}_0^2 \right. \\ & \left. + T_{19} \left(\frac{b}{b_0} \right) \bar{s}_0 + T_{18} + T_{12} \left[\frac{T_{11}}{2} \left(\frac{b}{b_0} \right) \bar{s}_0 \right. \right. \\ & \left. \left. + T_{10} \right] [C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_\delta] \right\} \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 f_\delta(y^*) \tilde{\delta}_c \quad (76i) \end{aligned}$$

最後にこれらの結果を使って，補助翼を有する弾性翼に働く空気力の翼幅方向分布およびそれをモードを重みとして積分して得られる一般空気力の Laplace 変換を求めておこう。

いま，翼の変位 w を

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = & \sum_{i=1}^r f_{w_i}(y) w_i(t) \\ & - (x - x_E) \sum_{j=1}^{n-r} f_{\theta_j}(y) \theta_j(t) \\ & - (x - x_C) \delta_c(t) \quad (77) \end{aligned}$$

あるいは無次元表示で

$$\begin{aligned} w^*(x^*, y^*, \tau) = & \frac{w(x, y, \tau)}{b_0} = \sum_{i=1}^r f_{w_i}(y^*) w_i^*(\tau) \\ & - (x^* - a) \sum_{j=1}^{n-r} f_{\theta_j}(y^*) \theta_j(\tau) \\ & - (x^* - c) \delta_c(\tau) \quad (78) \end{aligned}$$

ただし $w_i^* = w_i / b_0$

と表わす。このとき空力弾性系の運動方程式はモード法によって一般に次のように書くことができる。

$$M \frac{d^2 q^*}{d\tau^2} + B_C \frac{dq^*}{d\tau} + K q^* = Q_A + Q_C, \quad \tau = \frac{U}{b_0} t \quad (79)$$

ただし q^* は無次元の一般座標, M は質量行列, B_c は減衰行列, K は剛性行列で, Q_A は一般空気力, Q_c は制御トルクである。(79) 式を Laplace 変換すると,

$$[M \bar{s}_0^2 + B_c \bar{s}_0 + K] \bar{q}^* = \bar{Q}_A + \bar{Q}_c, \quad \bar{s}_0 = \frac{b_0}{U} s \tag{80}$$

と書ける。ここで (80) 式右辺の一般空気力の項は

$$\bar{Q}_A = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \end{bmatrix} \tag{81}$$

としたとき,

$$\bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} 2 \int_0^{l_0^*} \tilde{l}(y^*) f_{w_1} dy^* \\ 2 \int_0^{l_0^*} \tilde{l}(y^*) f_{w_2} dy^* \\ \vdots \\ 2 \int_0^{l_0^*} \tilde{l}(y^*) f_{w_r} dy^* \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_2 = \begin{bmatrix} 2 \int_0^{l_0^*} m_y(y^*) f_{\theta_1} dy^* \\ 2 \int_0^{l_0^*} \tilde{m}_y(y^*) f_{\theta_2} dy^* \\ \vdots \\ 2 \int_0^{l_0^*} \tilde{m}_y(y^*) f_{\theta_{n-r}} dy^* \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_3 = 2 \int_{l_1^*}^{l_2^*} \tilde{m}_\beta(y^*) f_\delta dy^* \tag{82a,b,c}$$

ただし, f_{w_i} , f_{θ_j} , f_δ 等は (77) 式で導入したモード形を表わす。 \tilde{l} , \tilde{m}_y , \tilde{m}_β は無次元の各種空気力 (揚力, 縦揺れモーメント, ヒンジモーメント) の翼幅分布の Laplace 変換で, 各モードに対する空気力 (76) 各式を用いると, 行列表示で次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} L(y)/2\pi\rho U^2 b \\ M_y(y)/2\pi\rho U^2 b^2 \\ M_\beta(y)/2\rho U^2 b^2 \end{bmatrix} = \left\{ (C_2(b/U))^2 s^2 \right.$$

$$+ C_1(b/U) s + C_0 \Big\} I_p + a_{nr} \left(c_{\underline{1}}^T (b/U) s + c_{\underline{0}}^T \right) I_p \Sigma \Big\} A q^* \tag{83}$$

式中の行列およびベクトルは

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & -a/2 & -T_1/2 \\ a/2 & -(1/8+a^2)/2 & -T_{13} \\ T_1/2 & -T_{13} & T_3/2 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -T_{14}/2 \\ 0 & -(1/2-a)/2 & -T_{16}/2 \\ 0 & -T_{17}/2 & -T_{19}/2 \end{bmatrix},$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_{15}/2 \\ 0 & 0 & -T_{18}/2 \end{bmatrix} \tag{84a,b,c}$$

$$a_{nr}^T = (1 \quad a+1/2 \quad -T_{12}/2),$$

$$c_{\underline{1}}^T = (-1 \quad 1/2-a \quad T_{11}/2),$$

$$c_{\underline{0}}^T = (0 \quad 1 \quad T_{10}) \tag{84d,e,f}$$

$$I_p = \begin{matrix} & \begin{matrix} r \text{ 列} & (n-r) \text{ 列} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{84g}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}; \quad A_{11} = \begin{bmatrix} f_{w_1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & f_{w_r} \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} f_{\theta_1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & f_{\theta_{n-r}} \end{bmatrix}, \quad A_{33} = f_\delta \tag{84h,i,j,k}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} \end{bmatrix}; \tag{84l}$$

$$\Sigma_{11} = \begin{bmatrix} C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_{w_1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_{w_r} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{22} = \begin{bmatrix} C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_{\theta_1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_{\theta_{n-r}} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{33} = C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_s \quad (84m, n, p)$$

(76) および (83) 式に於いて、空気力学伝達関数は一般座標の係数として与えられる。各式に見られるように、非圧縮流中の有限翼に対する空気力学伝達関数は Laplace 変換のパラメタの整関数の項と、その非有理関数の項 ($C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_s$ を含む項) の和の形をとることが明らかとなった。

(83) 式を (82a, b, c) 式に用いると、一般空気力は結局次のような形で書ける：

$$\tilde{Q}_A = G(\bar{s}_0) \tilde{q}^* \quad (85)$$

ここで、「一般空気力に対する空気力学伝達関数」 $G(\bar{s}_0)$ は

$$G(\bar{s}_0) = \{ A_a^1 \bar{s}_0^2 + B_a^1 \bar{s}_0 + C_a^1 \} + \{ B_a^{\text{II}}(\bar{s}_0) \bar{s}_0 + C_a^{\text{II}}(\bar{s}_0) \} \quad (86)$$

ただし

$$A_a^1 = 2 \int_0^{l_0^*} \Delta I_p^T C_2 I_p \Delta dy^* \quad (87a)$$

$$B_a^1 = 2 \int_0^{l_0^*} \Delta I_p^T C_1 I_p \Delta dy^* \quad (87b)$$

$$C_a^1 = 2 \int_0^{l_0^*} \Delta I_p^T C_0 I_p \Delta dy^* \quad (87c)$$

$$B_a^{\text{II}}(\bar{s}_0) = 2 \int_0^{l_0^*} \Delta I_p^T a_{nr} c_1^T I_p \Sigma \Delta dy^* \quad (87d)$$

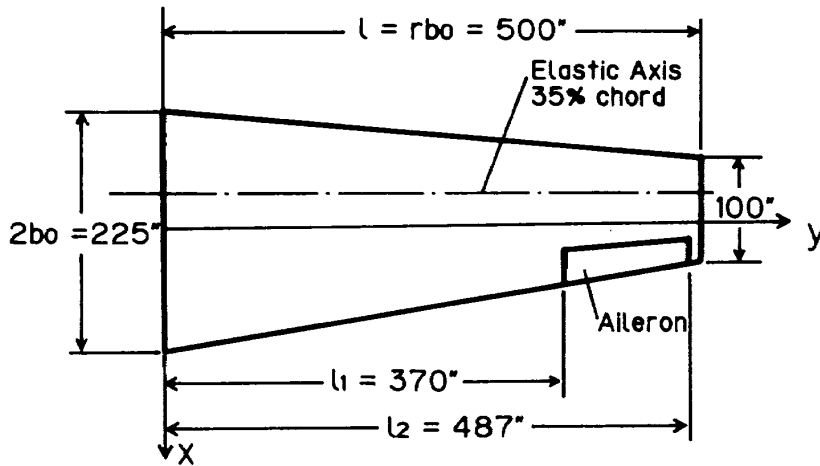
$$C_a^{\text{II}}(\bar{s}_0) = 2 \int_0^{l_0^*} \Delta I_p^T a_{nr} c_0^T I_p \Sigma \Delta dy^* \quad (87e)$$

となる。

(83) 式で表わされた空気力の翼幅方向分布に対する空気力学伝達関数が \bar{s}_0 の整関数の項： $[C_2 \bar{s}_0^2 + C_1 \bar{s}_0 + C_0] I_p \Delta$ と非有理関数の項： $a_{nr} (c_1^T \bar{s}_0 + C_0^T) I_p \Sigma \Delta$ とから成ることを反映して、一般空気力に対する空気力学伝達関数も同様の構成を持つことになった。

一般空気力の伝達関数のうち非有理関数の項を図 2 に示す片持テーパ翼について計算して複素面に

(a) 翼の平面形



(b) 質量、モーメント等の分布

翼幅方向の位置 [in]	質量 [lb]	慣性モーメント [lb-in ²]	1次モーメント [lb-in]
0	17400	∞	-
90	6039	8.72×10^6	-42273
186	10200	93.16×10^6	-140083
268	4200	3.72×10^6	8400
368	3400	2.77×10^6	6800
458	680	0.40×10^6	2720

(c) 非連成弾性モード形

翼幅方向の位置 [in]	非連成曲げ 1次モード	非連成振り 1次モード
0	0	0
90	0.04466	0.4489
186	0.1417	0.9193
268	0.3792	0.9522
368	0.6935	0.9894
458	1	1
	$\omega_w = 12.799$ [rad/sec]	$\omega_\theta = 22.357$ [rad/sec]

図 2 対象にした片持テーパ翼の諸元

表示すると図3のようになる。図の表示方法は前章の一般 Theodorsen 関数の表示方法(図1(a))と同様で、関数の実部と虚部の等高線をそれぞれ実線および点鎖線で示した。なお各図共、関数値は原点に於ける値で割って基準化してある。また各図共、複素面の上半面のみを示したが、下半面は実軸に関して対称で、ただ虚部の符号が反転するだけである。

実部と虚部の等高線が直交しておれば、そこで関数は正則であるから少なくとも図示した範囲では、負の実軸上を除いて、いずれの関数も正則である。

各関数とも、一般 Theodorsen 関数と3次元修正関数($\tilde{\sigma}_w$ 等)との和の重みつき積分の形をしているので((87d,e)式)一般 Theodorsen 関数の性質がある程度反映される筈である。実際、一般 Theodorsen 関数の複素面表示、図1(a)と今の図3とを比較すれば、その類似性が明らかである。負の実軸の特異点は、一般 Theodorsen 関数の特性をそのまま表わして、各関数共そこが分枝切断線となっているのである。

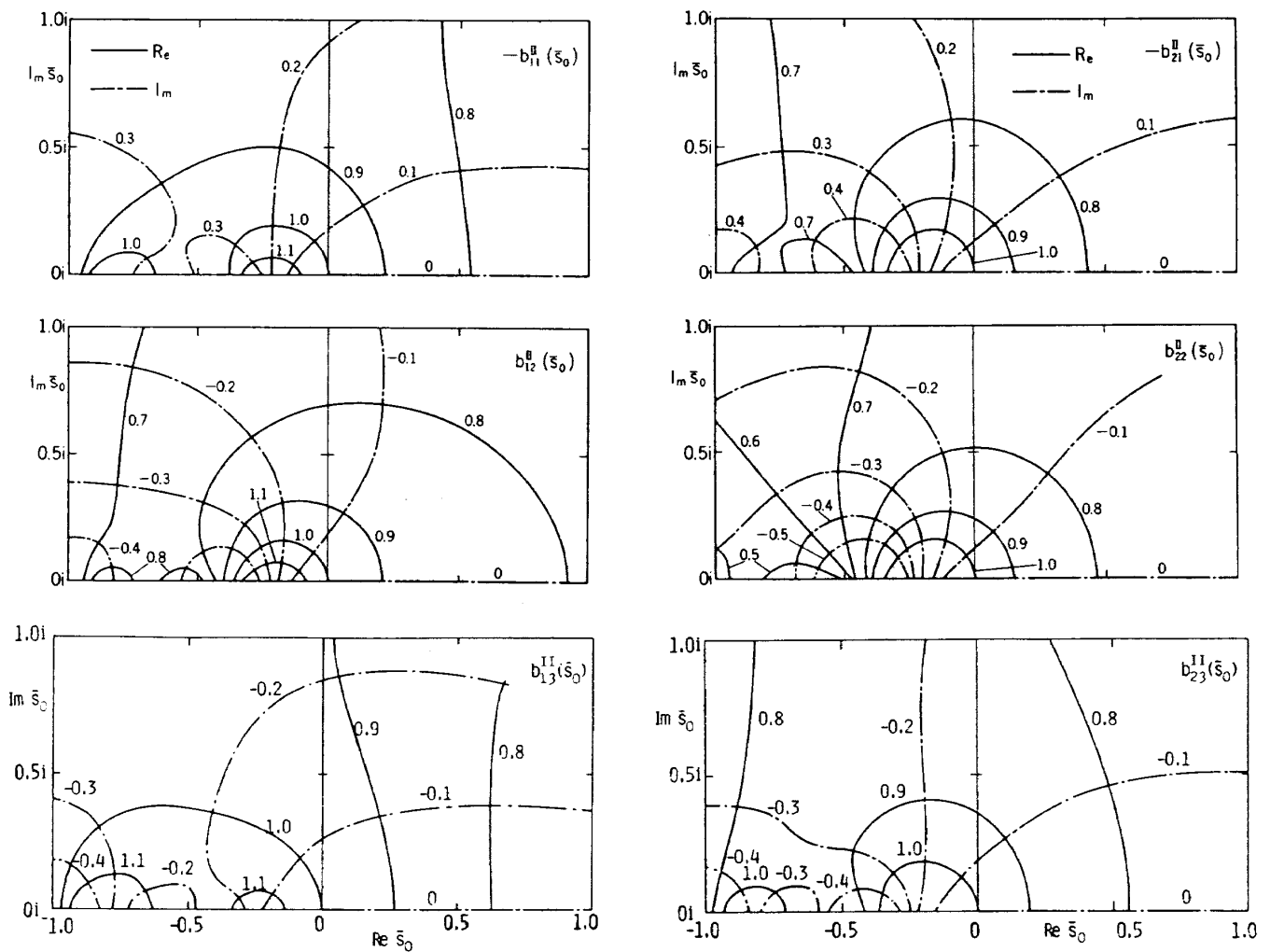


図3 一般空気力伝達関数の非有理関数項の複素面表示

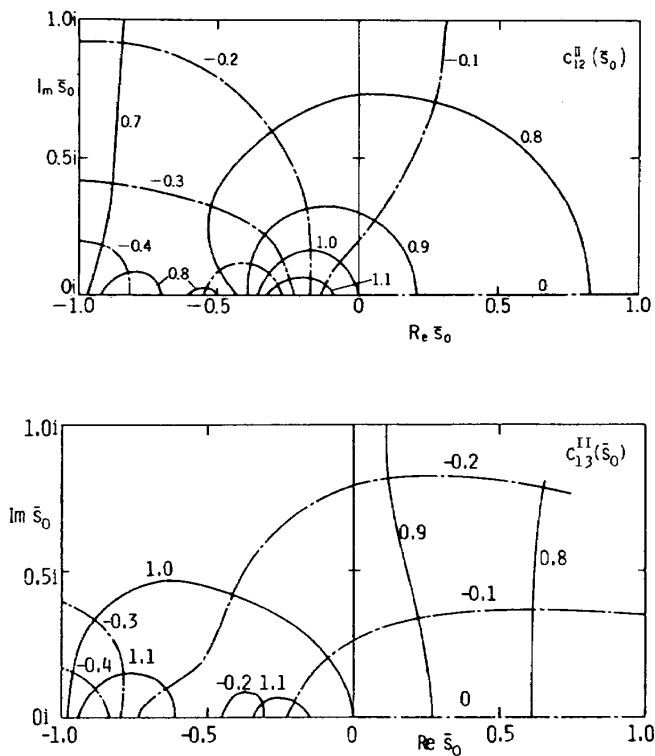


図3 続き

4. 有限翼の過渡空気力

前章で、空気力学伝達関数によって空気力の Laplace 変換が得られたので、これを Laplace 逆変換することによって任意の運動をする有限翼の過渡空気力を求めることが可能になった。一方、古くは W.P.Jones¹³⁾、R.T.Jones¹⁴⁾等、最近では Vepa³⁾がインディシャル空気力を含めた各種の過渡空気力を計算している。特に Drischler は Reissner の理論による調和振動空気力に Fourier 逆変換を適用してインディシャル揚力を計算している¹⁵⁾

この章ではまず空気力学伝達関数に基づいて過渡空気力を求める方法について論じた後、矩形翼および楕円翼の代表的平面形を有する翼について、インディシャル揚力等の過渡空気力をこの方法によって算出した結果を示す。そして上述の研究者の結果と比較・検討する。なお、Edwards は 2次元の場合について、同様の方法を論じているが⁴⁾、ここではそれを 3次元に拡張することになる。

4.1 Laplace 逆変換による過渡空気力の算出

有限翼に働く空気力の Laplace 変換は前章(76)各式で与えられた。ここでは空気力のうち揚力について過渡空気力(過渡揚力)の算出法を述べるが、モーメントについても全く同様に算出することができる。いま一般座標 w_R^* 、 θ_R 、 δ_a 等を q_j^* ； l^w 、 l^θ 、 l^δ 等を l^j それらに関する空気力学伝達関数を $G_{Lj}(y^*, s)$ (ただし $j=w, \theta, \delta$)と書くと(76a,b,c)式はまとめて

$$\tilde{z}^j(y^*, s) = G_{Lj}(y^*, s) \tilde{q}_j^*(y^*, s) ; j=w, \theta, \delta \quad (88)$$

と書くことができる。

空気力学伝達関数 $G_{Lj}(y^*, s)$ を(76a)式によって仔細に見ると、それは一般 Theodorsen 関数と「3次元修正関数」 $\tilde{\sigma}_j$ の和と \bar{s}_0 の1次式の積、それに \bar{s}_0 の2次式とから成っていることが分る。即ち1次式を $f_j^{(1)}(\bar{s}_0)$ 、2次式を $f_j^{(2)}(\bar{s}_0)$ と書けば

$$G_{Lj}(y^*, s) = f_j^{(2)}(\bar{s}_0) + [C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_j(s)] f_j^{(1)}(\bar{s}_0) \quad (89)$$

と書ける。

一般に、Laplace 変換が $\tilde{z}^j(y^*, s)$ であるところの揚力の時間領域での表現は Laplace 逆変換によって

$$\begin{aligned} l^j(y^*, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \tilde{z}^j(y^*, s) e^{st} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} G_{Lj}(y^*, s) \tilde{q}_j^*(y^*, s) e^{st} ds \end{aligned} \quad (90)$$

によって求められる。ここで σ_1 は被積分関数の全ての特異点より右にとる。なお、揚力に関する無次元量は実次元量と次の関係にある。

$$l^j(y^*, t) = \frac{L^j(y, t)}{2\rho U^2 b_0}, \quad \tilde{z}^j(y^*, s) = \frac{\tilde{L}^j(y, s)}{2\rho U^2 b_0} \quad (91)$$

空気力学伝達関数が(89)式の構造をとるとき、(90)式の Bromwich 積分を実行して過渡揚力を具体的な形に導こう。まず、(89)式中の2つの関数 $C(\bar{s})$ 、 $\tilde{\sigma}_j(\bar{s})$ を次のように分ける。

$$C(\bar{s}) = C(0) - \phi(\bar{s}) = 1 - \phi(\bar{s}) \quad (92)$$

$$\tilde{\sigma}_j(s) = \tilde{\sigma}_j(0) - \Delta \tilde{\sigma}_j(s) = \sigma_{j0} - \Delta \tilde{\sigma}_j(s) \quad (93)$$

ここで

$$\phi(\bar{s}) = \frac{K_0(\bar{s})}{K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})} \quad (94)$$

こうすると、伝達関数は次のようになる。

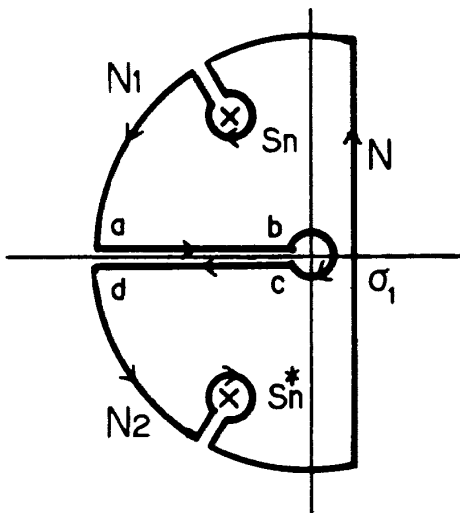
$$G_{L_j}(y^*, s) = f_j^{(2)}(\bar{s}_0) + (1 + \sigma_{j0})f_j^{(1)}(\bar{s}_0) - [\phi(\bar{s}) + \Delta \tilde{\sigma}_j(s)]f_j^{(1)}(\bar{s}_0) \quad (95)$$

