

ISSN 0389-4010
UDC 624.074.4:
536.4

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-891

熱荷重により生じる円筒殻の軸対称
および梁様曲げ変形

遠藤修司

1985年11月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

熱荷重により生じる円筒殻の軸対称 および梁様曲げ変形*

遠藤修司**

Axisymmetric and Beam-Like Bending Deformations in Thin Elastic Circular Cylindrical Shells Due to Thermal Loads

Shuji ENDO

Abstract

The problems of axisymmetric and beam-like bending deformations in a thin circular cylindrical shell due to thermal loads are analyzed utilizing the Flügge, the Naghdi, the Koiter-Sanders, the Novozhilov and the Love-Reissner theories for the case where the both edges of the shell are simply supported. The first approximate expressions based on Kirchhoff-Love's hypothesis are obtained in closed form for the displacements, stress resultants and stress couples. It is then shown that the various theories provide the same results within engineering accuracy except when the shell is extremely long. Also, for the case when the temperature rise is uniform in the axial direction, the extremum values of stress resultants and couples occurring in the edge-zones are calculated. From the calculations, it is shown that, except for a very short shell, the extrema are independent of the length of the cylindrical shell.

概 要

熱荷重によって生じる両端を単純支持された円筒殻の軸対称および梁様曲げ変形問題がいくつかの線形殻理論を用いて解析される。Kirchhoff-Love の仮定に基づく一次近似解が閉じた表示式で与えられる。その結果、円筒が極端に長い場合を除けば、Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders, Novozhilov および Love-Reissner の理論は、いずれも一次近似解として正しい解を与えることが示される。また、温度上昇が軸方向に一様な場合に対して、円筒の縁領域内に生じる合応力およびモーメントの軸方向変動に対する極値が計算され、円筒が極端に短くしなければ、極値は円筒の長さに無関係に定まることが明らかにされる。

1. 緒 言

薄肉円筒殻は、航空機やロケットなどの主要な構造要素であり、これらの飛行体は、しばしば、飛行

荷重のほかに空力的加熱やエンジン排気などによって熱荷重を受けることがある。このような場合、殻の熱変形および応力状態を把握することは構造設計上重要な事柄の一つであり、すでに多くの研究がなされている。^{1)~7)} しかしながら、この円筒殻の熱変形問題に殻の曲げ理論を精密に適用して、解を閉じた形で表示している例は数少ないようである。

* 昭和60年10月4日受付

** 機体第一部

筆者は、先に、包括的に一組の式で表示された円筒殻に対する種々の線形殻理論の構成方程式^{8),9)}を、温度変化がある場合に適用し、それぞれの熱変形基礎式を示すとともにKirchhoff-Loveの仮定に基づいたオーダ評価の手法により、理論の相違によって解の間に生じる相対的な誤差についての考察を行なった。¹⁰⁾

本報告では、上記の熱変形基礎式より出発した解析解の展開の一例として、軸対称および梁様曲げ変形問題を取り上げ解析し、変位ならびに合応力およびモーメントに対する表示を実際の設計に便利な閉じた形で与えるとともに、理論の相違による結果の差異について比較検討する。さらに強度設計上重要と思われる合応力およびモーメントの軸方向変動における極値とその位置を明らかにする。解析に用いた境界条件は両端単純支持であり、温度分布は円筒の中央に関して対称で、肉厚方向には、薄肉円筒殻に対して合理的な線形の温度勾配を仮定する。解法は基礎微分方程式を、これらの条件の下に解く厳密解法である。

2. 支配方程式

基礎方程式は、文献10)に詳述されているので、ここでは本報告の展開に必要な記述にとどめる。

肉厚 h 、肉厚中央面の半径 R 、長さ $2L$ の円筒殻を考え、座標を図1のように定め、中央面での x 、 θ および z 方向の変位成分をそれぞれ $u_x^{(0)}$ 、 $u_\theta^{(0)}$ および $w_z^{(0)}$ とする。また、図2に見られるように、殻要素の断面に分布する応力によって生じる中央面の単位幅当りの合応力およびモーメントを N_x 、 N_θ 、

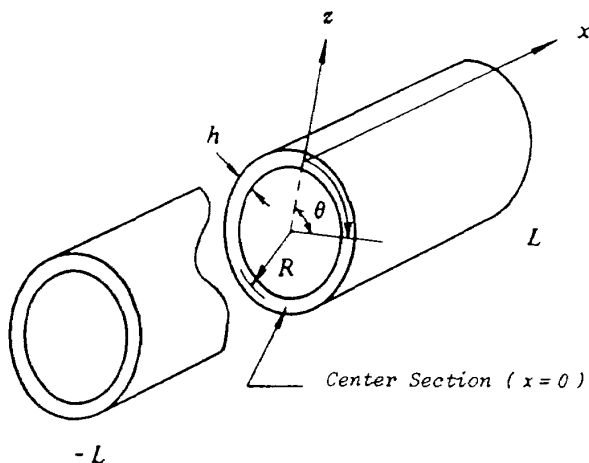


図1 円筒殻形状と座標系

$N_{x\theta}$ 、 $N_{\theta x}$ 、 Q_x 、 Q_θ および M_x 、 M_θ 、 $M_{x\theta}$ 、 $M_{\theta x}$ とし、図中の矢印の方向をそれぞれ正とする。

ここで、Kirchhoff-Loveの仮定を要約すれば次のように書ける。

i) 肉厚 h は中央面の曲率半径 R に比べて微小である。

$$h/R \ll 1 \quad (1)$$

ii) 中央面に垂直な直線素は、変形後も直線性を保ち、中央面に垂直で、長さに変化を生じない。

iii) 中央面に垂直な応力は他の応力に比べて小さく、無視できる。

この基本仮定に基づく殻理論を温度変化がある場合に拡張適用するとき、最初の無ひずみ無応力状態からの任意の温度変化を T とするならば、 T は次のように肉厚方向に線形な近似で十分である。

$$T(x, \theta, \zeta) = T^{(0)}(x, \theta) + \zeta T^{(1)}(x, \theta) \quad (2)$$

ここに、 ζ は次式で定義される独立変数である。

$$\zeta = 2z/h; \quad -1 \leq \zeta \leq 1 \quad (3)$$

このとき、 $T^{(0)}$ は肉厚方向(ζ 方向)に沿う平均温度上昇を、 $T^{(1)}$ は温度勾配を表わし、それぞれ次式で与えられる。

$$T^{(0)} = (T^+ + T^-)/2, \quad T^{(1)} = (T^+ - T^-)/2 \quad (4)$$

ただし、 T^+ および T^- は、それぞれ殻の外表面および内表面における温度である。

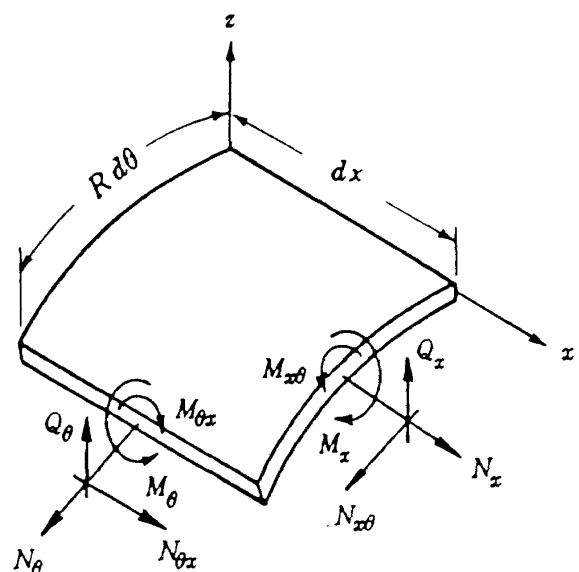


図2 円筒殻の面素に作用する合応力およびモーメント

以下の議論は、次に示す無次元量および演算子を用いて展開する。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_x^{(0)}/R, \quad v = u_\theta^{(0)}/R, \quad w = w_z^{(0)}/R \\ \Phi &= \alpha T^{(0)}, \quad \Psi = \alpha T^{(1)} \\ N_1 &= N_x/K, \quad N_2 = N_\theta/K, \quad N_{12} = N_{x\theta}/Gh \\ N_{21} &= N_{\theta x}/Gh, \quad M_1 = M_x/(D/R) \\ M_2 &= M_\theta/(D/R), \quad M_{12} = M_{x\theta}/(Gh^3/24R) \\ M_{21} &= M_{\theta x}/(Gh^3/24R) \\ l &= L/R, \quad y = x/R, \quad ()' = \partial()/\partial y \\ ()^\cdot &= \partial()/\partial \theta, \quad \nabla^2() = ()'' + ()^\cdot \cdot \end{aligned} \right\} (5)$$

ここに、 α は殻材料の線膨張率であり、 G 、 K および D は、それぞれ次式で与えられる弾性定数である。

$$\left. \begin{aligned} G &= E/2(1+\nu), \quad K = Eh/(1-\nu^2) \\ D &= Eh^3/12(1-\nu^2) \end{aligned} \right\} (6)$$

ただし、 E および ν は、それぞれ殻材料のヤング率およびポアソン比である。

面外変位 w を支配する方程式は、式(2)で与えられる温度変化を考慮した構成方程式を用いて、平衡方程式を変位成分 u 、 v および w で表わし、これら三つの式から u および v を消去することにより得られる。

2.1 軸対称温度分布の場合； $\Phi = \Phi(y)$ 、 $\Psi = \Psi(y)$

この場合、支配方程式は変形の対称性によって任意の温度分布を受ける場合に比較してかなり簡単化され、Kirchhoff-Loveの仮定に基づく一次近似精度の下で次の形に書ける。

$$\begin{aligned} w'''' + (a_{61}^0 + 2)w'' + 4k^4w \\ = 4k^4\Phi - \frac{2(1+\nu)R}{h}\Psi'' - \frac{\nu N_1}{\delta} \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、

$$4k^4 = \frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2} \gg 1, \quad \delta = \frac{h^2}{12R^2} \ll 1 \quad (8)$$

また、 u および v が満足すべき方程式は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} u' &= -\nu w + \delta f_1^0 w'' + (1+\nu)\Phi + N_1 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

ここで、合応力およびモーメントの表示を記すならば次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \text{constant} \\ N_2 &= \nu u' + (1+\delta E_2)w - (1+\nu)\Phi \\ N_{12} &= N_{21} = 0 \\ M_1 &= -w'' + D_1 u' - \frac{2(1+\nu)R}{h}\Psi \\ M_2 &= -\nu w'' - D_1 w - \frac{2(1+\nu)R}{h}\Psi \\ M_{12} &= M_{21} = 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

式(7)、(9)および(10)に含まれる a_{61}^0 、 f_1^0 、 E_2 および D_1 は、各殻理論によって異なる値をとる定数で、その具体的な表示は、他の同様の定数とともに式(13)、(14)および表1に一括して示す。

2.2 任意の温度分布の場合； $\Phi = \Phi(y, \theta)$ 、 $\Psi = \Psi(y, \theta)$

この場合、同じく一次近似精度で、支配方程式として次のような w に関する8階の偏微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \nabla^4(\nabla^2 + 1)^2 w + 4k^4 w'''' + a_{61}^0 w'''' + a_{62}^0 w'''' \\ + a_{63}^0 w'''' + a_{42}^0 w'''' = 4k^4 \nabla^2 \Phi \\ - \frac{2(1+\nu)R}{h}(\nabla^6 \Psi + \Psi^\cdot \cdot) \end{aligned} \quad (11)$$

