

ISSN 0389-4010
UDC 533.69.01
532.526:
517.949

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-873

翼型まわり遷音速流の粘性・非粘性干渉計算法

松 野 謙 一

1985年8月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

ABSTRACT	1
1. 序論	1
2. 粘性・非粘性干渉モデル	2
3. 完全ポテンシャル流計算法	5
3.1 計算格子	5
3.2 完全ポテンシャル流方程式	8
3.3 AF2反復法	9
4. 粘性領域計算法	13
4.1 薄せん断層方程式	14
4.2 乱流モデル	15
4.3 PC-CN有限差分法	17
5. 数値計算	23
5.1 計算手順	23
5.2 計算例と議論	25
6. まとめ	31
参考文献	31

翼型まわり遷音速流の粘性・非粘性干渉計算法*

松 野 謙 一**

A Viscous-Inviscid Interaction Method to Predict the Aerodynamic Performance of Airfoils at Transonic Speed

Kenichi MATSUNO

ABSTRACT

The present paper describes a calculation method for predicting the aerodynamic performance of single airfoils in the transonic flows of high Reynolds numbers. For the inviscid part of the method, a transonic full potential equation represented on an algebraically generated C-topology coordinate system is solved by a fully conservative AF2 iteration scheme. A finite difference method (PC-CN Scheme) is used for the boundary layer and wake solutions. In the viscous method, an algebraic turbulence model for the asymmetric near wake is also developed. The model used to achieve viscous-inviscid coupling is the equivalent source model. The wake thickness and curvature are taken into account. The calculations for turbulent wake flows indicated good agreement with the experimental data, and show that the velocity profiles across the wake and minimum velocities can be computed satisfactorily with the present method. Comparisons of the predictions with high Reynolds number wind tunnel experiments show good agreement for pressure distributions, lift and drag.

1. 序 論

遷音速翼の空力特性を評価推算する為には、粘性効果を考慮する事が重要である。高レイノルズ数遷音速粘性流にたいする実用的解析法として、現在最もよく用いられているのは、いわゆる粘性・非粘性干渉計算法と呼ばれるものである。この手法は、粘性効果は翼表面の境界層とその伴流（まとめて薄せん断層）のみに限られるとし、そこから算出される排除厚効果を通して非粘性解析を補正する方法である。いいかえれば、領域を粘性の無視できない領域と無視できる非粘性領域とに分けて別個に扱い、他方の影響は、境界条件を通して取り入れて、互いに

干渉的 (Interactive) に反復して収束解を得る方法である。この粘性・非粘性干渉計算法は、実用性 (精度, 経済性) の高さから特に二次元翼に対して多くの計算法が報告され [1, 2, 3] 現在なおより適用範囲の広い方向, 例えば剥離を含む流れ等へと発展し続けている。この種の計算法は、流れがほとんどの領域で付着しかつ衝撃波と境界層との干渉も弱いのを仮定した弱干渉計算法と、衝撃波—境界層干渉が強かつ剥離のある場合を仮定した強干渉計算法とに大別される。粘性領域の取り扱いも圧力分布を与えて排除厚分布を予測する順解法, 逆に, 排除厚を与えて圧力分布を計算する逆解法, といった方法が試みられている。干渉反復計算過程に関しても, 一般的な境界層順解法を使った順モード, 剥離流を取り扱い易くするためまた収束を加速するため, 逆解法を使った逆モード, 半逆モードといった様々な

* 昭和60年6月3日受付

** 空気力学第二部

試みがなされている。このように二次元翼型に対する粘性・非粘性干渉計算法はいろいろ試みられ確立されつつあるが、三次元翼に対するそれは、未発展といわざるをえない。例えば、二次元干渉計算では伴流の効果の導入は様々な方法で試みられているが、三次元では、筆者の調べた限り三例〔4, 5, 6〕しかなく、その内一例〔5〕は二次元的な取り扱い（Strip 理論）によっている。実用的設計道具としての要請からも三次元干渉計算法の確立は非常に重要である。この様に、三次元干渉計算を考慮したうえで、既存の二次元干渉計算法を概観すると二次元から三次元への発展拡張は直接的でないと考えられる。少なくとも、粘性領域の計算法に問題があるといえる。

本論文の目的は、三次元干渉計算法を確立する為の前段階として、三次元に直接拡張出来るような理論（粘性・非粘性干渉計算法）を、二次元を対象として提示する事である。本論文に於いて、三次元への拡張を前提とした干渉計算法を提示しようとする訳であるが、その精度としては Collyer〔7〕, Collyer and Rock〔8〕程度以上を目標とする。したがって、非粘性領域は遷音速完全ポテンシャル流を、粘性領域は境界層型の薄せん断層流を、それぞれ仮定する。Melnik ら〔9〕による干渉計算法（GRUMFOIL）は、三層構造理論（Triple-deck theory）を取り入れた非常に精密なものではあるが、計算時間の増加を招くので、そこまでの精度は考えない。

三次元への拡張の可能性という観点から既存の二次元干渉計算法を概観すると、幾つかの問題点があり、拡張は直接的とはいえない。その理由は、既存の干渉計算法に於ける粘性領域の取り扱いが、殆ど全ての計算法において、積分法による手法を用いている点である。例えば解説〔1, 2, 3〕。積分法による粘性領域の計算には、特に乱流の取り扱いの中に、実験に基づく多数の経験則が含まれる。この多数の経験則を含むことは、三次元流に対してはなお一層の経験則の増加を意味する事に当たり、またそれを支持する実験データが必要である事を意味する。しかしながら、三次元翼伴流に関する実験データが殆ど無いのが現状である。したがって、積分法による粘性領域の取り扱いの、二次元から三次元への拡

張は、直接的ではない。いろいろな翼型、翼平面形状に対する実験データの蓄積が必要である。現在、三次元伴流に対する解析法は、何れも積分法によるもので実験的裏付けが乏しいといわざるをえない。一方、積分法に対比される粘性領域計算法に支配偏微分方程式を直接差分法によって解く所謂微分法がある。微分法は、乱流モデルという近似は導入するが、それ以外では厳密な取り扱い法である。したがって、二次元から三次元への拡張は、直接的であり理論的飛躍は殆どない。また含まれる乱流モデルもその変更は容易である。以上より、積分法に比べ計算時間は多く必要とするが、ここでは微分法による粘性領域計算を考える。なお、微分法に基づいた三次元伴流の解析例は、筆者の知る限り未だ見当たらない。

以下、第 2 章に於いて、伴流の効果をも含んだ干渉モデルについて述べる。第 3 章では、完全ポテンシャル流計算法について、第 4 章では粘性領域に対する計算法を、夫々既存の方法と対比しつつ述べる。以上の計算法を使った計算例が第 5 章に於いて幾つか挙げられ、ここで提案する計算法の精度等が議論される。第 6 章にまとめとして結論を述べる。

2. 粘性非粘性干渉モデル

本論文で扱おうとする干渉形態は、図 1 に示す如く、非粘性解析に依る圧力分布を粘性領域の計算境界条件に与へ、粘性特性を算出する。次に排除厚等の粘性特性を非粘性解析の境界条件に与える。以下、この操作を解が収束するまで繰り返す（順モード、弱干渉モデル）。本論文では、非粘性領域は遷音速完全ポテンシャル方程式により、粘性領域は流れを横切って圧力一定とした境界層型の薄せん断層方程式（Thin shear layer equations）により、夫々支配されると仮定する。

粘性効果をどの程度まで非粘性計算に於いて考慮するかによって自ずと計算精度が左右される。従前から考慮されているのは、翼面排除厚効果で、それだけでもある程度の精度が得られる（Bauer, Garabedian and Korn〔10〕, Bavitz〔11〕, 河合ほか〔12〕）。しかし、クリティカルな条件の遷音速流の場合、粘性効果は、翼面境界層だけを考慮したの

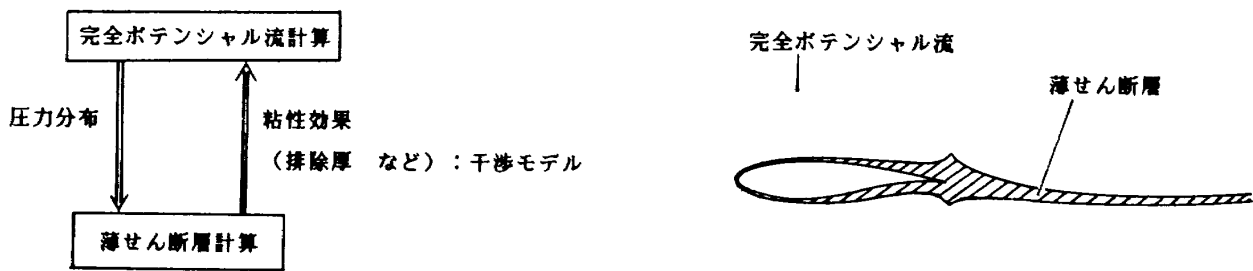


図1 粘性・非粘性干渉

は不十分であり、伴流の効果も非常に重大であることが報告されている[8][9]。伴流の存在が非粘性流に及ぼす効果としては、排除厚効果と曲率効果の二とおりが考えられる。排除厚は、一般に、翼面上では、衝撃波足元を除き、単調に増加し続ける。一方、伴流域では、逆に単調に減少し続ける。したがって、排除厚効果としては、翼面上では翼型を厚くするように働き、 C_p 分布の変化は C_L を減少させるようになる。逆に、伴流に於いては、排除厚分布は単調減少傾向をとるので、その効果は、翼面上の流れを加速するように働き、結果的に C_L を増加させるような働きをする。伴流曲率効果は、排除厚効果に比べると小さいが、次のような働きをする。曲率効果は、それを横切る圧力の変化に対応する。曲率を持った伴流の存在は、それが有限の厚さを持つわけであるから、伴流の向心力と釣り合う量の圧力差が、伴流上下境界になければならない。伴流の曲率が最も大きいのはニアウエイク (Near wake) である。したがって、曲率効果を考慮するということは、翼後縁部から下流に向かって伴流上下で圧力差を許容することにあたる。これは、非粘性解析に於けるクッタ条件を変更することにあたり、結果的には、普通翼面上の C_p 分布が全体として C_L が小さくなる方向にかわる。しかしながら、この伴流曲率効果については、それを考慮することが非常に重要であるという報告[9]と、特別な翼型 (RAE2822)を除いてそれは C_p 分布の決定に対して特に目立った効果は見られないとした報告[13]とが、なされている。何れの報告も、伴流排除厚効果は顕著で無視できないとしている。ここでは、全ての粘性効果 (翼面排除厚効果、伴流排除厚効果、及び伴流曲率効果) を考慮する。

翼まわりの非粘性計算に於いては、対象とする領

域が、多重連結であるので、普通、翼後縁部から出るカット線を仮定しそこで領域を上下に分けて考え単連結領域として取り扱う。このカット線は、普通伴流のある位置に近い位置に設定するので、伴流カット線 (Wake cut line) または渦層線 (Vortex sheet line) と呼ばれる。したがって、非粘性領域の境界条件は、このカット線上で与える必要がある。粘性効果は、翼面上および伴流カット線上より取り入れられる。

上述の排除厚効果と曲率効果を非粘性流計算の境界条件に取り入れる具体的方法は次の通りである。まず排除厚効果を非粘性流に取り入れる方法は二とおりある[1]。ひとつは、教科書にもでていたよく知られた方法で、排除厚 δ^* を翼面に重合させ、粘性の影響による流量欠損分を、翼面では翼厚を膨らませ、伴流では排除厚分の仮想の物体を引きずることによって補償し、粘性効果を非粘性流計算に取り入れる方法である。これは、排除厚モデル (Displacement thickness model) と呼ばれる。この場合の非粘性流計算に於ける境界条件の変更は、境界 (翼、伴流) 幾何形状の変化として行なわれる。この場合、非粘性流計算の反復過程で、粘性計算する毎に翼形状が変化するので、その都度格子生成を行なわなければならない、非効率である。他のひとつは、等価わき出し吸い込みモデル (Equivalent source-sink model) または等価吹き出しモデル (Equivalent transpiration model) と呼ばれるもので、排除厚を重ねる代わりに、それと等価な効果を持つわき出し吸い込み分布を置くモデルである。このモデルは、非粘性計算に於ける翼表面および翼後縁部から仮定する伴流カット線の計算条件境界設定部分に粘性の影響による流量欠損分を生ぜしめるだけの効果を持つわき出し吸い込み量を置いて排除厚効果を非粘性計算に反映させるものである。この場合、わき出し

吸い込み速度の大きさだけを変化させればよく、格子生成は最初の一度きりでよいので、能率の点で優れている。本論文では、干渉モデルとしてこの等価わき出し吸い込みモデルを用いる。

今、排除厚 δ^* および運動量厚 θ を次式

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy \quad (\text{翼面}) \quad (1)$$

$$\delta_w^* = \int_{-\infty}^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy \quad (\text{伴流}) \quad (2)$$

$$\theta_w = \int_{-\infty}^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (\text{伴流}) \quad (3)$$

によって定義する。ここに、 ρ は密度、 u 流れ(s)方向の速度成分、 y は s 方向に垂直の座標をそれぞれ表わす。なお、本論文では、薄せん断層外縁の状態は、下添字 $()_e$ を付けて区別する。この薄せん断層外縁の状態は、後に述べるように、非粘性流の翼面上および伴流カット線上の状態に一致することに注意する。このとき、翼面は排除厚効果、伴流排除効果および伴流曲率効果は、以下の様にして非粘性計算に導入される[1](図2参照)。まず、翼面排除厚効果。翼面上の境界条件として、わき出しを、速度

$$v_n = \frac{1}{\rho_e} \frac{d}{ds} (\rho_e u_e \delta^*) \quad (4)$$

で分布させる。伴流排除厚効果は、伴流カット線上で、吸い込みを置いて導入する。この吸い込みは、伴流カット線を垂直に横切る非粘性速度成分 v が、“跳び(jump)” Δv_n

$$v_{(+)} - v_{(-)} = \Delta v_n = \frac{1}{\rho_e} \frac{d}{ds} (\rho_e u_e \delta_w^*) \quad (5)$$

を持つものとして解釈される。ここで、伴流カット線上側、下側それぞれについて、下添え記号 $()_{(+)}$ 、 $()_{(-)}$ によって区別した。以下についても同様とする。粘性効果によって生ずる伴流曲率効果は、非粘性流計算に対し、伴流カット線を境にして圧力 p が、 Δp :

$$p_{(+)} - p_{(-)} = \Delta p = \kappa \rho_e u_e^2 (\theta_w + \delta_w^*) \quad (6)$$

だけ“跳ぶ”ことを意味する。ここに κ は、伴流の曲率である。非粘性流を、ポテンシャル流を仮定したとき、この圧力の“跳び” Δp は、伴流カット線に沿う速度成分の“跳び” Δu_t として書き換えることができる。

$$\Delta p = -\rho_e u_e \Delta u_t + O(\Delta u_t^2) \quad (7)$$

したがって、伴流曲率効果は、伴流カット線上で、それに沿う方向の非粘性速度成分 u が、

$$u_{(+)} - u_{(-)} = \Delta u_t = -\kappa u_e (\theta_w + \delta_w^*) \quad (8)$$

の“跳び”を持つものとして取り扱う。なお、(5) - (8) 式に於ける ρ_e および u_e は、伴流カット両側の非粘性流平均値を仮定する。

$$\rho_e = \frac{1}{2} (\rho_{(+)} + \rho_{(-)}), \quad u_e = \frac{1}{2} (u_{(+)} + u_{(-)}) \quad (9)$$

一方、粘性領域薄せん断層方程式の境界条件として必要な薄せん断層外縁圧力分布は、翼面境界層に対しては非粘性流翼面上圧力を、伴流に対しては、伴流カット線上両側非粘性流圧力の平均値を、それぞれ用いる。

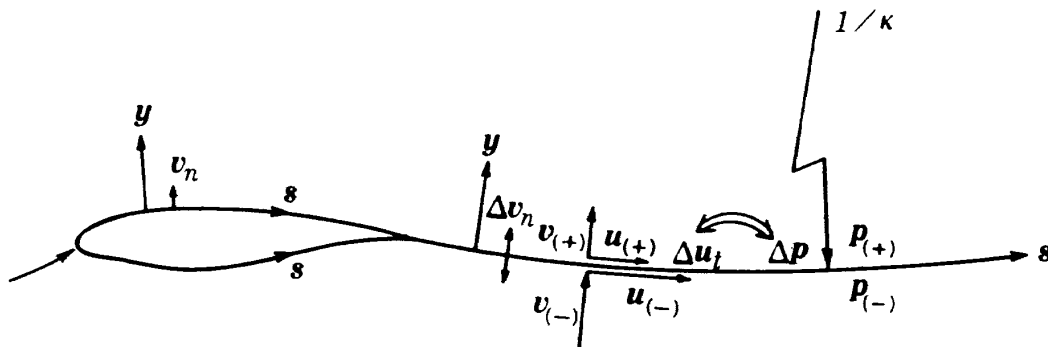


図2 粘性・非粘性干渉計算境界条件

3. 遷音速完全ポテンシャル流計算法

非粘性領域を完全ポテンシャル流と仮定したときそれを解く方法(スキーム)について、その保存性、非保存性について考察する必要がある。保存、非保存の違いは衝撃波における取り扱いから起きる。方法に保存性がない無いということは衝撃波を横切る量、ポテンシャル流の場合は質量であるが、保存されずそこにわき出しがあることを意味する。これは、非保存性の方法で形成される衝撃波に於ける物理量の“跳び”が、ランキン・ユゴーニオ衝撃波のそれよりも小さいことに対応する。一方、保存性の方法によるそれは、ランキン・ユゴーニオのそれよりも大きくなる。境界層の効果は、一般に、衝撃波を弱める方向に働くので、非保存性の方法の場合、衝撃波が弱くなりすぎるきらいがある。Lockら[8]は、パラメータにより重みを掛けて保存、非保存両方を組み合わせた方法によって良好な結果を得ている。彼らの方法は、実験と合うようにパラメータを調節することによりいくらかでも精度を上げられるが、理論的にあまり厳密ではない。工学的な応用面では、保存性の方法よりも非保存性の方法の方が多用されている。しかしながら、この非保存性の方法は、前述のごとく衝撃波に於いて質量の生成を生じ、それ自体純粋に数値的なもので物理的なものでは無く、したがって衝撃波の強さがそこでの格子幅に大きく依存する、といった性質をもつ。ここでは、衝撃波が強くて理論に忠実な方、保存性の方法によって解く方を探る。

3.1 計算格子

二次元翼型まわりを対象とした完全ポテンシャル流計算に対しては、使用される計算格子は、O-トポロジーのものが殆どである。一方、三次元翼に対するものでは、C-トポロジーのものが多く。本論文では、伴流の効果を出るだけ誤差なく取り入れることが目的であるから、伴流カット線の設定が、より自由度高くでき、かつ、三次元への拡張を考慮して、C-トポロジーの計算格子を取ることにする。