(95) 式を (90) 式に代入して積分を実行すると、(95) 式第 1 項および第 2 項はそれぞれ $f_j^{(2)}(d/d\tau)$, $f_j^{(1)}(d/d\tau)$ なる微分演算子となるから、揚力は次のように表わされる。

$$l^j(y^*, \tau) = f_j^{(2)}\left(\frac{d}{d\tau}\right)q_j^*(y^*, \tau) + (1 + \sigma_{j0})f_j^{(1)}\left(\frac{d}{d\tau}\right)q_j^*(y^*, \tau) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} [\phi(\bar{s}) + \Delta \tilde{\sigma}_j(s)]f_j^{(1)}(\bar{s}_0) \times \tilde{q}_j^*(y^*, s) e^{\bar{s}\tau} d\bar{s} \quad (96)$$

第 3 項に残された複素積分を実行するには、Sears¹¹⁾あるいは Edwards⁴⁾ にならって、積分路を下図のようにとる。図中の×印は、 $\tilde{q}_j^*(y^*, s)$ の極を代表的に表わしたものである。Sears によって $\phi(\bar{s})$ に関しては次のことが分かっている。

- (i) $\phi(\bar{s})/\bar{s}$ は図の積分路内部に特異点を持たず、
- (ii) N_1, N_2 に沿っては $\bar{s} \rightarrow \infty$ につれて $\phi(\bar{s})/\bar{s} \rightarrow 0$ となるので $\int_{N_1, N_2} \phi(\bar{s}) e^{\bar{s}\tau} d\bar{s}/\bar{s} \rightarrow 0$ 。¹¹⁾



付図 7

一方 $\Delta \tilde{\sigma}_j(s)$ についてはそれが解析形では与えられず、積分方程式 (69) の解に支配されるものなので、解析的な検討は今後の研究に俟つとして、ここではこの関数についても

- (i) $\Delta \tilde{\sigma}_j(s)/s$ は図の積分路内部に特異点を持たず、
- (ii) N_1, N_2 に沿っては $s \rightarrow \infty$ とともに $\Delta \tilde{\sigma}_j(s)/s \rightarrow 0$ となるので、従って $\int_{N_1, N_2} \Delta \tilde{\sigma}_j(s) e^{st} ds/s \rightarrow 0$ となるとしておこう。(このことから得られる後述の過渡応答の表示を具体的な例に適用したときに、妥当な結果が得られることを次節に示す。)

このときは (96) 式の被積分関数(これを $f(s)$ と書く) を図の積分路に沿って一周積分したものは、上記それぞれの(i)のもとに Cauchy の定理によって零となるから

$$\int_N f(s) ds = - \int_{N_1} - \int_{N_2} - \int_{ab} - \int_{cd} - \int_{bc} + 2\pi i \sum_n \text{Res} [f(s)]_{s=s_n} \quad (97)$$

が成り立つ。

さて、ある関数 $f(t)$ が、あらゆる有限区間 $0 \leq t \leq T$ で区分的に連続で、指数位 (exponential order) であれば、その Laplace 変換 $\tilde{f}(s)$ について、 $s \rightarrow \infty$ のとき $\tilde{f}(s) \rightarrow 0$ さらに $s\tilde{f}(s)$ は有界である (文献 16 の pp.60-62)。従って今の場合 $f_j^{(1)}(d/d\tau)q_j^*(y^*, \tau)$ がこれらの条件を満たしておれば、前記各(ii)によって $s \rightarrow \infty$ のとき $[\phi(\bar{s}) + \Delta \tilde{\sigma}_j(s)]f_j^{(1)}(s)q_j^*(y^*, s) \rightarrow 0$ となる。よって、Jordan の補助定理 (文献 8 の pp.300-301) から $s \rightarrow \infty$ とともに円弧 N_1, N_2 に沿う積分は零になる。即ち

$$\left\{ \int_{N_1} + \int_{N_2} \right\} [\phi(\bar{s}) + \Delta \tilde{\sigma}_j(s)]f_j^{(1)}(\bar{s}_0) \times q_j^*(y^*, s) e^{\bar{s}\tau} d\bar{s} \rightarrow 0, \text{ as } s \rightarrow \infty$$

また、原点の回りの積分は $s = \epsilon e^{i\theta}$ として

$$\int_{bc} f(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\phi\left(\frac{b\epsilon}{U} e^{i\theta}\right) + \Delta \tilde{\sigma}_j(\epsilon e^{i\theta}) \right]$$

$$f_j^{(1)}\left(\frac{b_0 \varepsilon}{U} e^{i\theta}\right) \tilde{q}_j^*(y^*, \varepsilon e^{i\theta}) \\ \times \exp\left(\frac{b_0 \varepsilon}{U} e^{i\theta} \cdot \tau\right) i \varepsilon e^{i\theta} d\theta \quad (98)$$

となるが、 $s \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) のとき $\phi\left(\frac{b\varepsilon}{U} e^{i\theta}\right) \rightarrow 0$,

$\Delta \tilde{\sigma}_j(\varepsilon e^{i\theta}) \rightarrow 0$ であるから、 $f_j^{(1)}(\bar{s}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, s)$ が $s \rightarrow 0$ のとき $1/s$ より速くは無限大にならない場合を考えることにすれば上式は零になる。

最後に分枝切断線である負の実軸に沿う積分は、 ϕ に関して Sears の結果を用いて、

$$\left\{ - \int_{ab} - \int_{cd} \right\} [\phi(\bar{s}) f_j^{(1)}(\bar{s}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, s) e^{\bar{s}_0 \tau}] ds \\ = - 2\pi i \int_0^\infty \frac{f_j^{(1)}(-\bar{\tau}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, -\tau) e^{-\bar{\tau}_0 \tau} d\tau}{[(K_0(\bar{\tau}) - K_1(\bar{\tau}))^2 + \pi^2 (I_0(\bar{\tau}) + I_1(\bar{\tau}))^2] \cdot \bar{\tau}} \quad (99)$$

$\Delta \tilde{\sigma}_j$ に関する項は

$$\left\{ - \int_{ad} - \int_{cd} \right\} [\Delta \tilde{\sigma}_j(s) f_j^{(1)}(\bar{s}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, s) e^{\bar{s}_0 \tau}] ds = - \int_0^\infty \Delta \tilde{\sigma}_j(r e^{i\pi}) f_j^{(1)}(-\bar{\tau}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, -\tau) e^{-\bar{\tau}_0 \tau} (-) d\tau \\ - \int_0^\infty \Delta \tilde{\sigma}_j(r e^{-i\pi}) f_j^{(1)}(-\bar{\tau}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, -\tau) e^{-\bar{\tau}_0 \tau} (-) d\tau \\ = - \int_0^\infty [\tilde{\sigma}_j(r e^{-i\pi}) - \tilde{\sigma}_j(r e^{i\pi})] f_j^{(1)}(-\bar{\tau}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, -\tau) e^{-\bar{\tau}_0 \tau} d\tau \quad (100)$$

となる。 $(\bar{\tau}_0 = b_0 \tau / U)$ 以上によって結局、過渡揚力は次のように求まる。

$$l^j(y^*, \tau) = l_{kc}^j(y^*, \tau) + l_{qs}^j(y^*, \tau) + l_{w1}^j(y^*, \tau) + l_{w2}^j(y^*, \tau) + l_{w3}^j(y^*, \tau) \quad (101)$$

ここに於て

$$l_{kc}^j(y^*, \tau) = f_j^{(2)}\left(\frac{d}{d\tau}\right) q_j^*(y^*, \tau) \quad (102a)$$

$$l_{qs}^j(y^*, \tau) = (1 + \sigma_{j0}(y^*)) f_j^{(1)}\left(\frac{d}{d\tau}\right) q_j^*(y^*, \tau) \quad (102b)$$

$$l_{w1}^j(y^*, \tau) = (-) \sum_n R_{es} \{ [\phi(\bar{s}) + \Delta \tilde{\sigma}_j(s)] f_j^{(1)}(\bar{s}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, s) e^{\bar{s}_0 \tau} \}_{s=s_n} \quad (102c)$$

$$l_{w2}^j(y^*, \tau) = \int_0^\infty \frac{1}{[\{K_0(\bar{\tau}) - K_1(\bar{\tau})\}^2 + \pi^2 \{I_0(\bar{\tau}) + I_1(\bar{\tau})\}^2] \cdot \bar{\tau}} f_j^{(1)}(-\bar{\tau}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, -\tau) e^{-\bar{\tau}_0 \tau} d\tau \quad (102d)$$

$$l_{w3}^j(y^*, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [\tilde{\sigma}_j(r e^{-i\pi}) - \tilde{\sigma}_j(r e^{i\pi})] f_j^{(1)}(-\bar{\tau}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, -\tau) e^{-\bar{\tau}_0 \tau} d\tau \quad (102e)$$

(102) 式で表わされる (101) 式各項の意味は l_{kc}^j が被循環流による揚力、 l_{qs}^j が準定常揚力、 l_{w1}^j 、 l_{w2}^j 、 l_{w3}^j が後流渦によって生ずる揚力である。 l_{w2}^j 、 l_{w3}^j に残された積分は解析的には実行できないので数値積分による。積分範囲は半無限区間であるが、以下の例も含めて殆どの場合、被積分関数が積分に

影響する程の値をとる範囲は τ の小さな部分に限られるので、実際には有限区間の数値積分で済む。

4.2 過渡揚力の数値計算例

この節では前節で導いた方法によって、代表的な過渡揚力としてインディシャル揚力と過渡振動揚力

を数値計算した結果を示す。対象にした翼は矩形翼と楕円翼である。

インディシャル揚力

初めに前節での誘導の際用いた、 $d\tilde{\sigma}_j(s)/s$ が積分路内部で正則で、 $s \rightarrow \infty$ のとき $d\tilde{\sigma}_j(s)/s \rightarrow 0$ となつた仮定の妥当性を示す結果を示そう。

そのために、矩形翼が $t = 0$ から剛体として沈下運動を始める場合に生ずるインディシャル揚力を考えよう。(101), (102)式をこの場合に適用するに際して、一般座標 $q^* = w^* = w_R/b_0$ は

$$w_R^* = -\frac{Ut}{b_0} H(t) = -\tau H(\tau) \quad (103)$$

(ただし、 $H(t)$ はステップ関数: $t < 0$ で 0, $t \leq 0$ で 1) を考えて

$$\tilde{w}_R^*(s) = -\frac{U}{b_0} \frac{1}{s^2} \quad (104)$$

(89) 式を (76a) 式と比較すれば、上下振動の場合 ($j = w$),

$$f_w^{(2)}(\bar{s}_0) = -\frac{\pi}{2} \bar{s}_0^2, \quad f_w^{(1)}(\bar{s}_0) = -\pi \bar{s}_0 \quad (105a)$$

即ち

$$f_w^{(2)}\left(\frac{d}{d\tau}\right) = -\frac{\pi}{2} \frac{d^2}{d\tau^2}, \quad f_w^{(1)}\left(\frac{d}{d\tau}\right) = -\pi \frac{d}{d\tau} \quad (105b)$$

となる。従つてまず (102a), (102b) 式から非循環流による揚力と準定常揚力が

$$\begin{aligned} l_{NC}^w(\tau) &= \frac{\pi}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} [\tau H(\tau)] \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{d}{d\tau} [H(\tau) + \tau \delta(\tau)] \\ &= \frac{\pi}{2} [\delta(\tau) + \delta(\tau) + \tau \delta'(\tau)] = \frac{\pi}{2} \delta(\tau) \end{aligned} \quad (106a)$$

$$\begin{aligned} l_{QS}^w(y^*, \tau) &= \pi [1 + \sigma_{w_0}(y^*)] \frac{d}{d\tau} [\tau H(\tau)] \\ &= \pi [1 + \sigma_{w_0}(y^*)] [H(\tau) + \tau \delta(\tau)] \\ &= \pi [1 + \sigma_{w_0}(y^*)] H(\tau) \end{aligned} \quad (106b)$$

と求まる。ただし、超関数の理論から、 $\tau \delta(\tau) = 0$, $\tau \delta'(\tau) = -\delta(\tau)$ を用いた (文献 17 の p. 89)。

また、 $l_{w_1}^w(y^*, \tau)$ を求めるのに必要な $\tilde{w}_R^*(s)$ の特異点は原点にあるから、(102c) によって

$$\begin{aligned} l_{w_1}^w(y^*, \tau) &= -R_{es} \{ [\phi(\bar{s}) + d\tilde{\sigma}_w(y^*, s)] \\ &\quad \times f_w^{(1)}(\bar{s}_0) \tilde{w}_R^*(s) e^{\bar{s}_0 \tau} \}_{s=0} \\ &= -\left\{ s [\phi(\bar{s}) + d\tilde{\sigma}_w(y^*, s)] (-\pi \bar{s}_0) \right. \\ &\quad \times \left. \left(-\frac{U}{b_0} \frac{1}{s^2} \right) e^{\bar{s}_0 \tau} \right\}_{s=0} \\ &= -\pi [\phi(0) + d\tilde{\sigma}_w(y^*, 0)] = 0 \end{aligned} \quad (106c)$$

となるので、この場合には後流渦による揚力は、 $l_{w_2}^w(y^*, \tau)$ と $l_{w_3}^w(y^*, \tau)$ だけになる。それらは (102d), (102e) から、次の積分を数値的に実行して得る。

$$l_{w_2}^w(y^*, \tau) = -\pi \int_0^\infty \frac{1}{[(K_0 - K_1)^2 + \pi^2 (I_0 + I_1)^2]_{\bar{s} = \bar{\tau} e^{i\pi} \bar{r}}} \cdot \frac{e^{-\bar{\tau}_0 \tau}}{\bar{r}} d\bar{r} \quad (106d)$$

$$l_{w_3}^w(y^*, \tau) = \frac{i}{2} \int_0^\infty [\tilde{\sigma}_w(\bar{r} e^{-i\pi}) - \tilde{\sigma}_w(\bar{r} e^{i\pi})] \cdot \frac{e^{-\bar{\tau}_0 \tau}}{\bar{r}} d\bar{r} \quad (106e)$$

Drishler は Reissner の結果を用いて、それに Fourier 逆変換を適用することによって、上記の場合のインディシャル揚力を求めている¹⁵⁾。上記の場合には前述の仮定のもとでは特異点が原点にしかないので、Bromwich 積分は積分路を虚軸上にとることができる。即ち、この場合には Fourier 逆変換と一致するのである。従つて、もし前節の方法によって求めた結果が、Drishler の結果と一致すれば、前述の仮定が妥当なものであると言えよう。なお、非圧縮流では、非循環流の項のために、インディシャル揚力には (106a) 式に見られるように Dirac のデルタ関数が含まれるが、両者でこの積分は同一なので、以下にはこの成分を除いた循環流による揚力のみを示した。

図 4 および図 5 が両方法を比較したものである。まず、図 4 はアスペクト比 3 の矩形翼に対するインディシャル揚力で、本方法によるものは (106) 式を翼幅方向に積分して求める。縦軸は定常値 (l_{QS}^w の積分値) を 1 としたインディシャル揚力関数 $k_1(\tau)$

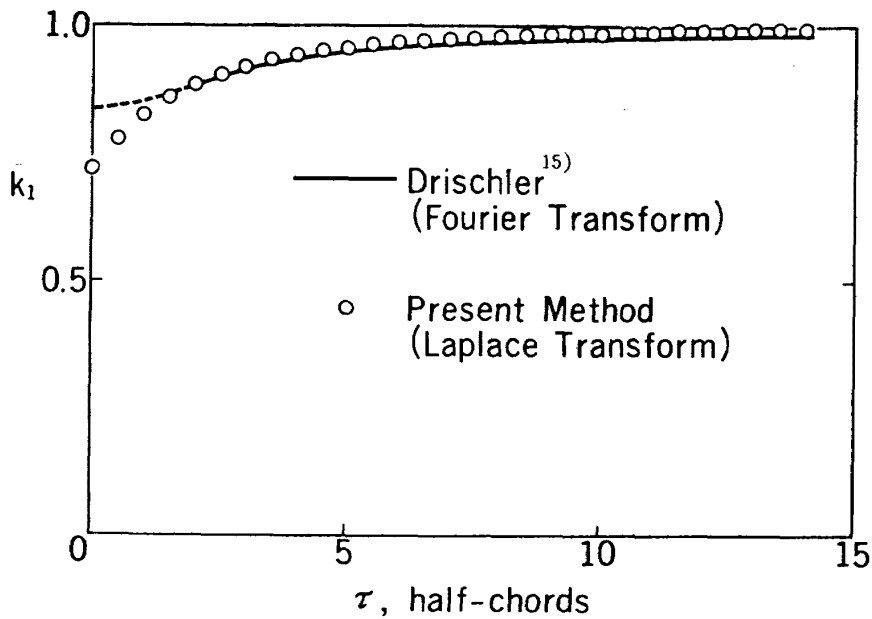


図4 沈下運動によるインディシャル揚力関数, 矩形翼, $AR = 3.0$

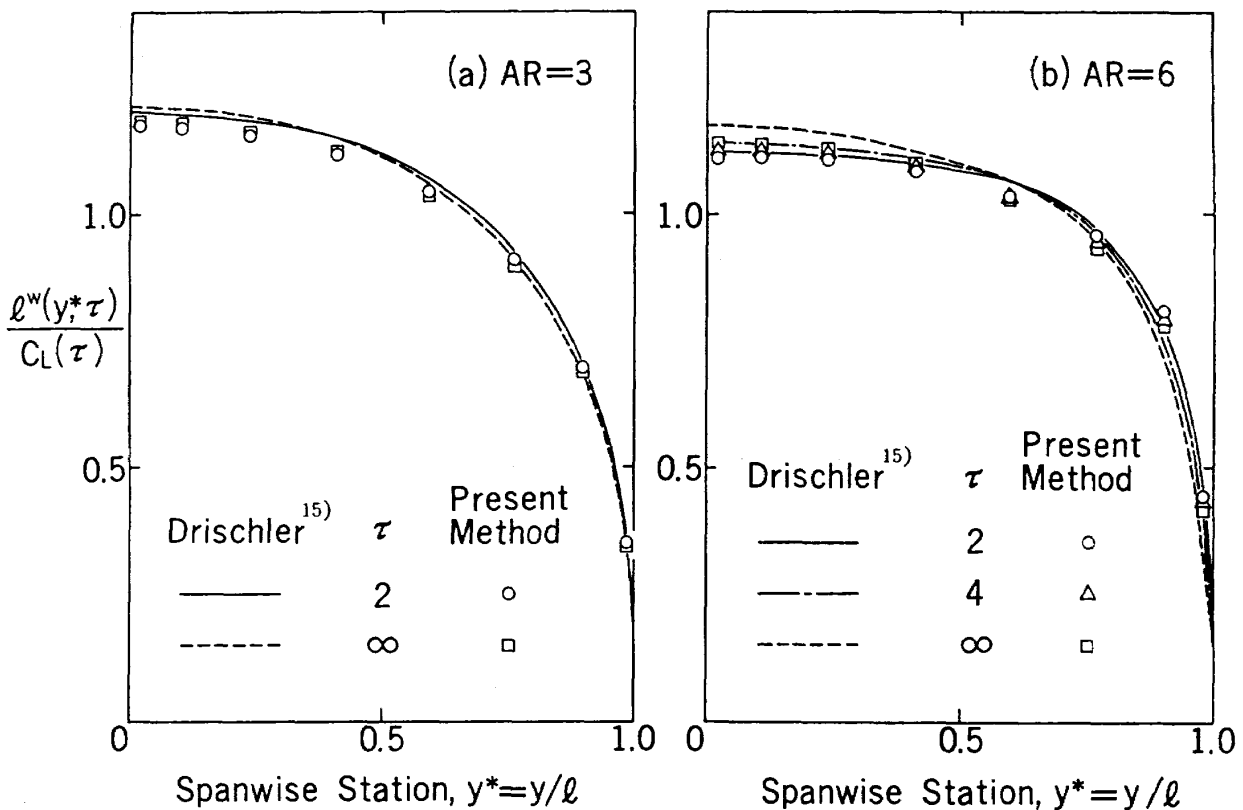


図5 インディシャル揚力の瞬時翼幅方向分布, 矩形翼, $AR = 3.0, 6.0$

で、横軸は翼中央の半弦長 b_0 を単位とした経過時刻 ($\tau = Ut/b_0$) である。

$0 \leq \tau \leq 2$ の範囲では Drischler はインディシャル揚力の初期値の翼幅方向の局所的な値が、周波数無限大での局所揚力係数の実部に等しいとしてインディシャル揚力の初期値を求め $\tau = 2$ との間はフェアリングを行った。図4にはその部分を点線で示し

である。一方、図中○印の計算では $0 \leq \tau \leq 2$ に於いても本方法を適用したために、この範囲では両者の不一致が生じている。しかし、 $\tau \geq 2$ の範囲に於いては本方法による計算結果と Drischler の結果との一致はかなりよい。さらに図5はやはり矩形翼のアスペクト比が3と6のものについて、刻々の翼幅方向揚力分布を示したもので、刻々の全揚力を $L_T(\tau)$,