また、 w から u および v を求めるための方程式は一次近似精度で次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 u &= -\nu w'''' + w'' \\ &+ \delta(f_1^0 w'''' + f_2^0 w'''' + f_3^0 w''') \\ &+ (1+\nu)\nabla^2 \Phi \\ \nabla^4 v &= -(2+\nu)w'''' - w'' \\ &+ \delta(g_1^0 w'''' + g_2^0 w'''' + g_3^0 w''') \\ &+ (1+\nu)\nabla^2 \Phi \end{aligned} \right\} (12)$$

式(11)に含まれる係数 a_{ij}^0 ならびに式(12)に現われる係数 f_i^0 および g_i^0 は、各殻理論によって異なる値をとる定数で、前者の具体的な表示は、文献8)、9)あるいは11)に記載されている。ただし、文献8)および9)では記号 a_{ij}^* が、文献11)では \bar{a}_{ij} が用いられている。後者の具体形は文献11)あるいは12)に記されている。便宜のため、これらの諸量を、ここに一括して再録すれば、次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} a_{61}^0 &= -2 + \nu(E_1 + D_1) \\ a_{62}^0 &= -1 + \nu - (1-\nu)\{2D_4 - (1+\nu) \\ &\times (D_2 - D_3) - (2+\nu)E_4 + \nu E_6\}/2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{63}^0 &= 1 + \nu - (1 - \nu)D_4 - \nu(E_1 + D_1) \\ &\quad + (1 - \nu)(E_4 + E_6)/2 \\ a_{42}^0 &= 1 + \nu - \nu(E_1 + D_1) + (1 - \nu) \\ &\quad \times (E_4 + E_6 - D_4)/2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1^0 &= E_1 \\ f_2^0 &= -(1 + \nu)/(1 - \nu) + 2E_1/(1 - \nu) \\ &\quad - (1 + \nu)E_4/2 - (1 - \nu)E_6/2 \\ f_3^0 &= -(1 + \nu)(1 - E_1)/(1 - \nu) - E_6 \\ g_1^0 &= 2/(1 - \nu) - (1 + \nu)E_1/(1 - \nu) + E_4 \\ g_2^0 &= (3 - \nu)/(1 - \nu) - 2E_1/(1 - \nu) \\ &\quad + (1 - \nu)E_4/2 + (1 + \nu)E_6/2 \\ g_3^0 &= 1 - E_1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ただし、 E_i および D_j は表 1 に与えられるように零もしくは単位オーダの定数で、Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders, Novozhilov, Love-Reissner 理論など各理論によって異なる値をとる。

ここで、合応力およびモーメントと変位との関係式を記すならば次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= u' + \nu(v' + w) - \delta E_1 w'' - (1 + \nu)\Phi \\ N_2 &= \nu u' + (1 + \delta E_2)(v' + w) \\ &\quad + \delta E_1(w'' - v') - (1 + \nu)\Phi \\ N_{12} &= \left(1 + \frac{\delta E_3}{4}\right)(v' + u') \\ &\quad + \frac{\delta E_4}{4}(3v' - u' - 4w') \\ N_{21} &= \left(1 + \frac{3\delta E_5}{4}\right)(v' + u') \\ &\quad - \frac{\delta E_6}{4}(3v' - u' - 4w') \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -w'' - \nu(w'' - v') + D_1 u' \\ &\quad - \frac{2(1 + \nu)R}{h}\psi \\ M_2 &= -\nu w'' - (w'' - v') - D_1(v' + w) \\ &\quad - \frac{2(1 + \nu)R}{h}\psi \\ M_{12} &= 3v' - u' - 4w' + D_2(v' + u') \\ &\quad - D_4(v' - u') \\ M_{21} &= 3v' - u' - 4w' - D_3(v' + u') \\ &\quad - D_4(v' - u') \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

3. 変位の一般解と合応力およびモーメント

温度分布が Fourier 級数に展開できるものとして各項が次式で表わせる場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} (\Phi, \Psi) &= (\Phi_{mn}, \Psi_{mn}) \cos sy \cos n\theta \\ &\quad ; m, n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに、

$$s = \frac{m\pi R}{2L} = \frac{m\pi}{2l} \quad (17)$$

したがって、 m は温度の軸方向変化の半波数を、 n は周方向の波数を表わす。

式 (16) は、通常、解の特異性を考慮して、 $n = 0$ 、 $n = 1$ および $n \geq 2$ の 3 つの場合に分けて取り扱われるが、本報告では、 $n = 0$ および 1 の場合を採り上げることにする。このとき、円筒殻の変形は、それぞれ軸対称および梁様曲げの状態となる。

表 1 E_i と D_j の値^{8),9),11)}

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	D_1	D_2	D_3	D_4
Flügge	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Naghdi	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Koiter-Sanders	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Novozhilov	0	0	2	2	0	0	0	1	-1	0
Love-Reissner	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

3.1 軸対称変形解

3.1.1 $n=0, m=0$ の場合

式(16)および(2)より温度分布が次式で表わされる場合である。

$$\alpha T(\zeta) = \Phi_{00} + \zeta \Psi_{00} \quad (18)$$

すなわち、殻の内・外表面は、それぞれ一様な一定温度であるが、肉厚方向には線形の温度分布がある場合である。

支配方程式および u, v が満たすべき方程式は、式(7)および(9)より、それぞれ次のように書ける。

$$\begin{aligned} w'''' + (a_{61}^0 + 2)w'' + 4k^4 w \\ = 4k^4 \Phi_{00} - \frac{\nu N_1}{\delta} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} u' &= -\nu w + \delta f_1^0 w'' + (1+\nu)\Phi_{00} + N_1 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ただし、 $N_1 = \text{constant}$ である。

支配方程式、式(19)、の解 w を求めれば、式(20)によって u および v が求められる。また、これらの変位成分を、式(10)の右辺のそれぞれに代入すれば合応力およびモーメントが得られる。これらの解を肩添字⁽⁰⁰⁾を付して表わすこととし、後の演算の簡単のために、複素数表示¹³⁾で表わせば、次のとおりである。

変位：

$$\left. \begin{aligned} w^{(00)} &= -\frac{\nu N_1^{(00)}}{1-\nu^2} + \Phi_{00} \\ &\quad + \text{Re} \chi_0 (c^{(00)} \cos \chi_0 y - a^{(00)} \sin \chi_0 y) \\ u^{(00)} &= \left(\frac{N_1^{(00)}}{1-\nu^2} + \Phi_{00} \right) y - \text{Re} (\nu + \delta f_1^0 \chi_0^2) \\ &\quad \times (c^{(00)} \sin \chi_0 y + a^{(00)} \cos \chi_0 y) \\ v^{(00)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

合応力およびモーメント：

$$\left. \begin{aligned} N_1^{(00)} &= \text{constant} \\ N_2^{(00)} &= \delta E_2 \left(-\frac{\nu N_1^{(00)}}{1-\nu^2} + \Phi_{00} \right) \\ &\quad + \text{Re} \chi_0 (1-\nu^2 + \delta E_2 - \delta \nu f_1^0 \chi_0^2) \\ &\quad \times (c^{(00)} \cos \chi_0 y - a^{(00)} \sin \chi_0 y) \\ N_{12}^{(00)} &= N_{21}^{(00)} = 0 \\ M_1^{(00)} &= D_1 \left(\frac{N_1^{(00)}}{1-\nu^2} + \Phi_{00} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \text{Re} \chi_0 \{ \chi_0^2 - D_1 (\nu + \delta f_1^0 \chi_0^2) \} \\ &\times (c^{(00)} \cos \chi_0 y - a^{(00)} \sin \chi_0 y) \\ &- \frac{2(1+\nu)R}{h} \Psi_{00} \end{aligned} \right\}$$

$$M_2^{(00)} = D_1 \left(\frac{\nu N_1^{(00)}}{1-\nu^2} - \Phi_{00} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \text{Re} \chi_0 (\nu \chi_0^2 - D_1) \\ &\times (c^{(00)} \cos \chi_0 y - a^{(00)} \sin \chi_0 y) \\ &- \frac{2(1+\nu)R}{h} \Psi_{00} \end{aligned} \right\}$$

$$M_{12}^{(00)} = M_{21}^{(00)} = 0$$

(22)

ここで、式(21)および(22)に現われる χ_0 は、式(19)の斉次式に $w = e^{p y}$ とおいて得られる特性方程式

$$p^4 + (a_{61}^0 + 2)p^2 + 4k^4 = 0 \quad (23)$$

の根を

$$P_1, P_2, P_3, P_4 = \pm (\xi_0 \pm i \eta_0); i = \sqrt{-1} \quad (24)$$

の形に表示するとき、次式で定められる複素数である。

$$\left. \begin{aligned} \chi_0 &= \eta_0 + i \xi_0 \\ \xi_0 &= k \sqrt{1 - \frac{a_{61}^0 + 2}{4k^2}}, \quad \eta_0 = k \sqrt{1 + \frac{a_{61}^0 + 2}{4k^2}} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

また、 $c^{(00)}$ および $a^{(00)}$ は境界条件によって定まる複素任意定数であり、 Re は次に続く複素数の実数部をとることを意味する。

3.1.2 $n=0, m \geq 1$ の場合

温度分布が次式で表わされる場合である。

$$\alpha T(y, \zeta) = (\Phi_{m0} + \zeta \Psi_{m0}) \cos s y \quad (26)$$

支配方程式および u, v が満たすべき方程式は、式(7)および(9)より、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} w'''' + (a_{61}^0 + 2)w'' + 4k^4 w \\ = \left\{ 4k^4 \Phi_{m0} + \frac{2(1+\nu)R}{h} s^2 \Psi_{m0} \right\} \\ \times \cos s y - \frac{\nu N_1}{\delta} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} u' &= -\nu w + \delta f_1^0 w'' + (1+\nu)\Phi_{m0} \cos s y + N_1 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここに、 $N_1 = \text{constant}$ である。

式 (27), (28) ならびに (10) により, 3.1.1 項と同様にして, 変位ならびに合応力およびモーメントを求め, 肩添字^(m0) を付して表わせば, 次のとおりである。

変位:

$$\left. \begin{aligned} w^{(m0)} &= -\frac{\nu N_1^{(m0)}}{1-\nu^2} + W_p^{(m0)} \cos sy \\ &\quad + \operatorname{Re} \chi_0 (c^{(m0)} \cos \chi_0 y - a^{(m0)} \sin \chi_0 y) \\ u^{(m0)} &= \frac{N_1^{(m0)}}{1-\nu^2} y + U_p^{(m0)} \sin sy \\ &\quad - \operatorname{Re} (\nu + \delta f_1^0 \chi_0^2) \\ &\quad \times (c^{(m0)} \sin \chi_0 y + a^{(m0)} \cos \chi_0 y) \\ v^{(m0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