本論文で行なおうとする干渉計算法の大きな特徴は、経済性(計算時間が短い)であるから、格子生

成法もその特徴を損なわないものであることが必要である。したがって、格子生成は、CPU時間の殆どかからない代数的方法によって行なう。ここでの計算格子生成法の基本的な考え方は、次の様である。カーテシアン系で記述された対象とする物理空間(x^1, x^2)を、 $X^1 + iX^2 = C(x^1 + ix^2)^{1/2}$, $i = \sqrt{-1}$ の型の複素写像により半平面に切り開き、次に、境界部分が指定の位置にくるようにまた同時に格子分布が適当な疎密を持つように拡大縮小、伸縮等の操作を施すことにより最終的な長方形の計算空間を構成する。

対象とする計算領域を図3(a)に示すように翼を取り囲むように有限の領域 $AaBcCDdEFGH$ と設定する。ここに EFG が翼表面に対応するとする。また、遠方境界 $AaBcC$ は、直線と楕円弧で与える。この計算対象物理領域を次の一連の写像およびクラスタリングによって長方形の計算空間に写像するわけである。

(写像1)

$$(x^1, x^2) \text{ 系} \rightarrow (\bar{x}^1, \bar{x}^2) \text{ 系}$$

翼前縁曲率中心近傍の適当な位置(曲率中心と翼前縁部の中心点がよい) (x_p^1, x_p^2) を取り、そこが原点となるように平行移動を施す。

$$\bar{x}^1 = x^1 - x_p^1$$

$$\bar{x}^2 = x^2 - x_p^2$$

(写像2)

$$(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \text{ 系} \rightarrow (X^1, X^2) \text{ 系}$$

対象領域を次の複素変換によって半平面に移す(図3(a)→(b))。

$$X^1 + iX^2 = C(\bar{x}^1 + i\bar{x}^2)^{1/2}$$

(写像3)

$$(X^1, X^2) \text{ 系} \rightarrow (\bar{X}^1, \bar{X}^2) \text{ 系}$$

伴流カット線および翼表面に対応する曲線 $DEFGH$ を $X^2 = l_{DFH}(X^1)$ とし、これが $\bar{X}^2 = 0$ にくるように移す(図3(b)→(c))。

$$\bar{X}^1 = X^1$$

$$\bar{X}^2 = X^2 - l_{DFH}(X^1)$$

(写像4)

$$(\bar{X}^1, \bar{X}^2) \text{ 系} \rightarrow (\bar{\bar{X}}^1, \bar{\bar{X}}^2) \text{ 系}$$

遠方境界に対応する曲線 ABC を $\bar{\bar{X}}^2 = l_{ABC}(\bar{\bar{X}}^1)$

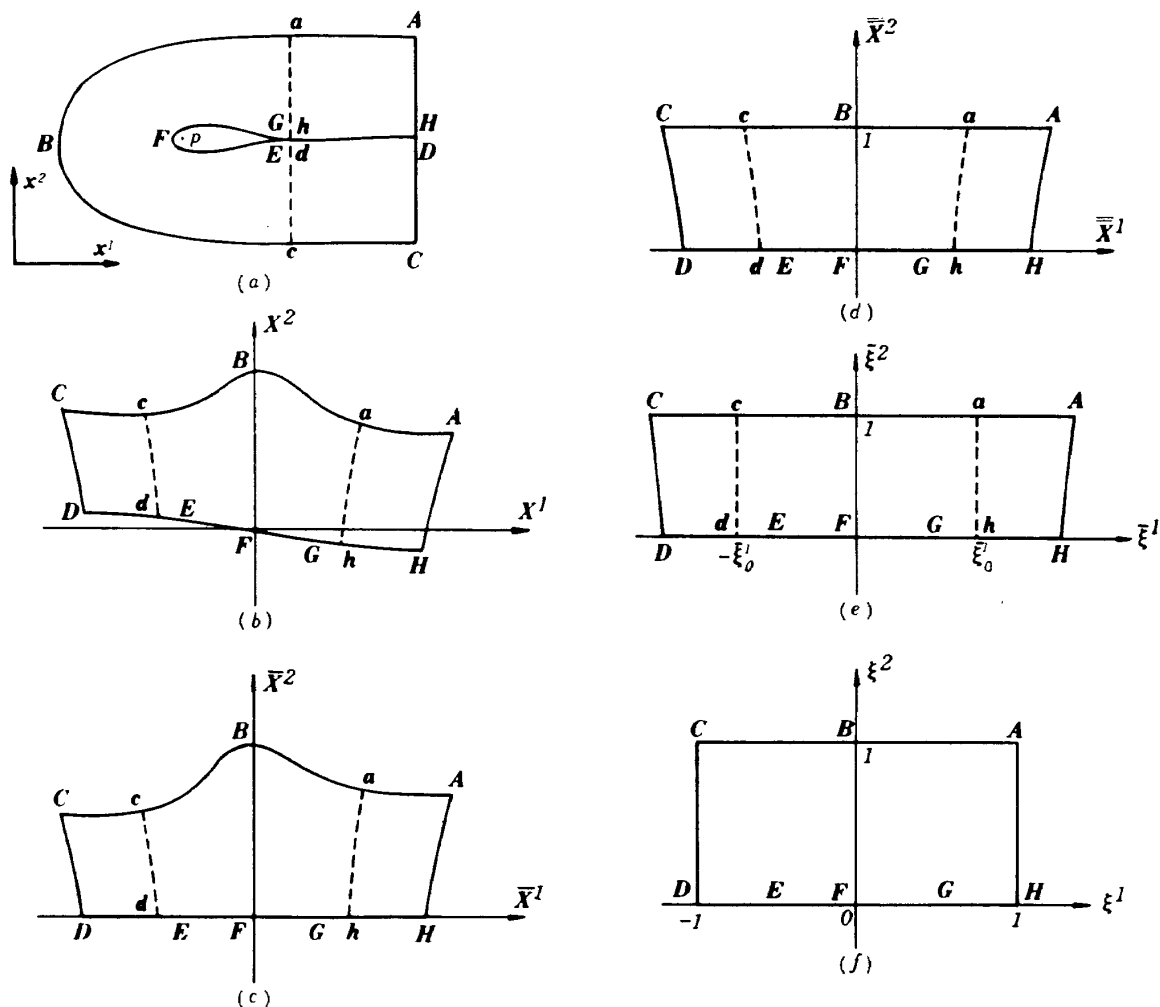


図 3 写 像

とし、これが $\bar{X}^2=1$ にくるように移す(図 3(c)→(d))。

$$\bar{X}^1 = \bar{X}^1$$

$$\bar{X}^2 = \bar{X}^2 / l_{ABC}(\bar{X}^1)$$

(写像 5)

$$(\bar{X}^1, \bar{X}^2) \text{ 系} \rightarrow (\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2) \text{ 系}$$

翼後縁付近にとっておいた直線 ah に対応する曲線 ah を $\bar{X}^1 = l_{ah}(\bar{X}^2)$ とし、これが $\bar{\xi}^1 = \bar{\xi}_0^1 (= \text{一定} < 1)$ にくるように、一方、曲線 cd を $\bar{X}^1 = l_{cd}(\bar{X}^2)$ とし、これが $\bar{\xi}^1 = -\bar{\xi}_0^1$ にくるように、移す(図 3(d)→(e))。

$$\bar{\xi}^1 / \bar{\xi}_0^1 = \bar{X}^1 / |l_{cd}(\bar{X}^2)| \quad (\bar{X}^1 < 0)$$

$$\bar{\xi}^1 / \bar{\xi}_0^1 = \bar{X}^1 / l_{ah}(\bar{X}^2) \quad (0 < \bar{X}^1)$$

$$\bar{\xi}^2 = \bar{X}^2$$

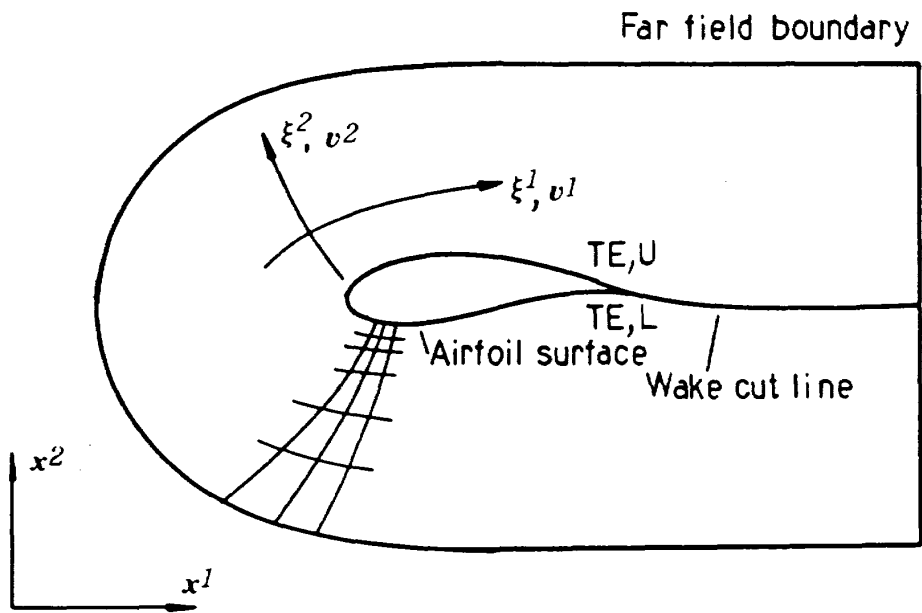
(写像 6)

$$(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2) \text{ 系} \rightarrow (\xi^1, \xi^2) \text{ 系}$$

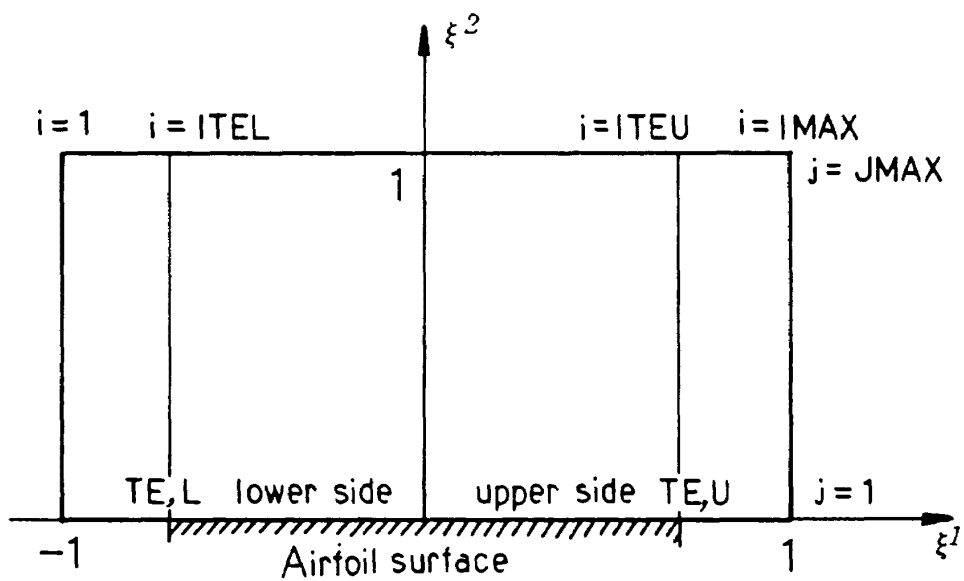
遠方流出境界に対応する曲線 AH および CD が、そ

れぞれ $\xi^1=1$, $\xi^1=-1$ になるように(写像 5)と同様の操作を行なう。次に、物理面と計算面の対応点： $(x^1, x^2) \leftrightarrow (\xi^1, \xi^2)$ の調節を行なう。ここでは、計算格子を等間隔にとったとき、物理面で必要に応じて対応点が疎密になるよう調節する。 ξ^1 方向は、翼前縁付近で過度に密にならないように、また、翼後縁部ではある程度密になるように、一方、遠方流出境界付近では疎になるように、等比数列を部分的に折りまけて調節する。 ξ^2 方向は、翼表面付近で密になり翼から離れるにつれて疎になるように等比数列を利用して調節する(図 3(e)→(f))。

計算空間で等間隔格子を組み、上述の一連の写像を逆に：(写像 6)→(写像 1)たどることにより、物理面との対応付けを行なう。このようにして生成した格子について、物理空間と計算空間との関係を図 4 に示す。また実際に生成した格子の例を図 5 に示す。図 5(a)は翼付近を拡大して示し、図 5(b)は全

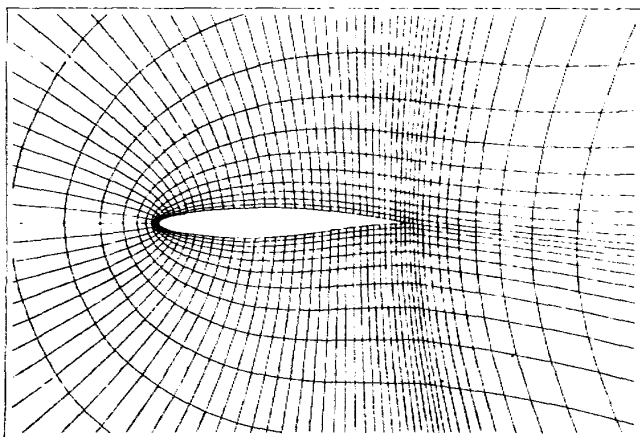


(a) 物理空間

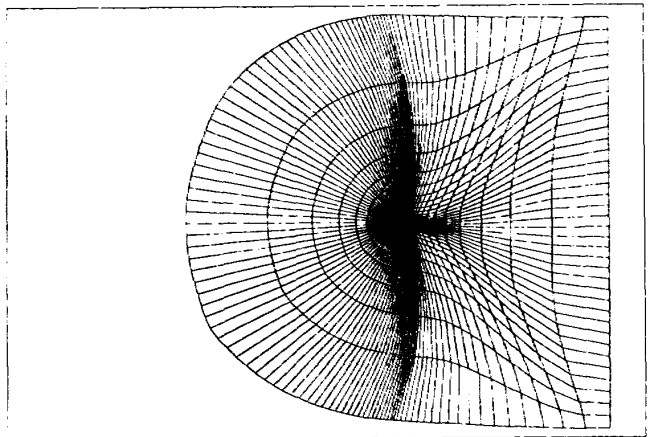


(b) 計算空間

図4 物理空間と計算空間



(a)



(b)

図5 ポテンシャル流計算格子

体を示す。わかり易くするために図 5 では格子の数を実際の計算に使ったものより少なく (1/4) して示している。

3.2 完全ポテンシャル流方程式

保存形表示による、定常、圧縮完全ポテンシャル流方程式は、カーテシアン系 (x^1, x^2) で書くと

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\rho = \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (11)$$

で与えられる。ここに、 ϕ は完全速度ポテンシャルであり、 ρ は密度、 γ は比熱比、 x^1 および x^2 はそれぞれ主流およびそれに垂直な方向の座標を示す。

また、速度成分 $\frac{\partial \phi}{\partial x^1}$ および $\frac{\partial \phi}{\partial x^2}$ は臨界音速 a^* により、また密度 ρ は淀み点密度 ρ_s によって、それぞれ無次元化されている。

カーテシアン系 (x^1, x^2) で書かれた方程式 (10) および (11) を、前節で生成した物体適合座標系 (ξ^1, ξ^2) で表示すると次の様になる (図 4 参照)。

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} (\rho \sqrt{g} v^1) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\rho \sqrt{g} v^2) = 0 \quad (12)$$

$$\rho = \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(v^1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} + v^2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi^2} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (13)$$

ここに、

$$v^1 = \frac{1}{g} g_{22} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - \frac{1}{g} g_{12} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^2} \quad (14)$$

$$v^2 = -\frac{1}{g} g_{12} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} + \frac{1}{g} g_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^2} \quad (15)$$

また、 g_{ij} は計量テンソル (metric tensor) を表わし、 g はその行列式である。

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^j} \quad (16)$$

$$g = \det (g_{ij}) \quad (17)$$

v^i ($i=1, 2$) は、 ξ^i 方向の反変速度成分 (contravariant velocity component) を示し、その物理成分 (physical component) $v^{(i)}$ は次式で表わされる。

$$v^{(i)} = \sqrt{g_{ii}} v^i \quad (18)$$

境界条件

計算空間 (ξ^1, ξ^2) 系に於ける境界条件は、次の様に表わされる。

(1) 翼面境界条件：

粘性効果の無い場合は、流れの速度ベクトルが、翼面に沿うという条件が課される。即ち、

$$v^2 = 0 \quad (19)$$

粘性効果として、翼面排除厚効果を取り入れる場合 (4) 式で評価されるわき出し速度が、上述の翼面に沿うという条件に重ね合わされる。(4) 式の速度 v_n は、翼面に垂直の成分を持ち、かつ物理成分で表わされていることに注意して、計算面に書き換えると、次の様に書かれる。

$$v_{(n)}^1 = -\frac{g_{12}}{\sqrt{g g_{11}}} v_n \quad (20a)$$

$$v_{(n)}^2 = \sqrt{\frac{g_{11}}{g}} v_n \quad (20b)$$

(20) 式に対応する速度ポテンシャル変化量は、

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} \right)_{(v_n)} = 0 \quad (21a)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2} \right)_{(v_n)} = \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} v_n \quad (21b)$$

であるから、翼面の境界条件は、(19) 式の場合をも含む形で次のように書くことができる。まず、

$$v^2 = v_{(n)}^2 = \sqrt{\frac{g_{11}}{g}} v_n \quad (22)$$

今、(22) 式を (15) 式に代入することにより

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2} = \frac{g}{g_{11}} \left(v_{(n)}^2 + \frac{g_{12}}{g} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} \right) \quad (23)$$

(21a) 式を考慮して、(14) 式に (23) 式を代入すると

$$v^1 = \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - \frac{g_{12}}{g_{11}} v_{(n)}^2 \quad (24)$$

したがって、(22) 式と (24) 式が翼面境界条件となる。

(2) 伴流カッター線上境界条件：

以下、簡単のため、伴流カッター線上、上側 ($\xi_{TE}^1 < \xi^1, \xi^2 = 0$) に添記号 (+) を、下側 ($\xi^1 < -\xi_{TE}^1, \xi^2 = 0$) に添記号 (-) を付けて示す。まず、粘性効果の無い場合は、伴流カッター線を横切って物理量の連続性を課す。いい換えれば、 ξ^1 方向、 ξ^2 方向とも ϕ の変化量が伴流カッター線上、

上下両側で等しいという条件を課す。この場合のクッタ条件は、馴染み表現にて次のように表わされる。翼後縁に於ける上下ポテンシャルの差 ($\phi_{TE(+)} - \phi_{TE(-)}$) と同じ量の差を、伴流カット線上全域でもつ。また循環 Γ は、そのポテンシャルの差として定義される。したがって、循環は、伴流カット線上一定値となる。

粘性効果として、伴流排除厚効果を取り入れる場合、伴流カット線を垂直に横切る速度成分が、(5)式で与えられる量 Δv_n だけ不連続に跳ぶという条件が課される。(5)式で表わされる速度の跳びは、伴流カット線に垂直の成分を持ち、かつそれが物理成分で与えられていることに注意して、計算面に書き換えると、

$$v_{(+)}^1 - (-v_{(-)}^1) = \Delta v_{(n)}^1 = -\sqrt{\frac{g_{12}}{g_{11}}} \Delta v_n \quad (25a)$$

$$v_{(+)}^2 - (-v_{(-)}^2) = \Delta v_{(n)}^2 = \sqrt{\frac{g_{11}}{g}} \Delta v_n \quad (25b)$$