その翼幅方向分布を $L^w(y, \tau)$ として、それぞれの無次元量を $C_L(\tau) = L_T(\tau) / \frac{1}{2} \rho U^2 S$, $l^w(y, \tau) = L^w(y, \tau) / 2 \rho U^2 b_0$ としたとき縦軸に $l^w(y, \tau) / C_L(\tau)$ をとって図示したものである。この図でも両者の一致は満足なものであって、これらの結果は、前述の仮定の妥当性を示している。

次に代表的な平面形を有する翼として、矩形翼および楕円翼についてのインディシャル揚力の数値計算結果を示そう。まず矩形翼のアスペクト比が 4 及び 6 のものに対するインディシャル揚力を図 6 の(a), (b)に示す。この場合については W.P.Jones¹³⁾ と Vepa³⁾ の結果があるので、同図に併せて示した。Vepa のものは調和振動空気を揚力面数値解法の一つである Laschka の核関数法によって求め、それに有理関数近似の一種である Padé 近似を施した後 Laplace 逆変換をして求めたものである。

図 7 に示したのは、楕円翼のアスペクト比が 3, 4 及び 6 に対するものである。同図には、Vepa による結果と同時に R.T.Jones の結果¹⁴⁾を示した。

変形循環を決定する方程式 (69) 式が $s \rightarrow 0$ のとき定常の揚力線の方程式に帰着することから、図に

示した漸近線は定常揚力線理論に於ける揚力傾斜と一致する筈である。実際、楕円翼の場合、本方法による定常値は (102b) 式から

$$\left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{ss} = 2 l_{ss}^w = 8 (1 + \sigma_{h_0}) \quad (107)$$

と計算されるが、この計算値と揚力線理論による式

$$C_{L\alpha} = \frac{2\pi}{1 + 2/AR} \quad (108)$$

から計算される値をアスペクト比 (AR) = 3, 4, 6 について比較すると、次表のようになり、よく一致することが示される。

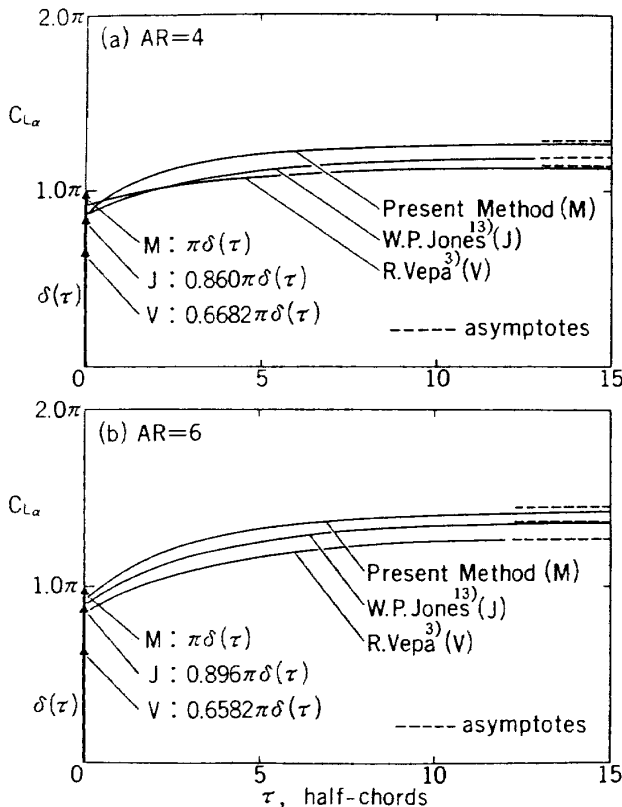


図 6 沈下運動によるインディシャル揚力, 矩形翼

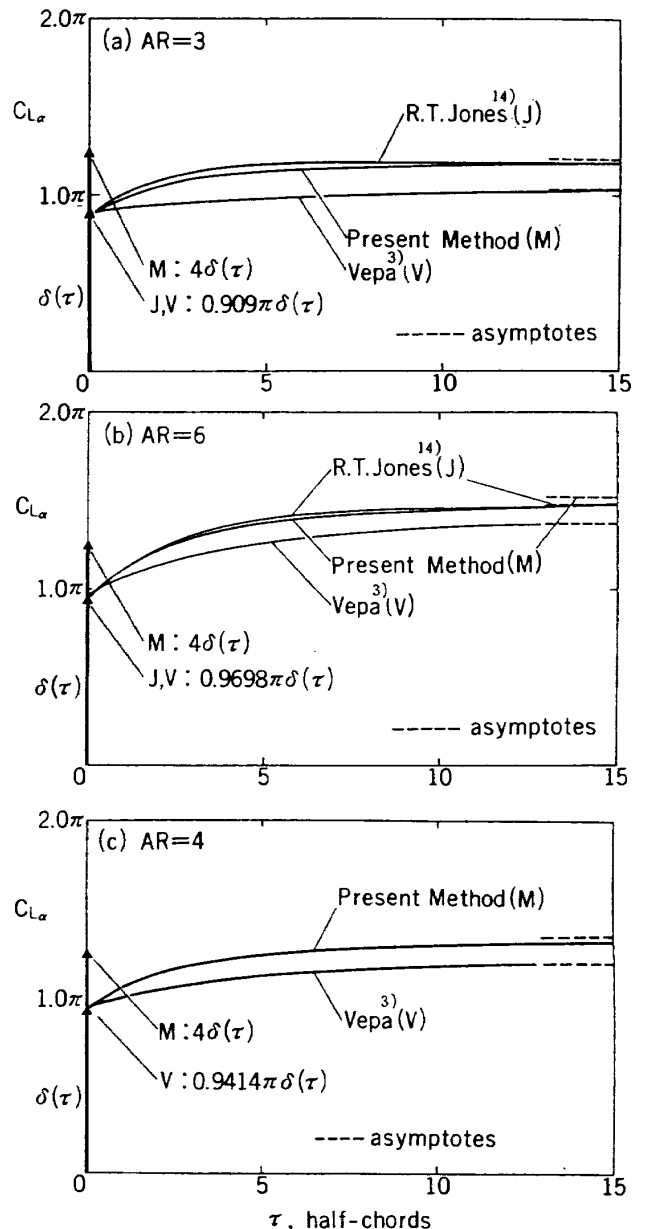


図 7 沈下運動によるインディシャル揚力, 楕円翼

AR	本方法	定常揚力線理論
3	1.212π	1.2π
4	1.349π	1.333π
6	1.523π	1.5π

直線テーパ翼の場合，Anderson はアスペクト比とテーパ比に依存するパラメタ f を用いて，揚力傾斜を

$$C_{L\alpha} = f \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi AR}} \quad (109)$$

と表わし，揚力線理論によって求めた f の図を示している。¹⁸⁾ただし， a_0 は翼型の平均的な揚力傾斜である。そこで，矩形翼の場合として，その図でテーパ比1のグラフから読み取った f を用いて， $a_0 = 2\pi$ として(109)式によって計算した値と，本方法による定常値とを比較すると次表の通りとなる。この場合も両者の一致はよく，本方法による数値計算が精度よく行なわれたことを示している。

AR	本方法	Anderson
3	1.159π	1.199π
4	1.286π	1.328π
6	1.449π	1.482π

図8は以上の結果をまとめて，翼面形状とアスペクト比の効果を示したものである。

振動揚力

インディシャル空気力が非定常空気力の特性を代表的に表わすものであるから，元のインディシャル揚力の比較で本方法の特徴が尽きている訳だが，W.P.Jones が減衰および発散振動をする矩形翼に働く

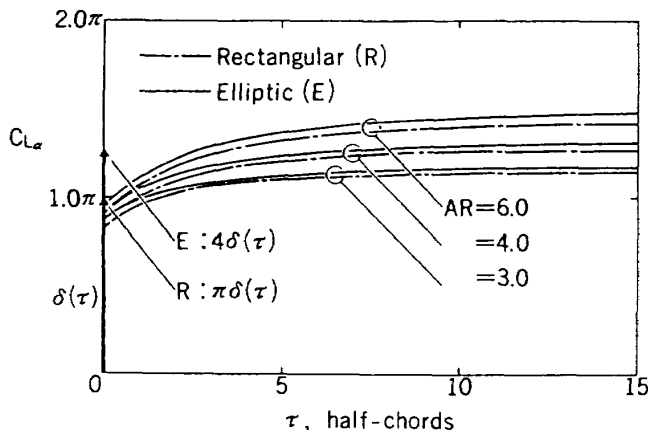


図8 沈下運動によるインディシャル揚力，翼面形状とアスペクト比の影響

揚力（振動揚力）を求めているので，この場合について本方法との比較を示そう。これは留数を計算すべき $\tilde{q}_j(y^*, s)$ の特異点が虚軸にある場合である。

W.P.Jones はインディシャル揚力を指数関数で近似し，それを用いて畳み込み積分を計算して振動揚力の揚力傾斜を求めた。¹³⁾その概略は次の通りである。

迎角が $\tau = 0$ で単位量変化したときの揚力すなわちインディシャル揚力関数 $k_1(\tau)$ を用いれば，畳み込みの原理によって迎角が $\alpha(\tau)$ と変化する翼に働く揚力 $C_L(\tau)$ は

$$\begin{aligned} C_L(\tau) &= \alpha(0)k_1(\tau) + \int_0^\tau k_1(\tau - \tau_1) \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_1} d\tau_1 \\ &= \alpha(0)k_1(\tau) + \int_0^\tau k_1(\tau') \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau_1} \right)_{\tau_1 = \tau - \tau'} d\tau' \end{aligned} \quad (110)$$

と表わせる。従って迎角の変化を複素表示で

$$\alpha(\tau) = \alpha_0 e^{\bar{s}_0 \tau}, \quad \bar{s}_0 = \sigma_0 + ik_0 \quad (111)$$

としたときの揚力係数は

$$C_L(\tau) = \alpha_0 k_1(\tau) + \bar{s}_0 \alpha_0 e^{\bar{s}_0 \tau} \int_0^\tau k_1(\tau') e^{-\bar{s}_0 \tau'} d\tau' \quad (112)$$

となる。

W.P.Jones はアスペクト比6の矩形翼のインディシャル揚力関数に対する近似式を

$$k_1(\tau) = \pi (1.370 - 0.475 e^{-0.28\tau}) \quad (113)$$

と与えており，この式を(112)式に代入すれば，揚力係数が

$$\begin{aligned} C_L(\tau) &= \pi \alpha_0 e^{\bar{s}_0 \tau} \left[1.370 - \frac{0.475}{\lambda' + 0.28} (\bar{s}_0 \right. \\ &\quad \left. + 0.28 e^{-(\bar{s}_0 + 0.28)\tau}) \right] \end{aligned} \quad (114)$$

と求まる。Jones は揚力傾斜 $C_{L\alpha}(\tau)$ を導入して揚力係数を迎角と揚力傾斜とで

$$C_L(\tau) = C_{L\alpha}(\tau) \alpha(\tau) \quad (115)$$

と表わした。(114)式によれば， $\alpha_0 e^{\bar{s}_0 \tau}$ がこの場合の $\alpha(\tau)$ であるから，

$$\begin{aligned} C_{L\alpha}(\tau) &= \pi \left[1.370 - \frac{0.475}{\lambda' + 0.28} (\bar{s}_0 \right. \\ &\quad \left. + 0.28 e^{-(\bar{s}_0 + 0.28)\tau}) \right] \end{aligned} \quad (116)$$

となる。Jones は $\sigma_0 = -0.05, 0, 0.05, k_0 = 0,$

0.2, 0.5 の場合について (116) 式から $C_{L\alpha}$ を求めて表に示している。

さて、この Jones の結果と本方法の結果を比較するに当たって迎角の変化として実数表現の次の 2 種類を考えることにする。即ち $\alpha(\tau) = \alpha_0 e^{i\sigma_0 \tau} \cos k_0 \tau$ (即ち (111) 式で与えた複素表現の α の実部 α^R) と $\alpha(\tau) = \alpha_0 e^{i\sigma_0 \tau} \sin k_0 \tau$ (同じく虚部 α^I) である。

迎角と揚力係数とは、線形で実数係数の関係式 (110) で関係付けられているのだから、(111) 式の実部、虚部に対応する揚力係数は (112) あるいは (114) 式で与えられた C_L のそれぞれ実部、虚部となる。従って W.P.Jones が示した $C_{L\alpha}(\tau)$ の表からそれらを求めるには、 $\alpha = \alpha^R + i\alpha^I$, $C_{L\alpha} = C_{L\alpha}^R + iC_{L\alpha}^I$ を (116) 式に代入してその実部、虚部を計算すればよい。 $\alpha(\tau) = \alpha_0 e^{i\sigma_0 \tau} \cos k_0 \tau$ による揚力係数

を C_{Lc} , $\alpha(\tau) = \alpha_0 e^{i\sigma_0 \tau} \sin k_0 \tau$ による揚力係数を C_{Ls} とすれば、以上から、

$$C_{Lc} = C_{L\alpha}^R \alpha^R - C_{L\alpha}^I \alpha^I = \alpha_0 e^{i\sigma_0 \tau} (C_{L\alpha}^R \cos k_0 \tau - C_{L\alpha}^I \sin k_0 \tau) \quad (117a)$$

$$C_{Ls} = C_{L\alpha}^R \alpha^I + C_{L\alpha}^I \alpha^R = \alpha_0 e^{i\sigma_0 \tau} (C_{L\alpha}^R \sin k_0 \tau + C_{L\alpha}^I \cos k_0 \tau) \quad (117b)$$

さて、上記の迎角変化を上下振動に対応させれば、

$$(a) \frac{1}{U} \frac{dw}{dt} = \dot{w}_R^* = -\alpha_0 H(\tau) e^{i\sigma_0 \tau} \sin k_0 \tau, \quad (b) \dot{w}_R^* =$$

$-\alpha_0 H(\tau) e^{i\sigma_0 \tau} \cos k_0 \tau$ (ただし、運動が $\tau = 0$ より始まることを明示するためにステップ関数 $H(\tau)$ を用いた。) となるが、これらの場合について本方法による揚力の翼幅方向分布は (111), (112) 式から次のようになる。

(a) $\dot{w}_R^* = -\alpha_0 H(\tau) e^{i\sigma_0 \tau} \sin k_0 \tau$ の場合

$$l_{NC}^w(\tau) = \frac{\pi}{2} \alpha_0 H(\tau) e^{i\sigma_0 \tau} (\sigma_0 \sin k_0 \tau + k_0 \cos k_0 \tau) \quad (118a)$$

$$l_{QS}^w(y^*, \tau) = \pi \alpha_0 H(\tau) (1 + \sigma_{h_0}(y^*)) e^{i\sigma_0 \tau} \sin k_0 \tau \quad (118b)$$

$$l_{w1}^w(y^*, \tau) = -\pi \alpha_0 e^{i\sigma_0 \tau} \{ (1 + \sigma_{h_0}(y^*)) - F_3(y^*) \} \sin k_0 \tau - G_3(y^*) \cos k_0 \tau \quad (118c)$$

$$\text{ただし } [C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_h(y^*, s)]_{\bar{s}=\sigma_0 + ik} = F_3(y^*) + iG_3(y^*)$$

$$l_{w2}^w(y^*, \tau) = \pi \alpha_0 \int_0^\infty \frac{1}{[\{K_0(\bar{r}) - K_1(\bar{r})\}^2 + \pi^2 \{I_0(\bar{r}) + I_1(\bar{r})\}^2]} \cdot \bar{r} \frac{k_0 e^{-\bar{r}\tau} d\bar{r}}{[(-\bar{r} - \sigma_0)^2 + k_0^2]} \quad (118d)$$

$$l_{w3}^w(y^*, \tau) = -\frac{i}{2} \alpha_0 \int_0^\infty [\tilde{\sigma}_h(\bar{r} e^{-i\pi}) - \tilde{\sigma}_h(\bar{r} e^{i\pi})] \frac{k_0 e^{-\bar{r}\tau} d\bar{r}}{(-\bar{r} - \sigma_0)^2 + k_0^2} \quad (118e)$$

(b) $\dot{w}_R^* = -\alpha_0 H(\tau) e^{i\sigma_0 \tau} \cos k_0 \tau$ の場合

$$l_{NC}^w(\tau) = \frac{\pi}{2} \alpha_0 \{ \delta(\tau) + H(\tau) e^{i\sigma_0 \tau} (\sigma_0 \cos k_0 \tau - k_0 \sin k_0 \tau) \} \quad (119a)$$

$$l_{QS}^w(y^*, \tau) = \pi \alpha_0 H(\tau) (1 + \sigma_{h_0}(y^*)) e^{i\sigma_0 \tau} \cos k_0 \tau \quad (119b)$$

$$l_{w1}^w(y^*, \tau) = -\pi \alpha_0 e^{i\sigma_0 \tau} \{ [(1 + \sigma_{h_0}(y^*)) - F_3(y^*)] \cos k_0 \tau + G_3(y^*) \sin k_0 \tau \} \quad (119c)$$

$$l_{w2}^w(y^*, \tau) = \pi \alpha_0 \int_0^\infty \frac{1}{[\{K_0(\bar{r}) - K_1(\bar{r})\}^2 + \pi^2 \{I_0(\bar{r}) + I_1(\bar{r})\}^2]} \bar{r} \frac{(-\bar{r} - \sigma_0) e^{-\bar{r}\tau} d\bar{r}}{[(-\bar{r} - \sigma_0)^2 + k_0^2]} \quad (119d)$$

$$l_{w3}^w(y^*, \tau) = -\frac{i}{2} \alpha_0 \int_0^\infty [\tilde{\sigma}_h(\bar{r} e^{-i\pi}) - \tilde{\sigma}_h(\bar{r} e^{i\pi})] \frac{(-\bar{r} - \sigma_0) e^{-\bar{r}\tau} d\bar{r}}{(-\bar{r} - \sigma_0)^2 + k_0^2} \quad (119e)$$

翼全体に働く揚力はこれらを翼幅に亘って積分して得られる。

図 9 には減衰振動 ($\sigma_0 < 0$), 調和振動 ($\sigma_0 = 0$)

および発散振動 ($\sigma_0 > 0$) の 3 つの場合について W.P.Jones の結果と本方法による結果とを比較して示した。ただし、W.P.Jones の揚力 $C_{L\alpha}^R$, $C_{L\alpha}^I$ が循環

流のみによるものなので、同図に示したものはともにその成分だけである。先のインディシャル応答に於いて、矩形翼の場合に本方法による値の方がW.P.Jonesの値より高めに出ていたことに対応して、同図では本方法の結果の方がW.P.Jonesのものより

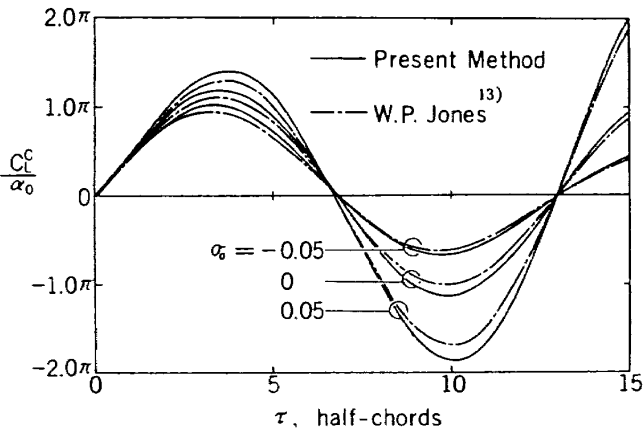


図9 上下振動による過渡循環揚力, 矩形翼, $AR = 6.0$

$$\dot{w}_R / b_0 = -\alpha_0 H(\tau) e^{0.5\tau} \sin 0.5\tau$$

($H(\tau)$: ステップ関数)

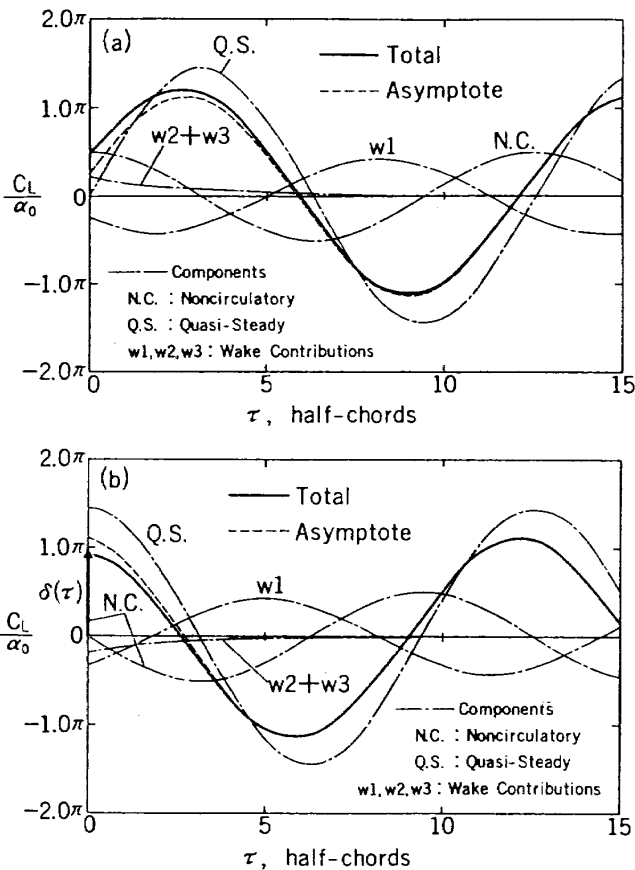


図10 上下振動による過渡揚力, 矩形翼, $AR = 6.0$

(a) $\dot{w}_R / b_0 = -\alpha_0 H(\tau) \sin 0.5\tau$,
 (b) $\dot{w}_R / b_0 = -\alpha_0 H(\tau) \cos 0.5\tau$