合応力およびモーメント:

$$\left. \begin{aligned} N_1^{(m0)} &= \text{constant} \\ N_2^{(m0)} &= -\frac{\delta E_2}{1-\nu^2} \nu N_1^{(m0)} \\ &\quad + \{ \nu s U_p^{(m0)} + (1 + \delta E_2) W_p^{(m0)} \\ &\quad \quad - (1 + \nu) \Phi_{m0} \} \cos sy \\ &\quad + \operatorname{Re} \chi_0 (1 - \nu^2 + \delta E_2 - \delta \nu f_1^0 \chi_0^2) \\ &\quad \times (c^{(m0)} \cos \chi_0 y - a^{(m0)} \sin \chi_0 y) \\ N_{12}^{(m0)} &= N_{21}^{(m0)} = 0 \\ M_1^{(m0)} &= \frac{D_1}{1-\nu^2} N_1^{(m0)} \\ &\quad + \left\{ D_1 s U_p^{(m0)} + s^2 W_p^{(m0)} \right. \\ &\quad \quad \left. - \frac{2(1+\nu)R}{h} \Psi_{m0} \right\} \cos sy \\ &\quad + \operatorname{Re} \chi_0 \{ \chi_0^2 - D_1 (\nu + \delta f_1^0 \chi_0^2) \} \\ &\quad \times (c^{(m0)} \cos \chi_0 y - a^{(m0)} \sin \chi_0 y) \\ M_2^{(m0)} &= \frac{D_1}{1-\nu^2} \nu N_1^{(m0)} \\ &\quad + \left\{ (\nu s^2 - D_1) W_p^{(m0)} \right. \\ &\quad \quad \left. - \frac{2(1+\nu)R}{h} \Psi_{m0} \right\} \cos sy \\ &\quad + \operatorname{Re} \chi_0 (\nu \chi_0^2 - D_1) \\ &\quad \times (c^{(m0)} \cos \chi_0 y - a^{(m0)} \sin \chi_0 y) \\ M_{12}^{(m0)} &= M_{21}^{(m0)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ここに, 式 (29) および (30) に現われる $W_p^{(m0)}$ および $U_p^{(m0)}$ は, それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} W_p^{(m0)} &= \frac{4k^4 \Phi_{m0} + \{ 2(1+\nu)R/h \} s^2 \Psi_{m0}}{s^4 - (a_{61}^0 + 2)s^2 + 4k^4} \\ U_p^{(m0)} &= -\frac{\nu + \delta f_1^0 s^2}{s} W_p^{(m0)} + \frac{1+\nu}{s} \Phi_{m0} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

また, $c^{(m0)}$ および $a^{(m0)}$ は複素任意定数である。

3.2 梁様曲げ変形解

3.2.1 $n=1, m=0$ の場合

式 (16) および (2) より温度分布が次式で表わされる場合である。

$$\alpha T(\theta, \zeta) = (\Phi_{01} + \zeta \Psi_{01}) \cos \theta \quad (32)$$

支配方程式および u, v が満たすべき方程式は, 式 (11) および (12) より, それぞれ次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 (\nabla^2 + 1)^2 w + 4k^4 w'''' \\ + a_{61}^0 w'''' + a_{62}^0 w'''' + a_{63}^0 w'''' + a_{42}^0 w'''' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 u &= -\nu w'''' + w'''' + \delta (f_1^0 w'''' + f_2^0 w'''' \\ &\quad + f_3^0 w''') \\ \nabla^4 v &= -(2 + \nu) w'''' - w'''' \\ &\quad + \delta (g_1^0 w'''' + g_2^0 w'''' + g_3^0 w''') \\ &\quad + (1 + \nu) \Phi_{01} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$w = e^{py} \cos \theta$ において得られる式 (33) の特性方程式において, Love-Reissner 理論に対するものと Love-Reissner 以外の理論に対するものとで, その形が異なり^{8),9)} Love-Reissner の式からは 2 重根 $p^2=0$ が, またそれ以外の式からは 4 重根 $p^4=0$ が得られる。したがって, Love-Reissner 理論による解と, それ以外の理論による解とでは, その形を異にする。3.1.1 項と同様にして, 式 (33), (34) ならびに (15) により変位ならびに合応力およびモーメントを求め, 肩添字⁽⁰¹⁾ を付して表わせば, それぞれ次式を得る。

(i) Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders および Novozhilov 理論

変位 :

$$\left. \begin{aligned}
w^{(01)} &= \{ W_1^{(01)} + W_2^{(01)} y + W_3^{(01)} y^2 + W_4^{(01)} y^3 + \operatorname{Re}(\chi_1^2 + 1)^2 (c^{(01)} \cos \chi_1 y + a^{(01)} \sin \chi_1 y) \} \cos \theta \\
u^{(01)} &= - \{ (1 - \delta f_3^0) W_2^{(01)} + 6 \{ 2 + \nu + \delta (f_2^0 - 2f_3^0) \} W_4^{(01)} + (1 - \delta f_3^0) (2W_3^{(01)} y + 3W_4^{(01)} y^2) \\
&\quad + \operatorname{Re} \chi_1 \{ (\nu + \delta f_2^0) \chi_1^2 - (1 - \delta f_3^0) + \delta f_1^0 \chi_1^4 \} (c^{(01)} \sin \chi_1 y - a^{(01)} \cos \chi_1 y) \} \cos \theta \\
v^{(01)} &= \{ - (1 + \delta g_3^0) W_1^{(01)} + 2 \{ \nu + \delta (g_2^0 - 2g_3^0) \} W_3^{(01)} + \{ - (1 + \delta g_3^0) W_2^{(01)} \\
&\quad + 6 \{ \nu + \delta (g_2^0 - 2g_3^0) \} W_4^{(01)} \} y - (1 + \delta g_3^0) (W_3^{(01)} y^2 + W_4^{(01)} y^3) \\
&\quad - \operatorname{Re} \{ (2 + \nu + \delta g_2^0) \chi_1^2 + (1 + \delta g_3^0) + \delta g_1^0 \chi_1^4 \} (c^{(01)} \cos \chi_1 y + a^{(01)} \sin \chi_1 y) \\
&\quad + (1 + \nu) \Phi_{01} \} \sin \theta
\end{aligned} \right\} (35)$$

合応力およびモーメント :

$$\left. \begin{aligned}
N_1^{(01)} &= \{ -\delta \nu g_3^0 W_1^{(01)} - 2 \{ 1 - \nu^2 + \delta (E_1 - f_3^0 - \nu g_2^0 + 2\nu g_3^0) \} W_3^{(01)} - \{ \delta \nu g_3^0 W_2^{(01)} \\
&\quad + 6 \{ 1 - \nu^2 + \delta (E_1 - f_3^0 - \nu g_2^0 + 2\nu g_3^0) \} W_4^{(01)} \} y - \delta \nu g_3^0 (W_3^{(01)} y^2 + W_4^{(01)} y^3) \\
&\quad + \operatorname{Re} \{ \{ 1 - \nu^2 + \delta (E_1 - f_3^0 - \nu g_2^0) \} \chi_1^2 - \delta \nu g_3^0 + \delta (2E_1 - f_2^0 - \nu g_1^0) \chi_1^4 \} \\
&\quad \times (c^{(01)} \cos \chi_1 y + a^{(01)} \sin \chi_1 y) - (1 - \nu^2) \Phi_{01} \} \cos \theta \\
N_2^{(01)} &= \{ - \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \delta g_3^0 W_1^{(01)} + 2 \{ \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \{ \nu + \delta (g_2^0 - 2g_3^0) \} \\
&\quad - \nu (1 - \delta f_3^0) \} W_3^{(01)} - \{ \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \delta g_3^0 W_2^{(01)} - 6 \{ \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \\
&\quad \times \{ \nu + \delta (g_2^0 - 2g_3^0) \} - \nu (1 - \delta f_3^0) \} W_4^{(01)} \} y - \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \delta g_3^0 (W_3^{(01)} y^2 + W_4^{(01)} y^3) \\
&\quad + \operatorname{Re} \{ \{ \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} (1 - \delta g_1^0) - \nu (\nu + \delta f_2^0) \} \chi_1^4 - \{ \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} (\nu + \delta g_2^0) \\
&\quad - \nu (1 - \delta f_3^0) \} \chi_1^2 - \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \delta g_3^0 - \delta \nu f_1^0 \chi_1^6 \} (c^{(01)} \cos \chi_1 y + a^{(01)} \sin \chi_1 y) \\
&\quad - \delta (1 + \nu) (E_1 - E_2) \Phi_{01} \} \cos \theta \\
N_{12}^{(01)} &= \{ -\delta \{ (1 + \delta E_3/4) (f_3^0 + g_3^0) - \delta E_4 (f_3^0 - 3g_3^0)/4 \} W_2^{(01)} + 6 \{ (1 + \delta E_3/4) \{ 2(1 + \nu) \\
&\quad + \delta (f_2^0 - 2f_3^0 + g_2^0 - 2g_3^0) \} - \delta E_4 \{ 2(1 - \nu) + \delta (f_2^0 - 2f_3^0 - 3g_2^0 + 6g_3^0) \} /4 \} W_4^{(01)} \\
&\quad - \delta \{ (1 + \delta E_3/4) (f_3^0 + g_3^0) - \delta E_4 (f_3^0 - 3g_3^0)/4 \} (2W_3^{(01)} y + 3W_4^{(01)} y^2) \\
&\quad + \operatorname{Re} \chi_1 \{ \{ (1 + \delta E_3/4) \{ 2(1 + \nu) + \delta (f_2^0 + g_2^0) \} - \delta E_4 \{ 2(1 - \nu) + \delta (f_2^0 - 3g_3^0) \} /4 \} \chi_1^2 \\
&\quad + \delta \{ (1 + \delta E_3/4) (f_3^0 + g_3^0) - \delta E_4 (f_3^0 - 3g_3^0)/4 \} + \delta \{ (1 + \delta E_3/4) (f_1^0 + g_1^0) \\
&\quad - E_4 \{ 4 + \delta (f_3^0 - 3g_1^0) \} /4 \} \chi_1^4 \} (c^{(01)} \sin \chi_1 y - a^{(01)} \cos \chi_1 y) \} \sin \theta \\
N_{21}^{(01)} &= \{ -\delta \{ (1 + 3\delta E_5/4) (f_3^0 + g_3^0) + \delta E_6 (f_3^0 - 3g_3^0)/4 \} W_2^{(01)} + 6 \{ (1 + 3\delta E_5/4) \\
&\quad \times \{ 2(1 + \nu) + \delta (f_2^0 - 2f_3^0 + g_2^0 - 2g_3^0) \} + \delta E_6 \{ 2(1 - \nu) + \delta (f_2^0 - 2f_3^0 - 3g_2^0 + 6g_3^0) \} /4 \} W_4^{(01)} \\
&\quad - \delta \{ (1 + 3\delta E_5/4) (f_3^0 + g_3^0) + \delta E_6 (f_3^0 - 3g_3^0)/4 \} (2W_3^{(01)} y + 3W_4^{(01)} y^2) \\
&\quad + \operatorname{Re} \chi_1 \{ \{ (1 + 3\delta E_5/4) \{ 2(1 + \nu) + \delta (f_2^0 + g_2^0) \} + \delta E_6 \{ 2(1 - \nu) + \delta (f_2^0 - 3g_3^0) \} /4 \} \chi_1^2 \\
&\quad + \delta \{ (1 + 3\delta E_5/4) (f_3^0 + g_3^0) + \delta E_6 (f_3^0 - 3g_3^0)/4 \} + \delta \{ (1 + 3\delta E_5/4) (f_1^0 + g_1^0) \\
&\quad + E_6 \{ 4 + \delta (f_3^0 - 3g_1^0) \} /4 \} \chi_1^4 \} (c^{(01)} \sin \chi_1 y - a^{(01)} \cos \chi_1 y) \} \sin \theta \\
M_1^{(01)} &= \{ -\delta \nu g_3^0 W_1^{(01)} - 2 \{ 1 - \nu^2 - \delta \nu (g_2^0 - 2g_3^0) + D_1 (1 - \delta f_3^0) \} W_3^{(01)} \\
&\quad - \{ \delta \nu g_3^0 W_2^{(01)} + 6 \{ 1 - \nu^2 - \delta \nu (g_2^0 - 2g_3^0) + D_1 (1 - \delta f_3^0) \} W_4^{(01)} \} y - \delta \nu g_3^0 (W_3^{(01)} y^2 + W_4^{(01)} y^3) \\
&\quad + \operatorname{Re} \{ (1 - \delta D_1 f_1^0) \chi_1^6 + \{ 2 + \nu (1 - \delta g_1^0) - D_1 (\nu + \delta f_2^0) \} \chi_1^4 + \{ 1 - \nu (\nu + \delta g_2^0) \\
&\quad + D_1 (1 - \delta f_3^0) \} \chi_1^2 - \delta \nu g_3^0 \} (c^{(01)} \cos \chi_1 y + a^{(01)} \sin \chi_1 y)
\end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& +\nu(1+\nu)\Phi_{01}-2(1+\nu)R\Psi_{01}/h \Big] \cos\theta \\
M_2^{(01)} = & \left[-(1-D_1)\delta g_3^0 W_1^{(01)} - 2\{\nu-(1-D_1)\{\nu+\delta(g_2^0-2g_3^0)\}\} W_3^{(01)} \right. \\
& - \left. \left\{ (1-D_1)\delta g_3^0 W_2^{(01)} + 6\{\nu-(1-D_1)\{\nu+\delta(g_2^0-2g_3^0)\}\} W_4^{(01)} \right\} y \right. \\
& - (1-D_1)\delta g_3^0 (W_3^{(01)}y^2 + W_4^{(01)}y^3) + \operatorname{Re}\{\nu\chi_1^6 + \{2\nu+(1-D_1)(1-\delta g_1^0)\}\chi_1^4 \\
& + \{\nu-(1-D_1)(\nu+\delta g_2^0)\}\chi_1^2 - (1-D_1)\delta g_3^0\}(c^{(01)}\cos\chi_1 y + a^{(01)}\sin\chi_1 y) \\
& \left. + (1-D_1)(1+\nu)\Phi_{01} - 2(1+\nu)R\Psi_{01}/h \right] \cos\theta \\
M_{12}^{(01)} = & \left[\delta\{f_3^0 - 3g_3^0 - D_2(f_3^0 + g_3^0)\}W_2^{(01)} - 6\{2\{1-\nu-D_2(1+\nu)\}\} \right. \\
& \left. + \delta\{f_2^0 - 2f_3^0 - 3g_2^0 + 6g_3^0 - D_2(f_2^0 - 2f_3^0 + g_2^0 - 2g_3^0)\}\right] W_4^{(01)} \\
& + \delta\{f_3^0 - 3g_3^0 - D_2(f_3^0 + g_3^0)\}(2W_3^{(01)}y + 3W_4^{(01)}y^2) - \operatorname{Re}\chi_1 \left\{ [2\{1-\nu-D_2(1+\nu)\}\} \right. \\
& \left. + \delta\{f_2^0 - 3g_2^0 - D_2(f_2^0 + g_2^0)\}\right] \chi_1^2 + \delta\{f_3^0 - 3g_3^0 - D_2(f_3^0 + g_3^0)\} \\
& \left. + [4 + \delta\{f_1^0 - 3g_1^0 - D_2(f_1^0 + g_1^0)\}]\chi_1^4 \right\} (c^{(01)}\sin\chi_1 y - a^{(01)}\cos\chi_1 y) \Big] \sin\theta \\
M_{21}^{(01)} = & \left[\delta\{f_3^0 - 3g_3^0 + D_3(f_3^0 + g_3^0)\}W_2^{(01)} - 6\{2\{1-\nu+D_3(1+\nu)\}\} \right. \\
& \left. + \delta\{f_2^0 - 2f_3^0 - 3g_2^0 + 6g_3^0 + D_3(f_2^0 - 2f_3^0 + g_2^0 - 2g_3^0)\}\right] W_4^{(01)} \\
& + \delta\{f_3^0 - 3g_3^0 + D_3(f_3^0 + g_3^0)\}(2W_3^{(01)}y + 3W_4^{(01)}y^2) - \operatorname{Re}\chi_1 \left\{ [2\{1-\nu+D_3(1+\nu)\}\} \right. \\
& \left. + \delta\{f_2^0 - 3g_2^0 + D_3(f_2^0 + g_2^0)\}\right] \chi_1^2 + \delta\{f_3^0 - 3g_3^0 + D_3(f_3^0 + g_3^0)\} \\
& \left. + [4 + \delta\{f_1^0 - 3g_1^0 + D_3(f_1^0 + g_1^0)\}]\chi_1^4 \right\} (c^{(01)}\sin\chi_1 y - a^{(01)}\cos\chi_1 y) \Big] \sin\theta
\end{aligned} \tag{36}$$