また、(14)、(15)式より、対応する速度ポテンシャルの変化量の“跳び”は、

$$\Delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^1}\right)_{(n)} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^1}\right)_{(+)} - \left(-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^1}\right)_{(-)}\right) = 0 \quad (26a)$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^2}\right)_{(n)} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^2}\right)_{(+)} - \left(-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^2}\right)_{(-)}\right) = \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} \Delta v_n \quad (26b)$$

となる。なお、この場合も、クッタ条件は、上述と同一に表現される。

更に、伴流曲率効果を取り入れる場合、今度は、伴流カット線に沿う速度成分が、(8)式で与えられる量 Δu_t だけ不連続に跳ぶという条件が課される。おなじく(8)式で表わされる速度の跳びは、伴流カット線に平行の成分を持ち、かつ物理成分で表示されていることに注意して、計算面で表わすと、

$$v_{(+)}^1 - (-v_{(-)}^1) = \Delta v_{(t)}^1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \Delta u_t \quad (27a)$$

$$v_{(+)}^2 - (-v_{(-)}^2) = \Delta v_{(t)}^2 = 0 \quad (27b)$$

(14)、(15)式より、(27)式に対応する速度ポテンシャルの変化量の“跳び”は、次式で与えられる。

$$\Delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^1}\right)_{(t)} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^1}\right)_{(+)} - \left(-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^1}\right)_{(-)}\right) = \sqrt{g_{11}} \Delta u_t \quad (28a)$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^2}\right)_{(t)} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^2}\right)_{(+)} - \left(-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^2}\right)_{(-)}\right) = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} \Delta u_t \quad (28b)$$

したがって、(28a)式により、この場合のクッタ条件は、次の様になる。翼後縁に於ける循環 Γ_{TE} は、伴流カット線に沿って(28a)式を満足するように変化する。遠方境界に於いて、最終的な循環 Γ_∞ が決定する。

(3) 遠方境界条件：

遠方境界は、翼より十分遠方に仮定するので、ここでは、主流の条件を仮定する。揚力のある場合、上述のように決定された循環 Γ_∞ を、主流条件を満たす ϕ 分布に重ね合わせる。循環 Γ_∞ の分布は、微小攪乱流の漸近展開理論にあわせて選ぶ。ここでは、遠方境界条件として、次式の様に与える。

$$\phi = \phi_\infty(x^1, x^2) - \frac{\Gamma_\infty}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma_\infty^2}{4\pi^2} \frac{r+1}{8K} \frac{\log r}{r} \cos \theta \quad (29)$$

$$\rho = \rho_\infty \quad (30)$$

ここに

$$\phi_\infty(x^1, x^2) = (U_\infty \cos \alpha) x^1 - (U_\infty \sin \alpha) x^2 \quad (31)$$

$$r = (x^1)^2 + (1 - M_\infty^2)(x^2)^2$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\sqrt{1 - M_\infty^2} \frac{x^2}{x^1} \right) \quad (32)$$

3.3 AF2 反復法

定常問題に対する反復解法は、一般的な記法で

$$NC^n = -\omega L\phi^n \quad (33)$$

と表わすことができる。ここに、 C^n は、修正量 ($\phi^{n+1} - \phi^n$) であり、 n は反復回数を示し、 ω は緩和パラメータを表わす。 L は、対象とする支配方程式を差分近似するオペレータを表わし、それを作用させた $L\phi^n$ は、残差を表わす。左辺の修正オペレータ N は、反復過程を示すもので、 N の選択如何によ

って収束状況が大きく左右される。一般論として、オペレータ N は、 L の近似形でありさえすればよく、その形に任意性がある。

この種の定常問題では、逐次過緩和法 (Successive Over Relaxation Scheme: SOR 法) や逐次線過緩和法 (Successive Line Over Relaxation Scheme: SLOR 法) がよく使われ、信頼性の高い方法として定評がある。欠点としては、遷音速流を対象とした場合、差分形が型依存 (type-dependent) であること、したがって走査 (sweep) の方向が流れの方向に合わせて変える必要がある点である。言い換えれば、これからおおいに普及することが確実視される科学技術計算専用スーパーコンピュータの並列処理システムには不向きと言える。一方、計算の高能率化をねらって提案された方法のひとつに、陰的近似因子分解法 (Implicit Approximate Factorization Scheme: IAF 法) がある。これはオペレータ N を次のように因子の積に分解することによって並列処理化を容易にしかつ収束をも加速しようとするものである。

$$N \sim N_1 N_2 \quad (34)$$

IAF 法の中でも、AF2 法と呼ばれる反復法は、Holst ら [15, 16, 17] によって翼まわりの遷音速完全ポテンシャル流問題に適用発展せられその有効性が示された。Holst らによると AF2 法の特徴として、第一にその収束性の良さ (SLOR 法の 2 倍以上) が挙げられているが、それ以外に、型依存差分形でないことや並列処理に向いていること、コーディングが容易なこと等が挙げられる。ここでは、AF2 法が本論文の主旨にあった特徴を具備していると考えられるので、反復法としてそれを採る。

今、AF2 反復法を、物体適合一般座標系で表わされたポテンシャル方程式 (12) に適用しよう。簡単の為、差分オペレータ $\vec{\delta}_{\xi^1}$, $\overleftarrow{\delta}_{\xi^1}$, $\vec{\delta}_{\xi^2}$ および $\overleftarrow{\delta}_{\xi^2}$ を

$$\vec{\delta}_{\xi^1} ()_{ij} = \frac{1}{\Delta \xi^1} \{ ()_{i+1,j} - ()_{ij} \} \quad (35a)$$

$$\overleftarrow{\delta}_{\xi^1} ()_{ij} = \frac{1}{\Delta \xi^1} \{ ()_{ij} - ()_{i-1,j} \} \quad (35b)$$

$$\vec{\delta}_{\xi^2} ()_{ij} = \frac{1}{\Delta \xi^2} \{ ()_{ij+1} - ()_{ij} \} \quad (35c)$$

$$\overleftarrow{\delta}_{\xi^2} ()_{ij} = \frac{1}{\Delta \xi^2} \{ ()_{ij} - ()_{ij-1} \} \quad (35d)$$

と定義する。ここに、 i は ξ^1 方向の、また j は ξ^2 方向の、それぞれ格子番号とする。(12) 式に対する AF2 反復法は、 N -オペレータのうち、非対称部分を ξ^2 方向にとることによって、次式のように書くことができる。

$$\alpha N_1 N_2 C_{ij}^n = -\alpha \omega L \phi_{ij}^n \quad (36)$$

ここに、 N -オペレータに対応する左辺は、

$$\begin{aligned} \alpha N_1 N_2 C_{ij}^n &= - \left[\alpha + \overleftarrow{\delta}_{\xi^2} \rho_{ij+1/2}^n \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \right)_{ij+1/2} \right] \\ &\quad \cdot \left[-\alpha \vec{\delta}_{\xi^2} - \overleftarrow{\delta}_{\xi^1} \tilde{\rho}_{ij}^n \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right)_{i+1/2,j} \vec{\delta}_{\xi^1} \right] C_{ij}^n \end{aligned} \quad (37)$$

残差 $L \phi_{ij}^n$ に対応する右辺の具体形は、

$$\begin{aligned} -\alpha \omega L \phi_{ij}^n &= -\alpha \omega \left[\overleftarrow{\delta}_{\xi^1} \{ \tilde{\rho}_{ij}^n (\sqrt{g} v^1)_{i+1/2,j} \} \right. \\ &\quad \left. + \overleftarrow{\delta}_{\xi^2} \{ (\rho \sqrt{g} v^2)_{ij+1/2}^n \} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

但し、 α は、収束の速さに関連するパラメータであり、 $\tilde{\rho}_{ij}^n$ は、後に定義する重み付き密度である。(12) 式に対する AF2 法は、上式以外にも考えられるが、本論文のような C -オートポロジーの格子系に対しては上式の形が、 ξ^1 方向に対する安定化項が不要であるので適していると思われる。 ξ^1 方向に対する安定化項とは、 N_2 オペレータに含ませる $-\alpha \overleftarrow{\delta}_{\xi^1}$ なる項であり流れの方向に合わせて、前進/後退差分オペレータを使い分ける必要がある [17]。

残差計算 ((12) 式の空間差分近似)

図 4(b) に示すように、特別の格子点に ITEL, ITEU, IMAX, JMAX 等名前を付けておく。ここに ITEL は翼後縁下部に、ITEU は翼後縁上部にそれぞれ対応する。 $i=1$, IMAX および $j=1$, JMAX なる格子点は、計算領域の境界に位置し、境界条件を与えるところである。今、これらの点を境界点、それ以外の点を内点とそれぞれ呼ぶことにする。内点および境界点の残差の計算はそれぞれ以下に述べるごとくに行なう。以下、簡単の為上添字 n は省略する。

(1) 内点の残差計算

超音速領域に対する人工粘性項は、Holst ら [15] に倣って導入する。このとき (12) 式に対する二次

精度差分近似は、次式と書くことができる。

$$L\phi_{ij} = \delta_{\xi^1} \{ \tilde{\rho}_{ij} (\sqrt{g} v^1)_{i+1/2j} \} + \delta_{\xi^2} \{ (\rho \sqrt{g} v^2)_{ij+1/2} \} = 0 \quad (39)$$

ここに、

$$v_{i+1/2j}^1 = \left(\frac{g_{22}}{g} \right)_{i+1/2j} \frac{1}{\Delta \xi^1} (\phi_{i+1j} - \phi_{ij}) - \left(\frac{g_{12}}{g} \right)_{i+1/2j} \frac{1}{4\Delta \xi^2} (\phi_{i+1j+1} - \phi_{i+1j-1} + \phi_{ij+1} - \phi_{ij-1}) \quad (40)$$

$$v_{ij+1/2}^2 = - \left(\frac{g_{12}}{g} \right)_{ij+1/2} \frac{1}{4\Delta \xi^1} (\phi_{i+1j+1} - \phi_{i-1j+1} + \phi_{i+1j} - \phi_{i-1j}) + \left(\frac{g_{11}}{g} \right)_{ij+1/2} \frac{1}{\Delta \xi^2} (\phi_{ij+1} - \phi_{ij}) \quad (41)$$

$$\tilde{\rho}_{ij} = (1 - \nu_{i+kj}) \rho_{i+1/2j} + \nu_{i+kj} \rho_{i+2k-1/2j} \quad (42)$$

ただし、(M: 局所マッハ数, C: 定数)

$$k=0: v_{i+1/2j}^1 \geq 0$$

$$k=1: v_{i+1/2j}^1 < 0 \quad (43a)$$

$$\nu_{ij} = \max[0, (M_{ij}^2 - 1)C] \quad (43b)$$

ここで、 $\rho_{i+1/2j}$, $\rho_{ij+1/2}$ 等の評価は、Bateman Variational Principleに基づき、次式

$$\rho_{i+1/2j} = \frac{1}{2} (\rho_{i+1/2j+1/2} + \rho_{i+1/2j-1/2}) \quad (44a)$$

$$\rho_{ij+1/2} = \frac{1}{2} (\rho_{i+1/2j+1/2} + \rho_{i-1/2j+1/2}) \quad (44b)$$

で評価し、さらに $\rho_{i+1/2j+1/2}$ は、次式により評価する。

$$\rho_{i+1/2j+1/2} = \left[1 - \frac{r-1}{r+1} \left\{ \frac{g_{22}}{g} (\phi_{\xi^1}^2 - 2 \frac{g_{12}}{g} \phi_{\xi^1} \phi_{\xi^2} + \frac{g_{11}}{g} (\phi_{\xi^2}^2) \right\}_{i+1/2j+1/2} \right]^{\frac{1}{r-1}} \quad (45)$$

但し、

$$(\phi_{\xi^1})_{i+1/2j+1/2} = \frac{1}{2\Delta \xi^1} (\phi_{i+1j+1} - \phi_{ij+1} + \phi_{i+1j} - \phi_{ij}) \quad (46a)$$

$$(\phi_{\xi^2})_{i+1/2j+1/2} = \frac{1}{2\Delta \xi^2} (\phi_{i+1j+1} - \phi_{i+1j} + \phi_{ij+1} - \phi_{ij}) \quad (46b)$$

計量テルソンより構成される量 \sqrt{g} , g_{11}/g , g_{12}/g

および g_{22}/g は、(i, j)点で二次精度で評価し、格子中間点(例えば、(i+1/2, j))に於ける値は算術平均による。

(2) 境界点の残差計算

境界点に於ける残差計算には、基本的に内点と変わりが無く、変わるところは、(39)式に境界条件を取り込む形で行なうことである。

(i) 翼面上の境界点 (ITEL < i < ITEU, j = 1):

この場合、 ξ^2 方向の差分をとるため、翼の中に仮想の格子点(i, 1-1/2)を設定し、境界条件(22)式を考慮して、そこでの値を次の様に仮定する。

$$(\rho \sqrt{g} v^2)_{i1-1/2} = 2 (\rho \sqrt{g} v_{(n)}^2)_{i1} - (\rho \sqrt{g} v^2)_{i1+1/2} \quad (47)$$

但、 ρ_{i1} の評価は、下に述べる(49)式を使って ρ_{i1}

$= \frac{1}{2} (\rho_{i+1/21} + \rho_{i-1/21})$ により、 $v_{i1+1/2}^2$ の評価は、

(41)式による。一方、翼面に於ける $v_{i+1/21}^1$ の値は、(24)式より次のように評価できる。

$$v_{i+1/21}^1 = \left(\frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - \frac{g_{12}}{g_{11}} v_{(n)}^2 \right)_{i+1/21} = \left(\frac{1}{g_{11}} \right)_{i+1/21} \frac{1}{\Delta \xi^1} (\phi_{i+11} - \phi_{i1}) - \left(\frac{g_{12}}{g_{11}} \right)_{i+1/21} \frac{1}{2} (v_{(n)i+1}^2 + v_{(n)i}^2) \quad (48)$$

密度 $\tilde{\rho}_{ij}$ は、(42), (43)式によって計算する。但し、 $\rho_{i+1/21}$ は、(23)式を考慮して、次式による。

$$\rho_{i+1/21} = \left[1 - \frac{r-1}{r+1} \left\{ \frac{g_{22}}{g} (\phi_{\xi^1}^2 - 2 \frac{g_{12}}{g} \phi_{\xi^1} \phi_{\xi^2} + \frac{g_{11}}{g} (\phi_{\xi^2}^2) \right\}_{i+1/21} \right]^{\frac{1}{r-1}} \quad (49)$$

$$(\phi_{\xi^1})_{i+1/21} = \frac{1}{\Delta \xi^1} (\phi_{i+11} - \phi_{i1}) \quad (50a)$$

$$(\phi_{\xi^2})_{i+1/21} = \left[-\frac{g}{g_{11}} (v_{(n)}^2 + \frac{g_{12}}{g} \phi_{\xi^2}) \right]_{i+1/21} \quad (50b)$$

以上を使って(39)式により残差を計算する。

(ii) 伴流カット線上の境界点 (i < ITEL, ITEU < i, j = 1):

この場合、伴流カット線上の計算に必要な仮想格子点を、j = 2の格子点に重なるように設定する。

即ち、下面側伴流カット線 ($i = IL < ITEL$, $j = 1$) の残差計算に必要な仮想格子点 (IL , 0) を、($i = IMAX + 1 - IL$, $j = 2$) に、上面側伴流カット線 ($i = IU > ITEU$, $j = 1$) の残差計算に必要な仮想格子点 (IU , 0) を、($i = IMAX + 1 - IU$, $j = 2$) に、それぞれ設定する。簡単のため、 IL と IU が対応すると ($IL = IMAX + 1 - IU$ な関係がある) 見るとき、

$$\phi_{IU0} = \phi_{IU1} - \Delta\xi^2 (\phi_{\xi^2})_{IU1} + O((\Delta\xi^2)^2) \quad (51a)$$

$$\phi_{IL2} = \phi_{IL1} + \Delta\xi^2 (\phi_{\xi^2})_{IL1} + O((\Delta\xi^2)^2) \quad (51b)$$

辺々引くことにより、

$$\phi_{IU0} - \phi_{IL2} = \Gamma_{IU} - \Delta\xi^2 \{ (\phi_{\xi^2})_{IU1} - (-\phi_{\xi^2})_{IL1} \} + O((\Delta\xi^2)^2) \quad (52)$$

ここで、

$$\Gamma_{IU} = \phi_{IU1} - \phi_{IL1} \quad (53)$$

と定義した。 Γ_{IU} は、伴流曲率効果を見捨てる時は、一定となる。(52) 式右辺第二項は、(26b)、(28b) 式および符号の正負を考慮して、

$$\begin{aligned} & \{ (\phi_{\xi^2})_{IU1} - (-\phi_{\xi^2})_{IL1} \} \\ &= (\Delta(\phi_{\xi^2})_{nt})_{IU} = \left\{ \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} \Delta v_n + \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} \Delta u_t \right\}_{IU} \end{aligned} \quad (54)$$

となる。 $O((\Delta\xi^2)^2)$ の項は、微小量として無視する [7] とし、仮想格子点に於ける ϕ_{IU0} は、次式によって評価する。

$$\phi_{IU0} = \phi_{IL2} + \Gamma_{IU} - \Delta\xi^2 (\Delta(\phi_{\xi^2})_{nt})_{IU} \quad (55)$$

同様に、

$$\phi_{IL0} = \phi_{IU2} - \Gamma_{IU} + \Delta\xi^2 (\Delta(\phi_{\xi^2})_{nt})_{IU} \quad (56)$$

次に、(28a) 式を、以下の様に差分表示する。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta\xi^1} (\phi_{IU+1,1} - \phi_{IU-1,1}) \\ & - \left(\frac{-1}{2\Delta\xi^1} (\phi_{IL+1,1} - \phi_{IL-1,1}) \right) \\ &= (\sqrt{g} \Delta u_t)_{IU1} \end{aligned} \quad (57)$$

いま、

$$\begin{aligned} \Delta(\phi_{\xi^1 \xi^1})_t &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^{12}} \right)_{(+)} - \left(- \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^{12}} \right)_{(-)} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi^1} (\sqrt{g_{11}} \Delta u_t) \end{aligned} \quad (58)$$

を、連続と仮定する。(58) 式を、次の様に差分表示する。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\Delta\xi^1)^2} (\phi_{IU+1,1} - 2\phi_{IU1} + \phi_{IU-1,1}) \\ & - \left(- \frac{1}{(\Delta\xi^1)^2} (\phi_{IL+1,1} - 2\phi_{IL1} + \phi_{IL-1,1}) \right) \\ &= \delta_{\xi^1} (\sqrt{g} \Delta u_t)_{IU+1/2,1} \end{aligned} \quad (59)$$

(57), (59) 両式より

$$\begin{aligned} \phi_{IU1} &= \phi_{IL1} + \Gamma_{IU-1} + \Delta\xi^1 (\sqrt{g_{11}} \Delta u_t)_{IU1} \\ & - \frac{1}{2} (\Delta\xi^1)^2 \delta_{\xi^1} (\sqrt{g} \Delta u_t)_{IU+1/2,1} \end{aligned} \quad (60)$$