大きな振幅を示している。

図10(a), (b)には本方法で求めた全揚力(非循環流による部分も含めたもの)を, (a) $\dot{w}_R^* = -\alpha_0 H(\tau) \sin 0.5\tau$, (b) $\dot{w}_R^* = -\alpha_0 H(\tau) \cos 0.5\tau$ について示した。両図とも、初期の過渡期間を過ぎて揚力の波形が正弦曲線(破線)に漸近してゆく様子をよく表わしている。

5. 実験値との対応

以上本論文では、Laplace変換によって任意運動をする翼に生ずる空気力を取り扱って来た。その際、調和振動におけるReissnerの揚力線型の近似仮定を採用した。さらに基本的な仮定として流れは非粘性とした。本章では最後にこうした仮定に立つ本理論が実験値との間でどの程度の対応を示すかを論じよう。

ここで取り上げるのは、翼全体が縦揺れ減衰振動する場合に生ずる縦揺れモーメントと、補助翼を駆動したときに生ずる揚力等である。前者によって、揚力線型の近似仮定の適用性が検定され、後者では粘性の影響が明らかになるであろう(揚力線型の近似仮定の有効性を検定する他の方法として、揚力面理論と比較することが考えられる。調和振動の場合にはそれが可能であって本章にも一部比較計算例があるが、付録Dに矩形翼が代表的な振動状態にある場合についての計算結果を示した。結果は取り上げた例については両者間に有意な差がないことを示している。なお調和振動の場合には本方法はReissnerの理論に帰着する)。

5.1 縦揺れモーメントに関する実験値と本計算値との比較

ここでは矩形翼の縦揺れ振動時に働く縦揺れモーメントについて、実験値と本方法による計算値とを比較して相互の関係を論じよう。

AGARD manual 中のAcumの報告¹⁹⁾にもあるように、過去に調和振動実験の数は多いが、減衰振動実験は少ない。その中でBrattによる矩形翼の縦揺れ減衰振動実験がある²⁰⁾。ここではこのBrattの実験値を採用する。

比較に先だてて縦揺れ減衰振動時の縦揺れモー

ントに対する本方法による計算値を求めておこう。
前章 4.1 節で述べたように、縦揺れモーメントも揚
力と全く同様に Laplace 逆変換によって求めること

ができる。誘導の詳細は省略して、振り振動による
縦揺れモーメント（翼幅方向分布）の表示式を示せ
ば次のようになる。

$$m_y^\theta(y^*, \tau) \triangleq \frac{M_y^\theta(y^*, \tau)}{2\rho U^2 b^2} = m_{y_{NC}}^\theta(y^*, \tau) + m_{y_{QS}}^\theta(y^*, \tau) + m_{y_{w1}}^\theta(y^*, \tau) + m_{y_{w2}}^\theta(y^*, \tau) + m_{y_{w3}}^\theta(y^*, \tau) \quad (120)$$

ここで

$$m_{y_{NC}}^\theta(y^*, \tau) = f_{M_\theta}^{(2)}\left(\frac{d}{d\tau}\right) q_j^*(y^*, \tau) \quad (121a)$$

$$m_{y_{QS}}^\theta(y^*, \tau) = [1 + \tilde{\sigma}_{\theta_0}(y^*)] f_{M_\theta}^{(1)}\left(\frac{d}{d\tau}\right) q_j^*(y^*, \tau) \quad (121b)$$

$$m_{y_{w1}}^\theta(y^*, \tau) = - \sum_n \operatorname{Res} \{ [\phi(\bar{s}) + d\tilde{\sigma}_\theta(s)] f_{M_\theta}^{(1)}(\bar{s}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, s) e^{\bar{s}_0\tau} \}_{s=s_n} \quad (121c)$$

$$m_{y_{w2}}^\theta(y^*, \tau) = \int_0^\infty \frac{1}{[(K_0 - K_1)^2 + \pi^2(I_0 + I_1)^2]}_{\bar{s}=\bar{r}} f_{M_\theta}^{(1)}(-\bar{r}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, -\tau) e^{-\bar{r}_0\tau} d\tau \quad (121d)$$

$$m_{y_{w3}}^\theta(y^*, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [\tilde{\sigma}_\theta(re^{-i\pi}) - \tilde{\sigma}_\theta(re^{i\pi})] f_{M_\theta}^{(1)}(-\bar{r}_0) \tilde{q}_j^*(y^*, -\tau) e^{-\bar{r}_0\tau} d\tau \quad (121e)$$

さらに関数 $f_{M_\theta}^{(2)}(\bar{s}_0)$, $f_{M_\theta}^{(1)}(\bar{s}_0)$ は

$$f_{M_\theta}^{(2)}(\bar{s}_0) = -\pi \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \bar{s}_0^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{b}{b_0} \right) \bar{s}_0 \right\} \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 f_\theta(y^*) \quad (122a)$$

$$f_{M_\theta}^{(1)}(\bar{s}_0) = \pi \left(a + \frac{1}{2} \right) \left[\left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{b}{b_0} \bar{s}_0 + 1 \right] \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 f_\theta(y^*) \quad (122b)$$

である。

特に矩形翼の縦揺れ振動の場合には一般座標 q_j^*
(y^*, τ)、モード形 $f_\theta(y^*)$ および半弦長 b は

$$\left. \begin{aligned} q_j^*(y^*, \tau) &= \theta(\tau) = \theta_0 H(\tau) e^{\sigma_0\tau} \sin k_0\tau \\ &\quad ; H(\tau) \text{ はステップ関数} \\ f_\theta(y^*) &= 1 \\ b &= b_0 \end{aligned} \right\} (123)$$

とすればよい。

実験値との比較を行なうに当たっては上の (121)
各式中で振動初期に急速に減衰する部分である
(121d) および (121e) を除いた部分を計算値とする
のが妥当である。このとき、その「定常」部分は
(121a) ~ (121c) に (123) を考慮して次のように表
わせる。

$$m_s^\theta = \theta_0 e^{\sigma_0\tau} [C_{m_\theta}^R \sin k_0\tau + C_{m_\theta}^I \cos k_0\tau] \quad (124)$$

ここで

$$\begin{aligned} C_{m_\theta}^R &= -\frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{1}{8} + a^2 \right) (\sigma_0^2 - k_0^2) + \left(\frac{1}{2} - a \right) \sigma_0 \right] \\ &\quad + \pi \left(a + \frac{1}{2} \right) \left[F_3 \left\{ \left(\frac{1}{2} - a \right) \sigma_0 + 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. - G_3 \left(\frac{1}{2} - a \right) k_0 \right] \end{aligned} \quad (125a)$$

$$\begin{aligned} C_{m_\theta}^I &= -\frac{\pi}{2} \left[2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \sigma_0 k_0 + \left(\frac{1}{2} - a \right) k_0 \right] \\ &\quad + \pi \left(a + \frac{1}{2} \right) \left[F_3 \left(\frac{1}{2} - a \right) k_0 \right. \\ &\quad \left. + G_3 \left\{ \left(\frac{1}{2} - a \right) \sigma_0 + 1 \right\} \right] \end{aligned} \quad (125b)$$

さらに

$$F_3 + iG_3 \triangleq [C(\bar{s}) + \tilde{\sigma}_\theta(y^*, s)]_{\bar{s}=\sigma+ik} \quad (126)$$

さて Bratt の実験の供試模型はアスペクト比 4.44
の矩形翼であって、中心軸回わり ($a=0$) に縦揺

れ振動させている。レイノルズ数は 1.42×10^5 と 2.83×10^5 の2種類行なっているが、前者の実験値にはばらつきが大きいのでここでは 2.83×10^5 のものを用いる。

図 11 に示したのが、この実験値と (124), (125) 式による計算値の比較である。同図の実験値としては減衰振動実験によるものに加えて、Bratt 自身の定常(調和)振動実験^{21), 22)}による値を併せて図示した。減衰振動実験におけるダンピングは σ_0 は -0.0067 から -0.0245 までに亘っているが、実験値には、減衰振動実験値相互間にも、また調和振動実験値との間にもダンピングの有意な効果は認められない。一方、計算値は $\sigma_0 = 0$ (調和振動) の場合を太い実線で、 $\sigma_0 = -0.025$ (実験値の最大のダンピングに近い減衰振動) の場合を太い破線で示した

が、その差異は微細である。なお細い1点鎖線は Watkins 等の揚力面理論による計算法(核関数法)²³⁾を航技研の柳沢、菊地両氏が電算機プログラムに作成したものによる計算値である。

本方法による計算値と実験値とを比較するに、縦揺れモーメントの実部は実験値が計算値の8~14%大き目に、虚部は-3~26%大き目にでている。揚力面理論による計算値はここで取り上げた場合に関しては、実験値との差が本方法の場合より大きいようである。

Acum は低速での矩形翼の調和振動空気力の項で、実験値と理論値の対応があまりよくないと報告している。また、調和振動実験と減衰振動実験との関係については序論で、減衰振動実験から得られる空気力を(調和振動実験から得られる空気力と同一に)用いても多分大きな誤差はなからうかと言っている。¹⁹⁾ Bratt 自身も、両者の実験から得られた空気力の中に差異がないとしている。²⁰⁾ これらを総合して図 11 を見るに、本計算値と実験値との合致はかなり良好であると言える。

5.2 補助翼駆動による非定常空気力の測定実験

フラッター制御を補助翼を用いて行なう場合、制御装置設計に当たって補助翼操舵に伴う空気力の見積りも重要である。そこで、補助翼操舵による空気力についても本方法による計算値と実験値との対応を考察しよう。ところで、2次元翼の場合には動翼駆動による非定常空気力の実験は過去に多くの報告があるが、¹⁹⁾ 3次元翼を対象にした実験の報告は比較的少なく、²⁴⁾ その中でここでの比較の用をなす例は見当たらない。そこで新たに実験を計画して実施した。

供試模型は実効アスペクト比6の矩形翼で、翼端寄りに母翼の半翼幅で1/4翼弦長の後縁補助翼を有する。この補助翼を駆動したときに翼全体に生ずる非定常空気力を測定し、実験後データ処理によって、揚力、縦揺れモーメント、横揺れモーメントを求めた。測定実験の詳細は、別途報告する。ここでは補助翼を正弦波状に駆動した実験によって得た空気力の周波数応答を用いる。

供試模型は矩形翼で、図 12 に平面形を示す。母翼境界層の厚さの中で補助翼が動いて、「小舵の遊

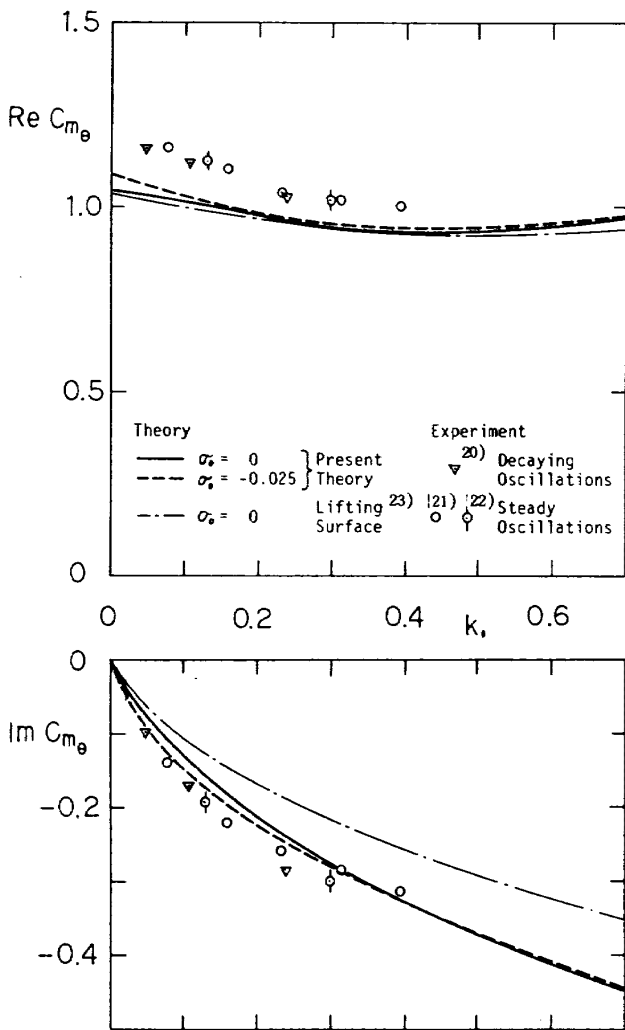


図 11 縦揺れ振動による縦揺れモーメントの実験値と本計算値との比較, 矩形翼, $AR = 4.44$, 実験 $R_e = 2.83 \times 10^5$

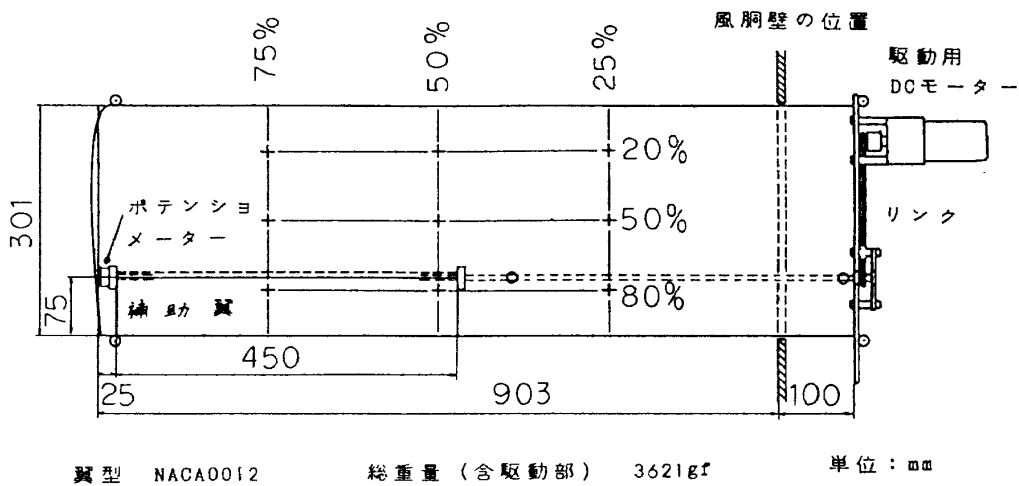


図 12 供試模型の平面図

び」が生ずるといった影響を少なくするため、補助翼断面形を母翼翼型NACA0012よりわずかに翼厚を増して、文献 25) に示されている膨らみをもたせてある。

実験結果は図 13 に示すとおりである。図は補助翼舵角に対する揚力、縦揺れモーメント、横揺れモーメントのゲインと位相を示したものである。図中○印、□印等が実験値を示す。

各図には実験値とともに、第 3 章で導いた空気力学伝達関数 (76) 式から計算される計算値を実線で示した。実験値と比較して次の点が考察される。

各係数ともゲインにおいて実験値は 2~3 割理論値を下回り、位相では理論値より遅れが大きい。2次元翼で行なわれた最近の実験に関しても同様の傾向が報告されている。^{26),27),28)} この相違の主たる原因は、理論では非粘性を仮定しているのに対して、補助翼は母翼の境界層に浸されているので、粘性の影響を無視し得ない点にあると思われる。^{26),28)} 本実験で補助翼断面にもたせた膨らみは実験値のゲインを増す方向に作用している筈だが、その効果の見積りは粘性境界層を含めた理論²⁹⁾、あるいは数値計算法の今後の発展に俟たなければならない。

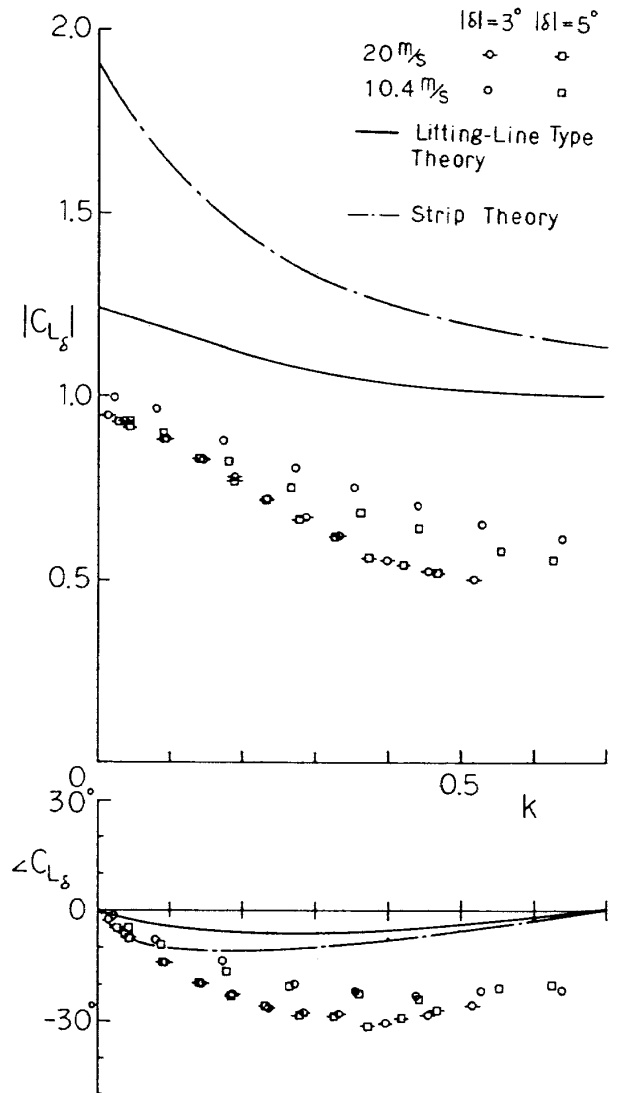


図 13 補助翼駆動による非定常空気力の周波数応答
(a) 揚力

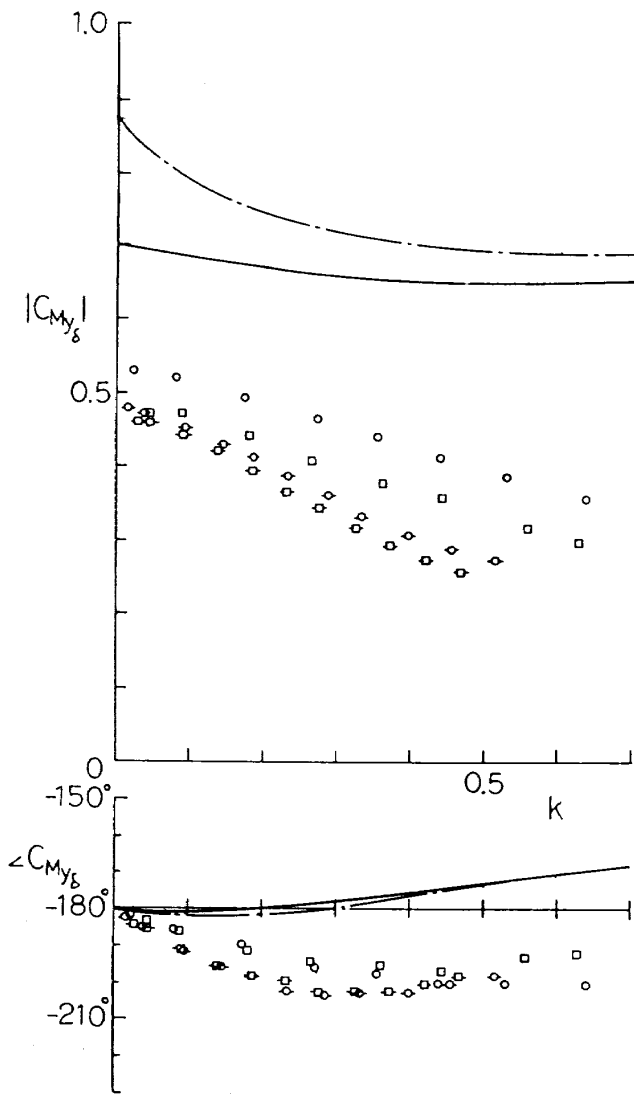


図 13 (b) 縦揺れモーメント

6. 結 論

本論文では非圧縮流中の有限翼に対する空気力学伝達関数を出来るだけ解析的に、従って効率的に求める方法を示した。得られた結論は以下の通りである。

(1) 非圧縮流中の2次元翼が静止状態から突然微小運動を開始する場合に働く非定常空気力(過渡空気力)をLaplace変換領域(複素領域)で求めた。空気力は翼の運動を表わす一般座標のLaplace変換と空気力学伝達関数との積で表わされ、伝達関数は循環流による部分を表わす一般Theodorsen関数と非循環流による部分を表わす整関数とで解析的に与えられた。この結果は従来循環流に関して部分的に示されていた調和振動空気力理論の過渡空気力への