式(35)および(36)の式中の χ_1 は、式(33)に対する特性方程式

$$P^4 \{P^4 + (a_{61}^0 - 2)P^2 + 4k^4\} = 0 \tag{37}$$

の根を

$$\left. \begin{aligned}
P_1, P_2, P_3, P_4 &= 0 \\
P_5, P_6, P_7, P_8 &= \pm(\xi_1 \pm i\eta_1)
\end{aligned} \right\} \tag{38}$$

と書くとき、次式で定められる複素数である。

$$\left. \begin{aligned}
\chi_1 &= \eta_1 + i\xi_1 \\
\xi_1 &= k \sqrt{1 - \frac{a_{61}^0 - 2}{4k^2}}, \quad \eta_1 = k \sqrt{1 + \frac{a_{61}^0 - 2}{4k^2}}
\end{aligned} \right\} \tag{39}$$

また、 $W_1^{(01)}$, $W_2^{(01)}$, $W_3^{(01)}$ および $W_4^{(01)}$ は実数の任意定数であり、 $c^{(01)}$ および $a^{(01)}$ は複素任意定数である。

(ii) Love-Reissner 理論

未定任意定数などを表わす諸記号は、(i)のFlügge理論などに対する表示と同じ記号を用いて表わすことにする。

変位：

$$\left. \begin{aligned}
w^{(01)} &= \{W_1^{(01)} + W_2^{(01)}y + (\phi^2 - 1)^2(W_3^{(01)}\cosh\phi y + W_4^{(01)}\sinh\phi y) \\
& + \operatorname{Re}(\chi_1^2 + 1)^2(c^{(01)}\cos\chi_1 y + a^{(01)}\sin\chi_1 y)\} \cos\theta \\
u^{(01)} &= -\left\{ (1 - \delta f_3^0)W_2^{(01)} + \phi\{(\nu + \delta f_2^0)\phi^2 + (1 - \delta f_3^0)\}\right\} (W_3^{(01)}\sinh\phi y + W_4^{(01)}\cosh\phi y) \\
& + \operatorname{Re}\chi_1 \left\{ (\nu + \delta f_2^0)\chi_1^2 - (1 - \delta f_3^0)\right\} (c^{(01)}\sin\chi_1 y - a^{(01)}\cos\chi_1 y) \Big\} \cos\theta \\
v^{(01)} &= \left\{ -(1 + \delta)(W_1^{(01)} + W_2^{(01)}y) + \{(2 + \nu + \delta g_2^0)\phi^2 - (1 + \delta) - \delta g_1^0\phi^4\} \right. \\
& \times (W_3^{(01)}\cosh\phi y + W_4^{(01)}\sinh\phi y) - \operatorname{Re}\{ (2 + \nu + \delta g_2^0)\chi_1^2 + (1 + \delta) + \delta g_1^0\chi_1^4 \} \\
& \left. \times (c^{(01)}\cos\chi_1 y + a^{(01)}\sin\chi_1 y) + (1 + \nu)\Phi_{01} \right\} \sin\theta
\end{aligned} \right\} \tag{40}$$

合応力およびモーメント：

$$\begin{aligned}
 N_1^{(01)} &= \left[-\delta \nu (W_1^{(01)} + W_2^{(01)} y) - \left\{ \{ 1 - \nu^2 - \delta (f_3^0 + \nu g_2^0) \} \phi^2 + \delta \nu + \delta (f_2^0 + \nu g_1^0) \phi^4 \right\} \right. \\
 &\quad \times (W_3^{(01)} \cosh \phi y + W_4^{(01)} \sinh \phi y) + \operatorname{Re} \left\{ \{ 1 - \nu^2 - \delta (f_3^0 + \nu g_2^0) \} \chi_1^2 - \delta \nu - \delta (f_2^0 + \nu g_1^0) \chi_1^4 \right\} \\
 &\quad \left. \times (c^{(01)} \cos \chi_1 y + a^{(01)} \sin \chi_1 y) - (1 - \nu^2) \Phi_{01} \right] \cos \theta \\
 N_2^{(01)} &= \left[-\delta (W_1^{(01)} + W_2^{(01)} y) + \left\{ \{ 1 - \nu^2 - \delta (\nu f_2^0 + g_1^0) \} \phi^4 + \delta (\nu f_3^0 + g_2^0) \phi^2 - \delta \right\} \right. \\
 &\quad \times (W_3^{(01)} \cosh \phi y + W_4^{(01)} \sinh \phi y) + \operatorname{Re} \left\{ \{ 1 - \nu^2 - \delta (\nu f_2^0 + g_1^0) \} \chi_1^4 \right. \\
 &\quad \left. - \delta (\nu f_3^0 + g_2^0) \chi_1^2 - \delta \right\} (c^{(01)} \cos \chi_1 y + a^{(01)} \sin \chi_1 y) \left. \right] \cos \theta \\
 N_{12}^{(01)} &= N_{21}^{(01)} = \left[-\delta (1 + f_3^0) W_2^{(01)} + \phi \left\{ \{ 2(1 + \nu) + \delta (f_2^0 + g_2^0) \} \phi^2 - \delta (1 + f_3^0) - \delta g_1^0 \phi^4 \right\} \right. \\
 &\quad \times (W_3^{(01)} \sinh \phi y + W_4^{(01)} \cosh \phi y) + \operatorname{Re} \chi_1 \left\{ \{ 2(1 + \nu) + \delta (f_2^0 + g_2^0) \} \chi_1^2 \right. \\
 &\quad \left. + \delta (1 + f_3^0) + \delta g_1^0 \chi_1^4 \right\} (c^{(01)} \sin \chi_1 y - a^{(01)} \cos \chi_1 y) \left. \right] \sin \theta \\
 M_1^{(01)} &= \left[-\delta \nu (W_1^{(01)} + W_2^{(01)} y) - \left\{ \phi^6 - (2 + \nu - \delta \nu g_1^0) \phi^4 + (1 - \nu^2 - \delta \nu g_2^0) \phi^2 + \delta \nu \right\} \right. \\
 &\quad \times (W_3^{(01)} \cosh \phi y + W_4^{(01)} \sinh \phi y) + \operatorname{Re} \left\{ \chi_1^6 + (2 + \nu - \delta \nu g_1^0) \chi_1^4 + (1 - \nu^2 - \delta \nu g_2^0) \chi_1^2 - \delta \nu \right\} \\
 &\quad \left. \times (c^{(01)} \cos \chi_1 y + a^{(01)} \sin \chi_1 y) + \nu (1 + \nu) \Phi_{01} - 2(1 + \nu) R \Psi_{01} / h \right] \cos \theta \\
 M_2^{(01)} &= \left[-\delta (W_1^{(01)} + W_2^{(01)} y) - \left\{ \nu \phi^6 - (1 + 2\nu - \delta g_1^0) \phi^4 - \delta g_2^0 \phi^2 + \delta \right\} \right. \\
 &\quad \times (W_3^{(01)} \cosh \phi y + W_4^{(01)} \sinh \phi y) + \operatorname{Re} \left\{ \nu \chi_1^6 + (1 + 2\nu - \delta g_1^0) \chi_1^4 - \delta g_2^0 \chi_1^2 - \delta \right\} \\
 &\quad \left. \times (c^{(01)} \cos \chi_1 y + a^{(01)} \sin \chi_1 y) + (1 + \nu) \Phi_{01} - 2(1 + \nu) R \Psi_{01} / h \right] \cos \theta \\
 M_{12}^{(01)} &= M_{21}^{(01)} = 2 \left[(1 - \delta) W_2^{(01)} + \phi \left\{ (2 - \delta g_1^0) \phi^4 - (2 - \nu - \delta g_2^0) \phi^2 + (1 - \delta) \right\} \right. \\
 &\quad \times (W_3^{(01)} \sinh \phi y + W_4^{(01)} \cosh \phi y) - \operatorname{Re} \chi_1 \left\{ (2 - \delta g_1^0) \chi_1^4 + (2 - \nu - \delta g_2^0) \chi_1^2 + (1 - \delta) \right\} \\
 &\quad \left. \times (c^{(01)} \sin \chi_1 y - a^{(01)} \cos \chi_1 y) \right] \sin \theta
 \end{aligned} \tag{41}$$