ここで、

$$\Gamma_{IU-1} = \phi_{IU-1,1} - \phi_{IL+1,1} \quad (61a)$$

$$\Gamma_1 = \phi_{ITEU1} - \phi_{ITEL1} \quad (61b)$$

以上、(55), (56) 及び (60) 式より伴流カット線上に於ける循環 Γ_{IU} の分布、仮想格子点に於ける ϕ の値等が計算できる。以上仮想格子点を利用することにより、伴流カット線上の境界点も、内点と全く同様にして残差を計算する。

(iii) 遠方境界 ($i = 1$; $i = IMAX$; $j = JMAX$)

：翼を取り囲む遠方境界では、残差零を仮定する。したがって、ここでは、(29), (30) 式で与えられる ϕ および ρ の分布を境界条件として与える。

AF2 反復法

本論文に於ける AF2 反復法は、(36) - (38) 式に示した如く、次の様に書ける。

$$\begin{aligned} & - \left[\alpha + \delta_{\xi^2} \rho_{ij+1/2}^n \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \right)_{ij+1/2} \right] \left[-\alpha \delta_{\xi^2} \right. \\ & \left. - \delta_{\xi^1} \tilde{\rho}_{ij}^n \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right)_{i+1/2,j} \delta_{\xi^1} \right] C_{ij}^n = -\alpha \omega L \phi_{ij}^n \end{aligned} \quad (62)$$

したがって、上記 (62) 式による修正値 C_{ij}^n を求める手順は次の 2 ステップに分けて書くことができる。

ステップ 1 :

$$\left[\alpha + \delta_{\xi^2} \rho_{ij+1/2}^n \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \right)_{ij+1/2} \right] f_{ij}^n = \alpha \omega L \phi_{ij}^n \quad (63)$$

ステップ 2 :

$$\left[-\alpha \delta_{\xi^2} - \delta_{\xi^1} \tilde{\rho}_{ij}^n \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right)_{i+1/2,j} \delta_{\xi^1} \right] C_{ij}^n = f_{ij}^n \quad (64)$$

ここで、 f_{ij}^n は、中間段階の値で各格子点について保存する。

(i) ステップ1, 中間値 f_{ij}^n の計算: ステップ1の中間値 f_{ij}^n を求める段階では、 ξ^1 = 一定線に沿った二項対角方程式を解くことになる。即ち、(63)式を f_{ij}^n について具体的に書くと次の様になる。

$$f_{ij}^n = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{4\xi^2} \rho_{ij+1/2}^n \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \right)_{ij+1/2}} \times \left[\frac{1}{4\xi^2} \rho_{ij-1/2}^n \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \right)_{ij-1/2} f_{ij-1}^n + \alpha \omega L \phi_{ij}^n \right] \quad (j=2, 3, 4, \dots, \text{JMAX}) \quad (65)$$

(65)式では、 $j=1$ に於ける境界条件としての値を仮定することが必要である。この値は、物理的意味が薄弱であり、一方である程度収束を速くするような値を任意に選べる自由度を持つ、ここでは、安定解析による結果に倣う。仮想点 $j=0$ を考え、 $f_{i0}^n = \theta f_{i1}^n$ (θ : 定数), $\rho_{i1/2}^n (g_{11}/\sqrt{g})_{i1/2} \approx \rho_{i1+1/2}^n (g_{11}/\sqrt{g})_{i1+1/2}$ を仮定する。これらを(65)式に代入して f_{i0}^n を求める。

$$f_{i0}^n = \frac{\alpha \omega L \phi_{i1}^n}{\alpha + \frac{1}{4\xi^2} \left[\rho_{i1+1/2}^n \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \right)_{i1+1/2} (1-\theta) \right]} \quad (66)$$

本論文では、終始 $\theta = -1$ と置いた。

(ii) ステップ2, 修正値 C_{ij}^n の計算: (64)式を、未知量 C_{ij}^n を左辺に集めて書き下すと次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{4\xi^1} \right)^2 \tilde{\rho}_{i-1,j}^n \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right)_{i-1/2,j} \right] C_{i-1,j}^n \\ & + \left[-\frac{\alpha}{4\xi^2} - \left(\frac{1}{4\xi^1} \right)^2 \tilde{\rho}_{ij}^n \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right)_{i+1/2,j} \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{4\xi^1} \right)^2 \tilde{\rho}_{i-1,j}^n \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right)_{i-1/2,j} \right] C_{ij}^n \\ & + \left[\left(\frac{1}{4\xi^1} \right)^2 \tilde{\rho}_{ij}^n \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right)_{i+1/2,j} \right] C_{i+1,j}^n \\ & = -f_{ij}^n - \frac{\alpha}{4\xi^2} C_{ij+1}^n \end{aligned} \quad (67)$$

したがって、遠方境界点 ($i=1$, $i=\text{IMAX}$, $j=\text{JMAX}$) に於ける C_{ij}^n を知って (67) 式によって C_{ij}^n は解ける。この場合、 ξ^2 = 一定線の方角の三対

角方程式となり容易に解きうる。境界条件としての遠方境界に於ける C_{ij}^n (簡単の為 $C_{0,B}^n$ と書く) は、零を仮定しても収束する。ここでは収束を加速する目的で遠方境界に加え合わされる $\Gamma_\infty (= \Gamma_{\text{IMAX}})$ の値を ($n+1$) 段階目を予測して決めることにする。 Γ_∞ より計算される (29) 式右辺第二項以降まとめて $\Gamma_{0,B}^n$ と書くことにする。このとき

$$\Gamma_{0,B}^{n+1} = 3(\Gamma_{0,B}^n - \Gamma_{0,B}^{n-1}) + \Gamma_{0,B}^{n-2} \quad (68)$$

と予測し、これを使って、

$$\begin{aligned} C_{0,B}^n &= \text{URF} \times (\Gamma_{0,B}^{n+1} - \Gamma_{0,B}^n) \\ &= \text{URF} \times (2\Gamma_{0,B}^n - 3\Gamma_{0,B}^{n-1} + \Gamma_{0,B}^{n-2}) \end{aligned} \quad (69)$$

ここで URF は 1 以下の正定数である。

以上によって求めた C_{ij}^n より新しい ($n+1$) 段階に於ける更新された ϕ_{ij}^{n+1} の分布が求められる。

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n + C_{ij}^n \quad (70)$$

(62)式に於けるパラメータ α は、収束速度に大きく関係する。反復過程そのものが、疑似時間方向に進行していくと解釈することができるのでこの α は Δt^{-1} (Δt : 時間方向ステップ幅) に対応すると解釈できる。したがって、 α が小さな値をとる程速く収束することが期待できる。実際には、小さい α は、低周波の誤差 (error) を取り除くには有効であるが高周波成分は残ってしまう。逆に、大きい α は、高周波誤差を取り除くのに有効である。ここでは、文献[15]と同じく α を大きな値 α_H と小さい値 α_L との間を次式により周期的 (周期: M) に繰り返すように選ぶ。

$$\alpha_K = \alpha_H \left(\frac{\alpha_L}{\alpha_H} \right)^{\frac{K-1}{M-1}} \quad K=1, 2, \dots, M \quad (71)$$

4. 粘性領域計算法

粘性領域として、翼面だけを考慮した粘性非粘性干渉計算法は多数存在するが、伴流をも考慮したのは少ない。これは、揚力のある場合、伴流が本質的に非対称であることによる理論的な取り扱いのむづかしさにあるように思われる。また、後縁近傍の流れが、付着条件から開放されることによる物理構造上の煩雑さもその一因であろう。ここで対象とした弱干渉計算法について筆者の調べた範囲では、伴流

の計算法で揚力のある翼の非対称伴流を取り扱ったものは、現在のところほとんどが積分方程式に基づくものであり、微分方程式によるものは稀である。積分方程式に基づく非対称伴流の取り扱いに問題がないわけではない。最もよく使われる Green の Lag-Entrainment 法 [18] による非対称伴流計算は、揚力の無い場合の対称伴流の取り扱い方法（伴流中心線上にて摩擦係数 $C_f=0$ とおく）をそのまま非対称伴流に対し近似拡張しているにすぎない。具体的には伴流を仮定した中心線を境に上下両側に分割、各々を対称伴流の片側として $C_f=0$ として計算し、その後全体に伴流特性値を計算するという方法をとっている。

本論文では、その目的により、微分方程式に基づき乱流モデルを使った計算法を提案する。非対称伴流に対しても上述のような近似を使わず、より理論的に行なう。なお、乱流モデルについても実験データと比較検討し既存のモデルを改良したものをここで提示する。

4.1 薄せん断層方程式

高レイノルズ数流れを仮定し、かつ大きな剥離領域がないとする。この仮定は巡航状態の航空機を想定するとき妥当なものである。このとき、粘性領域全体を通しプラントルの境界層近似が成立すると仮定することができる。即ち、主流および翼の長さスケール $O(1)$ に対し粘性領域の厚さは $O(\delta)$ (δ : 境界層厚さ、伴流厚さ、 $\delta \ll 1$) を仮定する。したがって、伴流を垂直に横切る方向の圧力変化も零と仮定する。以上の仮定のもとに粘性領域は、翼面境界層および伴流通じて、次の薄せん断層方程式によって支配される。図 6 の座標系 (s, y) で表わすと、翼面境界層および伴流に対する、定常、二次元、層

流および乱流薄せん断層方程式 (TSL 方程式) は、次式となる。

連続式

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (72)$$

運動量式

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial s} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) \quad (73)$$

エネルギー式

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial s} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\mu}{P_r} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{P_r} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \rho \overline{v'H'} \right\} \quad (74)$$

但し、

$$\overline{\rho v} = \rho v + \overline{\rho'v'} \quad (75)$$

ここで、 ρ は密度、 u および v はそれぞれ s および y 方向の速度成分、 p は圧力、 μ は粘性係数、 P_r はプラントル数をそれぞれ表わす。全エンタルピ H は、定圧比熱 C_p 一定として

$$H = C_p T + \frac{1}{2} u^2 \quad (76)$$

で表わされる。レイノルズ応力 $-\rho \overline{u'v'}$ および $-\rho \overline{v'H'}$ に対する閉結仮定 (closure assumption) は次節で扱う。なお、粘性係数 μ は、サザランドの式

$$\frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{T}{T_e} \right)^{3/2} \frac{T_e + \sigma}{T + \sigma} \quad (77)$$

により評価する。プラントル数 P_r は、一定と仮定する。圧力勾配は、薄せん断層外縁の非粘性速度分布と次式によって関係付けられる。

$$\rho_e u_e \frac{du_e}{ds} = -\frac{dp}{ds} \quad (78)$$

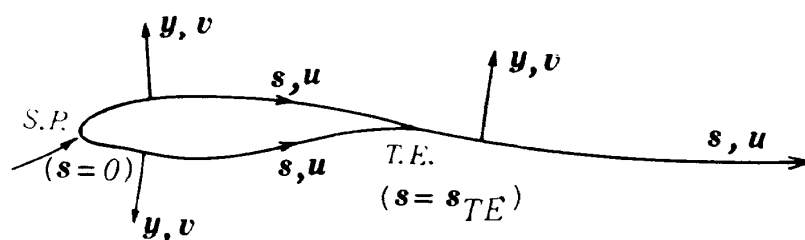


図 6 薄せん断層座標系

境界条件

翼面境界層に対して,

$$y=0: u=v=0, \frac{\partial H}{\partial y}=0$$

$$y \rightarrow \infty: u \rightarrow u_e(s), H \rightarrow H_e \quad (79)$$

を課す。伴流に対して,

$$y \rightarrow -\infty: u \rightarrow u_e(s), H \rightarrow H_e$$

$$y \rightarrow \infty: u \rightarrow u_e(s), H \rightarrow H_e \quad (80)$$

方程式が閉じる為には、あとひとつの境界条件が必要であるが、ここでは、次の条件

$$y=0: v=0 \quad (81)$$

を併定する。(81)式の妥当性については、例えば文献[19]に於いて、分離板(Splitter plate)伴流の異なる速度をもったふたつの流れの混合層(Mixing layer)問題に対する層流相似解についての議論のなかで、同じような仮定を設けそれについて若干議論されている。

4.2 乱流モデル

乱流薄せん断層方程式(72)－(74)が、閉じるためにはレイノルズ応力 $-\rho \overline{u'v'}$ および $-\rho \overline{H'v'}$ に対する閉結仮定(closure assumption)が必要である。ここでは乱流渦粘性(eddy viscosity) ϵ_m および乱流プラントル数 P_{rt} の概念を使い次のように仮定する。

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho \epsilon_m \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$-\rho \overline{H'v'} = \rho \frac{\epsilon_m}{P_{rt}} \frac{\partial H}{\partial y} \quad (82)$$

この渦粘性の評価について、Cebeci-Smith の二層モデルが壁面境界層について広範囲に亘って検証されその有効性は広く知られている[20]。ここでは、翼面境界層については、そのCebeci-Smith の二層モデルをそのまま採用する。伴流領域についてはCebeci 他によって提案された対称伴流に対する三層のモデル[21](ここでは、提案者らの頭文字をとってCTWSモデルと呼ぼう)を非対称な翼伴流に対するものに発展させたもの(仮にここでは“変形CTWSモデル”と呼ぼう)を提案する。オリジナルのCTWSモデルは、Cebeci-Smith 二層モデルを伴流に拡張したものであり、逆流領域の無い対称伴流

に対して実験と良く合うことが報告されている[21]。

ここで提案する変形CTWSモデルは、CTWSモデルと同様な考え方に立つが、ひとつには非対称伴流に適用するため、またひとつには翼粘性非粘性弱干渉計算に利用するため、いくつかの変形修正を行なったものである。その主な点は、モデルに於ける最も内側の層(Cebeciら[21]によるwake region)の簡略化、他に伴流実験プロファイルと比較その特性長の評価式を変えたこと等が挙げられる。

翼面境界層に対するCebeci-Smithモデル:

Cebeci-Smith 渦粘性二層モデルは領域を壁面近くの内層(inner layer)とその外の外層(outer layer)の二層に分け、各々で、渦粘性 ϵ_m を次のように定義する。

(内層): $y < y_1$

$$(\epsilon_m)_i = L^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \gamma_{tr} \quad (83)$$

(外層): $y > y_1$

$$(\epsilon_m)_o = 0.0168 \left| \int_0^\delta (u_e - u) dy \right| \gamma_{tr} \quad (84)$$

ここで

$$L = 0.4 y \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right] \quad (85a)$$

A は、“Van Driest damping length”と呼ばれる長さスケールで、次式で表わされる。

$$A = 26 \frac{\nu}{u_\tau} \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2} \quad (85b)$$

ここに、摩擦速度 u_τ 等次式による(下添え字 w は壁面状態を示す)。

$$u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{1/2}, \quad \tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (85c)$$

また、 γ_{tr} は、層流から乱流への遷移領域を模擬するパラメータで、 s_{tr} を遷移開始位置として次式で与えられる[22]。

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp \left[-G(s - s_{tr}) \int_{s_{tr}}^s \frac{ds}{u_e} \right] \quad (86)$$

ここで、 G は、spot-formation rate parameter と呼ばれるもので、

$$G = \frac{1}{1200} \frac{u_e^3}{\nu^2} R_{s_{tr}}^{-1.34}, \quad R_{s_{tr}} = \frac{u_e s_{tr}}{\nu} \quad (87)$$

但し, $R_{s_{tr}}$ は遷移開始点のレイノルズ数である。

なお, 内層と外層との接続点 y_1 の位置は, 内層外層通して ϵ_m が連続となる位置に選ばれる。

伴流に対する変形 CTWS モデル:

非対称伴流では, 翼後縁に於いて翼上下面異なる発達を受けて来た境界層がひとつになり伴流を形成する。本モデルは, 模式的に図 7 (スケールされていない) に示すように, 内層を更に二層に分け, ここではそれを伴流層 (wake layer) と呼ぼう。このように分けると, 図 7 に示すように, 発達の履歴の違いを考慮すると, 言わば五層モデルともいえる。以下に於いて, 翼上面境界層に続くものに U , 下面側境界層に続くものに L の, それぞれ添え字を付けて区別するものとする。さらに, $u = u_{min}$ となる位置を y_p と定義する。

(伴流層): $y_{2L} < y < y_{2U}$

$$(\epsilon_m)_{wk} = 0.4 u_r^{\overline{T.E.}} \bar{y} \quad (88)$$

ここで,

$$\bar{y} = 0.03 \bar{s}, \quad \bar{s} = (s - s_{T.E.})^{5/8}, \\ u_r^{\overline{T.E.}} = \max(u_{r,T.E.L}, u_{r,T.E,U}) \quad (89)$$

係数 0.03 は, Bradshaw のエネルギーモデル [23] に於ける, wake region の特性曲線の勾配が 0.03 ($dy/ds = 0.03$, $y < 0.2\delta$) であること, また, べき乗数 5/8 は, 翼後縁の物理構造のスケールが, $y \sim R_{ey}^{5/8}$ (R_{ey} : レイノルズ数) であることより選んだ。厳密な理論的根拠がそれ以上あるわけではな

い。

(内層): $y_{1L} < y < y_{2L}$, $y_{2U} < y < y_{1U}$

$$(\epsilon_m)_i = L^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (90)$$

ここで,

$$L = 0.4 |y - y_p| \quad (91)$$

(外層): $y < y_{1L}$, $y > y_{1U}$

$$(\epsilon_m)_{o,L} = 0.0168 \int_{-\infty}^{y_p} (u_e - u) dy \quad (92a)$$

$$(\epsilon_m)_{o,U} = 0.0168 \int_{y_p}^{\infty} (u_e - u) dy \quad (92b)$$

(88) 式で評価される $(\epsilon_m)_{wk}$ の大きさは, 翼後縁より十分下流になると (92) 式で評価される $(\epsilon_m)_{o,L}$ および $(\epsilon_m)_{o,U}$ より大きくなりうる。ここでは, 十分伴流が混合したときの渦粘性の評価を, 積分範囲を伴流全域に亘ってとった次式,

$$(\epsilon_m)_o = 0.0168 \int_{-\infty}^{\infty} (u_e - u) dy \quad (93)$$

によって与え, $(\epsilon_m)_{wk}$ が (93) 式の $(\epsilon_m)_o$ よりも大きくならない条件を課す。換言すれば, 一旦 $(\epsilon_m)_{wk} = (\epsilon_m)_o$ となったら ϵ_m はそれ以上にはならず一定値 $(\epsilon_m)_o$ とする。変形 CTWS モデルに於ける渦粘性 ϵ_m の分布の発達の様子を図 8 に模式的 (スケールされていない) に示す。グラフ中破線は (88), (90) および (92) 式によって示される分布で, 実線が ϵ_m の分布である。

$(\epsilon_m)_o$ としては, $(\epsilon_m)_o = \max((\epsilon_m)_{o,L}, (\epsilon_m)_{o,U})$