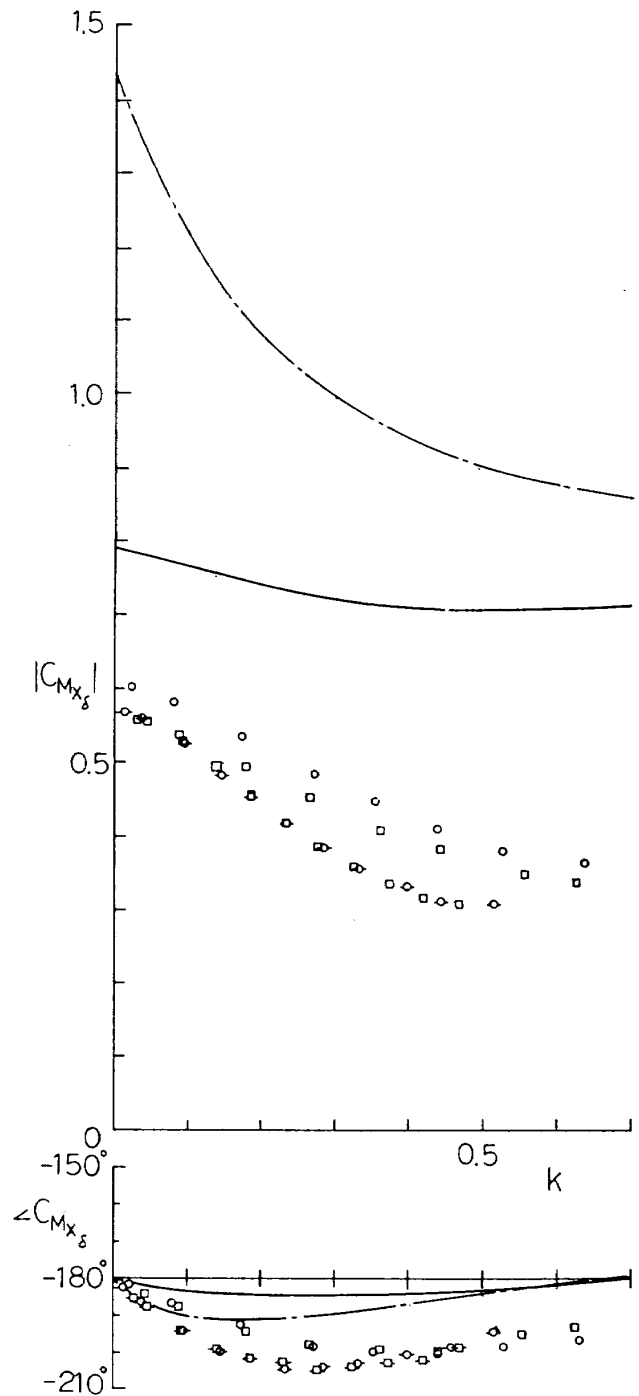


図 13 (c) 横揺れモーメント

拡張を非循環流による空気力をも含めた全空気力に対して統一的に示すものである。

(2) 非圧縮流中の有限翼に対する過渡空気力をReissnerが調和振動理論で用いたのと同様の揚力線型の近似仮定を設けることによって、Laplace変換領域で求めた。空気力は2次元翼の場合と同様に、一般座標のLaplace変換と空気力学伝達関数の積の形で得られ、この場合の伝達関数は、「変形循環」

と名付けた有限翼の効果を示す関数を含む変換のパラメタの非有理関数の項と、その整関数の項との和の形をとることが示された。伝達関数の計算は専らこの「変形循環」を支配する微積分方程式を数値的に解くことに帰着され、効率的な計算が可能となった。この結果は Reissner の調和振動理論が過渡空気力に拡張されたことを示している。なお「変形循環」を与える微積分方程式を数値的に解く電算機プログラムを開発した。

(3) (2)の結果を Laplace 逆変換して過渡空気力の時間領域での表現式を得た。代表的な平面形を有する翼に対してインディシャル揚力等を計算した結果は、過去に他の方法によって得られている結果とよく一致した。

(4) 矩形翼の縦揺れ振動による縦揺れモーメントについての実験値と本方法による計算値との合致はかなり良好であった。補助翼駆動による非定常空気力の測定実験結果との比較では、舵角に対する各種空気力、モーメントは、ゲインにおいて実験値が本理論値を 2~3 割下回り、位相では理論値より実験値の方が位相遅れが大きいことが判明した。

おわりに、本論文は昭和 57 年に東京大学に学位論文として提出したもの³⁸⁾の一部をなすものである。同学名誉教授中口 博先生からは論文をまとめるに当たって終始親身の御指導を受けた。ここに衷心より感謝する。当所・市川輝雄博士は私をこの興味ある問題に誘われ、研究過程の節目節目に適切な助言を寄せられた。また東京大学東 昭教授は本論文に興味を示され、私を励まされ、論文を完成に導かれた。お二方に感謝の意を表したい。さらに、学位論文の審査に当たられた東京大学小林繁夫教授、砂川 恵教授、谷田好通教授、加藤寛一郎教授には貴重な御指摘をいただき研究を深めることができた。謝意を表する。

当所所長・武田峻博士、同じく新型航空機研究グループ総合研究官(現在千葉大学教授)犬丸矩夫博士が与えられた激励と便宜とをなくしてはこの研究はなし得なかった。深く感謝したい。

参 考 文 献

- 1) Fung, Y.C., *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, Dover Publications, Inc., New York, 1969.
- 2) Etkin, B., *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972.
- 3) Vepa, R., "Finite State Modeling of Aeroelastic Systems," Doctoral Dissertation, Dept. of Applied Mechanics, Stanford University, June 1975, also as NASA CR-2779, Feb. 1977.
- 4) Edwards, J.W., "Unsteady Aerodynamic Modeling and Active Aeroelastic Control," Doctoral Dissertation, Dept. of Aero. and Astro., Stanford University, SUDAAR No. 504, Feb. 1977, (N78-10017, also as NASA CR 148019.)
- 5) Reissner, E., "Effect of Finite Span on the Airload Distributions for Oscillating Wings, I - Aerodynamic Theory of Oscillating Wings of Finite Span," NACA TN 1194, 1947.
- 6) Bisplinghoff, R.L., Ashley, H., and Halfman, R.L., *Aeroelasticity*, Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge, Mass., 1955.
- 7) Zadeh, L.A. and Desoer, C.A., *Linear System Theory: The State Space Approach*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1963.
- 8) Papoulis, A., *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1962.
- 9) 近藤次郎:「積分方程式とその応用」, コロナ社, 昭和 34 年(1959).
- 10) Jones, W.P., "The Generalized Theodorsen Function," *J. Aero. Sci.*, Vol. 19, March 1952, p. 213.
- 11) Sears, W.R., "Operational Methods in the Theory of Airfoils in Non-Uniform Motion," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 230, July 1940, pp. 95-111.
- 12) Theodorsen, T. and Garrick, I.E., "Non-stationary Flow about a Wing-Aileron-Tab

- Combination Including Aerodynamic Balance," NACA Rept. No. 736, 1942.
- 13) Jones, W.P., "Aerodynamic Forces on Wings in Non-Uniform Motion," ARC R & M No. 2117, Aug. 1945.
 - 14) Jones, R.T., "The Unsteady Lift of a Wing of Finite Aspect Ratio," NACA Rept. No. 681, 1940.
 - 15) Drischler, J.A., "Approximate Indicial Lift Functions for Several Wings of Finite Span in Incompressible Flow as Obtained from Oscillatory Lift Coefficients," NACA TN 3639, 1956.
 - 16) Hildebrand, F.B., *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall of Japan, Inc., Tokyo, 1962.
 - 17) Schwartz, L., 「物理数学の方法」, 吉田耕作, 渡辺二郎訳, 岩波書店, 1966.
 - 18) Anderson, R.F., "Determination of the Characteristics of Tapered Wings," NACA Rept. No. 572, 1936.
 - 19) Acum, W.E.A., "The Comparison of Theory and Experiment for Oscillating Wings," Vol. II, Chapter 10, *AGARD Manual on Aeroelasticity*, 1959.
 - 20) Bratt, J.B., Wight, K.C., and Chinneck, A., "Free Oscillations of an Aerofoil about the Half-Chord Axis at High Incidences, and Pitching Moment Derivatives for Decaying Oscillations," ARC R & M No. 2214, Sept. 1940.
 - 21) Bratt, J.B. and Wight, K.C., "The Effect of Mean Incidence, Amplitude of Oscillation, Profile and Aspect Ratio on Pitching Moment Derivatives," ARC R & M No. 2064, June 1945.
 - 22) Bratt, J.B. and Scruton, C., "Measurements of Pitching Moment Derivatives for an Aerofoil Oscillating about the Half-Chord Axis," ARC R & M No. 1921, Nov. 1938.
 - 23) Watkins, C.E., Woolston, D.S., and Cunningham, H.J., "A Systematic Kernel Function Procedure for Determining Aerodynamic Forces on Oscillating or Steady Finite Wings at Subsonic Speeds," NASA TR R-48, 1959.
 - 24) Many authors, "Aerodynamic Characteristics of Controls," AGARD CP-262, May 1979.
 - 25) 山名正夫, 中口 博: 「飛行機設計論」養賢堂, 1968, p175.
 - 26) Stark, V.J.E., "Measurement of Derivatives for an Oscillating Airfoil with Flap," *Journal of Aircraft*, Vol. 18, May 1981, pp. 403-407.
 - 27) Long, G. and Farrell, P.A., "The Effect of Trailing-Edge Strips on the Unsteady Aerodynamic Forces on a Control Surface," *The Aeronautical Journal*, Vol. 84, Nov. 1980, pp. 388-391.
 - 28) Grenon, R., Desopper, A., and Sides, J., "Effets Instantanés d'une Gouverne en Écoulement Bidimensionnel Subsonique et Transsonique, (Unsteady Effects of a Control Surface in Two-Dimensional, Subsonic and Transonic Flow.)," AGARD CP-262, May 1979.
 - 29) Yates, J.E., "Unsteady Viscous Thin Airfoil Theory," AGARD R-671, Sept. 1978.
 - 30) Edwards, J.W., "Unsteady Aerodynamic Modeling for Arbitrary Motions," *AIAA Journal*, Vol. 15, April 1977, pp. 593-595.
 - 31) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松 信: 「数学公式Ⅲ」岩波書店, 1959.
 - 32) Abramowitz, M. and Stegun, I.A., ed., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, U.S. Department of Commerce, 9th printing, Nov. 1970.
 - 33) Van de Vooren, A.I., "Generalization of the Theodorsen Function to Stable Oscillations," *J. Aero. Sci.*, Vol. 19, March 1952, pp. 209-211.
 - 34) Laitone, E.V., "Theodorsen's Circulation Function for Generalized Motion," *J.*

- Aero. Sci.*, Vol. 19, March 1952, pp. 211-213.
- 35) Dengler, M.A., Goland, M., and Luke, Y.L., "Notes on the Calculation of the Response of Stable Aerodynamic Systems," *J. Aero. Sci.*, Vol. 19, March 1952, pp. 213-214.
- 36) Chang, C. -C., "On Theodorsen Function in Incompressible Flow and C-Function in Supersonic Flow," *J. Aero. Sci.*, Vol. 19, Oct. 1952, pp. 717-718.
- 37) Edwards, J.W., Ashley, H., and Breakwell, J.V., "Unsteady Aerodynamic Modeling for Arbitrary Motions," AIAA Paper No. 77-451, *AIAA Dynamics Specialist Conference*, Mar. 1977, also in *AIAA Journal*, Vol. 17, April 1979, pp. 365-374.
- 38) 松下 洸: 「空気力学伝達関数とそのフラッター制御への応用に関する研究」, 東京大学学位論文, 1982.

付録A 一般 Theodorsen 関数

一様流速の非圧縮流中で微小運動をする2次元平板翼に働く非定常空気力を考える。微小擾乱理論によれば擾乱速度ポテンシャルは、翼面上の吹き下ろしによって表わされる境界条件下での Laplace 方程式の解として与えられるが、Theodorsen は解を2つに分けて、湧出し、吸い込み分布によるもの(非循環流による解)と渦度の分布によるもの(循環流による解)から構成した。そして両者の分布を決定する条件として後縁での Kutta の条件を適用した。解の構成に翼弦長 $2b$ なる平板翼を半径 $b/2$ の円に移す Joukowski の等角写像を用いると、写像円の後縁での非循環流による接線方向速度成分は

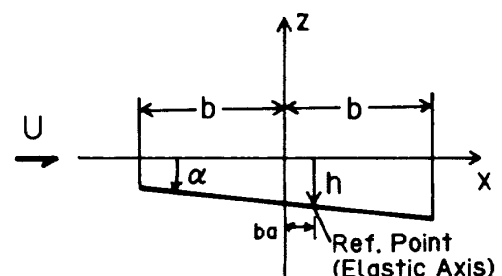
$$q_{\theta}^I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{w_a(\varphi, t) \sin^2 \varphi}{\cos \varphi - 1} d\varphi \quad (\text{A-1})$$

と表わされ、循環流によって同じく写像円の後縁に誘起される接線速度成分は

$$q_{\theta}^II = \frac{1}{\pi b} \int_b^{b+Ut} \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi \quad (\text{A-2})$$

と表わされる。⁶⁾ただし (A-2) 式は、写像面での速度を、物理面で後流方向に測った助変数 ξ で表わしたものである。また、翼の運動は時刻 $t=0$ から開始したとする。平板翼後縁での上下速度成分が有限であることを要請する Kutta の条件は写像面では写像円後縁での接線速度成分が零であることを要請するので

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{w_a(\varphi, t) \sin^2 \varphi}{\cos \varphi - 1} d\varphi \\ & + \frac{1}{\pi b} \int_b^{b+Ut} \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$



付図8

となる。翼の運動を定めると、境界条件から翼面上の吹き下ろし $w_a(\varphi, t)$ が決まり、上式第 1 項は時刻 t の既知関数となる。いまその関数を $2w_{b/2}(t)$ と定義すると、前図のように上下動と縦揺れ動とを行う翼型に対しては

$$w_{b/2}(t) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{w_a(\varphi, t) \sin^2 \varphi}{\cos \varphi - 1} d\varphi$$

$$= U\alpha + \frac{dh}{dt} + b(0.5 - a) \frac{d\alpha}{dt} \quad (\text{A-4})$$

となる。このように、(A-3) 式は $w_a(\varphi, t)$ を定めて未知関数 $r_w(\xi, t)$ を求める積分方程式である。 $r_w(\xi, t)$ が求まると、循環流による揚力は

$$L_c(t) = -\rho U \int_b^{b+Ut} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} r_w(\xi, t) d\xi \quad (\text{A-5})$$

から計算できる。

翼の運動が無限時間続いている場合については (A-3), (A-5) 式の積分上限 $b+Ut$ を ∞ とし、(A-3) ~ (A-5) 式から循環流による揚力は $w_{b/2}(t)$ によって

$$L_c(t) = 2\pi\rho U b w_{b/2}(t) \frac{\int_b^\infty \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} r_w(\xi, t) d\xi}{\int_b^\infty \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} r_w(\xi, t) d\xi} \quad (\text{A-6})$$

と表わせる。さらに Theodorsen は翼が定常調和振動: $z_a = z_a(x) e^{i\omega t}$, 従って $w_a = w_a(x) e^{i\omega t}$ を行っている場合について、積分方程式 (A-3) の線形性と、後流渦が強さを変えずに一樣流速で移動するという仮定によって、独立変数 ξ, t と従属変数 r_w との関数関係を

$$r_w(\xi, t) = \bar{r}_w e^{i\omega [t - \frac{\xi}{U}]}$$

と確定し、(A-6) 式の積分を Bessel 関数と等値して、

$$\bar{L}_c = 2\pi\rho U b C(k) \bar{w}_{b/2} \quad (\text{A-7})$$

なる表現を得た。ただし、

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} \quad (\text{A-8})$$

$H_0^{(2)}(k), H_1^{(2)}(k)$ は第 3 種 Bessel 関数 (Hankel 関

数) であり、 $C(k)$ は Theodorsen 関数である。

さて (A-3) ~ (A-5) 式をもとに Laplace 変換の手法を用いて調和振動に限らない任意の運動をする翼型に働く循環流による揚力を求めよう。それには Edwards の方法⁴⁾に従う。翼はその時までは気流に対して定常直進運動しており、時刻 $t=0$ から非定常運動を開始する場合を考える。調和振動の場合と同様に、この場合も後縁から吐き出される渦度は強さを変えずに一般流の速度で流れ去ると仮定する。そうすると後流の循環 $r_w(\xi, t)$ は、後流渦の後縁端から ξ までの距離 $U\tau = (b+Ut) - \xi$ のみの関数、さらに流速が一定の場合には、 τ のみの関数となる。 $U\tau = (b+Ut) - \xi$ なる関係によって (A-3), (A-4) および (A-5) 式の積分変数を ξ から τ に変換すると、次のような畳み込み積分の表現を得る。

$$w_{b/2}(t) = -\frac{U}{2\pi b} \int_0^t \sqrt{\frac{(t-\tau) + 2b/U}{t-\tau}} r_w(\tau) d\tau \quad (\text{A-9})$$

$$L_c(t) = -\rho U^2 \int_0^t \frac{(t-\tau) + b/U}{\sqrt{(t-\tau)^2 + (2b/U)(t-\tau)}} r_w(\tau) d\tau \quad (\text{A-10})$$

ただし、Edwards の文献 4) および 30) では上 2 式および関係式 $U\tau = (b+Ut) - \xi$ において t と τ とが入れ替わっており、(A-3), (A-5) 式等における t との間に混同があった。ここではその点を正してある。

さてここで (A-9), (A-10) 式両辺を Laplace 変換し、右辺に畳み込み積分の定理を適用すれば、右辺は変換された関数の積になるので、 $r_w(t)$ の Laplace 変換を両式から消去することができる。なお、以下で Laplace 変換を

$$\mathcal{L}[\] \triangleq \int_{0-}^t [\] e^{-st}$$

と書く。

実際 (A-9), (A-10) 式両辺を Laplace 変換すれば

$$\mathcal{L}[w_{b/2}(t)] = -\frac{U}{2\pi b} \mathcal{L}\left[\sqrt{\frac{t+2b/U}{t}}\right] \cdot \mathcal{L}[\gamma_w(t)] \quad (\text{A-11})$$

$$\mathcal{L}[L_c(t)] = -\rho U^2 \mathcal{L}\left[\frac{t+b/U}{\sqrt{t^2+(2b/U)t}}\right] \cdot \mathcal{L}[\gamma_w(t)] \quad (\text{A-12})$$

となるから

$$\tilde{L}_c(s) = 2\pi\rho bU \tilde{w}_{b/2}(s) \frac{\mathcal{L}\left[\frac{t+b/U}{\sqrt{t^2+(2b/U)t}}\right]}{\mathcal{L}\left[\sqrt{\frac{t+2b/U}{t}}\right]} \quad (\text{A-13})$$

となる。ただし $\tilde{L}_c(s) = \mathcal{L}[L_c(t)]$, $\tilde{w}_{b/2}(s) = \mathcal{L}[w_{b/2}(t)]$ 。

然るに (A-12) 式中の Laplace 変換は変形 Bessel 関数で次のように表わすことができる³¹⁾

$$\mathcal{L}\left[\frac{t+b/U}{\sqrt{t^2+(2b/U)t}}\right] = \int_0^\infty \frac{t+b/U}{\sqrt{t^2+(2b/U)t}} e^{-st} dt \\ = \frac{b}{U} e^{\frac{sb}{U}} K_1\left(\frac{sb}{U}\right), \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (\text{A-14})$$

$$\mathcal{L}\left[\sqrt{\frac{t+2b/U}{t}}\right] = \int_0^\infty \sqrt{\frac{t+2b/U}{t}} e^{-st} dt \\ = \frac{b}{U} e^{\frac{sb}{U}} \left[K_0\left(\frac{sb}{U}\right) + K_1\left(\frac{sb}{U}\right) \right], \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (\text{A-15})$$

従って、最終的に (A-13) 式は

$$\tilde{L}_c(s) = 2\pi\rho bUC(\bar{s}) \tilde{w}_{b/2}(s), \quad \bar{s} = \frac{sb}{U} \quad (\text{A-16})$$

となる。ここで

$$C(\bar{s}) = \frac{K_1(\bar{s})}{K_0(\bar{s}) + K_1(\bar{s})} \quad (\text{A-17})$$

である。変形 Bessel 関数と Hankel 関数との間に

$$K_0(z) = -\frac{\pi i}{2} H_0^{(2)}(-iz) \\ K_1(z) = -\frac{\pi i}{2} H_1^{(2)}(-iz) \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi \quad (\text{A-18})$$

の関係があること³²⁾を知って、(A-8)式と (A-

17)式とを比較すると、関数 $C(\bar{s})$ は元来の Theodorsen 関数の定義域を複素面全域に拡張したのになっていることが分かる。この意味で (A-17) 式で定義される関数 $C(\bar{s})$ を一般 Theodorsen 関数と呼ぶ。