ここに、式(40)および(41)の式中の ϕ および χ_1 は、式(33)に対する今の場合の特性方程式

$$p^2 \left(4k^4 p^2 - \frac{1-\nu}{2} \right) (p^4 - 4p^2 + 4k^4) = 0 \tag{42}$$

の根を

$$\begin{aligned}
 P_1, P_2 &= 0, \quad P_3, P_4 = \pm \phi \\
 P_5, P_6, P_7, P_8 &= \pm (\xi_1 \pm i \eta_1)
 \end{aligned} \tag{43}$$

と表わすならば、それぞれ次式で定められる実数および複素数である。

$$\phi = \frac{1}{2k^2} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &= \eta_1 + i \xi_1 \\
 \xi_1 &= k \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}, \quad \eta_1 = k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}
 \end{aligned} \tag{45}$$

また、 f_2^0, f_3^0, g_1^0 および g_2^0 は、今の場合、次の値をとる。

$$f_2^0 = f_3^0 = -\frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad g_1^0 = \frac{2}{1-\nu}, \quad g_2^0 = \frac{3-\nu}{1-\nu} \tag{46}$$

3.2.2 $n=1, m \geq 1$ の場合

温度分布が次式で与えられる場合である。

$$\alpha T(y, \theta, \zeta) = (\Phi_{m1} + \zeta \Psi_{m1}) \cos sy \cos \theta \tag{47}$$

支配方程式および u, v が満たすべき方程式は、式(11)および(12)より、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \nabla^4 (\nabla^2 + 1)^2 w + 4k^4 w'''' + a_{61}^0 w'''' + a_{62}^0 w'''' + a_{63}^0 w'''' + a_{42}^0 w'''' \\ & = \left[4k^4 s^2 (s^2 + 1) \Phi_{m1} + \frac{2(1+\nu)R}{h} \{ (s^2 + 1)^3 - 1 \} \Psi_{m1} \right] \cos s y \cos \theta \end{aligned} \right\} (48)$$

$$\left. \begin{aligned} & \nabla^4 u = -\nu w'''' + w'''' + \delta (f_1^0 w'''' + f_2^0 w'''' + f_3^0 w'''') + (1+\nu) s (s^2 + 1) \Phi_{m1} \sin s y \cos \theta \\ & \nabla^4 v = -(2+\nu) w'''' - w'''' + \delta (g_1^0 w'''' + g_2^0 w'''' + g_3^0 w'''') + (1+\nu) (s^2 + 1) \Phi_{m1} \cos s y \sin \theta \end{aligned} \right\} (49)$$

式(48)の斉次式は式(33)と同形であるから、3.2.1項と同様、Love-Reissner理論による解と、それ以外の理論による解とでは、その形を異にする。式(48)、(49)ならびに(15)により変位ならびに合応力およびモーメントを求め、肩添字^(m1)を付して表わせば、それぞれ次のとおりである。

(i) Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders および Novozhilov 理論

変位：

$$\left. \begin{aligned} w^{(m1)} &= \{ W_p^{(m1)} \cos s y + W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y + W_3^{(m1)} y^2 + W_4^{(m1)} y^3 \\ & \quad + \operatorname{Re} (\chi_1^2 + 1)^2 (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y) \} \cos \theta \\ u^{(m1)} &= - \{ -U_p^{(m1)} \sin s y + (1 - \delta f_3^0) W_2^{(m1)} + 6 \{ 2 + \nu + \delta (f_2^0 - 2f_3^0) \} W_4^{(m1)} \\ & \quad + (1 - \delta f_3^0) (2W_3^{(m1)} y + 3W_4^{(m1)} y^2) + \operatorname{Re} \chi_1 \{ (\nu + \delta f_2^0) \chi_1^2 - (1 - \delta f_3^0) + \delta f_1^0 \chi_1^4 \} \\ & \quad \times (c^{(m1)} \sin \chi_1 y - a^{(m1)} \cos \chi_1 y) \} \cos \theta \\ v^{(m1)} &= \{ V_p^{(m1)} \cos s y - (1 + \delta g_3^0) W_1^{(m1)} + 2 \{ \nu + \delta (g_2^0 - 2g_3^0) \} W_3^{(m1)} \\ & \quad + \{ -(1 + \delta g_3^0) W_2^{(m1)} + 6 \{ \nu + \delta (g_2^0 - 2g_3^0) \} W_4^{(m1)} \} y - (1 + \delta g_3^0) (W_3^{(m1)} y^2 + W_4^{(m1)} y^3) \\ & \quad - \operatorname{Re} \{ (2 + \nu + \delta g_2^0) \chi_1^2 + (1 + \delta g_3^0) + \delta g_1^0 \chi_1^4 \} (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y) \} \sin \theta \end{aligned} \right\} (50)$$