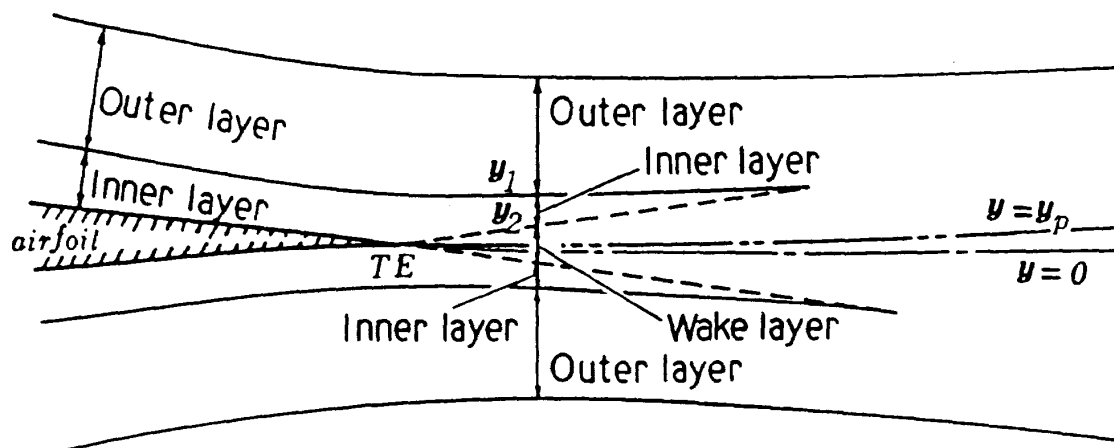


図 7 翼面境界層および伴流の渦粘性層

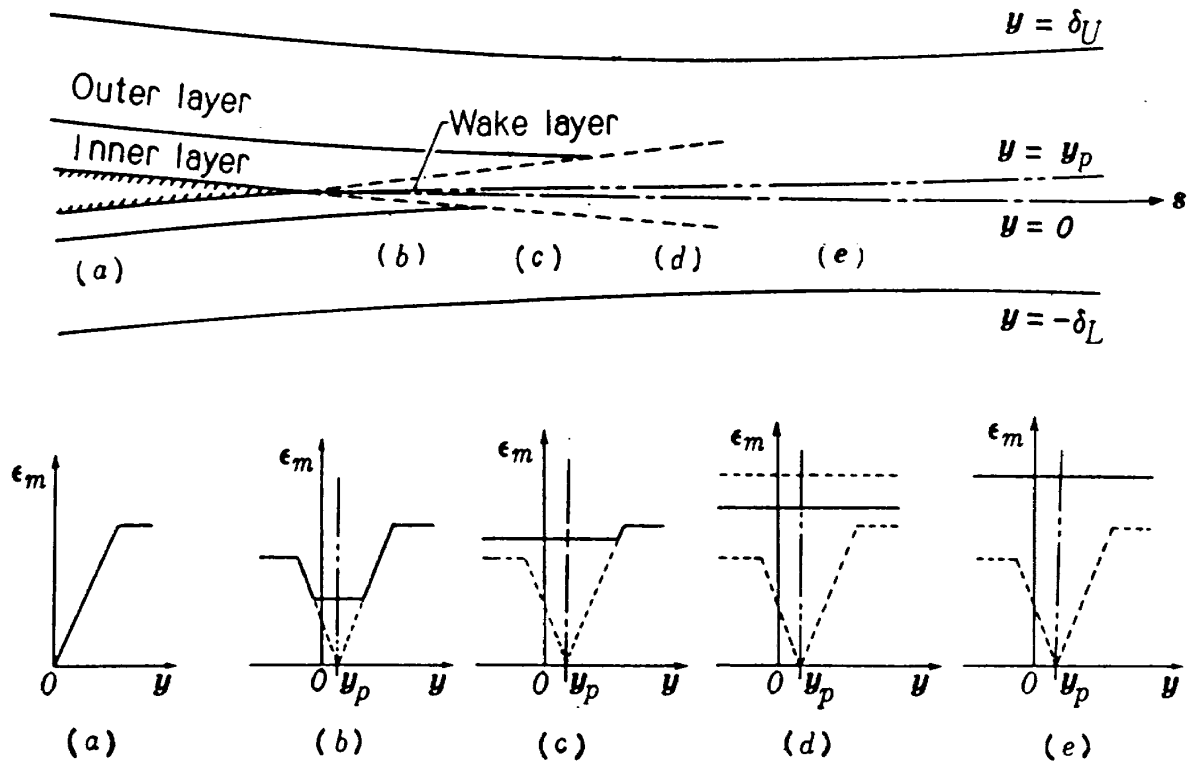


図8 渦粘性の変化の様子

と定義する方が、オリジナルのCTWSモデルに近いが、翼伴流に対する実験値との比較では(93)式による方が一致は良好であった。

4.3 PC-CN有限差分法

乱流モデルを含めた薄せん断層方程式(TSL方程式)の数値解を得るため、ここでは著者の開発した連成予測修正子型クランク・ニコルソン有限差分法(略してPC-CN法)を使う。この数値解法は、放物型方程式に対する数値解法としてDouglasとJones[24]によって提案された予測子修正子型クランク・ニコルソン法を、境界層方程式への適用を目的に、質量、運動量両式を連成(coupled)して取り扱い実質二次精度を持つようにしたもの[25]で、更に三次元乱流境界層へ適用するため拡張発展させたもの[26]である。このPC-CN法の特徴は、一計算段階が予測子、修正子の2ステップで演算が完結し、陰的差分法であるにもかかわらず、繰り返し計算が不要で、能率の良いことが挙げられる。例えば、スタンダードのクランク・ニコルソン法や、Keller's Box法などの陰的差分法は、一計算段階の中に繰り返し計算が必要である。その他の特徴とし

て、2方程式モデルのような高次乱流モデルの導入も、PC-CN法は、渦粘性を陽的に扱っているため、直接的にできかつ、計算時間の増大も小さいことが挙げられる。より大きな特徴は、主に三次元にあり、この場合交叉流方向の差分形態が、その速度の符号に独立であり、したがって並列演算コンピュータに適すること[26]である。

翼面境界層の数値解法

実際の計算に当たっては、物理量の y 方向の変化に応じ効率的に格子が配分されるように、また、計算機記憶容量の節約のため、TSL方程式(72)–(74)に次の変換を施す。

流れ関数 ψ を

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (94)$$

と定義し、新独立変数 (s, η) 、無次元流れ関数 f 及び無次元全エンタルピ E を

$$s = s \quad (95)$$

$$\eta = \int_0^y \left(\frac{u_e}{\rho_e \mu_e s} \right)^{1/2} \rho dy \quad (96)$$

$$\psi(s, y) = (\rho_e \mu_e u_e s)^{1/2} f(s, \eta) \quad (97)$$

$$E = \frac{H}{H_e} \quad (98)$$

と定義する。このとき TSL 方程式 (72) - (74) 及び境界条件 (79) 式は、次のように変換される。

$$f_\eta = F \quad (99)$$

$$\begin{aligned} (bF_\eta)_\eta + m_1 f F_\eta + m_2 (c - F^2) \\ = s (FF_s - F_\eta f_s) \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_1 E_\eta)_\eta + m_1 f E_\eta + (\sigma_3)_\eta \\ = s (FE_s - E_\eta f_s) \end{aligned} \quad (101)$$

ここに、

$$\begin{aligned} F &= u/u_e, \quad c = \rho_e/\rho \\ b &= C(1 + \varepsilon^+), \quad C = \rho\mu/\rho_e\mu_e, \\ \varepsilon^+ &= \varepsilon_m/\nu, \quad \nu = \mu/\rho \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} (1 + m_2 + (s/\rho_e\mu_e)d(\rho\mu)/ds), \\ m_2 &= (s/u_e)du_e/ds \\ \sigma_1 &= C(1 + \varepsilon^+P_r/P_{rt})/P_r \\ \sigma_3 &= C(u_e^2/H_e)(1 - 1/P_r)FF_\eta \end{aligned} \quad (103)$$

境界条件：

$$\eta = 0 : F = f = 0, \quad E_\eta = 0 \quad (104a)$$

$$\eta = \eta_e : F = 1, \quad E = 1 \quad (104b)$$

上記下添字 η 及び s は、それぞれ η 及び s についての偏微分を表わす。

変換された方程式 (99) - (101) 及び境界条件 (104) 式に、PC-CN 法を適用する。

記号 $F_j^i = F(s_i, \eta_j)$, $f_j^i = f(s_i, \eta_j)$ 等、及び不等間隔格子幅 $\Delta\eta_j : \eta_{j+1} = \eta_j + \Delta\eta_j$, $\eta_1 = 0$, $j = 1, 2, \dots, J$ を使う。同様に $s_{i+1} = s_i + \Delta s_i$ 。

η 方向の格子幅が不等間隔の場合でも、二階微分に対する差分が二次精度となるようにするため、つぎの stretched coordinate の概念を導入し、Variable grid scheme [27] にする。今、 N を等間隔格子幅 ΔN をもつ新しい座標とし、もとの座標 η とは $\eta_j = \eta(N_j)$, $j = 1, 2, \dots, J$ なる関係があるとする。この関係が、適当な条件を満たすとき、 η に関する微分例えば W_η , $(bW_\eta)_\eta$ は、 ΔN について二次精度で次式のように差分表示できる [27]。

$$(W_\eta)_j \sim \delta_\eta W_j = (W_{j+1} - W_{j-1}) / (\Delta\eta_{j-1} + \Delta\eta_j) \quad (105a)$$

$$\begin{aligned} ((bW_\eta)_\eta)_j \sim \Delta_\eta (b_j \Delta_\eta W_j) = 2 [b_{j+1/2}(W_{j+1} - W_j) / \Delta\eta_j - b_{j-1/2}(W_j - W_{j-1}) / \Delta\eta_{j-1}] \\ / (\Delta\eta_{j-1} + \Delta\eta_j) \end{aligned} \quad (105b)$$

$$b_{j\pm 1/2} = (b_j + b_{j\pm 1}) / 2 \quad (105c)$$

なお、(105) 式で演算子 δ_η 及び Δ_η (Δ_η) を定義した。PC-CN 法は、次のように格子中間位置 $i+1/2$, ($s_{i+1/2} = s_i + \Delta s_i / 2$) に於ける値を一次精度で予測計算し、それを使って求める格子点 $i+1$, ($s_{i+1} = s_i + \Delta s_i$) に於ける値を二次精度で修正計算するものである。具体的な差分式は、次のようである。

(予測子)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\eta_{j-1}} (f_j^{i+1/2} - f_{j-1}^{i+1/2}) - \frac{1}{2} (F_j^{i+1/2} + F_{j-1}^{i+1/2}) = 0 \\ (j = 2, 3, \dots, J-1, J) \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\eta (b_j^i \Delta_\eta F_j^{i+1/2}) + m_1^{i+1/2} f_j^i (\delta_\eta F_j^i) \\ + m_2^{i+1/2} \{ c_j^i - (F_j^i)^2 \} \\ = s_{i+1/2} [F_j^i \frac{F_j^{i+1/2} - F_j^i}{\Delta s_i / 2} \\ - (\delta_\eta F_j^i) \frac{f_j^{i+1/2} - f_j^i}{\Delta s_i / 2}] \\ (j = 2, 3, \dots, J-1) \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\eta (\sigma_1^i \Delta_\eta E_j^{i+1/2}) + m_1^{i+1/2} f_j^i \delta_\eta E_j^i + \delta_\eta \sigma_3^i \\ = s_{i+1/2} [F_j^i \frac{E_j^{i+1/2} - E_j^i}{\Delta s_i / 2} \\ - (\delta_\eta E_j^i) \frac{f_j^{i+1/2} - f_j^i}{\Delta s_i / 2}] \\ (j = 2, 3, \dots, J-1) \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} F_1^{i+1/2} = f_1^{i+1/2} = 0, \quad E_1^{i+1/2} - E_2^{i+1/2} = 0, \\ F_J^{i+1/2} = E_J^{i+1/2} = 1 \end{aligned} \quad (109)$$

(修正子)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\eta_{j-1}} (f_j^{i+1} - f_{j-1}^{i+1}) - \frac{1}{2} (F_j^{i+1} + F_{j-1}^{i+1}) = 0 \\ (j = 2, 3, \dots, J-1, J) \end{aligned} \quad (110)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\eta [b_j^{i+1/2} \Delta_\eta \frac{F_j^{i+1} + F_j^i}{2}] + m_1^{i+1/2} f_j^{i+1/2} \delta_\eta F_j^{i+1/2} \\ + m_2^{i+1/2} \{ c_j^{i+1/2} - (F_j^{i+1/2})^2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s_{i+1/2} \left[\overline{F_j^{i+1/2}} \frac{F_j^{i+1} - F_j^i}{\Delta s_i} \right. \\
&\quad \left. - (\delta_\eta \overline{F_j^{i+1/2}}) \frac{f_j^{i+1} - f_j^i}{\Delta s_i} \right] \\
&\quad (D=2, 3, \dots, J-1)
\end{aligned} \tag{111}$$

$$\begin{aligned}
&d_\eta \left[\sigma_{1j}^{i+1/2} \frac{E_j^{i+1} + E_j^i}{2} \right] + m_1^{i+1/2} f_j^{i+1/2} \delta_\eta \overline{E_j^{i+1/2}} \\
&+ \delta_\eta \sigma_{3j}^{i+1/2} = s_{i+1/2} \left[\overline{F_j^{i+1/2}} \frac{E_j^{i+1} - E_j^i}{\Delta s_i} \right. \\
&\quad \left. - (\delta_\eta \overline{E_j^{i+1/2}}) \frac{f_j^{i+1} - f_j^i}{\Delta s_i} \right] \\
&\quad (j=2, 3, \dots, J-1)
\end{aligned} \tag{112}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{i+1} &= f_1^{i+1} = 0, \quad E_1^{i+1} - E_2^{i+1} = 0, \\
F_j^{i+1} &= E_j^{i+1} = 1
\end{aligned} \tag{113}$$

ここで、 $m_1^{i+1/2}$, $m_2^{i+1/2}$ は、 i 及び $i+1$ に於ける値の算術平均により求める。

予測子ステップ、修正子ステップとも上述のように差分表示するとその結果の代数方程式は未知量について、添字 $i+1/2$, $i+1$ を省略すると、同一の形式になる。まず f_j と F_j に関する式が、次のようにまとめられる。

$$A_j f_{j-1} + B_j f_j + C_j f_{j+1} = d_j \tag{114}$$

ここに、 $f_j = [f_j, F_j]^T$ 。(114)式は、 2×2 の係数行列 A_j , B_j , C_j 及び定数ベクトル d_j が既知段階の値で与えられるので、線形の 2×2 塊三対角方程式 (Block tri-diagonal equation) となり Gauss 消去法による唯一回のスウィープ (sweep) で簡単に解くことができる。次に、 E に対する方程式は、(114)式によって既に f_j が求められているので、

$$a_j E_{j-1} + b_j E_j + c_j E_{j+1} = d_j \tag{115}$$

の形にまとめられる。係数 a_j , b_j , c_j 及び d_j が全て既知量で表わされ、更に容易く解かれる。

初期条件として必要な翼前縁に於ける境界層プロフィールは、次のようにして決める。まず、そこでは層流を仮定し、(99) - (101) 式を $s \rightarrow 0$ とした淀み点方程式を求める。次に、 η に関する微分を (105) 式に倣い 3 点差分近似し、その f_j , F_j , E_j に関する非線形代数方程式を Newton-Raphson 法により解

いて初期プロフィールとする。

伴流の数値解法

翼面境界層に行なったと同様に、伴流に対しても TSL 方程式 (72) - (74) に変換を施す。ただし、ここで導入する変換は、故意に翼面境界層に対するものと異なる変換としたが、別に、同じ変換で不都合は無い。

今、下添え字 0: $()_0$ でもって、翼後縁に於ける境界層外縁状態を示すとする。このとき、流れ関数 ψ を、

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial s} \tag{116}$$

と定義し、新独立変数 (X, Y) 、無次元流れ関数 ϕ 及び無次元全エンタルピ E を

$$X = s/s_0 \tag{117}$$

$$Y = \int_0^y \left(\frac{u_0}{\rho_0 \mu_0 s_0} \right)^{1/2} \rho dy \tag{118}$$

$$\psi(s, y) = (\rho_0 \mu_0 u_0 s_0)^{1/2} \phi(X, Y) \tag{119}$$

$$E = H/H_e \tag{120}$$

と定義する。このとき TSL 方程式 (72) - (74) 及び境界条件 (80), (81) 式は、次のようになる。

$$\phi_Y = \Phi \tag{121}$$

$$[b\Phi_Y]_Y + c\bar{m} = \Phi\Phi_X - \Phi_Y\phi_X \tag{122}$$

$$[\sigma_1 E_Y]_Y + \sigma_3 Y = \Phi E_X - E_Y \phi_X \tag{123}$$

ここに、

$$\Phi = u/u_0, \quad c = \rho_e/\rho, \quad b = \bar{C}(1 + \epsilon^+),$$

$$\bar{C} = \rho\mu/\rho_0\mu_0, \quad \epsilon^+ = \epsilon_m/\nu, \quad \nu = \mu/\rho \tag{124}$$

$$\bar{m} = (u_e/u_0) d(u_e/u_0)/dX$$

$$\sigma_1 = \bar{C}(1 + \epsilon^+ P_r/P_{rt})/P_r$$

$$\sigma_3 = \bar{C}(u_0^2/H_e)(1 - 1/P_r)\Phi\Phi_Y \tag{125}$$

境界条件:

$$Y = Y_{eU} > 0: \quad \Phi = u_e/u_0, \quad E = 1 \tag{126a}$$

$$Y = 0: \quad \phi = 0 \tag{126b}$$

$$Y = Y_{eL} < 0: \quad \Phi = u_e/u_0, \quad E = 1 \tag{126c}$$

下添え字の X 及び Y は、慣用に従い、それぞれ、 X 及び Y についての偏微分を示す。

今、変換された方程式 (121) - (123) 及び境界条件 (126) 式に PC-CN 法を適用する。

ここでは、格子番号 $n=1, 2, \dots, NB, NO, NA, \dots, NJ, NX$ を Y 方向格子に使い、不等間隔格子幅

$\Delta Y_n: Y_{n+1} = Y_n + \Delta Y_n$ を使う。それぞれの格子番号は、次に対応する: $n=1$ は、伴流下側外縁 ($Y = Y_{eL} < 0$); $n = NX$ は、伴流上側外縁 ($Y = Y_{eU} > 0$); $n = NO$ は、仮定された翼後縁から出る流線 ($Y = Y_{NO} = 0$) にそれぞれ在る。なお、 X 方向格子番号は、 i で、 $X_{i+1} = X_i + \Delta X_i$ 、ほかに、記号 $\phi_n^i = \phi(X_i, Y_n)$, $\phi_n^i = \phi(X_i, Y_n)$ 等を使う。(105) 式に順じて定義された差分オペレータ δ_Y , Δ_Y (Δ_Y) を使って差分式を示すとき、予測子、修正子それぞれ以下ようになる。