(A-16) 式によれば一般 Theodorsen 関数は入力 $\tilde{w}_{b/2}(s)$ と出力 $\tilde{L}_c(s)$ とを結びつける伝達関数と見做すことができる。しかしこれは任意運動に対する揚力のうち循環流による部分だけのものである。非循環流による揚力は Theodorsen が上下動 (h) および縦揺れ動 (α) をする翼型の任意の運動に対する時間領域での表現として

$$L_{NC} = \pi\rho b^2 \left[\frac{d^2 h}{dt^2} + U \frac{d\alpha}{dt} - ba \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right] \quad (\text{A-19})$$

と表わしているので、その Laplace 変換表現として

$$\tilde{L}_{NC} = \pi\rho b^2 [s^2 \tilde{h} + (Us - ba s^2) \tilde{\alpha}] \quad (\text{A-20})$$

が得られる。従って (A-16) 式と (A-19) 式とによって、全揚力は伝達関数によって次のように表わせる。

$$\tilde{L}(s) = G_{Lh}(s) \cdot \tilde{h} + G_{L\alpha}(s) \cdot \tilde{\alpha} \quad (\text{A-21})$$

ただし

$$G_{Lh}(s) = \pi\rho b^2 s^2 + 2\pi\rho b s C(\bar{s}) \quad (\text{A-22})$$

$$G_{L\alpha}(s) = \pi\rho b^2 (Us - ba s^2) \\ + 2\pi\rho b \left[U + b \left(\frac{1}{2} - a \right) s \right] C(\bar{s}) \quad (\text{A-23})$$

さて翼の運動、即ち $w_{b/2}(t)$ を定めて、その時に生ずる循環流による揚力 $L(t)$ を求めるには (A-16) 式を Laplace 逆変換すればよい。第 4 章で述べたように翼の運動 $w_{b/2}(t)$ の特性は、その Laplace 変換 $\tilde{w}_{b/2}(s)$ の特異点に於いて $C(\bar{s}) \tilde{w}_{b/2}(s)$ の留数を計算することを通じて $C(\bar{s})$ のパラメタ \bar{s} に結びつけられている。例えば $w_{b/2}(t)$ として

$$w_{b/2}(t) = w_0 e^{i\mu t} \cos \omega t$$

なる運動を考えると

$$\tilde{w}_{b/2}(s) = \frac{w_0 (s - \mu)}{(s - \mu)^2 + \omega^2}$$

となるから、その特異点(極)は $s = \mu \pm i\omega$ にあつ

て、その点での $C(\bar{s})\tilde{w}_{b/2}(\bar{s})$ の留数を計算するとき $C(\bar{s})$ の $\bar{s} = b/U(\mu + i\omega)$ での値が必要になる (第4章 (102c)式参照)。このようにして、発散振動 ($\mu > 0$) と $C(s)$ の定義域である複素面の右半面とが関係付けられ、減衰振動 ($\mu < 0$) と複素面の左半面とが関係付けられる。

(A-16)式を導くに当たって (A-14), (A-15) 式の段階で変数 s に $R_e(s) > 0$ なる制限が付いた。この点から、減衰振動に対する Theodorsen 関数の定義に関して過去の一時期に盛んな議論があった。^{10), 33)-36)}しかし Edwards の主張が最も正しいであ

ろう。³⁷⁾即ち、関数 $C(\bar{s})$ はその導入過程では確かに $R_e(s) > 0$ の範囲で定義されたものであるが変形 Bessel 関数自体は複素面全域で定義され、(A-16)式右辺は $R_e(s) \leq 0$ の範囲でも解析的である。従って初めは $R_e(s) > 0$ の範囲で定義された関数 $C(\bar{s})$ を、解析接続によって複素面全域に拡張することが許される。ただし、変形 Bessel 関数が対数多価性を有することから $C(\bar{s})$ は原点が分枝点となっている。従って基本変域を $-\pi < \arg(s) \leq \pi$ にとれば負の実軸が分枝切断線となる。

付録 B 3.2 節の式の誘導

以下の式の誘導は文献5)の対応する式の誘導とほとんど同様に進められる。

(1) (55)式から仮定(i), (ii), (iii)による(58)式の誘導

仮定(i)によって(55)式右辺第1項 (I_1)は

$$\begin{aligned} I_1 &\triangleq -\frac{1}{4\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_l(\eta)}^{x_r(\eta)} \frac{\tilde{\gamma}_a(\xi, \eta, s)(x-\xi) + \tilde{\delta}_a(\xi, \eta, s)(y-\eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \\ &\cong -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_l(y)}^{x_r(y)} \frac{\tilde{\gamma}_a(\xi, y, s)(x-\xi)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{x_l(y)}^{x_r(y)} \tilde{\gamma}_a(\xi, y, s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi)d\eta}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_l(y)}^{x_r(y)} \frac{\tilde{\gamma}_a(\xi, y, s)}{x-\xi} d\xi \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

仮定(ii)によって(55)式右辺第2項のうち $d\tilde{Q}/d\eta$ に関する項 (I_3)は

$$\begin{aligned} I_3 &\triangleq -\frac{b_0}{4\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_l(\eta)}^{\infty} \frac{e^{-s\xi} \frac{d\tilde{Q}(\eta, s)}{d\eta} (y-\eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \\ &\cong -\frac{b_0}{4\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \int_x^{\infty} \frac{e^{-s\xi} \frac{d\tilde{Q}(\eta, s)}{d\eta} (y-\eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta = -\frac{b_0}{4\pi} e^{-s\xi} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{d\tilde{Q}(\eta, s)}{d\eta} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(y-\eta)} (y-\eta)d\lambda}{\{\lambda^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\eta \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

(55)式右辺第2項のうち \tilde{Q} に関する項 (I_2)は

$$I_2 = I_2^{(2)} + 4I_2 \quad (\text{B-3})$$

として、その2次元流による項 ($I_2^{(2)}$)を導入して

$$I_2^{(2)} \triangleq \frac{\bar{s}_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_l(y)}^{\infty} \frac{e^{-s\xi} \tilde{Q}(y, s)(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta = \frac{\bar{s}_0}{2\pi} \tilde{Q}(y, s) \int_{x_l(y)}^{\infty} \frac{e^{-s\xi}}{x-\xi} d\xi$$

$$= \frac{\bar{s}_0}{4\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{\infty} e^{-\frac{\xi}{b_0}} \frac{\frac{d\tilde{Q}(\eta, s)}{d\eta} |y-\eta|}{(x-\xi)(y-\eta)} d\xi d\eta \quad (\text{B-4})$$

とする。

一方 I_2 は部分積分によって

$$\begin{aligned} I_2 &\triangleq \frac{\bar{s}_0}{4\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(\eta)}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi}{b_0}} \tilde{Q}(\eta, \bar{s})(x-\xi)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \\ &\cong \frac{\bar{s}_0}{4\pi} \int_{x_f(y)}^{\infty} e^{-\frac{\xi}{b_0}} (x-\xi) \int_{-l_0}^{l_0} \frac{\tilde{Q}(\eta, s) d\eta}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi \\ &= \frac{\bar{s}_0}{4\pi} \int_{x_f(y)}^{\infty} e^{-\frac{\xi}{b_0}} (x-\xi) \int_{-l_0}^{l_0} \frac{\frac{d\tilde{Q}(\eta, s)}{d\eta} (y-\eta) d\eta}{(x-\xi)^2 \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

ただし (B-4), (B-5) の誘導に $\tilde{Q}(\pm r b_0) = 0$ を用いた。

(B-4), (B-5) より, 仮定(iii)を適用して

$$\begin{aligned} 4I_2 &\cong \frac{\bar{s}_0}{4\pi} \oint_{-l_0}^{l_0} \int_{x_f(y)}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi}{b_0}} \frac{d\tilde{Q}(\eta, s)}{d\eta}}{x-\xi} \left[\frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{|y-\eta|}{y-\eta} \right] d\xi d\eta \\ &\cong \frac{\bar{s}_0}{4\pi} \oint_{-l_0}^{l_0} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi}{b_0}} \frac{d\tilde{Q}(\eta, s)}{d\eta}}{x-\xi} \left[\frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{|y-\eta|}{y-\eta} \right] d\xi d\eta \\ &= \frac{\bar{s}_0}{4\pi} e^{-\frac{\xi}{b_0}} \oint_{-l_0}^{l_0} \frac{d\tilde{Q}(\eta, s)}{d\eta} \left[- \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{y-\eta}{\sqrt{\lambda^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{|y-\eta|}{y-\eta} \right\} e^{-\frac{\xi}{b_0} \lambda} d\lambda \right] d\eta \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

(B-4), (B-6) より

$$\begin{aligned} I_2 &\cong \frac{\bar{s}_0}{2\pi} \tilde{Q}(y, s) \int_{x_f(y)}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi}{b_0}}}{x-\xi} d\xi - \frac{\bar{s}_0}{4\pi} e^{-\frac{\xi}{b_0}} \oint_{-l_0}^{l_0} \frac{d\tilde{Q}(\eta, s)}{d\eta} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{y-\eta}{\sqrt{\lambda^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{|y-\eta|}{y-\eta} \right\} e^{-\frac{\xi}{b_0} \lambda} d\lambda d\eta \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

(B-1), (B-2), (B-7) を (55) 式に代入すれば, (58) 式を得る。即ち

$$\begin{aligned} \tilde{w}_a(x, y, s) &= -\frac{1}{2\pi} \oint_{x_f(y)}^{x_f(y)} \frac{\tilde{\gamma}_a(\xi, y, s)}{x-\xi} d\xi \\ &\quad + \frac{\bar{s}_0 \tilde{Q}(y, s)}{2\pi} \int_{x_f(y)}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi}{b_0}}}{x-\xi} d\xi - \frac{e^{-\frac{\xi}{b_0}}}{4\pi} \oint_{-l_0}^{l_0} \frac{d\tilde{Q}(\eta, s)}{d\eta} \tilde{K} \left(\frac{y-\eta}{b_0} \right) d\eta \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

ただし

$$\tilde{K} \left[\frac{y-\eta}{b_0}, \bar{s}_0 \right] = \tilde{K} [q, \bar{s}_0] = \int_0^{\infty} \frac{q e^{-\bar{s}_0 \lambda}}{(\lambda^2 + q^2)^{3/2}} d\lambda + \bar{s}_0 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\bar{s}_0 \lambda}}{\lambda} \left[\frac{q}{\sqrt{\lambda^2 + q^2}} - \frac{|q|}{q} \right] d\lambda \quad (\text{B-9})$$

(2) (61)式から(62)式の誘導

Söhngen の積分反転公式は, $f(1)$ が有限値をとる未知関数である積分方程式

$$g(x^*) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{f(\xi^*)}{x^* - \xi^*} d\xi^* \quad (\text{B-10})$$

の解が

$$f(x^*) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \cdot \frac{g(\xi^*)}{x^* - \xi^*} d\xi^* \quad (\text{B-11})$$

で与えられるというものである。

(61)式にこの反転公式を適用すると

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_a(x^*, y^*, s) = & -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \left\{ -\oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{\tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s)}{x^* - \xi^*} d\xi^* \right. \\ & + \frac{\bar{s}_0 e^{-\bar{s}m}}{2\pi} \tilde{Q}(y^*, s) \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \left(\int_1^\infty \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{\xi^* - \lambda} d\lambda \right) \frac{d\xi^*}{x^* - \xi^*} \\ & \left. - \frac{e^{-\bar{s}m}}{4\pi} \oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{e^{-\bar{s}\xi^*}}{x^* - \xi^*} d\xi^* \right\} \quad (\text{B-12}) \end{aligned}$$

この式の右辺第2項の積分は

$$\begin{aligned} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \left(\int_1^\infty \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{\xi^* - \lambda} d\lambda \right) \frac{d\xi^*}{x^* - \xi^*} &= \int_1^\infty e^{-\bar{s}\lambda} \left\{ \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{d\xi^*}{(\xi^* - \lambda)(x^* - \xi^*)} \right\} d\lambda \\ &= \int_1^\infty e^{-\bar{s}\lambda} \left\{ \frac{1}{x^* - \lambda} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \left(\frac{1}{\xi^* - \lambda} + \frac{1}{x^* - \xi^*} \right) d\xi^* \right\} d\lambda \\ &= \int_1^\infty \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{x^* - \lambda} \left\{ \pi \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \right) - \pi \right\} d\lambda \\ &= -\pi \int_1^\infty \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{x^* - \lambda} d\lambda \quad (\text{B-13}) \end{aligned}$$

となる。ただし積分公式

$$\oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{d\xi^*}{\xi^* - \lambda} = \pi \left[1 - \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \right]; \quad \lambda > 1 \quad (\text{B-14})$$

$$\oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{d\xi^*}{x^* - \xi^*} = \pi; \quad |x^*| < 1 \quad (\text{B-15})$$

を用いた。(B-13)によって(B-12)から(62)式が出る。即ち

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_a(x^*, y^*, s) = & \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \left\{ \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{\tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s)}{x^* - \xi^*} d\xi^* + \frac{\bar{s}_0 e^{-\bar{s}m}}{2} \tilde{Q}(y^*, s) \int_1^\infty \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{x^* - \lambda} d\lambda \right. \\ & \left. + \frac{e^{-\bar{s}m}}{4\pi} \left[\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, \bar{s}_0) d\eta^* \right] \left[\oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{e^{-\bar{s}\xi^*}}{x^* - \xi^*} d\xi^* \right] \right\} \quad (\text{B-16}) \end{aligned}$$

(3) (62) 式から (69) 式の誘導

(62) 式を翼弦に亘って積分すると

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \tilde{r}_a(x^*, y^*, s) dx^* &= \frac{b_0}{b} \tilde{Q}(y^*, s) e^{-(\bar{s} + \bar{s}_m)} \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \left\{ \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{\tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s)}{x^* - \xi^*} d\xi^* \right\} dx^* \\
 &\quad + \frac{\bar{s}_0 e^{-\bar{s}_m}}{2} \tilde{Q}(y^*, s) \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_1^\infty \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{x^* - \lambda} d\lambda dx^* \\
 &\quad + \frac{e^{-\bar{s}_m}}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \left[\oint_{-\iota_0^*}^{\iota_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* \right] \\
 &\quad \times \left[\oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{e^{-\bar{s}\xi^*}}{x^* - \xi^*} d\xi^* \right] dx^* \tag{B-17}
 \end{aligned}$$

積分公式 (B-15) によって右辺第 1 項は

$$\text{第 1 項} = -2 \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \tag{B-18}$$

さらに, (23) 式を用いると

$$\begin{aligned}
 \text{第 2 項} &= \frac{\bar{s}_0 e^{-\bar{s}_m}}{\pi} \tilde{Q}(y^*, s) \int_1^\infty \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} e^{-\bar{s}\lambda} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{dx^*}{x^* - \lambda} \right\} d\lambda \\
 &= -\bar{s}_0 e^{-\bar{s}_m} \tilde{Q}(y^*, s) \int_1^\infty \left[\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} - 1 \right] e^{-\bar{s}\lambda} d\lambda \\
 &= -\bar{s}_0 e^{-\bar{s}_m} \tilde{Q}(y^*, s) [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})] + \frac{\bar{s}_0}{s} e^{-(\bar{s} + \bar{s}_m)} \tilde{Q}(y^*, s) \tag{B-19}
 \end{aligned}$$

さらに, ν 次の第 1 種 Bessel 関数: $I_\nu(z)$, $\nu=0, 1$ の積分表示:

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{-zt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi I_0(z) \tag{B-20}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{te^{-zt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\pi I_1(z) \tag{B-21}$$

あるいは

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} e^{-zt} dt = \pi [I_0(z) - I_1(z)] \tag{B-22}$$

を用いると第 3 項は

$$\begin{aligned}
 \text{第 3 項} &= \frac{e^{-\bar{s}_m}}{2\pi^2} \left[\oint_{-\iota_0^*}^{\iota_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* \right] \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} e^{-\bar{s}\xi^*} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{dx^*}{x^* - \xi^*} d\xi^* \\
 &= -\frac{e^{-\bar{s}_m}}{2\pi} \left[\oint_{-\iota_0^*}^{\iota_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* \right] \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} e^{-\bar{s}\xi^*} d\xi^*
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{e^{-\bar{s}m}}{2} \left[\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* \right] [I_0(\bar{s}) - I_1(\bar{s})] \quad (\text{B-23})$$

(B-18), (B-19), (B-23) を (B-17) に代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{b_0}{b} e^{-(\bar{s}+\bar{s}_m)} \tilde{Q}(y^*, s) &= -2 \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \\ &\quad - \bar{s}_0 e^{-\bar{s}m} \tilde{Q}(y^*, s) [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})] + \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}} e^{-(\bar{s}+\bar{s}_m)} \tilde{Q}(y^*, s) \\ &\quad - \frac{e^{-\bar{s}m}}{2} \left[\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* \right] [I_0(\bar{s}) - I_1(\bar{s})] \end{aligned}$$

これより

$$\tilde{Q}(y^*, s) + \frac{b}{b_0} \mu(\bar{s}) \oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}_1(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* = \tilde{Q}^{(2)}(y^*, s) \quad (\text{B-24})$$

ただし

$$\mu(\bar{s}) = \frac{I_0(\bar{s}) + I_1(\bar{s})}{2\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} \quad (\text{B-25})$$

$$\tilde{Q}^{(2)}(y^*, s) = -2 \frac{b}{b_0} e^{\bar{s}m} \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^*}{\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} \quad (\text{B-26})$$

(4) (66) 式の誘導

まず (62) 式を ξ^* について -1 から x^* まで積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{x^*} \tilde{r}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* &= -\frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right) + A_1(x^*, \xi^*) \right] \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \\ &\quad - \frac{\bar{s}_0}{\pi} e^{-\bar{s}m} \tilde{Q}(y^*, s) \int_1^\infty \left[\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right) + A_2(x^*, \lambda) \right] e^{-\bar{s}\lambda} d\lambda \\ &\quad - \frac{e^{-\bar{s}m}}{2\pi^2} \left[\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* \right] \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right) \right. \\ &\quad \left. + A_1(x^*, \xi^*) \right] e^{-\bar{s}\xi^*} d\xi^* \quad (\text{B-27}) \end{aligned}$$

ただし積分公式

$$\oint_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{dx^*}{\xi^* - x^*} = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* + \sqrt{\frac{1-\xi^*}{1+\xi^*}} A_1(x^*, \xi^*) \quad (\text{B-28})$$

$$\int_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{dx^*}{\lambda - x^*} = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* + \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} A_2(x^*, \lambda) \quad (\text{B-29})$$

$$A_1(x^*, \xi^*) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x^*\xi^* + \sqrt{1-\xi^{*2}} \sqrt{1-x^{*2}}}{1-x^*\xi^* - \sqrt{1-\xi^{*2}} \sqrt{1-x^{*2}}} \quad (\text{B-30})$$

$$A_2(x^*, \lambda) = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{(1-x^*)(\lambda+1)}{(1+x^*)(\lambda-1)}} \right) - \pi \quad (\text{B-31})$$

を用いている。一方 (B-17) 式から

$$\begin{aligned} \frac{b_0}{b} e^{-(\bar{s}+\bar{s}_m)} \tilde{Q}(y^*, s) &= -2 \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* - \bar{s}_0 e^{-\bar{s}_m} \tilde{Q}(y^*, s) \int_1^\infty \left[\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} - 1 \right] e^{-\bar{s}\lambda} d\lambda \\ &\quad - \frac{e^{-\bar{s}_m}}{2\pi} \left[\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* \right] \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} e^{-\bar{s}\xi^*} d\xi^* \quad (\text{B-32}) \end{aligned}$$

(B-27) 式から (B-32) 式に $\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right)$ を乗じた式を辺々相引くと

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{x^*} \tilde{r}_a(\xi^*, y^*) d\xi^* - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right) \frac{b}{b_0} e^{-(\bar{s}+\bar{s}_m)} \tilde{Q}(y^*, s) \\ = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 A_1(x^*, \xi^*) \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* - \frac{\bar{s}_0}{\pi} e^{-\bar{s}_m} \tilde{Q}(y^*, s) \int_{-1}^\infty \left\{ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* + A_2(x^*, \lambda) \right\} e^{-\bar{s}\lambda} d\lambda \\ - \frac{e^{-\bar{s}_m}}{2\pi} \left[\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* \right] \int_{-1}^1 A_1(x^*, \xi^*) e^{-\bar{s}\xi^*} d\xi^* \quad (\text{B-33}) \end{aligned}$$

右辺第 2, 3 項を部分積分して

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{x^*} \tilde{r}_a(\xi^*, y^*) d\xi^* - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right) \frac{b}{b_0} e^{-(\bar{s}+\bar{s}_m)} \tilde{Q}(y^*, s) \\ = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 A_1(x^*, \xi^*) \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* - \frac{\bar{s}_0}{\pi} e^{-\bar{s}_m} \tilde{Q}(y^*, s) \left\{ \left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* + A_2(x^*, \lambda) \right] \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{-\bar{s}} \right\}_1^\infty \\ + \frac{\bar{s}_0}{\pi} e^{-\bar{s}_m} \tilde{Q}(y^*, s) \int_1^\infty \frac{\partial A_2(x^*, \lambda)}{\partial \lambda} \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{-\bar{s}} d\lambda - \frac{e^{-\bar{s}_m}}{2\pi} \left[\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* \right] \\ \times \left\{ \left[A_1(x^*, \xi^*) \frac{e^{-\bar{s}\xi^*}}{\bar{s}} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\partial A_1(x^*, \xi^*)}{\partial \xi^*} \frac{e^{-\bar{s}\xi^*}}{-\bar{s}} d\xi^* \right\} \quad (\text{B-34}) \end{aligned}$$