合応力およびモーメント：

$$\left. \begin{aligned} N_1^{(m1)} &= \{ sU_p^{(m1)} + \nu V_p^{(m1)} + (\nu + \delta E_1 s^2) W_p^{(m1)} - (1 + \nu) \Phi_{m1} \} \cos s y - \delta \nu g_3^0 W_1^{(m1)} \\ & \quad - 2 \{ 1 - \nu^2 + \delta (E_1 - f_3^0 - \nu g_2^0 + 2\nu g_3^0) \} W_3^{(m1)} - \{ \delta \nu g_3^0 W_2^{(m1)} \\ & \quad + 6 \{ 1 - \nu^2 + \delta (E_1 - f_3^0 - \nu g_2^0 + 2\nu g_3^0) \} W_4^{(m1)} \} y - \delta \nu g_3^0 (W_3^{(m1)} y^2 + W_4^{(m1)} y^3) \\ & \quad + \operatorname{Re} \{ \{ 1 - \nu^2 + \delta (E_1 - f_3^0 - \nu g_2^0) \} \chi_1^2 - \delta \nu g_3^0 + \delta (2E_1 - f_2^0 - \nu g_1^0) \chi_1^4 \} \\ & \quad \times (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y) \} \cos \theta \\ N_2^{(m1)} &= \{ \nu sU_p^{(m1)} + \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} (V_p^{(m1)} + W_p^{(m1)}) - (1 + \nu) \Phi_{m1} \} \cos s y \\ & \quad - \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \delta g_3^0 W_1^{(m1)} + 2 \{ \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \{ \nu + \delta (g_2^0 - 2g_3^0) \} - \nu (1 - \delta f_3^0) \} W_3^{(m1)} \\ & \quad - \{ \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \delta g_3^0 W_2^{(m1)} - 6 \{ \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \{ \nu + \delta (g_2^0 - 2g_3^0) \} \\ & \quad - \nu (1 - \delta f_3^0) \} W_4^{(m1)} \} y - \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \delta g_3^0 (W_3^{(m1)} y^2 + W_4^{(m1)} y^3) \\ & \quad + \operatorname{Re} \{ \{ \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} (1 - \delta g_1^0) - \nu (\nu + \delta f_2^0) \} \chi_1^4 - \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} (\nu + \delta g_2^0) \\ & \quad - \nu (1 - \delta f_3^0) \} \chi_1^2 - \{ 1 - \delta (E_1 - E_2) \} \delta g_3^0 - \delta \nu f_1^0 \chi_1^6 \} (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y) \} \cos \theta \\ N_{12}^{(m1)} &= \{ - \{ \{ 1 + \delta (E_3 - E_4) / 4 \} U_p^{(m1)} + \{ 1 + \delta (E_3 + 3E_4) / 4 \} sV_p^{(m1)} + \delta E_4 sW_p^{(m1)} \} \sin s y \\ & \quad - \delta \{ (1 + \delta E_3 / 4) (f_3^0 + g_3^0) - \delta E_4 (f_3^0 - 3g_3^0) / 4 \} W_2^{(m1)} + 6 \{ (1 + \delta E_3 / 4) \\ & \quad \times \{ 2(1 + \nu) + \delta (f_2^0 - 2f_3^0 + g_2^0 - 2g_3^0) \} - \delta E_4 \{ 2(1 - \nu) \\ & \quad + \delta (f_2^0 - 2f_3^0 - 3g_2^0 + 6g_3^0) \} / 4 \} W_4^{(m1)} - \delta \{ (1 + \delta E_3 / 4) (f_3^0 + g_3^0) - \delta E_4 (f_3^0 - 3g_3^0) / 4 \} \\ & \quad \times (2W_3^{(m1)} y + 3W_4^{(m1)} y^2) + \operatorname{Re} \chi_1 \{ \{ (1 + \delta E_3 / 4) \{ 2(1 + \nu) + \delta (f_2^0 + g_2^0) \} \\ & \quad - \delta E_4 \{ 2(1 - \nu) + \delta (f_2^0 - 3g_2^0) \} / 4 \} \chi_1^2 + \delta \{ (1 + \delta E_3 / 4) (f_3^0 + g_3^0) - \delta E_4 (f_3^0 - 3g_3^0) / 4 \} \} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & +\delta \left\{ (1+\delta E_3/4)(f_1^0+g_1^0)-E_4\{4+\delta(f_3^0-3g_1^0)\}/4 \right\} \chi_1^4 \Big\} \\
 & \times (c^{(m1)} \sin \chi_1 y - a^{(m1)} \cos \chi_1 y) \Big] \sin \theta \\
 N_{21}^{(m1)} = & \left[-\left\{ (1+\delta(3E_5+E_6)/4)U_p^{(m1)} + \{1+3\delta(E_5-E_6)/4\}sV_p^{(m1)} - \delta E_6 sW_p^{(m1)} \right\} \sin sy \right. \\
 & -\delta \left\{ (1+3\delta E_5/4)(f_3^0+g_3^0) + \delta E_6(f_3^0-3g_3^0)/4 \right\} W_2^{(m1)} + 6 \left\{ (1+3\delta E_5/4) \right. \\
 & \times \left\{ 2(1+\nu) + \delta(f_2^0-2f_3^0+g_2^0-2g_3^0) \right\} + \delta E_6 \left\{ 2(1-\nu) \right. \\
 & \left. \left. + \delta(f_2^0-2f_3^0-3g_2^0+6g_3^0) \right\} /4 \right\} W_4^{(m1)} - \delta \left\{ (1+3\delta E_5/4)(f_3^0+g_3^0) + \delta E_6(f_3^0-3g_3^0)/4 \right\} \\
 & \times (2W_3^{(m1)}y + 3W_4^{(m1)}y^2) + \operatorname{Re} \chi_1 \left\{ \left[(1+3\delta E_5/4) \left\{ 2(1+\nu) + \delta(f_2^0+g_2^0) \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \delta E_6 \left\{ 2(1-\nu) + \delta(f_2^0-3g_2^0) \right\} /4 \right\} \chi_1^2 + \delta \left\{ (1+3\delta E_5/4)(f_3^0+g_3^0) + \delta E_6(f_3^0-3g_3^0)/4 \right\} \right. \\
 & \left. \left. + \delta \left\{ (1+3\delta E_5/4)(f_1^0+g_1^0) + E_6 \left\{ 4+\delta(f_3^0-3g_1^0) \right\} /4 \right\} \chi_1^4 \right\} \right. \\
 & \left. \times (c^{(m1)} \sin \chi_1 y - a^{(m1)} \cos \chi_1 y) \Big] \sin \theta \right. \\
 M_1^{(m1)} = & \left[\left\{ D_1 sU_p^{(m1)} + \nu V_p^{(m1)} + (\nu+s^2)W_p^{(m1)} - 2(1+\nu)R\Psi_{m1}/h \right\} \cos sy \right. \\
 & -\delta \nu g_3^0 W_1^{(m1)} - 2 \left\{ 1-\nu^2 - \delta \nu (g_2^0-2g_3^0) + D_1(1-\delta f_3^0) \right\} W_3^{(m1)} \\
 & -\left\{ \delta \nu g_3^0 W_2^{(m1)} + 6 \left\{ 1-\nu^2 - \delta \nu (g_2^0-2g_3^0) + D_1(1-\delta f_3^0) \right\} W_4^{(m1)} \right\} y - \delta \nu g_3^0 (W_3^{(m1)}y^2 + W_4^{(m1)}y^3) \\
 & + \operatorname{Re} \left\{ (1-\delta D_1 f_1^0) \chi_1^6 + \left\{ 2+\nu(1-\delta g_1^0) - D_1(\nu+\delta f_2^0) \right\} \chi_1^4 \right. \\
 & \left. \left. + \left\{ 1-\nu(\nu+\delta g_2^0) + D_1(1-\delta f_3^0) \right\} \chi_1^2 - \delta \nu g_3^0 \right\} (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y) \Big] \cos \theta \right. \\
 M_2^{(m1)} = & \left[\left\{ (1-D_1)V_p^{(m1)} + (1-D_1+\nu s^2)W_p^{(m1)} - 2(1+\nu)R\Psi_{m1}/h \right\} \cos sy - (1-D_1)\delta g_3^0 W_1^{(m1)} \right. \\
 & -2 \left\{ \nu - (1-D_1) \left\{ \nu + \delta(g_2^0-2g_3^0) \right\} \right\} W_3^{(m1)} - \left\{ (1-D_1)\delta g_3^0 W_2^{(m1)} \right. \\
 & \left. \left. + 6 \left\{ \nu - (1-D_1) \left\{ \nu + \delta(g_2^0-2g_3^0) \right\} \right\} W_4^{(m1)} \right\} y - (1-D_1)\delta g_3^0 (W_3^{(m1)}y^2 + W_4^{(m1)}y^3) \right. \\
 & \left. + \operatorname{Re} \left\{ \nu \chi_1^6 + \left\{ 2\nu + (1-D_1)(1-\delta g_1^0) \right\} \chi_1^4 + \left\{ \nu - (1-D_1)(\nu+\delta g_2^0) \right\} \chi_1^2 - (1-D_1)\delta g_3^0 \right\} \right. \\
 & \left. \times (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y) \Big] \cos \theta \right. \\
 M_{12}^{(m1)} = & \left[\left\{ (1-D_2)U_p^{(m1)} - (3+D_2)sV_p^{(m1)} - 4sW_p^{(m1)} \right\} \sin sy + \delta \left\{ f_3^0-3g_3^0 - D_2(f_3^0+g_3^0) \right\} W_2^{(m1)} \right. \\
 & -6 \left\{ 2 \left\{ 1-\nu - D_2(1+\nu) \right\} + \delta \left\{ f_2^0-2f_3^0-3g_2^0+6g_3^0 - D_2(f_2^0-2f_3^0+g_2^0-2g_3^0) \right\} \right\} W_4^{(m1)} \\
 & + \delta \left\{ f_3^0-3g_3^0 - D_2(f_3^0+g_3^0) \right\} (2W_3^{(m1)}y + 3W_4^{(m1)}y^2) - \operatorname{Re} \chi_1 \left\{ \left[2 \left\{ 1-\nu - D_2(1+\nu) \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \delta \left\{ f_2^0-3g_2^0 - D_2(f_2^0+g_2^0) \right\} \right\} \chi_1^2 + \delta \left\{ f_3^0-3g_3^0 - D_2(f_3^0+g_3^0) \right\} \right. \\
 & \left. \left. + \left[4+\delta \left\{ f_1^0-3g_1^0 - D_2(f_1^0+g_1^0) \right\} \right\} \chi_1^4 \right\} (c^{(m1)} \sin \chi_1 y - a^{(m1)} \cos \chi_1 y) \Big] \sin \theta \right. \\
 M_{21}^{(m1)} = & \left[\left\{ (1+D_3)U_p^{(m1)} - (3-D_3)sV_p^{(m1)} - 4sW_p^{(m1)} \right\} \sin sy + \delta \left\{ f_3^0-3g_3^0 + D_3(f_3^0+g_3^0) \right\} W_2^{(m1)} \right. \\
 & -6 \left\{ 2 \left\{ 1-\nu + D_3(1+\nu) \right\} + \delta \left\{ f_2^0-2f_3^0-3g_2^0+6g_3^0 + D_3(f_2^0-2f_3^0+g_2^0-2g_3^0) \right\} \right\} W_4^{(m1)} \\
 & + \delta \left\{ f_3^0-3g_3^0 + D_3(f_3^0+g_3^0) \right\} (2W_3^{(m1)}y + 3W_4^{(m1)}y^2) - \operatorname{Re} \chi_1 \left\{ \left[2 \left\{ 1-\nu + D_3(1+\nu) \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \delta \left\{ f_2^0-3g_2^0 + D_3(f_2^0+g_2^0) \right\} \right\} \chi_1^2 + \delta \left\{ f_3^0-3g_3^0 + D_3(f_3^0+g_3^0) \right\} \right. \\
 & \left. \left. + \left[4+\delta \left\{ f_1^0-3g_1^0 + D_3(f_1^0+g_1^0) \right\} \right\} \chi_1^4 \right\} (c^{(m1)} \sin \chi_1 y - a^{(m1)} \cos \chi_1 y) \Big] \sin \theta \right.
 \end{aligned} \tag{51}$$

ここに、式(50)および(51)に現われる $W_p^{(m1)}$ 、 $U_p^{(m1)}$ および $V_p^{(m1)}$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 W_p^{(m1)} &= \frac{4k^4 s^2 (s^2+1) \Phi_{m1} + \{2(1+\nu)R/h\} \{(s^2+1)^3-1\} \Psi_{m1}}{s^4 \{(s^2+1)^2 + 4k^4 - a_{61}^0 s^2 - a_{62}^0\}} \\
 U_p^{(m1)} &= \frac{-W_p^{(m1)} s \{ \nu s^2 - 1 + \delta(f_1^0 s^4 + f_2^0 s^2 + f_3^0) \} + (1+\nu) s (s^2+1) \Phi_{m1}}{(s^2+1)^2}
 \end{aligned} \tag{52}$$

$$V_p^{(m1)} = \frac{-W_p^{(m1)} \{ (2+\nu)s^2 + 1 + \delta (g_1^0 s^4 + g_2^0 s^2 + g_3^0) \} + (1+\nu)(s^2+1)\Phi_{m1}}{(s^2+1)^2}$$

また, $W_1^{(m1)}$, $W_2^{(m1)}$, $W_3^{(m1)}$ および $W_4^{(m1)}$ は実数の任意定数であり, $c^{(m1)}$ および $a^{(m1)}$ は複素任意定数である。 χ_1 は, この場合, 式 (39) を用いるのは勿論である。

(ii) Love-Reissner 理論

変位:

$$\left. \begin{aligned} w^{(m1)} &= \{ W_p^{(m1)} \cos s y + W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y + (\phi^2 - 1)^2 (W_3^{(m1)} \cosh \phi y + W_4^{(m1)} \sinh \phi y) \\ &\quad + \operatorname{Re} (\chi_1^2 + 1)^2 (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y) \} \cos \theta \\ u^{(m1)} &= -[-U_p^{(m1)} \sin s y + (1 - \delta f_3^0) W_2^{(m1)} + \phi \{ (\nu + \delta f_2^0) \phi^2 + (1 - \delta f_3^0) \} \\ &\quad \times (W_3^{(m1)} \sinh \phi y + W_4^{(m1)} \cosh \phi y) + \operatorname{Re} \chi_1 \{ (\nu + \delta f_2^0) \chi_1^2 - (1 - \delta f_3^0) \} \\ &\quad \times (c^{(m1)} \sin \chi_1 y - a^{(m1)} \cos \chi_1 y)] \cos \theta \\ v^{(m1)} &= [V_p^{(m1)} \cos s y - (1 + \delta) (W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y) + \{ (2 + \nu + \delta g_2^0) \phi^2 - (1 + \delta) - \delta g_1^0 \phi^4 \} \\ &\quad \times (W_3^{(m1)} \cosh \phi y + W_4^{(m1)} \sinh \phi y) - \operatorname{Re} \{ (2 + \nu + \delta g_2^0) \chi_1^2 + (1 + \delta) + \delta g_1^0 \chi_1^4 \} \\ &\quad \times (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y)] \sin \theta \end{aligned} \right\} (53)$$

合応力およびモーメント:

$$\left. \begin{aligned} N_1^{(m1)} &= \llbracket \{ s U_p^{(m1)} + \nu (V_p^{(m1)} + W_p^{(m1)}) - (1 + \nu) \Phi_{m1} \} \cos s y - \delta \nu (W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y) \\ &\quad - \{ \{ 1 - \nu^2 - \delta (f_3^0 + \nu g_2^0) \} \phi^2 + \delta \nu + \delta (f_2^0 + \nu g_1^0) \phi^4 \} (W_3^{(m1)} \cosh \phi y + W_4^{(m1)} \sinh \phi y) \\ &\quad + \operatorname{Re} \{ \{ 1 - \nu^2 - \delta (f_3^0 + \nu g_2^0) \} \chi_1^2 - \delta \nu - \delta (f_2^0 + \nu g_1^0) \chi_1^4 \} \\ &\quad \times (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y) \rrbracket \cos \theta \\ N_2^{(m1)} &= \llbracket \{ \nu s U_p^{(m1)} + V_p^{(m1)} + W_p^{(m1)} - (1 + \nu) \Phi_{m1} \} \cos s y - \delta (W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y) \\ &\quad + \{ \{ 1 - \nu^2 - \delta (\nu f_2^0 + g_1^0) \} \phi^4 + \delta (\nu f_3^0 + g_2^0) \phi^2 - \delta \} (W_3^{(m1)} \cosh \phi y + W_4^{(m1)} \sinh \phi y) \\ &\quad + \operatorname{Re} \{ \{ 1 - \nu^2 - \delta (\nu f_2^0 + g_1^0) \} \chi_1^4 - \delta (\nu f_3^0 + g_2^0) \chi_1^2 - \delta \} \\ &\quad \times (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y) \rrbracket \cos \theta \\ N_{12}^{(m1)} = N_{21}^{(m1)} &= \llbracket - (s V_p^{(m1)} + U_p^{(m1)}) \sin s y - \delta (1 + f_3^0) W_2^{(m1)} \\ &\quad + \phi \{ \{ 2(1 + \nu) + \delta (f_2^0 + g_2^0) \} \phi^2 - \delta (1 + f_3^0) - \delta g_1^0 \phi^4 \} (W_3^{(m1)} \sinh \phi y + W_4^{(m1)} \cosh \phi y) \\ &\quad + \operatorname{Re} \chi_1 \{ \{ 2(1 + \nu) + \delta (f_2^0 + g_2^0) \} \chi_1^2 + \delta (1 + f_3^0) + \delta g_1^0 \chi_1^4 \} \\ &\quad \times (c^{(m1)} \sin \chi_1 y - a^{(m1)} \cos \chi_1 y) \rrbracket \sin \theta \\ M_1^{(m1)} &= \{ \{ \nu V_p^{(m1)} + (\nu + s^2) W_p^{(m1)} - 2(1 + \nu) R \Psi_{m1} / h \} \cos s y - \delta \nu (W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y) \\ &\quad - \{ \phi^6 - (2 + \nu - \delta \nu g_1^0) \phi^4 + (1 - \nu^2 - \delta \nu g_2^0) \phi^2 + \delta \nu \} (W_3^{(m1)} \cosh \phi y + W_4^{(m1)} \sinh \phi y) \\ &\quad + \operatorname{Re} \{ \chi_1^6 + (2 + \nu - \delta \nu g_1^0) \chi_1^4 + (1 - \nu^2 - \delta \nu g_2^0) \chi_1^2 - \delta \nu \} (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y) \} \cos \theta \\ M_2^{(m1)} &= \{ \{ V_p^{(m1)} + (1 + \nu s^2) W_p^{(m1)} - 2(1 + \nu) R \Psi_{m1} / h \} \cos s y - \delta (W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y) \\ &\quad - \{ \nu \phi^6 - (1 + 2\nu - \delta \nu g_1^0) \phi^4 - \delta g_2^0 \phi^2 + \delta \} (W_3^{(m1)} \cosh \phi y + W_4^{(m1)} \sinh \phi y) \\ &\quad + \operatorname{Re} \{ \nu \chi_1^6 + (1 + 2\nu - \delta \nu g_1^0) \chi_1^4 - \delta g_2^0 \chi_1^2 - \delta \} (c^{(m1)} \cos \chi_1 y + a^{(m1)} \sin \chi_1 y) \} \cos \theta \\ M_{12}^{(m1)} = M_{21}^{(m1)} &= 2 \{ -s (V_p^{(m1)} + 2W_p^{(m1)}) \sin s y + (1 - \delta) W_2^{(m1)} \\ &\quad + \phi \{ (2 - \delta g_1^0) \phi^4 - (2 - \nu - \delta g_2^0) \phi^2 + (1 - \delta) \} (W_3^{(m1)} \sinh \phi y + W_4^{(m1)} \cosh \phi y) \\ &\quad - \operatorname{Re} \chi_1^4 \{ (2 - \delta g_1^0) \chi_1^4 + (2 - \nu - \delta g_2^0) \chi_1^2 + (1 - \delta) \} (c^{(m1)} \sin \chi_1 y - a^{(m1)} \cos \chi_1 y) \} \sin \theta \end{aligned} \right\} (54)$$

ここに、式(53)および(54)に現われる $W_p^{(m1)}$, $U_p^{(m1)}$ および $V_p^{(m1)}$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} W_p^{(m1)} &= \frac{4k^4 s^2 (s^2+1) \Phi_{m1} + \{2(1+\nu)R/h\} \{(s^2+1)^3-1\} \Psi_{m1}}{s^2 \{s^2(s^2+1)^2 + 4k^4 s^2 + 2s^4 + 2(1-\nu)s^2 + (1-\nu)/2\}} \\ U_p^{(m1)} &= \frac{-W_p^{(m1)} s \{ \nu s^2 - 1 + \delta (f_2^0 s^2 + f_3^0) \} + (1+\nu) s (s^2+1) \Phi_{m1}}{(s^2+1)^2} \\ V_p^{(m1)} &= \frac{-W_p^{(m1)} \{ (2+\nu) s^2 + 1 + \delta (g_1^0 s^4 + g_2^0 s^2 + 1) \} + (1+\nu) (s^2+1) \Phi_{m1}}{(s^2+1)^2} \end{aligned} \right\} (55)$$

また、 $W_1^{(m1)}$, $W_2^{(m1)}$, $W_3^{(m1)}$ および $W_4^{(m1)}$ は実数値の任意定数であり、 $c^{(m1)}$ および $a^{(m1)}$ は複素任意定数である。 χ_1 は、この場合、式(45)を用いることは勿論である。

4. 一次近似精度の範囲での解の簡略化

前章に得た結果は、支配方程式から始まる導出過程で何ら省略を行わずに導かれた表示式である。本章では Kirchhoff-Love の仮定に基づく合理的な近似を行ない、これらの式の一次近似を求める。すなわち、肉厚と半径との比が 1 に比較して微小であるという基本仮定、式(1)、に基づく近似化を行なう。したがって近似の過程で、式(8)および次式に基づく省略もまた当然行なわれる。

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= \sqrt{3(1-\nu^2)} (R/h) \gg 1 \\ \delta k^2 &= (\sqrt{3(1-\nu^2)}/12) (h/R) \ll 1 \end{aligned} \right\} (56)$$

例えば、式(56)の第1式の関係に留意すれば、式(25)で定義される χ_0 、式(39)で定められる χ_1 、あるいは Love-Reissner 理論に対して式(45)で定

義される χ_1 は、一次近似精度の範囲で、それぞれ同一の値をとることが判る。これらを χ と記すことにすれば次式を得る。

$$\chi = k(1+i) \quad (57)$$

また、式(44)より次の関係があることが判る。

$$\phi \ll 1 \quad (58)$$

さらに、Kirchhoff-Love の仮定の下では、殻の肉厚は変形波長に比較して十分小さいという条件から、次式が成り立つ。

$$\delta s^2 \ll 1 \quad (59)$$

式(1)および(59)に基づく近似を、前章に得た解に対して行なえば、一次近似解として以下の結果を得る。ただし、式(59)中に現われる μ は、ポアソン比により定まる量で次式で定義される。

$$\mu = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3(1-\nu)} \quad (60)$$

4.1 軸対称変形

4.1.1 $n=0$, $m=0$ の場合

変位：

$$\left. \begin{aligned} w^{(00)} &= -\frac{\nu N_1^{(00)}}{1-\nu^2} + \Phi_{00} + \operatorname{Re} \chi (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) \\ u^{(00)} &= \left(\frac{N_1^{(00)}}{1-\nu^2} + \Phi_{00} \right) y - \nu \operatorname{Re} (c^{(00)} \sin \chi y + a^{(00)} \cos \chi y) \\ v^{(00)} &= 0 \end{aligned} \right\} (61)$$

合応力およびモーメント：

$$\left. \begin{aligned} N_1^{(00)} &= \text{constant} \\ N_2^{(00)} &= \delta E_2 \left(-\frac{\nu N_1^{(00)}}{1-\nu^2} + \Phi_{00} \right) + (1-\nu^2) \operatorname{Re} \chi (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) \\ N_{12}^{(00)} &= N_{21}^{(00)} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 M_1^{(00)} &= \frac{D_1 N_1^{(00)}}{1-\nu^2} + \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) - 2\mu k^2 \Psi_{00} \\
 M_2^{(00)} &= \frac{D_1 \nu N_1^{(00)}}{1-\nu^2} + \nu \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) - 2\mu k^2 \Psi_{00} \\
 M_{12}^{(00)} &= M_{21}^{(00)} = 0
 \end{aligned} \tag{62}$$

4.1.2 $n=0, m \geq 1$ の場合

式(31)で与えられる $W_p^{(m0)}$ および $U_p^{(m0)}$ を, 変位, 式(29), ならびに合応力およびモーメント, 式(30), のそれぞれの右辺に代入し整理した後に省略演算を行なえば, それぞれ次式を得る。

変位:

$$\begin{aligned}
 w^{(m0)} &= -\frac{\nu N_1^{(m0)}}{1-\nu^2} + \frac{1}{s^4 + 4k^4} (4k^4 \Phi_{m0} + 2\mu k^2 s^2 \Psi_{m0}) \cos sy + \operatorname{Re} \chi (c^{(m0)} \cos \chi y - a^{(m0)} \sin \chi y) \\
 u^{(m0)} &= \frac{N_1^{(m0)}}{1-\nu^2} y + \frac{1}{s(s^4 + 4k^4)} [\{ (1+\nu)s^4 + 4k^4 \} \Phi_{m0} - 2\mu k^2 \nu s^2 \Psi_{m0}] \sin sy \\
 &\quad - \nu \operatorname{Re} (c^{(m0)} \sin \chi y + a^{(m0)} \cos \chi y) \\
 v^{(m0)} &= 0
 \end{aligned} \tag{63}$$

合応力およびモーメント:

$$\begin{aligned}
 N_1^{(m0)} &= \text{constant} \\
 N_2^{(m0)} &= -\frac{\delta E_2 \nu N_1^{(m0)}}{1-\nu^2} + \frac{1-\nu^2}{s^4 + 4k^4} \{ E_2 \Phi_{m0} - s^2 (s^2 \Phi_{m0} - 2\mu k^2 \Psi_{m0}) \} \cos sy \\
 &\quad + (1-\nu^2) \operatorname{Re} \chi (c^{(m0)} \cos \chi y - a^{(m0)} \sin \chi y) \\
 N_{12}^{(m0)} &= N_{21}^{(m0)} = 0 \\
 M_1^{(m0)} &= \frac{D_1 N_1^{(m0)}}{1-\nu^2} + \frac{4k^4}{s^4 + 4k^4} (s^2 \Phi_{m0} - 2\mu k^2 \Psi_{m0}) \cos sy + \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(m0)} \cos \chi y - a^{(m0)} \sin \chi y) \\
 M_2^{(m0)} &= \frac{D_1 \nu N_1^{(m0)}}{1-\nu^2} + \frac{4k^4}{s^4 + 4k^4} \left[\nu s^2 \Phi_{m0} - 2\mu \left\{ 1 + \frac{(1-\nu)s^4}{4k^4} \right\} k^2 \Psi_{m0} \right] \cos sy \\
 &\quad + \nu \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(m0)} \cos \chi y - a^{(m0)} \sin \chi y) \\
 M_{12}^{(m0)} &= M_{21}^{(m0)} = 0
 \end{aligned} \tag{64}$$

4.2 梁様曲げ変形

4.2.1 $n=1, m=0$ の場合

(i) Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders および Novozhilov 理論

変位:

$$\begin{aligned}
 w^{(01)} &= \{ W_1^{(01)} + W_2^{(01)} y + W_3^{(01)} y^2 + W_4^{(01)} y^3 + \operatorname{Re} \chi^4 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) \} \cos \theta \\
 u^{(01)} &= -\{ W_2^{(01)} + 6(2+\nu)W_4^{(01)} + 2W_3^{(01)} y + 3W_4^{(01)} y^2 + \nu \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(01)} \sin \chi y - a^{(01)} \cos \chi y) \} \cos \theta \\
 v^{(01)} &= \{ -W_1^{(01)} + 2\nu W_3^{(01)} + (-W_2^{(01)} + 6\nu W_4^{(01)}) y - W_3^{(01)} y^2 - W_4^{(01)} y^3 \\
 &\quad - (2+\nu) \operatorname{Re} \chi^2 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) + (1+\nu) \Phi_{01} \} \sin \theta
 \end{aligned} \tag{65}$$