(予測子)

$$\frac{1}{\Delta Y_{n-1}} (\phi_n^{i+1/2} - \phi_{n-1}^{i+1/2}) - \frac{1}{2} (\phi_n^{i+1/2} + \phi_{n-1}^{i+1/2}) = 0$$

$$(n = 2, 3, \dots, NJ, NX)$$
(127)

$$\Delta_Y [b_n^i \Delta_Y \phi_n^{i+1/2}] + c_n^i \bar{m}^{i+1/2}$$

$$= \phi_n^i \frac{\phi_n^{i+1/2} - \phi_n^i}{(\Delta X_i/2)} - \delta_Y \phi_n^i \frac{\phi_n^{i+1/2} - \phi_n^i}{(\Delta X_i/2)}$$

$$(n = 2, 3, \dots, NJ)$$
(128)

$$\Delta_Y [\sigma_{1n}^i \Delta_Y E_n^{i+1/2}] + \delta_Y \sigma_{3n}^i$$

$$= \phi_n^i \frac{E_n^{i+1/2} - E_n^i}{(\Delta X_i/2)} - \delta_Y E_n^i \frac{\phi_n^{i+1/2} - \phi_n^i}{(\Delta X_i/2)}$$

$$(n = 2, 3, \dots, NJ)$$
(129)

$$\phi_1^{i+1/2} = \phi_{NX}^{i+1/2} = (u_e/u_0)^{i+1/2}, \quad \phi_{NO}^{i+1/2} = 0$$
(130a)

$$E_1^{i+1/2} = E_{NX}^{i+1/2} = 1$$
(130b)

(修正子)

$$\frac{1}{\Delta Y_{n-1}} (\phi_n^{i+1} - \phi_{n-1}^{i+1}) - \frac{1}{2} (\phi_n^{i+1} + \phi_{n-1}^{i+1}) = 0$$

$$(n = 2, 3, \dots, NJ, NX)$$
(131)

$$\Delta_Y [b_n^{i+1/2} \Delta_Y \frac{\phi_n^{i+1} + \phi_n^i}{2}] + c_n^{i+1/2} \bar{m}^{i+1/2}$$

$$= \phi_n^{i+1/2} \frac{\phi_n^{i+1} - \phi_n^i}{\Delta X_i} - \delta_Y \phi_n^{i+1/2} \frac{\phi_n^{i+1} - \phi_n^i}{\Delta X_i}$$

$$(n = 2, 3, \dots, NJ)$$
(132)

$$\Delta_Y [\sigma_{1,n}^{i+1/2} \Delta_Y \frac{E_n^{i+1} + E_n^i}{2}] + \delta_Y \sigma_{3n}^{i+1/2}$$

$$= \phi_n^{i+1/2} \frac{E_n^{i+1} - E_n^i}{\Delta X_i} - \delta_Y E_n^{i+1/2} \frac{\phi_n^{i+1} - \phi_n^i}{\Delta X_i}$$

$$(n = 2, 3, \dots, NJ)$$
(133)

$$\phi_1^{i+1} = \phi_{NX}^{i+1} = (u_e/u_0)^{i+1}, \quad \phi_{NO}^{i+1} = 0$$
(134a)

$$E_1^{i+1} = E_{NX}^{i+1} = 1$$
(134b)

前述、翼面境界層の場合と同様に、予測子ステップ、修正子ステップとも上述のように差分表示するとその結果の代数方程式は同一の形式になる。したがって、代数方程式の解法は、予測子修正子両ステップとも同一のアルゴリズムになる。伴流の場合、方程式の中間位置に境界条件 ($Y = Y_{NO}: \phi_{NO} = 0$) が割り込み、翼面境界層のときと若干異なるアルゴリズムが必要である。ここでは、予測子ステップの代数方程式 (127) - (130) について、その解法を示そう。

煩雑さを避けるため、上添え字 $i+1/2$ は、省略する。連立方程式 (127) - (130) のうち、 E_n に関する方程式 (129) は、非連成 (uncoupled) に解くことができる。すなわち、 ϕ_n と ϕ_n に関する方程式 (127), (128) を (130a) 式とともに先に解き、その後に E_n を解く。

ϕ_n と ϕ_n に関する方程式 (127) 及び (128) は、境界値 (130a) 式とともに、塊三対角構造 (block tri-diagonal structure) をもつ。(127), (128) 及び (130a) 式は、書き換えると次のようになる。

$$Ax = b$$
(135)

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ A_1 & B_2 & C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_n & B_n & C_n \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & A_{NJ} & B_{NJ} & C_{NJ} \\ & & & & & A_{NX} & B_{NX} \end{bmatrix}$$
(136)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{NJ} \\ x_{NX} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \\ \vdots \\ d_{NJ} \\ d_{NX} \end{bmatrix}$$
(137)

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} \phi_n \\ \phi_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ d_n \end{bmatrix} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (s_1)_n \end{bmatrix} : 2 \leq n \leq NO, \\ A_n &= \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\Delta Y_{n-1}}{2} \\ 0 & (s_1)_n \end{bmatrix} : NA \leq n \leq NJ, \\ A_{NX} &= \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\Delta Y_{NJ}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\Delta Y_1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_n &= \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\Delta Y_n}{2} \\ (s_4)_n & (s_2)_n \end{bmatrix} : 2 \leq n \leq NB; \\ B_{NO} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s_2)_{NO} \end{bmatrix}, \\ B_n &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta Y_{n-1}}{2} \\ (s_4)_n & (s_2)_n \end{bmatrix} : NA \leq n \leq NJ, \\ B_{NX} &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta Y_{NJ}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta Y_1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_n &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta Y_n}{2} \\ 0 & (s_3)_n \end{bmatrix} : 2 \leq n \leq NB, \\ C_n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (s_3)_n \end{bmatrix} : NO \leq n \leq NJ \end{aligned} \quad (139)$$

ここに,

$$\begin{aligned} (s_1)_n &= \beta_{1n} b_{n-1/2}^i \\ (s_2)_n &= -(\beta_{1n} b_{n-1/2}^i + \beta_{3n} b_{n+1/2}^i + \phi_n^i \frac{2}{\Delta X_i}) \\ (s_3)_n &= \beta_{3n} b_{n+1/2}^i \\ (s_4)_n &= (\delta_Y \phi_n^i) \frac{2}{\Delta X_i} \quad (\text{但し, } n \neq NO) \\ d_1 &= d_{NX} = (u_e/u_0)^{i+1/2} \\ d_n &= -c_n^i \bar{m}^{i+1/2} + \left\{ -(\phi_n^i)^2 \frac{2}{\Delta X_i} \right. \\ &\quad \left. + (\delta_Y \phi_n^i) \frac{2}{\Delta X_i} \phi_n^i \right\} \\ \beta_{1n} &= \frac{2}{\Delta Y_{n-1} (\Delta Y_{n-1} + \Delta Y_n)}, \end{aligned}$$

$$\beta_{3n} = \frac{2}{\Delta Y_n (\Delta Y_{n-1} + \Delta Y_n)} \quad (n=2, 3, \dots, NJ) \quad (140)$$

このとき \mathbf{A} は, 次のように \mathbf{LU} 分解可能である。

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (141a)$$

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & A_n & B_n & C_n \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & A_{NJ} & B_{NJ} & C_{NJ} \\ & & & & & A_{NX} & B_{NX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & & & & & \\ \Gamma_2 & I & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \Gamma_n & I & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \Gamma_{NJ} & I & \\ & & & & & \Gamma_{NX} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & C_1 \\ d_2 & C_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & d_n & C_n \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & d_{NJ} & C_{NJ} \\ & & & & & d_{NX} \end{bmatrix} \quad (141b)$$

ここに, I は, 2×2 の単位行列である。(141b) 式の両辺比較より, \mathbf{L} 及び \mathbf{U} の要素は, 次式により決まる。

$$\begin{aligned} d_1 &= B_1 \\ \Gamma_n &= d_{n-1}^{-1} A_n \\ d_n &= B_n - \Gamma_n C_{n-1} \end{aligned} \quad (n=2, 3, \dots, NX) \quad (142)$$

したがって, (135) 式の解は, 次の二式

$$\mathbf{LU} = \mathbf{b} \quad (143)$$

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (144)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{NX}]^T$$

を解くことと同値となる。まず, (143) 式より

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{d}_n - \Gamma_n \mathbf{y}_{n-1}, \quad (n=2, 3, \dots, NX) \end{aligned} \quad (145)$$

次に, (144) 式より

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{NX} &= \Delta_{NX}^{-1} \mathbf{y}_{NX} \\ \mathbf{x}_n &= \Delta_n^{-1} (\mathbf{y}_n - C_n \mathbf{x}_{n+1}), \\ &\quad (n=NJ, NJ-1, \dots, 2, 1) \end{aligned} \quad (146)$$

以上, 全ての未知数 $\mathbf{x}_n = [\phi_n, \Phi_n]$ について解が得られた。

残った E_n の解法は, 単一の方程式であり, 且つ両端の値が定まっているので, 非常に簡単になる。 E_n に対する方程式 (129) 式は, 境界条件 (130b) 式とともに, 未知数についてまとめると,

$$E_1 = 1 \quad (147)$$

$$a_n E_{n-1} + b_n E_n + c_n E_{n+1} = d_n \quad (n=2, 3, \dots, NJ) \quad (148)$$

$$E_{NX} = 1 \quad (149)$$

ここに,

$$\begin{aligned} a_n &= \beta_{1n} \sigma_{1n-1/2}^i \\ b_n &= -(\beta_{1n} \sigma_{1n-1/2}^i + \beta_{3n} \sigma_{1n+1/2}^i + \Phi_n^i \frac{2}{\Delta X_i}) \\ c_n &= \beta_{3n} \sigma_{1n+1/2}^i \\ d_n &= -\delta_Y \sigma_{3n}^i - \Phi_n^i \frac{2}{\Delta X_i} E_n^i \\ &\quad - \delta_Y E_n^i \frac{2}{\Delta X_i} (\phi_n^{i+1/2} - \phi_n^i) \end{aligned} \quad (150)$$

($n=2, 3, \dots, NJ$)

となる。今, E_n が,

$$E_n = -o_n E_{n+1} + p_n \quad (151)$$

の形式で表わされると仮定する。(151) 式を (148) 式に代入すると

$$E_n = -\frac{c_n}{b_n - a_n o_{n-1}} E_{n+1} + \frac{d_n - a_n p_{n-1}}{b_n - a_n o_{n-1}} \quad (152)$$

を得る。(151) 式と (152) 式の係数比較より

$$\begin{aligned} o_n &= \frac{c_n}{b_n - a_n o_{n-1}} \\ p_n &= \frac{d_n - a_n p_{n-1}}{b_n - a_n o_{n-1}} \\ &\quad (n=2, 3, \dots, NJ) \end{aligned} \quad (153)$$

ただし, $E_1 = 1$ より, $o_1 = 0$, $p_1 = 1$ 。したがって

て, まず (153) 式により o_n , p_n ($n=2, 3, \dots, NJ$) を計算し, 次に $E_{NX} = 1$ をもとに (151) 式により E_n ($n=NJ, NJ-1, \dots, 3, 2$) を計算する。

なお, 修正子ステップ (131) - (134) 式に対して も全く同じ手順で解くことができる。

伴流計算の初期条件として必要な, 初期プロファイルは, 翼面境界層の翼後縁位置に於けるプロファイルとなる。なお, 翼面境界層に対する変換 (94) - (98) 式と, 伴流に対する変換 (116) - (120) 式は, 翼後縁に於いて一致するので翼後縁に於いて, 翼面境界層および伴流の独立変数および従属変数とも, それぞれ一致する。

格子系

(翼面境界層): 物理量の変化の大きい壁面付近に格子が密になるよう, 翼面境界層の格子系は, 次のような等比数列的に格子幅が大きくなるように配置した。

$$\Delta \eta_j = K \Delta \eta_{j-1}, \quad \eta_j = \Delta \eta_1 \frac{K^j - 1}{K - 1} \quad (154)$$

$$(K > 1, j=2, 3, \dots, J)$$

この格子系は, 計算の最初に淀み点位置 ($s_1 = 0$) において, $\Delta \eta_1$, K 及び $(\eta_e)_{STP}$ の入力データをもとに生成しておく。境界層が発達するにつれ, 境界層外縁の位置も初期設定位置 $(\eta_e)_{STP}$ より遥かに大きくなりうる。ここでは, 境界層外縁に於ける F の勾配が, 常に,

$$|F_\eta| < e, \quad e: \text{定数} \quad (155)$$

を満たすように, 境界層の発達に応じて格子を外縁に加えていくようにした。

(伴流): 伴流では, 逆に, その発達とともに物理量の変化が穏やかになる。ここでは, 格子数の節約の為, 適宜格子分布を再配置する方法を採った。すなわち, 予め入力データ (位置 s_i , 格子幅 ΔY_{min} , 増加率 K_W) によって定められた位置になれば, 次の式に従い新しい格子を生成, それに置き換える。

$$\Delta Y_{NO} = \Delta Y_{min}, \quad \Delta Y_n = K_W \Delta Y_{n-1}$$

$$Y_n = \Delta Y_{NO} \frac{K_W^{n-NA} - 1}{K_W - 1},$$

$$n = NA, NA+1, \dots, NJ$$

$$\Delta Y_{NB} = \Delta Y_{min}, \quad \Delta Y_n = K_W \Delta Y_{n+1}$$

$$Y_n = -\Delta Y_{NB} \frac{K^{NB-n} - 1}{K_W - 1},$$

$$n = NB, NB - 1, \dots, 2, 1 \quad (156)$$

一般に前計算段階の格子位置と新しい格子位置とは、一致しない。新しい格子点に於ける物理量は、前格子点よりの内挿（スプライン補間）によって決めた。

5. 数 値 計 算

5.1 計算手順

具体的な計算は、次の手順をとる。

- (1) 翼後縁から滑らかに出発するように伴流カット線を設定し、3.1節で述べた計算格子を生成する。
- (2) 計算領域全体に主流の状態を初期条件として与える。
- (3) 粘性効果無し ($v_n = \Delta v_n = \Delta u_t = 0$) としてポテンシャル流の反復計算を N_{BST} 回行なう。
- (4) ポテンシャル流計算によって得られた分布を境界条件に薄せん断層の計算を行ない、粘性特性 (δ^* , δ_w^* , θ_w) を算出する。干渉量 (v_n , Δv_n , Δu_t) を計算する。
- (5) (4)の過程で得られた干渉量を境界条件とし、ポテンシャル流反復計算を N_{BP} 回行なう。
- (6) 但し、(5)の反復過程内に於いて、毎回收束判定を行なう。

なお、収束判定の結果、収束条件が満たされた場合には、後処理を行ない、計算を終了する。未収束の場合には、(4)に戻り、以後収束するまで(4)→(5)→(4)→(5)→…の手順を繰り返す。

以下、個々の手順について、第3章、第4章で述べられなかった事項について述べる。

(1) 伴流カット線の設定および計算格子の生成：

伴流カット線の設定位置は、出来るだけ自然の流れ線に近いことが望ましい。複素関数を用いた二次元非圧縮ポテンシャル理論によると、揚力のある物体まわりの流れ関数は、対数関数を含んで表示される。ここでは、それよりの類推から、翼後縁の二等分角線から滑らかにつながると対数曲線によって設定した。今、翼後縁の二等分角が翼の置かれているカーティアン系で x^1 座標方向を規準にそこから時計まわり正として、 $\tan \beta$ で与えられるとする。このとき、伴流カット線の位置 ($(x_w^1)_i$, $(x_w^2)_i$) は、

$$(x_w^2)_i = x_{T.E.}^2 - \tan \beta \log ((x_w^1)_i / x_{T.E.}^1) \quad (157)$$

で与えた。ここに ($x_{T.E.}^1$, $x_{T.E.}^2$) は、翼後縁の座標である。

遠方境界の設定位置は、出来る限り翼より離れた位置にあるのが望ましいが、逆に、離れるほど収束は遅くなる。図9に粘性効果なしの場合の NACA 0012 翼を対象に遠方境界設定位置とそのときの得られた揚力係数 C_L の変化について数値実験した結果を示す。この数値実験は、まず遠方境界を 50 倍翼弦長となるように計算格子を張り、順に最外側の格子を取り除いて行くやり方で、遠方境界を翼に近づけていく方法をとって行なった。図より、遠方境界は、12 倍翼弦長以上の位置にとれば C_L が変化しなくなることがわかる。Holst らによるポテンシャル流コード TAIR [17] に於いては、遠方境界として 6 倍翼弦長位置を標準値としている。この計算領域では、劇的に速く収束するであろうが、遠方境界が、余りに翼に近すぎ、物理的に正しい解を得ているかどうか十分検討する必要がある。ナビエ・ストークス方程式解析汎用プログラム NSFOIL の検討報告 [28] に於いても、遠方境界は、10 倍翼弦長の位置が適当という結果が示されている。一般に、物理的な攪乱が、計算領域外に出てしまうのに必要な時間（反復回数と言い換えられよう）は、距離に比例すると考えてよい。計算領域が、縦横 2 倍になれば、攪乱の伝わる距離は、最大 $2 \times \sqrt{2}$ となり、故に、収束速度は、 $1/2\sqrt{2}$ に減速するであろう。したがって、計算領域は、物理的に正しい解の得られる範囲で、換言すれば、遠方境界の影響の無

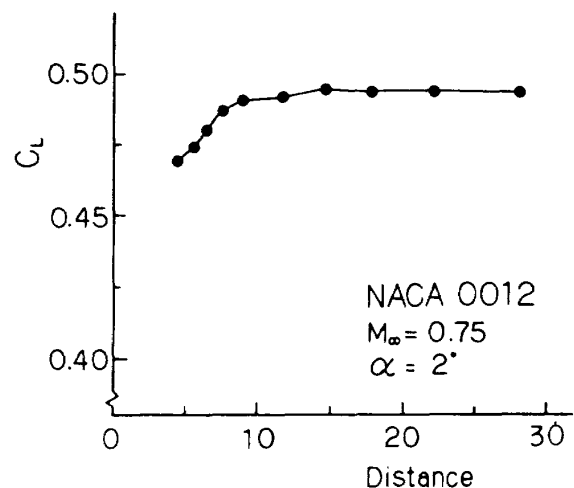


図9 ポテンシャル流計算における遠方境界設定位置の検討

(5) 粘性効果を境界条件に含んだポテンシャル流

反復計算：薄せん断層計算により得られた干渉量 v_n , Δv_n および Δu_t は, そのままポテンシャル流計算の境界条件に与えるのではなく, 実際には, 過小緩和 (under-relaxation) をかけて与える。

$$v_n = (v_n)_{old} + \omega_1 \{ (v_n)_{new} - (v_n)_{old} \} \quad (159a)$$

$$\Delta v_n = (\Delta v_n)_{old} + \omega_2 \{ (\Delta v_n)_{new} - (\Delta v_n)_{old} \} \quad (159b)$$

$$\Delta u_t = (\Delta u_t)_{old} + \omega_3 \{ (\Delta u_t)_{new} - (\Delta u_t)_{old} \} \quad (159c)$$

ここに $()_{old}$ は, 前回の更新量を, $()_{new}$ は今回新たに手順(4)に於いて計算された量を, ω_1, ω_2 及び ω_3 は, 緩和係数 ($0 < \omega_1, \omega_2, \omega_3 < 1$) である。本論文の干渉計算は, ω_1 および ω_2 については 0.8, ω_3 については 0.2 程度の大きな値を標準値にとることができ頑丈 (robust) な計算法であった。ちなみに, Collyer [7] の方法では, 0.15 としなければ計算できないと報告されている。