$A_1(x^*, \pm 1) = 0$, $A_2(x^*, 1) = 0$, $A_2(x^*, \infty) = -\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right)$ を考慮すると

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{x^*} \tilde{r}_a(\xi^*, y^*) d\xi^* &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 A_1(x^*, \xi^*) \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* - \frac{\bar{s}_0}{\pi} \frac{\tilde{Q}(y^*, s)}{\bar{s}} e^{-\bar{s}_m} \int_1^\infty \frac{\partial A_2(x^*, \lambda)}{\partial \lambda} e^{-\bar{s}\lambda} d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{\bar{s}} \frac{e^{-\bar{s}_m}}{2\pi} \left[\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^* - \eta^*, s) d\eta^* \right] \int_{-1}^1 \frac{\partial A_1(x^*, \xi^*)}{\partial \xi^*} e^{-\bar{s}\xi^*} d\xi^* \quad (\text{B-35}) \end{aligned}$$

(B-16), (B-35) 式を (65) 式に代入すると

$$-\frac{\Delta \tilde{P}_a(x^*, y^*, s)}{\rho U} = \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left\{ \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{x^* - \xi^*} - \bar{s} A_1(x^*, \xi^*) \right\} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^*$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\bar{s}_0}{\pi} e^{-\bar{s}m} \bar{Q}(y^*, s) \int_1^\infty \left\{ \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{1}{x^*-\lambda} - \frac{\partial A_2(x^*, \lambda)}{\partial \lambda} \right\} e^{-\bar{s}\lambda} d\lambda \\
& + \frac{1}{2\pi^2} e^{-\bar{s}m} \left[\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^*-\eta^*, s) d\eta^* \right] \int_{-1}^1 \left\{ \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{x^*-\xi^*} \right. \\
& \left. - \frac{\partial A_1(x^*, \xi^*)}{\partial \xi^*} \right\} e^{-\bar{s}\xi^*} d\xi^* \quad (B-36)
\end{aligned}$$

さらに

$$\frac{\partial A_1(x^*, \xi^*)}{\partial \xi^*} = \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\xi^{*2}}} + \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{x^*-\xi^*} \right] \quad (B-37)$$

$$\frac{\partial A_2(x^*, \lambda)}{\partial \lambda} = \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{1}{x^*-\lambda} \right] \quad (B-38)$$

を用いれば

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta \tilde{P}_a(x^*, y^*, s)}{\rho U} & = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{x^*-\xi^*} - \bar{s} A_1(x^*, \xi^*) \right\} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \\
& + \frac{\bar{s}_0}{\pi} e^{-\bar{s}m} \tilde{Q}(y^*, s) \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_1^\infty \frac{e^{-\bar{s}\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-1}} d\lambda + \frac{1}{2\pi^2} e^{-\bar{s}m} \left[\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^*-\eta^*, s) d\eta^* \right] \\
& \times \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \frac{e^{-\bar{s}\xi^*}}{\sqrt{1-\xi^{*2}}} d\xi^* \quad (B-39)
\end{aligned}$$

ここで (29), (B-20) および (B-24) からの

$$\oint_{-l_0^*}^{l_0^*} \frac{d\tilde{Q}(\eta^*, s)}{d\eta^*} \tilde{K}(y^*-\eta^*, s) d\eta^* = \frac{\tilde{Q}^{(2)}(y^*, s) - \tilde{Q}(y^*, s)}{\mu(\bar{s}) \bar{s} / \bar{s}_0} \quad (B-40)$$

を用いると (B-39) 式は

$$\frac{\Delta \tilde{P}_a(x^*, y^*, s)}{\rho U} = -\frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left\{ \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{x^*-\xi^*} - \bar{s} A_1(x^*, \xi^*) \right\} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* + \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} S \quad (B-41)$$

ただし

$$\begin{aligned}
S & = e^{-\bar{s}m} \left\{ \frac{\bar{s}_0}{\pi} K_0(\bar{s}) \tilde{Q}(y^*, s) + \frac{1}{2\pi} I_0(\bar{s}) \frac{\tilde{Q}^{(2)}(y^*, s) - \tilde{Q}(y^*, s)}{\mu(\bar{s}) \bar{s} / \bar{s}_0} \right\} \\
& = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \left[\frac{K_1(\bar{s})}{K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})} - 1 + \left(\frac{\tilde{Q}(y^*, s)}{\tilde{Q}^{(2)}(y^*, s)} - 1 \right) \right. \\
& \left. \times \left(\frac{K_1(\bar{s})}{K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})} + \frac{I_1(\bar{s})}{I_0(\bar{s}) - I_1(\bar{s})} \right) \right] \quad (B-42)
\end{aligned}$$

従って

$$C(\bar{s}) = \frac{K_1(\bar{s})}{K_0(\bar{s}) + K_1(\bar{s})} \quad (B-43)$$

$$\sigma = \left(\frac{\tilde{Q}(y^*, s)}{\tilde{Q}^{(2)}(y^*, s)} - 1 \right) \left[C(\bar{s}) + \frac{I_1(\bar{s})}{I_0(\bar{s}) - I_1(\bar{s})} \right] \quad (\text{B-44})$$

として最終的に

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{P}_a(x^*, y^*, s)}{\rho U} = & -\frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left\{ \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{x^* - \xi^*} - \bar{s} A_1(x^*, \xi^*) \right\} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \\ & - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \\ & + \frac{2}{\pi} \left[C(\bar{s}) + \sigma \right] \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_a(\xi^*, y^*, s) d\xi^* \end{aligned} \quad (\text{B-45})$$

となる。(66)式)

付録C 変形循環の解法の概要

本文3章で導入した(69)式あるいは(70)式の変形循環 $\tilde{Q}_j(y^*, \bar{s})$ に関する微積分方程式

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_j(y^*, \bar{s}) + \frac{b}{b_0} \mu(\bar{s}) \left[\oint_{-r}^r \frac{d\tilde{Q}_j(y^*, \bar{s})}{y^* - \eta^*} \right. \\ \left. - \bar{s}_0 \int_{-r}^r \frac{y^* - \eta^*}{|y^* - \eta^*|} \tilde{F}(|y^* - \eta^*|, \bar{s}_0) d\tilde{Q}_j(y^*, \bar{s}) \right] \\ = \tilde{Q}_j^{(2)}(y^*, \bar{s}) \end{aligned} \quad (70)$$

ここで

$$\mu(\bar{s}) = \frac{I_0(\bar{s}) + I_1(\bar{s})}{2\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_2(\bar{s})]} \quad (71)$$

$$\tilde{F}(x, \bar{s}_0) = \int_0^\infty e^{-\bar{s}_0 \lambda} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda} - \frac{\sqrt{x^2 + \lambda^2}}{x\lambda} \right] d\lambda \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_j^{(2)}(y^*, \bar{s}_0) = \\ - 2 \frac{b}{b_0} e^{\bar{s}_m} \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \tilde{w}_j(\xi^*, y^*, \bar{s}) d\xi^*}{\bar{s} [K_1(\bar{s}) + K_0(\bar{s})]} \end{aligned} \quad (74)$$

の解法の概要を述べる。この解法が空気力学伝達関数を数値的に求める中心を成す。

なお、本解法は変数 \bar{s} を純虚数 ik とすれば、調和振動に対する Reissner の理論⁵⁾における無次元循環 $\tilde{Q}_j(y^*)$ が計算されるものである。

数値計算は(70)式の解を Reissner と同様に

$$\frac{\tilde{Q}_j(y^*, \bar{s})}{U} = \sum_{n=1}^N K'_{nj} \frac{\sin n\phi}{n} \quad (\text{C-1})$$

の形に仮定することによる。

このとき(70)式は次のような K'_{nj} に関する代数方程式に変換されるので、これを代数的に解けばよいことになる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N K'_{nj} \left\{ \frac{\sin n\phi}{n} + \frac{b}{b_0} \frac{\pi}{r} \mu(\bar{s}) \left[\frac{\sin n\phi}{\sin \phi} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{r \bar{s}_0}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \phi - \cos \theta}{|\cos \phi - \cos \theta|} \tilde{F}(r |\cos \phi - \cos \theta|) \cdot \cos n\theta d\theta \right] \right\} = \frac{\tilde{Q}_j^{(2)}(r \cos \phi)}{U} \end{aligned} \quad (\text{C-2})$$

さて、上式の係数の計算で工夫を要するのは、半無限区間の積分で定義された、拡張された Cicala の関数 \tilde{F} の計算である。

筆者はこの関数が、積分指数関数によって、収束する無限級数によって表示できることを見つけ、これによって計算時間の大幅な短縮を実現した。即ち、積分形の関数

$$J_n(x, \bar{s}_0) \triangleq x^{n-1} \int_0^\infty \frac{e^{-\bar{s}_0 \lambda}}{(x+\lambda)^n} d\lambda \quad (\text{C-3})$$

を定義すると、 $\tilde{F}(x, \bar{s}_0)$ は $J_n(x, \bar{s}_0)$ によって次のように無限級数で表わされる。

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, \bar{s}_0) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(2n-3)!!}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \\ \times \binom{n-1}{k-1} J_{n+k-1} \end{aligned} \quad (\text{C-4})$$

ただし, $(2n-3)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)$

また, 関数 $J_n(x, \bar{s}_0)$ は漸化式

$$J_n(x, \bar{s}_0) = \frac{1}{n-1} - \frac{\bar{s}_0 x}{n-1} J_{n-1} \quad (C-5)$$

を満たし

$$J_1(x, \bar{s}_0) = \int_0^\infty \frac{e^{-\bar{s}_0 \lambda}}{x+\lambda} d\lambda = -e^{x\bar{s}_0} E_i(-x\bar{s}_0) \quad ; x \geq 0 \quad (C-6)$$

であるから, $J_n(x, \bar{s}_0)$ は積分指数関数 $E_i(-x, \bar{s}_0)$ から順次計算することができる。

ただし

$$E_i(-z) \triangleq - \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-\infty}^{-z} \frac{e^t}{t} dt \quad ; z \neq \text{負の実数} \text{〔積分路は実軸に平行〕} \quad (C-7)$$

(C-4) 式の導入は次のように行う。まず $0 < x < \infty, 0 < \lambda < \infty$ で

$$\frac{2x\lambda}{(x+\lambda)^2} \leq \frac{1}{2}$$

だから

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \lambda^2} &= (x+\lambda) \sqrt{1 - \frac{2x\lambda}{(x+\lambda)^2}} \\ &= (x+\lambda) \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} \frac{(x\lambda)^n}{(x+\lambda)^{2n}} \right] \end{aligned} \quad (C-8)$$

従って

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda} - \frac{\sqrt{x^2 + \lambda^2}}{x\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} \frac{(x\lambda)^{n-1}}{(x+\lambda)^{2n-1}} \quad (C-9)$$

また,

$$\begin{aligned} \frac{(x\lambda)^{n-1}}{(x+\lambda)^{2n-1}} &= (-x)^{n-1} \frac{[x-(x+\lambda)]^{n-1}}{(x+\lambda)^{2n-1}} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-2} \binom{n-1}{k-1} \frac{x^{2n-k-1}}{(x+\lambda)^{2n-k}} \end{aligned} \quad (C-10)$$

以上 (C-9) 式および (C-10) 式を $\tilde{F}(x, \bar{s}_0)$ の定義式 (73) 式に代入すれば (C-4) 式が得られる。

付録D 揚力線型理論値と揚力面理論値の比較

ここでは, 本論文が依っている揚力線型の理論値と, 揚力面理論値とを矩形翼に関する調和振動空気力について比較する。揚力面理論としては Watkins 等の所謂核関数法を採用する²³⁾ この方法を航空宇宙技術研究所の柳沢三憲, 菊地一雄両氏が電算機プログラムに作成した。両氏の厚意でそれを使用させてもらうことにする。

以下に示す計算結果は, 基準状態としてアスペクト比 6 の矩形翼が, 無次元振動数 0.2 で上下振動している場合を選び, そのうち 1 個のパラメータを変化させた次の 6 通りに対してのものである。

	アスペクト比	無次元振動数	振動状態
a [基準]	6	0.2	上下振動
b	3	↑	↑
c	↑	0.667	↑
d	↑	↑	縦揺れ振動
e	↑	↑	曲げ振動
f	↑	↑	振り振動

それぞれの場合に, 翼幅方向の揚力分布, 縦揺れモーメント分布, 圧力分布を示した。結果を示す前に, 揚力線型理論によるそれぞれの量の計算値を示しておく。

振動モードに依らない一般的な圧力分布の式は, 調和振動の場合, 本文 (66) 式で $s = ik$ とおいて得られる。あるいは, 調和振動の場合, (66) 式は Reissner の理論に帰着するので, 文献 5) の (67) 式に他ならない。即ち

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta \tilde{P}(x^*, y^*)}{\rho U} &= \frac{2}{\pi} [1 - \{C(k) + \sigma(y^*)\}] \\ &\times \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \bar{w}_a(\xi^*, y^*) d\xi^* \\ &+ \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left\{ \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{x^* - \xi^*} \right. \\ &\left. - ik A_1(x^*, \xi^*) \right\} \bar{w}_a(\xi^*, y^*) d\xi^* \end{aligned}$$

(D-1a)

ただし

$$A_1(x^*, \xi^*) = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1-x^* \xi^* + \sqrt{1-\xi^{*2}} \sqrt{1-x^{*2}}}{1-x^* \xi^* - \sqrt{1-\xi^{*2}} \sqrt{1-x^{*2}}} \right\} \quad (\text{D-1b})$$

さらに、ここで取り上げた4種の振動モード：上下振動，縦揺れ振動，曲げ振動，振り振動について上式から導かれる計算式を掲げよう。

(1) 上下振動： $z_a(x^*, y^*, t) = -\bar{h} e^{i\omega t}$

$$-\frac{\Delta \bar{P}}{\rho U^2 \frac{\bar{h}}{b_0}} = 2 \left\{ i k_0 [C(k) + \sigma_h(y^*)] \times \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} - \frac{b}{b_0} k_0^2 \sqrt{1-x^{*2}} \right\} \quad (\text{D-2a})$$

(2) 縦揺れ振動： $z_a(x^*, y^*, t) = -\bar{\alpha} (x-ba) e^{i\omega t}$

$$-\frac{\Delta \bar{P}}{\rho U^2 \bar{\alpha}} = 2 \left[\left\{ [C(k) + \sigma_\alpha(y^*)] \left(1 + \frac{ik}{2} + ik x_m^* \right) - \frac{ik}{2} \right\} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} + 2ik \sqrt{1-x^{*2}} - k^2 x_m^* \sqrt{1-x^{*2}} - \frac{k^2}{2} x^* \sqrt{1-x^{*2}} - a \left\{ ik [C(k) + \sigma_\alpha(y^*)] \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} - k^2 \frac{b_0}{b} \sqrt{1-x^{*2}} \right\} \right] \quad (\text{D-2b})$$

(3) 曲げ振動： $z_a(x^*, y^*, t) = \bar{w}_R f_w(y^*) e^{i\omega t}$

$$-\frac{\Delta \bar{P}}{\rho U^2 \frac{\bar{w}_R}{b_0}} = -2f_w(y^*) \left\{ ik_0 [C(k) + \sigma_w(y^*)] \times \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} - \frac{b}{b_0} k_0^2 \sqrt{1-x^{*2}} \right\} \quad (\text{D-2c})$$

(4) 振り振動： $z_a(x^*, y^*, t) =$

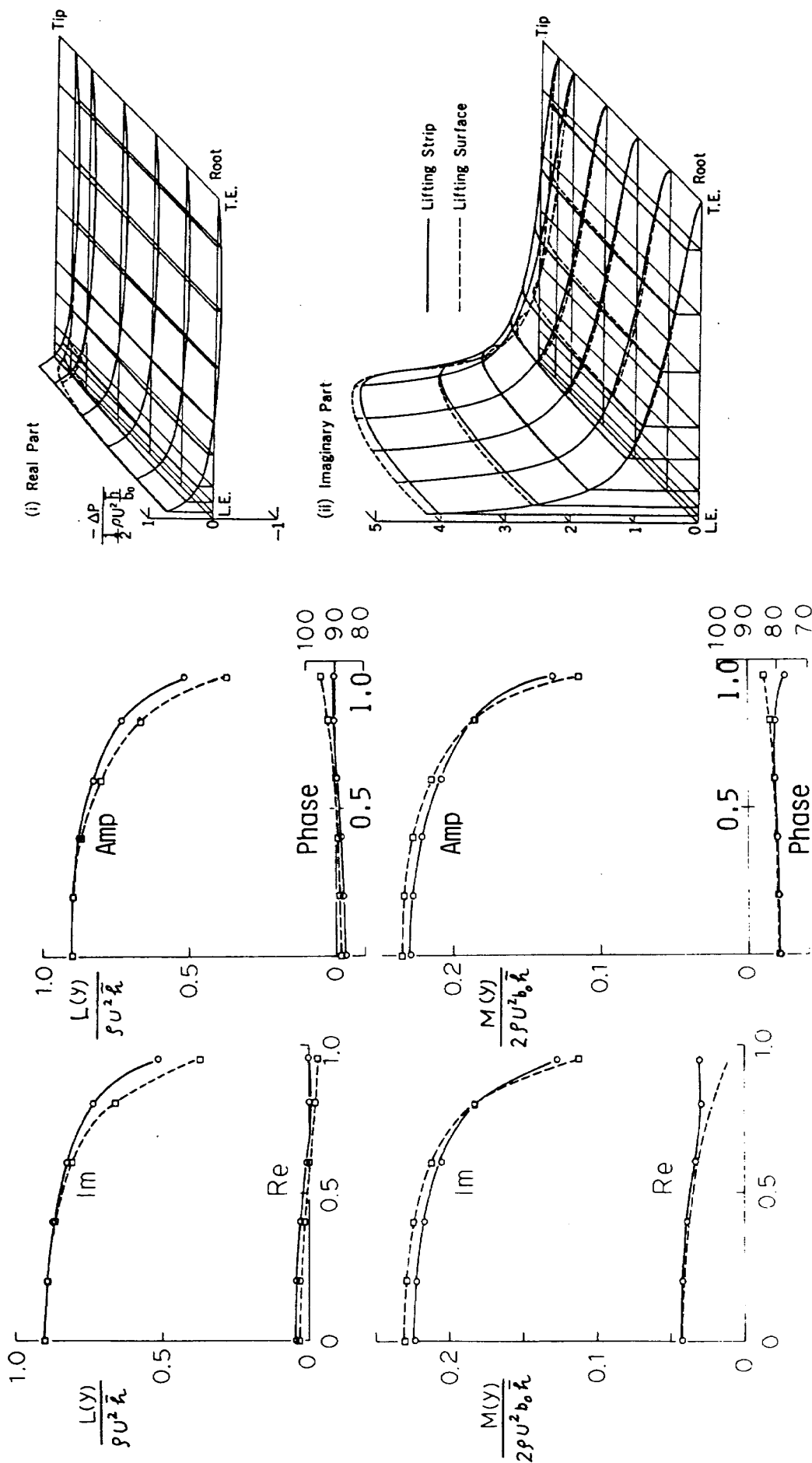
$-(x-ab) \bar{\theta}_R f_\theta(y^*) e^{i\omega t}$ (この場合は矩形翼)

$$-\frac{\Delta \bar{P}}{\rho U^2 \bar{\theta}_R} = 2f_\theta(y^*) \left[\left\{ [C(k) + \sigma_\theta(y^*)] \times \left(1 + \frac{ik}{2} \right) - \frac{ik}{2} \right\} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \right]$$

$$+ 2ik \sqrt{1-x^{*2}} - \frac{k^2}{2} x^* \sqrt{1-x^{*2}} - a \left\{ ik [C(k) + \sigma_\theta(y^*)] \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} - k^2 \sqrt{1-x^{*2}} \right\} \quad (\text{D-2d})$$