粘性計算を行なう頻度 N_{sp} は, ここでは, 5 ~ 10 の値を使った。

(6) 収束判定：ポテンシャル流反復計算の収束判定は, Holst ら [17] に倣い, 次のどちらかの条件を収束判定条件とした。

(a) $e > 0$ を与え, 次の条件を満たすとき：

$$\frac{RMAX^n}{RMAX^1} < e \quad (160)$$

(b) $e < 0$ を与え, 次の(i), (ii), (iii)を同時に満たすとき：

$$(i) \quad \frac{RMAX^n}{RMAX^1} < |e| \quad (161a)$$

$$(ii) \quad \frac{|NSP^n - NSP^{n-M}|}{NSP^n} \leq \frac{|e|}{2} \quad (161b)$$

$$(iii) \quad \frac{|\Gamma^n - \Gamma^{n-M}|}{\Gamma^n} \leq \frac{|e|}{2} \quad (161c)$$

ここで, RMAX は, 計算全領域内の残差の絶対値の最大値であり, n は, 反復回数を示す。NSP は, 超音速領域に位置する格子点数, Γ は, 循環 ($\Gamma = \Gamma_\infty$), M は, (71) 式に於けるものである。

5.2 計算例と議論

記号

α, a : 迎角

C_D : 抵抗係数

C_L : 揚力係数

C_p : 圧力係数

C_p^* : 臨界圧力係数

H : 形状係数 $= \delta^*/\theta$

M_∞ : 主流マッハ数

R_{ec} : 翼弦長規準レイノルズ数

x/c : 翼弦長 c により無次元化された薄せん断層の主流方向位置。 $x/c = 0$: 翼前縁, $x/c = 1.0$: 翼後縁, $x/c > 1.0$: 伴流

y/c : 翼弦長 c により無次元化された薄せん断層厚さ方向の位置

XTRL: 翼下面側乱流遷移位置

XTRU: 翼上面側乱流遷移位置

本粘性非粘性干渉計算法の最大の特徴は, 粘性領域 (薄せん断層) の特性値計算を, 微分法により行なった点にある。まず, その薄せん断層解析法の妥当性の検討を行なおう。

図 11 は, 薄せん断層の計算値のうち, 乱流速度プロファイルについて, T.A.Cook の実験 [29] と比較したものである。薄せん断層計算の妥当性の検討が目的であるから, 薄せん断層外縁の圧力分布は, 実験 C_p 分布を使った。また, 初期条件として必要な速度プロファイルも, 翼上面側 31.67 % 翼弦長, 下面側 35.0 % 翼弦長, それぞれを計算スタート位置とし, その位置に於ける実験データ速度プロファイルを使った。この場合全域乱流である。図から見られる如く, 翼上面後縁部 (図 11 (a), $x/c = 0.997$) に於いて, 実験値との一致が良くないだけで他の領域は, 十分な精度をもって計算されていることがわかる。図 11 (c) は, 伴流速度プロファイルの比較を示しており, $x/c = 1.020$ で, 上半分の計算値が実験値とあっていないだけで, 他は, 十分な精度で予測されているのがわかる。この合わないところは, 図 11 (a) で見られた, 翼後縁部の影響が, 残っているためである。図 12 は, 伴流内の最小速度 $(u/u_e)_{\min}$ について, その変化の様子を実験 [29]

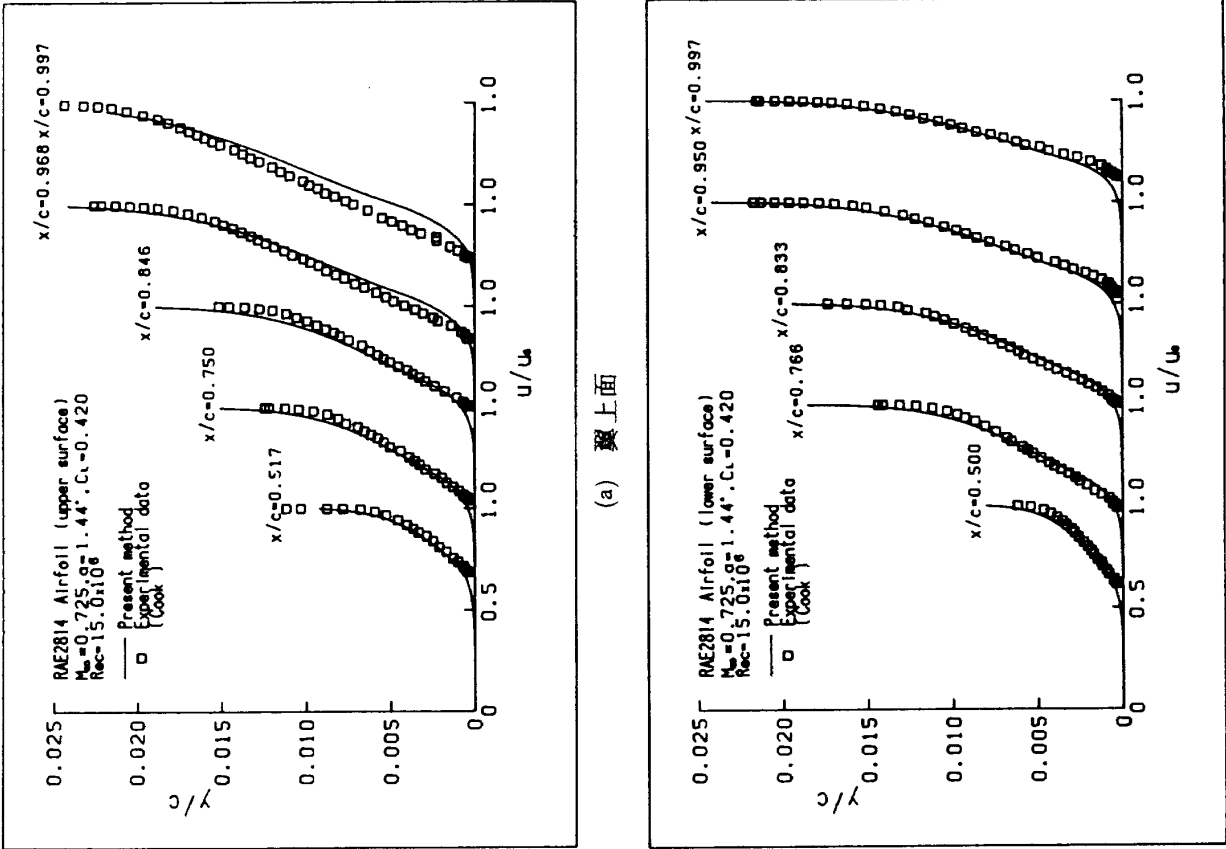
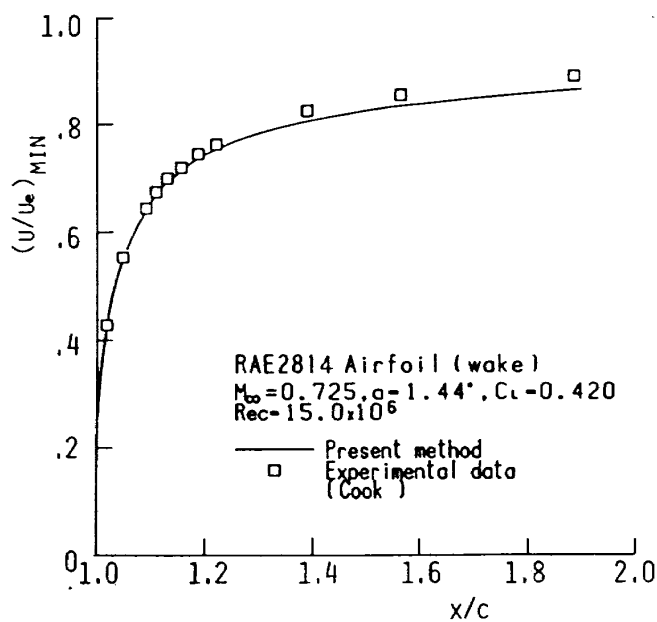
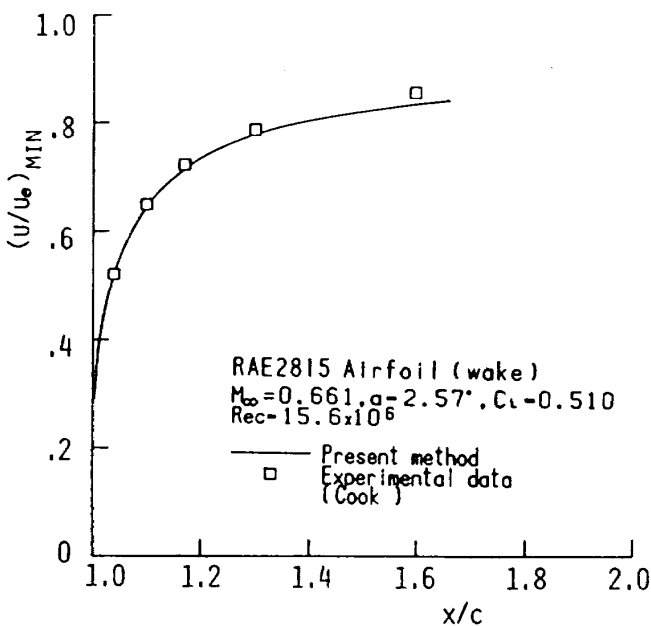


図 11 薄せん断層の速度プロファイルの計算値と実験値の比較

と比べたものである。図 12(a)は、図 11 と同じケースである。図 12(b)は、RAE2815 翼型、 $M_\infty=0.661$ のケースで、前の RAE2814 翼型のケースと同様に、実験値によって初期条件と境界条件を与え、翼面境界層から伴流に向かって解いた結果である。図 11(c) 及び図 12 から、本論文にて提案した変形 CTWS 乱流モデルを含め伴流計算が、十分実用精度を持っているといえよう。なお、本計算法は、翼後縁に於ける三層 (triple-deck) 構造を考慮した計算法ではないので物理的に正しい結果を出す為には、翼後縁直



(a)



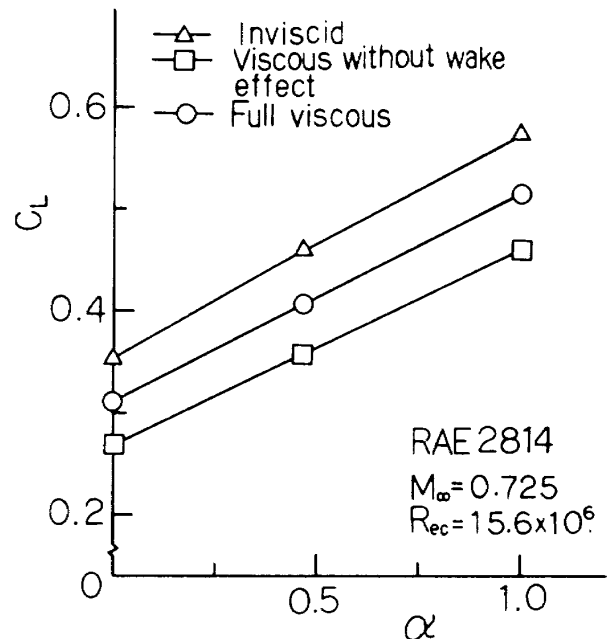
(b)

図 12 伴流最小速度の計算と実験の比較

後 ($1.0 < x/c < 1.01$) の領域で流れ方向格子幅を非常に小さくとる必要がある。この領域は、境界条件が、翼面に於ける付着条件から急に開放されるところにあたり、流れ方向物理量の変化も大きい。必然的に流れ方向 (s 方向) 格子幅を大きくとれないところである。筆者は、この領域をより精密に取り扱うには、Melnik らの方法 [9] よりも, Smith [30], Cebeci ら [21] による double-structure のアイデアを取り入れるのが有望な方法であると考え。本計算法にそれを取り入れるのは、直接的 (straight-forward) に可能である。ただし、本論文では、その目的にあるように、ある程度の精度で、翼型の揚力、抵抗といったマクロな空力特性量の評価ができればよいのであるから、翼後縁部の取り扱いを複雑化することは、避けた。バージョンアップの時の課題である。

以下、粘性非粘性干渉計算についての計算例に対する結果と議論である。次から示す計算例は、すべて実験値との比較もしくはそれに関連するケースを扱ったものであるから、すべて実験のラフネスバンドに対応する位置で強制遷移とする。遷移位置は、実験との比較のあるものは実験のラフネスの位置に、そうでないもの (図 13 のケース) は 3 % 翼弦長位置 ($XTRL=XTRU=0.03$) とした。

図 13 は、粘性効果として翼面境界層および伴流

図 13 $C_L-\alpha$ 曲線における干渉レベルの比較

の効果それぞれが、どの程度揚力推算に係わるのか、 $C_L-\alpha$ 曲線にして示したものである。例題として RAE2814 翼型を使った。図中三角印は、粘性効果を含まない計算であり、四角印は伴流の効果を含まない、翼面境界層のみを考慮したもの、丸印は、全ての粘性効果、翼面境界層および伴流（排除厚、曲率効果共）を考慮した計算結果を線図にしたものである。この図より、同じ迎角 α に対して、翼面境界層だけを考慮した場合、非粘性計算に対し C_L が約 20 % 以上も低下すること、逆に、伴流の効果を検討すると、翼面境界層だけの干渉計算に比べ C_L が 10 % 以上増加することがわかる。この振る舞いは、簡単に言うと翼面境界層だけの場合その排除厚効果によって翼面上にわき出し ($v_n > 0$) が生まれたことに対応し、 C_L は小さくなる。更に伴流を考慮する場合、伴流ではその排除厚分布が下流に向かって単調に減少するのであり、そこに吸い込み ($4v_n < 0$) が生まれることになり結果としてそれが翼面上の流れを加速し C_L が増加するのである。この様に粘性非粘性干渉計算に於ける伴流の効果は、揚力係数 C_L 決定に非常に大きな影響を持つ。図 13 中、丸印で示された結果は、伴流排除厚、曲率、両効果を含んだ干渉計算であった。別に伴流曲率効果だけを除いた干渉計算も行なったが、その差は、ほとんどなかった (1 % 以下)。RAE2814 翼型に関して言えば、伴流曲率効果は、干渉計算に於いてそれほど重要ではないとした Bansod ら [13] の主張のとおりであった。計算時間、必要収束反復数等の増加は、伴流曲率効果を含めてもほとんどない。ただし、伴流曲率効果を含む場合、反復計算で発散し易い傾向にはあるが、これとて、(159c) 式の緩和係数 ω_3 を小さくすることで避けられる。以下の計算例の粘性計算は、全ての粘性効果（翼面排除厚、伴流排除厚、伴流曲率効果）を含んだ干渉計算である。

次に、1980 - 81 年の乱流に関するスタンフォード会議に於いて標準問題として採用された RAE2822 翼型についての計算例を示そう。このケースは、AGARD データベース [31] の項目 A 6, P.H.Cook らによる実験のケース 6 ($M_\infty = 0.725$, $\alpha = 2.92^\circ$, $Re_c = 6.5 \times 10^6$, $XTRL = XTRU = 0.03$, $C_L = 0.743$, $C_D = 0.0127$) である。このケースは、風洞

壁干渉に対する効果も見積られており [32] (マッハ数修正で, $+0.003 \sim 0.004$)、また様々な計算法による結果も報告されている。このケースが、よく取り上げられる理由のひとつに粘性効果が非常に顕著に現われ、計算法が悪いと実験と全く離れた結果しか出ないことが挙げられよう。事実、前縁付近に格子点が少ないと、圧力分布が実験と大きく離れた結果を生む。また粘性効果が正しく算出されないときも圧力分布が実験と合わない。乱流モデルの試験も兼ね、計算法の検討には適した例題と思われる。図 14 は、計算結果 (マッハ数補正 $M_\infty = 0.728$, 実線: 全粘性効果を含む計算, $C_L = 0.752$) と実験と比較したものである。この図には、比較の為、 C_L を合わせて行なった非粘性計算 (破線: $C_L = 0.752$) も同時に示してある。この図より、粘性計算の結果は、良く実験に合っているといえよう。しかし、非粘性計算では、 C_L が実験と一致しても、圧力分布は全く合っていない。すなわち、揚力係数を合わせた計算でも、粘性効果を含まない時には、衝撃波の位置だけでなく前縁付近の加速領域ですら加速不十分で、実験とは合っていないのが示されている。粘

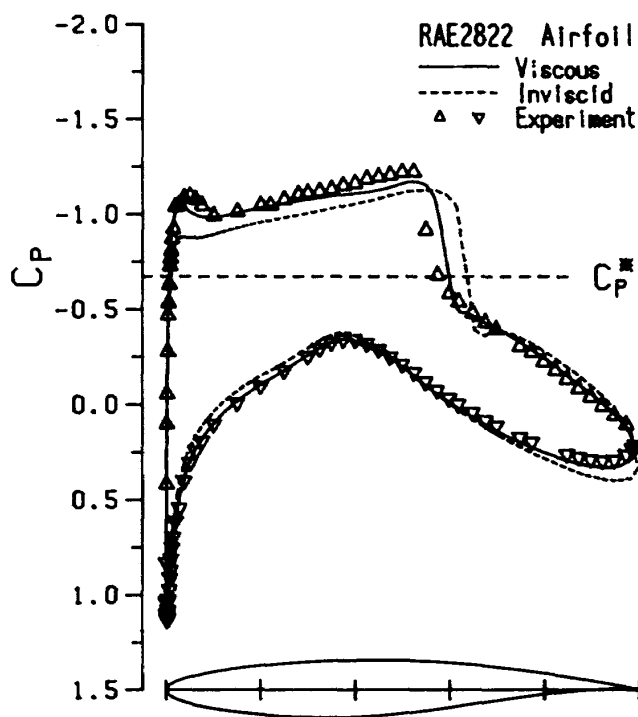


図 14 圧力分布の計算と実験の比較, Mach 数補正計算 ($M_\infty = 0.725$; 実験, $M_\infty = 0.728$; 計算)

性計算結果（実線）についても、衝撃波は、実験より少し後方に位置している。これは、完全ポテンシャル流方程式を完全保存スキームによって解いているためランキン・ユゴニオ衝撃波ジャンプより強くでた結果であろう。Collyer の非保存スキームによる計算 [7] では、逆に実験より前方に衝撃波が位置する結果になっている。そうすると、非粘性流に保存オイラー方程式ソルバーを使った粘性非粘性干渉計算法が最も良い結果を与えるであろうと想像される。もっとも、保存オイラー方程式ソルバーと、粘性計算とを組み合わせた W.Schmidt, A.Jameson 他の計算結果 [33] が、本計算結果よりも良い結果を与えているわけではない。むしろ悪い。それは、Schmidt らの計算に伴流の効果が含まれていないことが大きな原因であろう。図 15 に、粘性領域の特性値のうち形状係数 H をとりあげ計算と実験との比較を示す。翼後縁部付近を除き実験との一致は良好といえる。