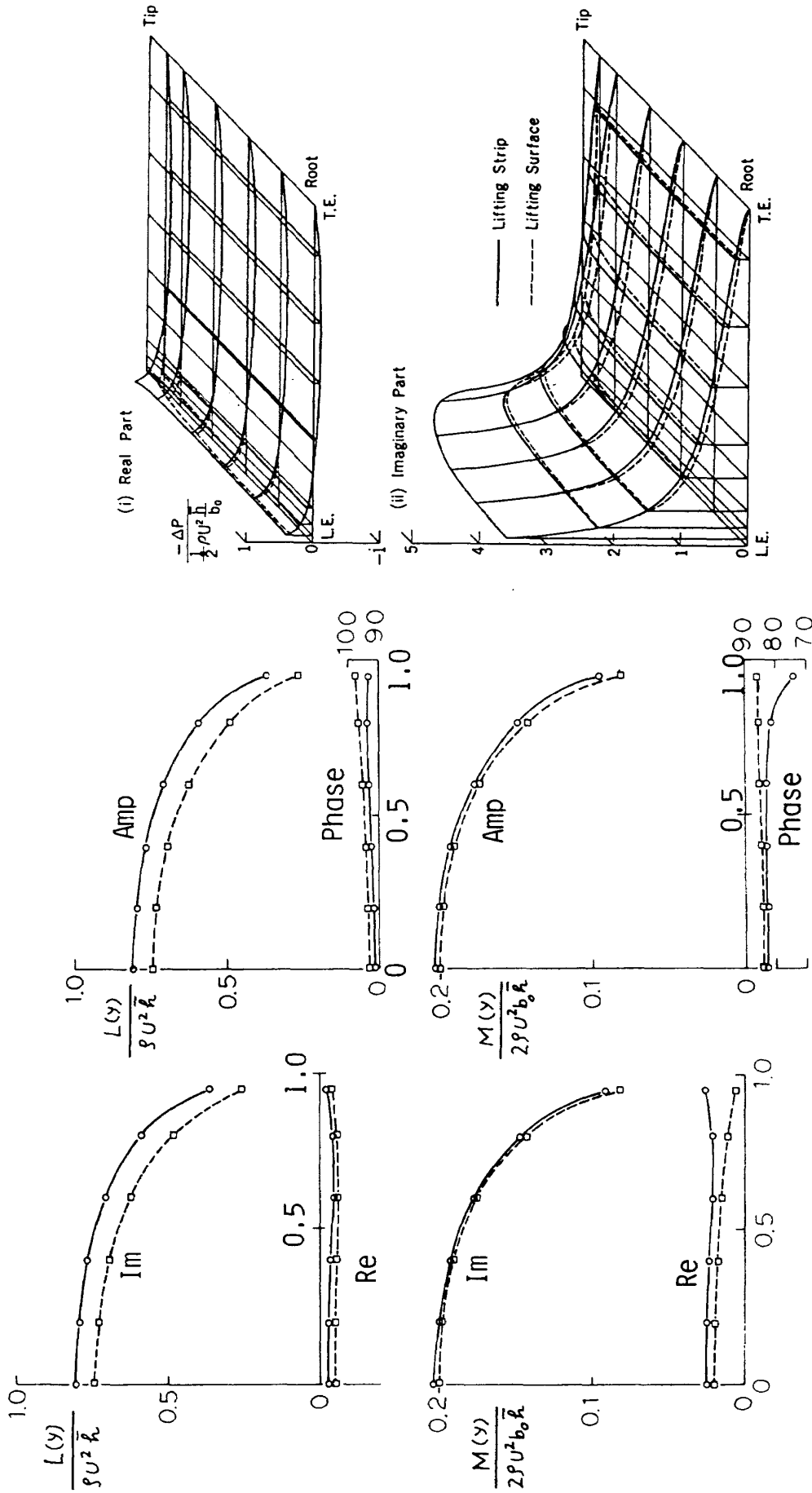
上式各式を積分して得られる昇幅方向の揚力および縦揺れモーメントの分布は、本文(76)式から直ちに得られる。以下に、これらの式から計算される諸量と、揚力面理論によるものとを図示する。比較によって次のことが明かである。

- (i) 各場合とも、両者はかなりよく合っている。ただし、翼端に近づくにつれ両者に差が生ずる。揚力線型理論の方が空気力の減少が少ない。
- (ii) 揚力分布での両者の差と、縦揺れモーメントでの差とは同程度であって、モーメントが揚力より相違が大きいということはない。



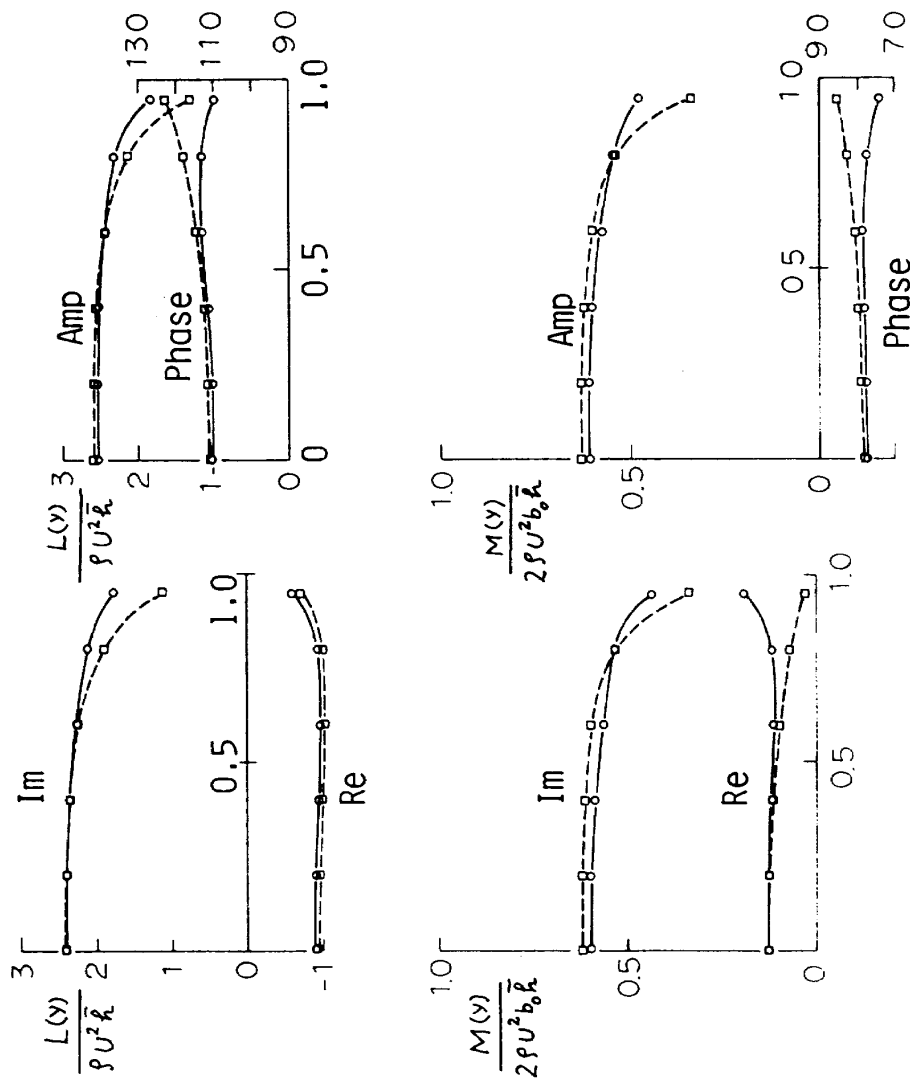
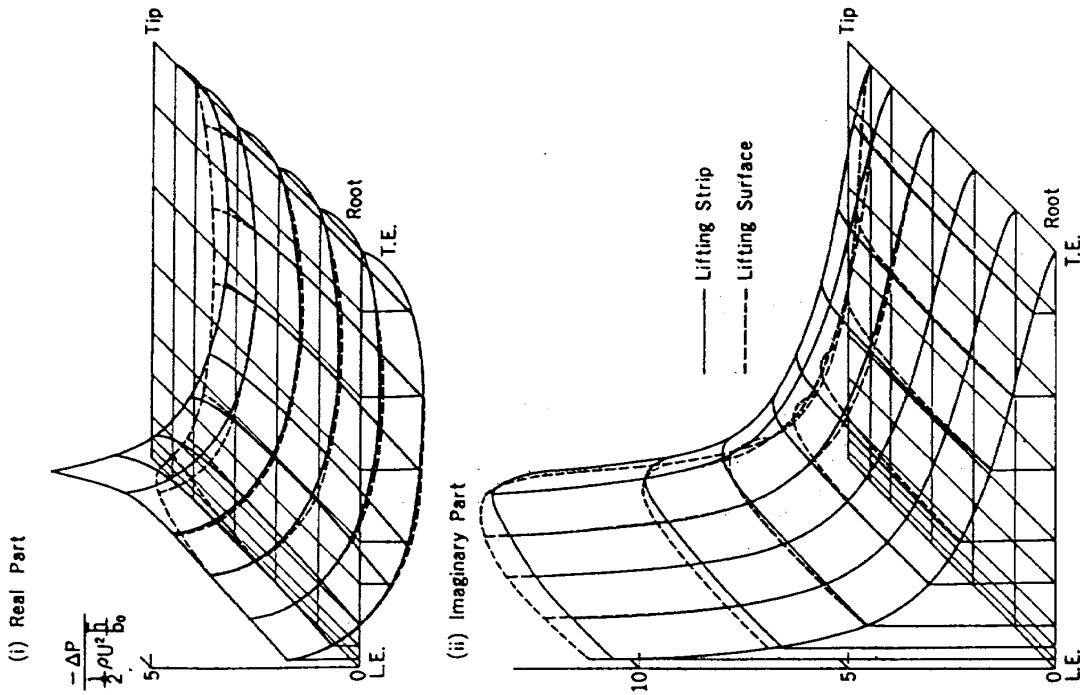
(a) アスペクト比6, 無次元振動数0.2, 上下振動(基準)

図C-1 矩形翼の非定常空気力



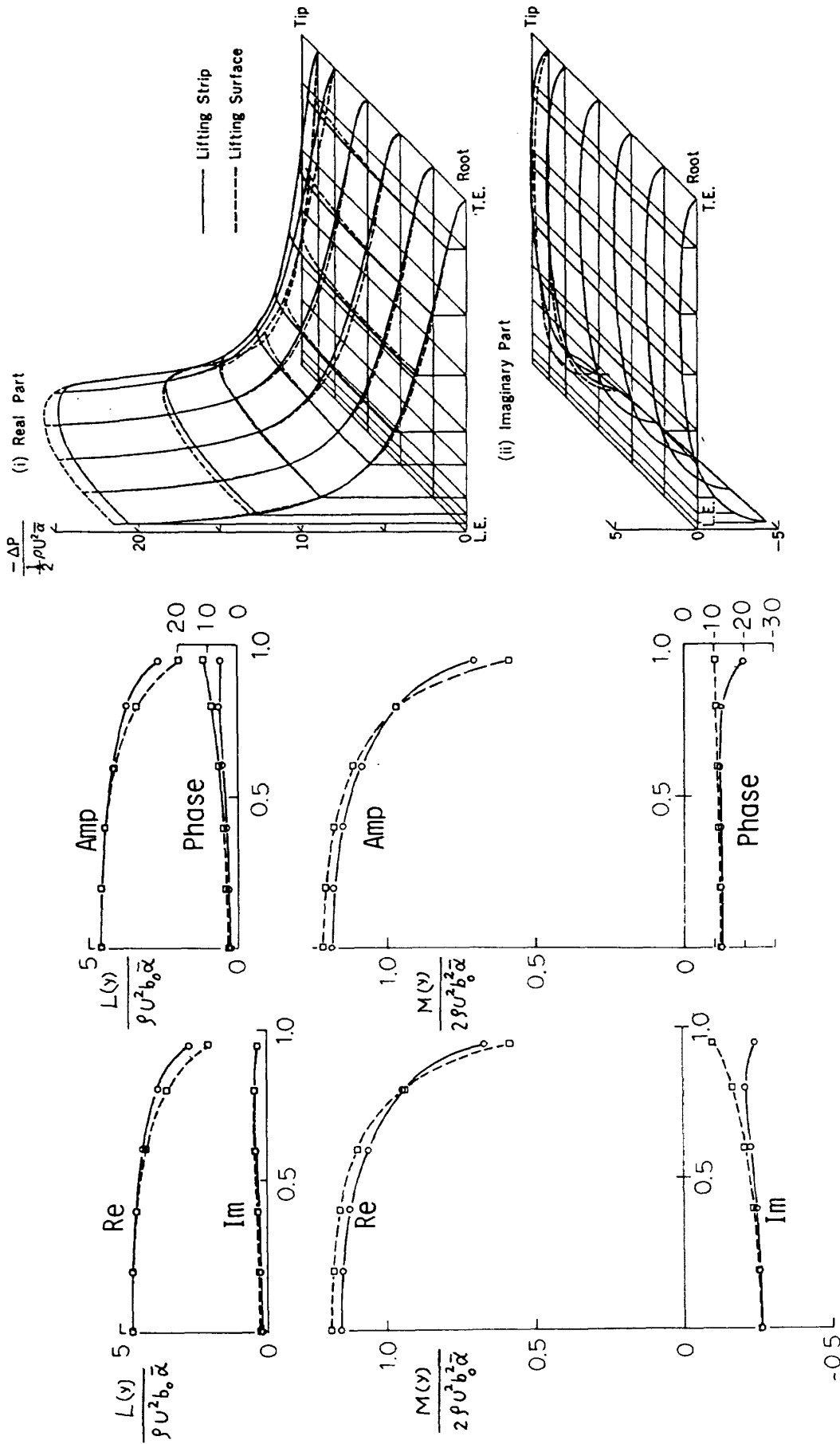
(b) アスペクト比3, 無次元振動数0.2, 上下振動

図C-1 続き (下線は基準と異なるパラメータを示す。)



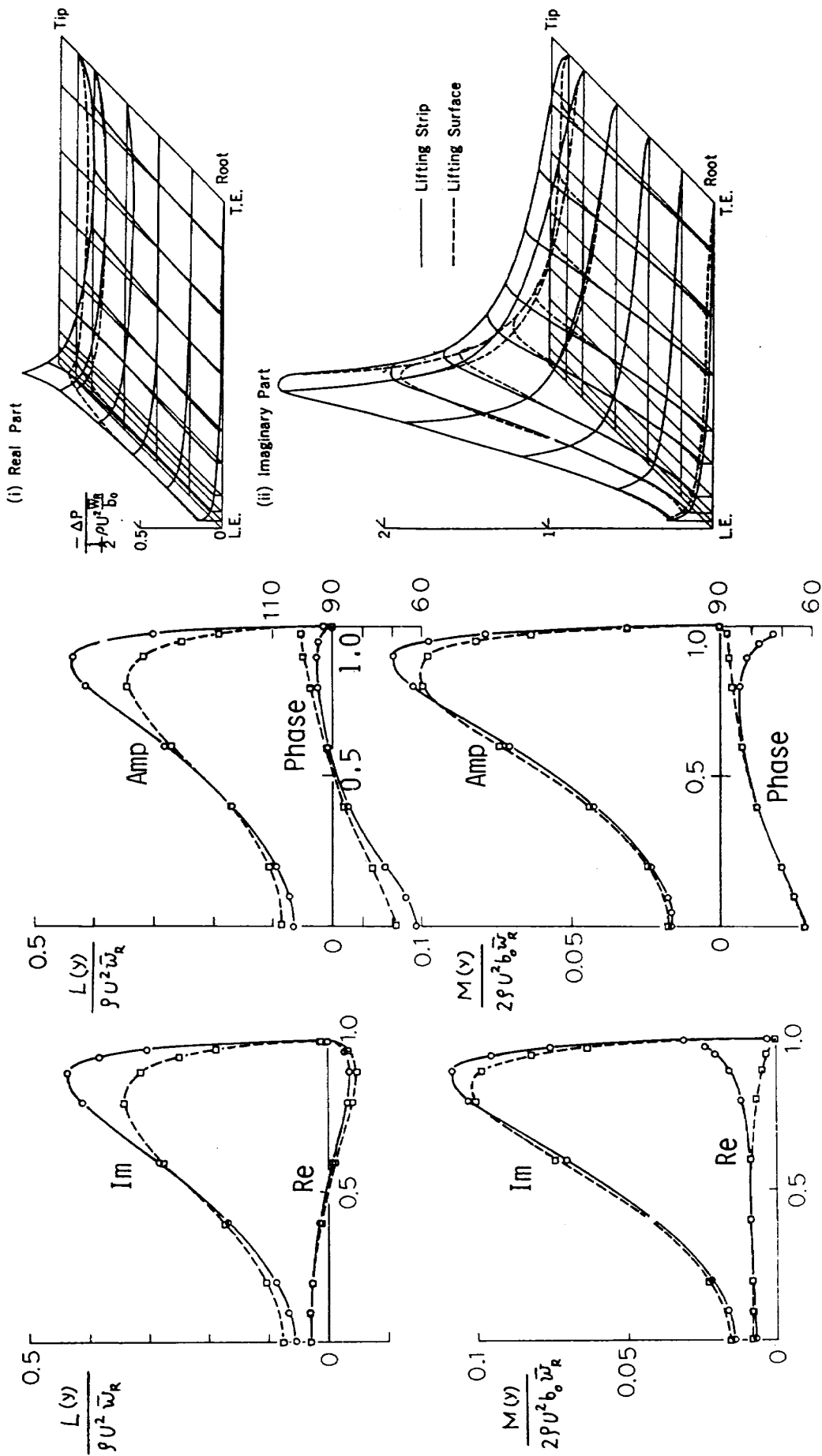
(c) アスペクト比6, 無次元振動数0.667, 上下振動

図C-1 続き



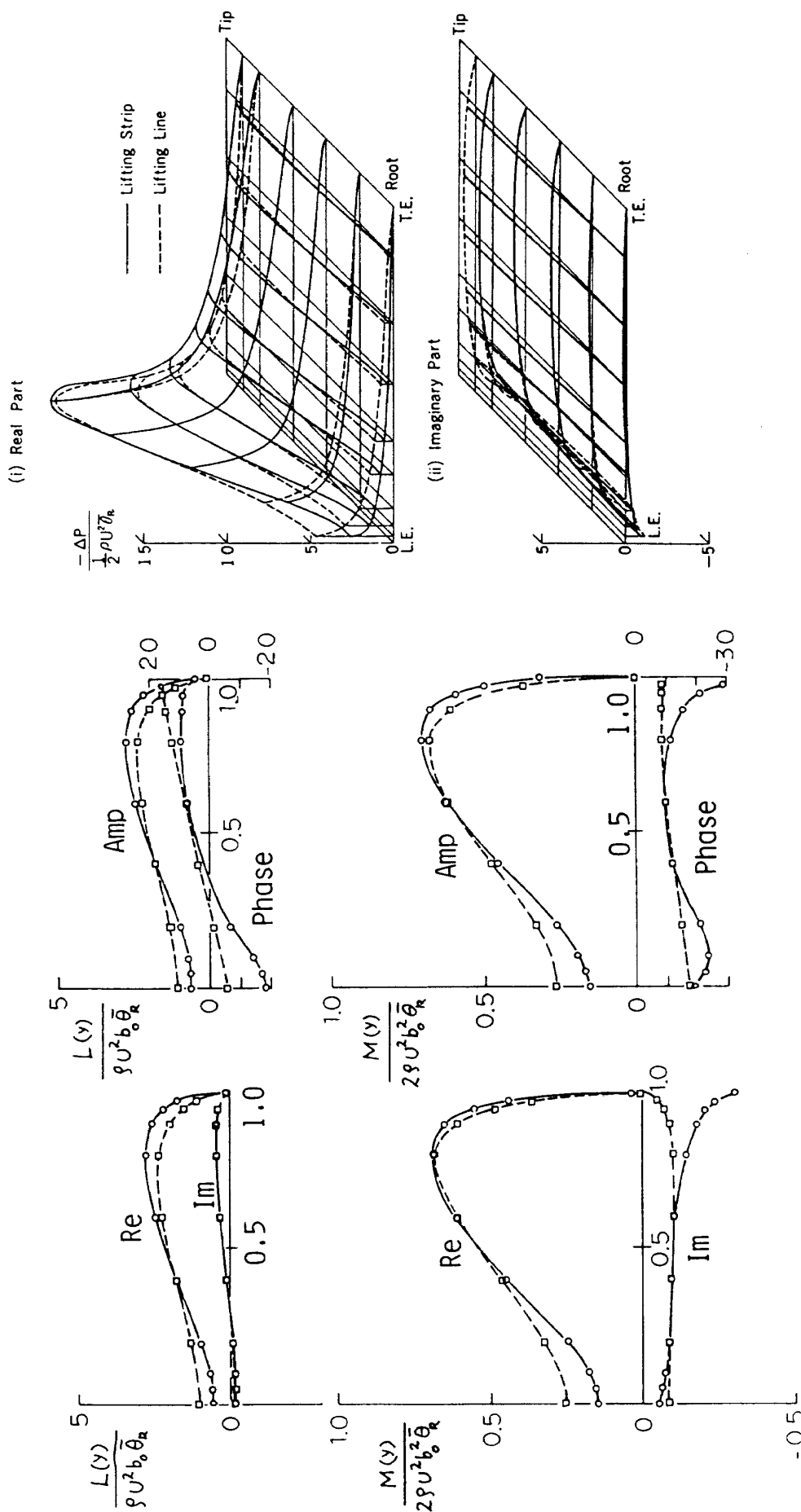
(d) アスペクト比 6, 無次元振動数 0.2, 縦揺れ振動

図 C-1 続き



(e) アスペクト比6, 無次元振動数0.2, 曲げ振動(振動モード:放物線)

図C-1 続き



(f) アスペクト比 6, 無次元振動数 0.2, 換り振動 (振動モード: 直線)

航空宇宙技術研究所報告 867号

昭和60年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社三興印刷
東京都新宿区信濃町12三河ビル

Printed in Japan