図 16 - 18 に 3 つのケースについて、圧力分布を取り上げ、計算と実験の比較を示す。3 ケースとも

風洞壁干渉量がわからないので、マッハ数補正は行わず、単純に実験と同じマッハ数で計算を行なった。揚力係数 C_L が実験に近い値を持つように迎角 α を調節して計算した。図 16 は、RAE2814 翼型を使った T.A.Cook の実験 [29] に対応するケースで、

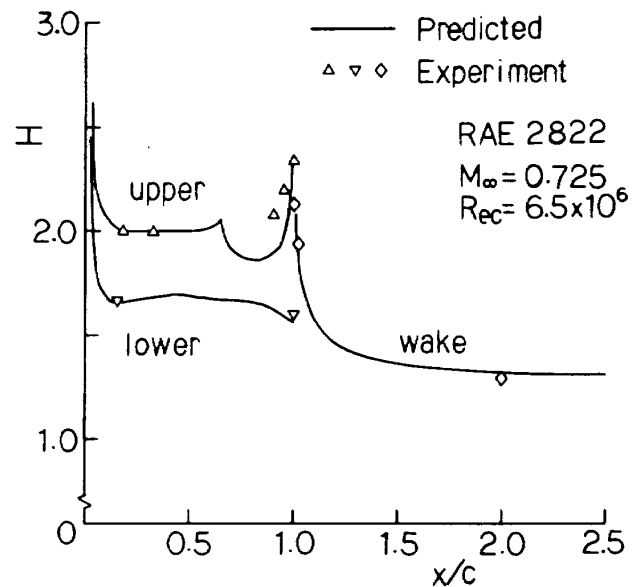


図 15 係数 H の計算と実験の比較

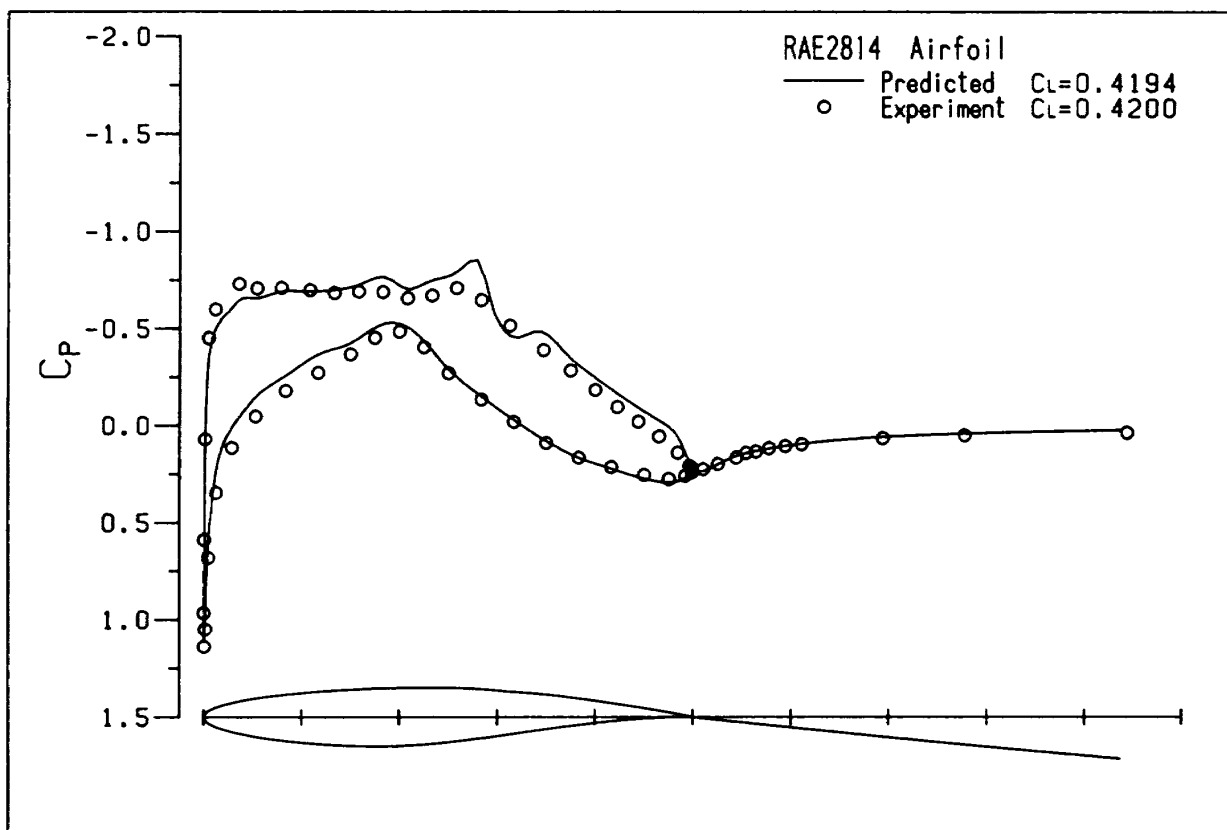


図 16 圧力分布の計算と実験の比較 ($M_\infty = 0.725$, $Re_c = 15.6 \times 10^6$, $XTRL = 0.06$, $XTRU = 0.04$, $C_L = 0.42$)

圧力分布が伴流に至るまで測定されているのでここで取り上げた。図中丸印が実験値で、実線が計算値である。ここで、伴流圧力計算値は、伴流カット線上のそれとした。ただし、実験の伴流圧力測定位置と本計算で設定した伴流カット線（図16中、翼後縁より出ている線で示す）とが必ずしも一致しているという保証はない。図より伴流領域の計算値が非常に良く実験と合っているのがわかる。翼上面側、計算では、弱い衝撃波が捉えられているのに対し実験は衝撃波無しの圧力分布をしている。Bansod らの BGK コードをベースにした干渉計算（伴流効果を含む）による結果 [13] も、衝撃波が捉えられている。理論では、衝撃波を捉えるケースであると思われる。

図 17 および図 18 は、超臨界翼 CAST7 を対象に、圧力分布について、実験 [34] ($M_\infty = 0.701$, $C_L = 0.5422$ 及び $C_L = 0.7088$) と計算の比較である。図 17 では、翼上面 10 % 翼弦長付近の圧力ピークが十分に実験に追従しきれていないが、実用的に十分な精度で計算されているといえる。同様に、図 18 のケースについても、実用上十分な精度で計算されて

いると言ってよからう。

最近の省エネルギー技術からの要請もあり、翼型解析法においてとりわけ重要視されるようになったのが、抵抗推算の精度である。図 19 に、RAE2822 翼型に対する抵抗推算に関し、 $C_L - C_D$ 曲線を取り上げ、計算（本計算結果、Collyer の計算結果 [7]）と実験 [31] と比較したものを示す。前述のスタンフォード会議の標準問題、図 14 のケースの関連で、本計算は、マッハ数補正 (+0.003) したもので、図では丸印で示されている。図に描きこまれている Collyer の計算法は、Garabedian-Korn のポテンシャルコードに、翼面境界層、伴流を Green の Lag-Entrainment 法で解析評価したものを組み込んだ方法で、伴流曲率効果も含んでいる。本計算法による抵抗推算の結果は、実験と、また Collyer の計算結果と良く一致している。図 19 で扱った範囲は、衝撃波も弱く剥離のほとんど無い条件である。このような弱干渉の仮定の成立する条件下では、抵抗特性も含め、本計算法は、十分な精度で推算できると考えている。

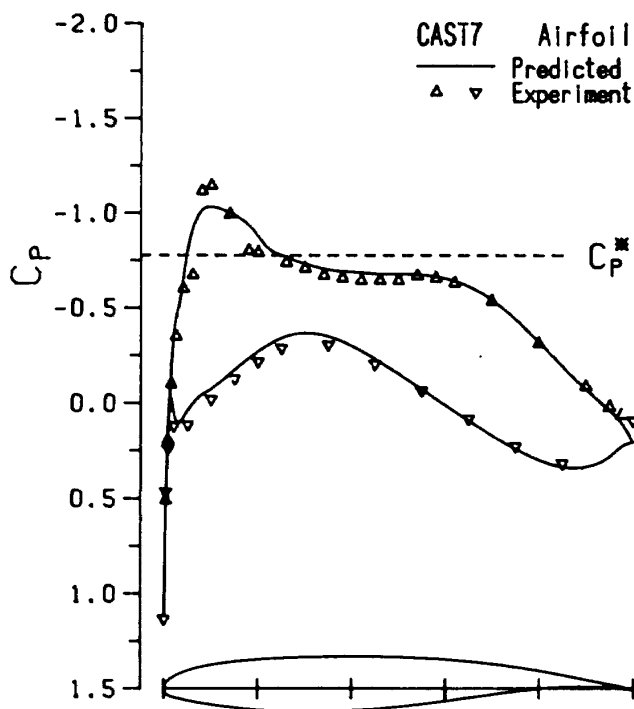


図 17 圧力分布の計算と実験の比較 ($M_\infty = 0.701$, $Re_c = 5.97 \times 10^6$, $XTRL = XTRU = 0.07$, $C_L = 0.5422$; 実験, $C_L = 0.5467$; 計算)

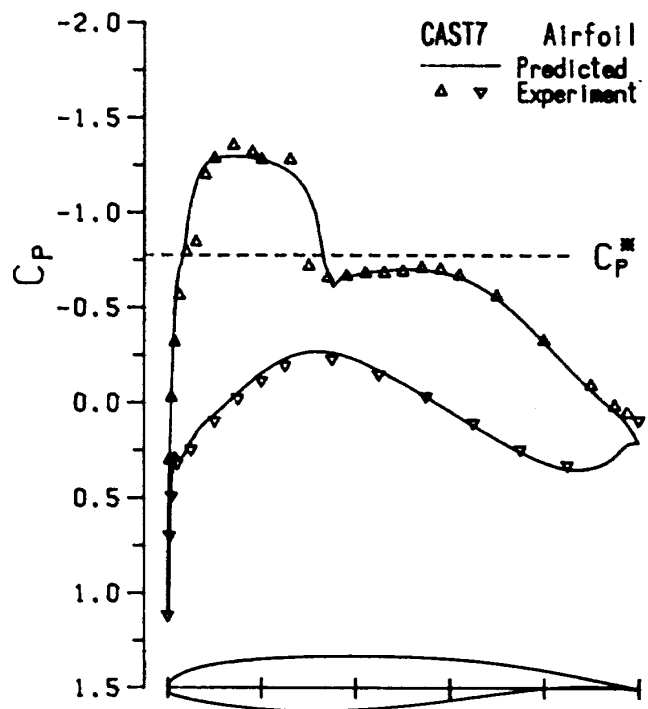


図 18 圧力分布の計算と実験の比較 ($M_\infty = 0.701$, $Re_c = 5.94 \times 10^6$, $XTRL = XTRU = 0.07$, $C_L = 0.7088$; 実験, $C_L = 0.7215$; 計算)

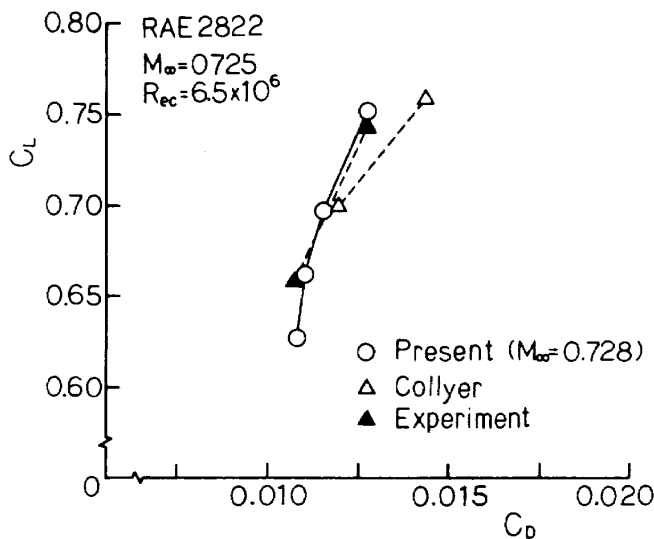


図 19 C_L - C_D 曲線の計算 (本計算, Collyer [7]) と実験の比較

6. ま と め

本論文に於いて、二次元翼型まわりの高レイノルズ数、遷音速粘性流に対する実用的解析として、完全ポテンシャル流と薄せん断層 (境界層および伴流) とを交互に互いに干渉的に解く、粘性非粘性干渉計算法を提案した。本計算法の特徴は、薄せん断層を微分法により計算した点にある。また、伴流に対する乱流モデルについて、極めて簡単で、かつ翼伴流に対する実験によく合う代数モデル (変形 CTWS モデル) を提案した。幾つかの翼型まわりの遷音速流をを例に本計算法を検証、十分満足できる精度で揚力、抵抗値等が予測できることを示した。本計算法は、薄せん断層の取り扱いが微分法によっているので、乱流モデルを含め三次元への拡張は、定式化が直接的である。

参 考 文 献

[1] Lock, R.C.; A Review of Methods for Predicting Viscous Effects on Airfoils and Wings at Transonic Speeds, AGARD CP291, Paper No. 8, (1980).
 [2] Melnik, R.E.; Turbulent Interactions on Airfoils at Transonic Speeds — Recent Developments, AGARD CP291, Paper No. 10, (1980).
 [3] Applied Computational Transonic Aerodynamics ed. Spee, B.M. and Yoshihara,

H., AGARD AG-266, (1982).

[4] Firmin, M.C.P.; Calculations of Transonic Flow Over Wing/Body Combinations with an Allowance for Viscous Effects, AGARD CP291, Paper No. 8, (1980).
 [5] Streett, C.L.; Viscous-Inviscid Interaction for Transonic Wing-Body Configurations Including Wake Effects, AIAA J., Vol. 20, (1982), pp. 915-923.
 [6] Arthur, M.T.; A Method for Calculating Subsonic and Transonic Flows Over Wings of Wing-Fuselage Combinations with an Allowance for Viscous Effects, AIAA Paper 84-0428, (1984).
 [7] Collyer, M.R.; An Extension to the Method of Garabedian and Korn for the Calculation of Transonic Flow past an Aerofoil to Include the Effects of a Boundary Layer and Wake, ARC R&M 3828, (1977).
 [8] Collyer, M.R. and Lock, R.C.; Prediction of Viscous Effects in Steady Transonic Flow past an Aerofoil, Aero. Quart., Vol. 30, (1979), pp. 485-505.
 [9] Melnik, R.E., Chou, R. and Mead, H.K.; Theory of Viscous Transonic Flow Over Airfoils at High Reynolds Number, AIAA Paper 77-680, (1977).
 [10] Bauer, F., Garabedian, P. and Korn, D.; A Theory of Supercritical Wing Sections, with Computer Programs and Examples, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 66, (1972).
 [11] Bavitz, P.C.; An Analysis Method for Two-Dimensional Transonic Viscous Flow, NASA TN D-7718, (1975).
 [12] 河合伸坦, 石黒登美子, 神谷信彦; 二次元翼まわり遷音速流数値計算の汎用プログラム, 航空宇宙技術研究所資料 TM-357, (1978)
 [13] Bansod, P. and Pham, T.; The Calculation of Two-Dimensional Transonic Flow over Airfoils Including Boundary Layer and Wake Effects, SAE Technical Paper Series-830708, (1983).

- [14] Cole, J.D.; Modern Developments in Transonic Flow, SIAM J. Appl. Math., Vol. 29, No. 4, (1975), pp. 763-787.
- [15] Holst, T.L.; Implicit Algorithm for the conservative Transonic Full-Potential Equation Using an Arbitrary Mesh, AIAA J., Vol. 17, No. 10, (1979), pp. 1038-1045.
- [16] Holst, T.L.; Fast, Conservative Algorithm for Solving the Transonic Full-Potential Equation, AIAA J., Vol. 18, No. 12, (1980), pp. 1431-1439.
- [17] Dougherty, F.C., Holst, T.L., Gundy, K.L. and Thomas, S.D.; TAIR — a Transonic Airfoil Analysis Computer Code, NASA TM 81296, (1981).
- [18] Green, J.E., Weeks, D.J. and Brooman, J.W.F.; Prediction of Turbulent Boundary Layers and Wakes in Compressible Flow by a Lag-Entrainment Method, ARC R&M No. 3791, (1973).
- [19] Cebeci, T. and Bradshaw, P.; Momentum Transfer in Boundary Layers, Hemisphere, Washington, D.C., (1977).
- [20] Cebeci, T. and Smith, A.M.O.; Analysis of Turbulent Boundary Layers, Academic, New York, (1974).
- [21] Cebeci, T., Thiele, F., Williams, P.G. and Stewartson, K.; On the Calculation of Symmetric Wakes 1. Two-Dimensional Flows, Numerical Heat Transfer, Vol. 2, (1979), pp. 35-60.
- [22] Bradshaw, P., Cebeci, T. and Whitelaw, J.H.; Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, Academic, London, (1981).
- [23] Bradshaw, P.; Prediction of the Turbulent Near Wake of a Symmetrical Airfoil, AIAA J., Vol. 8, No. 8, (1970), pp. 1507-1508.
- [24] Douglas, J. and Jones, B.F.; On Predictor-Corrector Methods for Non-linear Parabolic Differential Equations, J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 11, (1963), pp. 195-204.
- [25] 松野謙一; 境界層方程式に対する実二次精度, 予測子・修正子型クランク・ニコルソン差分スキームの構成, 航空宇宙技術研究所報告 TR-655, (1981)
- [26] Matsuno, K.; A Vector-Oriented Finite Difference Scheme for Calculating Three-Dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers on Practical Wing Configurations, AIAA-81-1020-CP, Presented AIAA 5th CFD Conference, Palo Alto, (1981).
- [27] Blottner, F.G.; Nonuniform Grid Method for Turbulent Boundary Layers, Lecture Notes in Physics, Vol. 35, (1975), pp. 91-97.
- [28] 廣瀬直喜, 河合伸坦, 小口慶子, 小寺智一; 高レイノルズ数遷音速流翼型解析法の検証と実験との対応, 第二回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, 航空宇宙技術研究所特別資料, SP-3, (1984), pp. 235-244.
- [29] Cook, T.A.; Measurements of the Boundary Layer and Wake of Two Aerofoil Sections at High Reynolds Numbers and High-Subsonic Mach Numbers, ARC R&M No. 3722, (1971).
- [30] Smith, F.T.; Boundary Layer Flow near a Discontinuity in Wall Conditions, J. Inst. Maths Applies, Vol. 13, (1974), pp. 127-145.
- [31] Experimental Data Base for Computer Program Assessment, AGARD-AR-138, (1979).
- [32] Melnik, R.E., Mead, H.R. and Jameson, A.; A Multi-Grid Method for the Computation of Viscid/Inviscid Interaction on Airfoils, AIAA-83-0234, (1983).
- [33] Schmidt, W., Jameson, A. and Whitfield, D.; Finite Volume Solution for the Euler Equation for Transonic Flow over Airfoils and Wings Including Viscous Effects, AIAA-81-1265, (1981).
- [34] Stanewsky, E., Puffert, W. and Muller, R.; In Ref. [31], Paper No. A3.

航空宇宙技術研究所報告 873号

昭和60年8月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社三興印刷
東京都新宿区信濃町12三河ビル