合応力およびモーメント：

$$\begin{aligned}
N_1^{(01)} &= \{ -\delta \nu g_3^0 W_1^{(01)} - 2(1-\nu^2) W_3^{(01)} - \{ \delta \nu g_3^0 W_2^{(01)} + 6(1-\nu^2) W_4^{(01)} \} y \\
&\quad - \delta \nu g_3^0 (W_3^{(01)} y^2 + W_4^{(01)} y^3) + (1-\nu^2) \operatorname{Re} \chi^2 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) - (1-\nu^2) \Phi_{01} \} \cos \theta \\
N_2^{(01)} &= \{ -\delta \nu g_3^0 W_1^{(01)} + 2\delta \{ -\nu(E_1 - E_2) + \nu f_3^0 + g_2^0 - 2g_3^0 \} W_3^{(01)} \\
&\quad - \{ \delta g_3^0 W_2^{(01)} - 6\delta \{ -\nu(E_1 - E_2) + \nu f_3^0 + g_2^0 - 2g_3^0 \} W_4^{(01)} \} y - \delta g_3^0 (W_3^{(01)} y^2 + W_4^{(01)} y^3) \\
&\quad + (1-\nu^2) \operatorname{Re} \chi^4 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) - \delta(1+\nu)(E_1 - E_2) \Phi_{01} \} \cos \theta \\
N_{12}^{(01)} = N_{21}^{(01)} &= \{ -\delta (f_3^0 + g_3^0) W_2^{(01)} + 12(1+\nu) W_4^{(01)} - \delta (f_3^0 + g_3^0) (2W_3^{(01)} y + 3W_4^{(01)} y^2) \\
&\quad + 2(1+\nu) \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(01)} \sin \chi y - a^{(01)} \cos \chi y) \} \sin \theta \\
M_1^{(01)} &= \{ -\delta \nu g_3^0 W_1^{(01)} - 2(1-\nu^2 + D_1) W_3^{(01)} - \{ \delta \nu g_3^0 W_2^{(01)} + 6(1-\nu^2 + D_1) W_4^{(01)} \} y \\
&\quad - \delta \nu g_3^0 (W_3^{(01)} y^2 + W_4^{(01)} y^3) + \operatorname{Re} \chi^6 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) - 2\mu k^2 \Psi_{01} \} \cos \theta \\
M_2^{(01)} &= \{ -(1-D_1) \delta g_3^0 W_1^{(01)} - 2\nu D_1 W_3^{(01)} - \{ (1-D_1) \delta g_3^0 W_2^{(01)} + 6\nu D_1 W_4^{(01)} \} y \\
&\quad - (1-D_1) \delta g_3^0 (W_3^{(01)} y^2 + W_4^{(01)} y^3) + \nu \operatorname{Re} \chi^6 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) - 2\mu k^2 \Psi_{01} \} \cos \theta \\
M_{12}^{(01)} &= \{ \delta \{ f_3^0 - 3g_3^0 - D_2(f_3^0 + g_3^0) \} W_2^{(01)} - 12 \{ 1-\nu - D_2(1+\nu) \} W_4^{(01)} \\
&\quad + \delta \{ f_3^0 - 3g_3^0 - D_2(f_3^0 + g_3^0) \} (2W_3^{(01)} y + 3W_4^{(01)} y^2) \\
&\quad - 4 \operatorname{Re} \chi^5 (c^{(01)} \sin \chi y - a^{(01)} \cos \chi y) \} \sin \theta \\
M_{21}^{(01)} &= \{ \delta \{ f_3^0 - 3g_3^0 + D_3(f_3^0 + g_3^0) \} W_2^{(01)} - 12 \{ 1-\nu + D_3(1+\nu) \} W_4^{(01)} \\
&\quad + \delta \{ f_3^0 - 3g_3^0 + D_3(f_3^0 + g_3^0) \} (2W_3^{(01)} y + 3W_4^{(01)} y^2) - 4 \operatorname{Re} \chi^5 (c^{(01)} \sin \chi y - a^{(01)} \cos \chi y) \} \sin \theta
\end{aligned} \tag{66}$$

(ii) Love-Reissner 理論

変位：

$$\begin{aligned}
w^{(01)} &= \{ W_1^{(01)} + W_2^{(01)} y + W_3^{(01)} \cosh \phi y + W_4^{(01)} \sinh \phi y + \operatorname{Re} \chi^4 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) \} \cos \theta \\
u^{(01)} &= - \{ W_2^{(01)} + \phi (W_3^{(01)} \sinh \phi y + W_4^{(01)} \cosh \phi y) + \nu \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(01)} \sin \chi y - a^{(01)} \cos \chi y) \} \cos \theta \\
v^{(01)} &= \{ -W_1^{(01)} - W_2^{(01)} y - W_3^{(01)} \cosh \phi y - W_4^{(01)} \sinh \phi y - (2+\nu) \operatorname{Re} \chi^2 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) \\
&\quad + (1+\nu) \Phi_{01} \} \sin \theta
\end{aligned} \tag{67}$$

合応力およびモーメント：

$$\begin{aligned}
N_1^{(01)} &= \{ -\delta \nu (W_1^{(01)} + W_2^{(01)} y) - \{ \delta(1+\nu)/2 \} (W_3^{(01)} \cosh \phi y + W_4^{(01)} \sinh \phi y) \\
&\quad + (1-\nu^2) \operatorname{Re} \chi^2 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) - (1-\nu^2) \Phi_{01} \} \cos \theta \\
N_2^{(01)} &= \{ -\delta (W_1^{(01)} + W_2^{(01)} y) - \delta (W_3^{(01)} \cosh \phi y + W_4^{(01)} \sinh \phi y) \\
&\quad + (1-\nu^2) \operatorname{Re} \chi^4 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) \} \cos \theta \\
N_{12}^{(01)} = N_{21}^{(01)} &= \{ \{ 2\delta \nu / (1-\nu) \} W_2^{(01)} + \{ \delta(1+\nu) / (1-\nu) \} \phi \\
&\quad \times (W_3^{(01)} \sinh \phi y + W_4^{(01)} \cosh \phi y) + 2(1+\nu) \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(01)} \sin \chi y - a^{(01)} \cos \chi y) \} \sin \theta \\
M_1^{(01)} &= \{ -\delta \nu (W_1^{(01)} + W_2^{(01)} y) - \{ \delta(1+\nu)/2 \} (W_3^{(01)} \cosh \phi y + W_4^{(01)} \sinh \phi y) \\
&\quad + \operatorname{Re} \chi^6 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) - 2\mu k^2 \Psi_{01} \} \cos \theta \\
M_2^{(01)} &= \{ -\delta (W_1^{(01)} + W_2^{(01)} y) - \delta (W_3^{(01)} \cosh \phi y + W_4^{(01)} \sinh \phi y) \\
&\quad + \nu \operatorname{Re} \chi^6 (c^{(01)} \cos \chi y + a^{(01)} \sin \chi y) - 2\mu k^2 \Psi_{01} \} \cos \theta
\end{aligned}$$

$$M_{12}^{(01)} = M_{21}^{(01)} = 2 \left\{ W_2^{(01)} + \phi (W_3^{(01)} \sinh \phi y + W_4^{(01)} \cosh \phi y) - 2 \operatorname{Re} \chi^5 (c^{(01)} \sin \chi y - a^{(01)} \cos \chi y) \right\} \sin \theta \quad (68)$$

4.2.2 $n=1, m \geq 1$ の場合

(i) Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders および Novozhilov 理論

式 (52) に与えられる $W_p^{(m1)}$, $U_p^{(m1)}$ および $V_p^{(m1)}$ を, 変位, 式 (50), ならびに合応力およびモーメント, 式 (51), のそれぞれの右辺に代入し演算整理した後に, 近似化を行なえば, それぞれ次式を得る。

変位:

$$\left. \begin{aligned} w^{(m1)} &= \left[\frac{1}{s^2 (s^4 + 4k^4)} \{ 4k^4 (s^2 + 1) \Phi_{m1} + 2\mu k^2 s^4 \Psi_{m1} \} \cos s y \right. \\ &\quad \left. + W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y + W_3^{(m1)} y^2 + W_4^{(m1)} y^3 + \operatorname{Re} \chi^4 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \right] \cos \theta \\ u^{(m1)} &= - \left[- \frac{1}{s (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \{ \{ 4k^4 (s^2 + 1)^2 + (1 + \nu) s^8 \} \Phi_{m1} - 2\mu k^2 \nu s^6 \Psi_{m1} \} \sin s y \right. \\ &\quad \left. + W_2^{(m1)} + 6(2 + \nu) W_4^{(m1)} + 2W_3^{(m1)} y + 3W_4^{(m1)} y^2 + \nu \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(m1)} \sin \chi y - a^{(m1)} \cos \chi y) \right] \cos \theta \\ v^{(m1)} &= \left[- \frac{1}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \{ \{ 4k^4 (s^2 + 1)^2 - (1 + \nu) s^8 \} \Phi_{m1} + 2\mu k^2 (2 + \nu) s^6 \Psi_{m1} \} \cos s y \right. \\ &\quad \left. - W_1^{(m1)} + 2\nu W_3^{(m1)} + (-W_2^{(m1)} + 6\nu W_4^{(m1)}) y - W_3^{(m1)} y^2 - W_4^{(m1)} y^3 \right. \\ &\quad \left. - (2 + \nu) \operatorname{Re} \chi^2 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \right] \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

合応力およびモーメント:

$$\left. \begin{aligned} N_1^{(m1)} &= \left[- \frac{1 - \nu^2}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \{ (s^8 + \nu g_3^0) \Phi_{m1} - 2\mu k^2 \{ (s^2 + 1)^3 - 1 \} \Psi_{m1} \} \cos s y \right. \\ &\quad \left. - \delta \nu g_3^0 W_1^{(m1)} - 2(1 - \nu^2) W_3^{(m1)} - \{ \delta \nu g_3^0 W_2^{(m1)} + 6(1 - \nu^2) W_4^{(m1)} \} y \right. \\ &\quad \left. - \delta \nu g_3^0 (W_3^{(m1)} y^2 + W_4^{(m1)} y^3) + (1 - \nu^2) \operatorname{Re} \chi^2 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \right] \cos \theta \\ N_2^{(m1)} &= \left[- \frac{1 - \nu^2}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \{ \{ s^{10} + (E_1 - E_2 + \nu f_3^0 + g_2^0 + g_3^0) s^2 + g_3^0 \} \Phi_{m1} \right. \\ &\quad \left. - 2\mu k^2 s^2 \{ (s^2 + 1)^3 - 1 \} \Psi_{m1} \} \cos s y - \delta g_3^0 W_1^{(m1)} + 2\delta \{ -\nu (E_1 - E_2) + \nu f_3^0 + g_2^0 - 2g_3^0 \} W_3^{(m1)} \right. \\ &\quad \left. - \{ \delta g_3^0 W_2^{(m1)} - 6\delta \{ -\nu (E_1 - E_2) + \nu f_3^0 + g_2^0 - 2g_3^0 \} W_4^{(m1)} \} y - \delta g_3^0 (W_3^{(m1)} y^2 + W_4^{(m1)} y^3) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu^2) \operatorname{Re} \chi^4 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \right] \cos \theta \\ N_{12}^{(m1)} = N_{21}^{(m1)} &= \left[- \frac{2(1 + \nu)}{s (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \{ \{ s^8 - \frac{1 - \nu}{2} (f_3^0 + g_3^0) \} \Phi_{m1} \right. \\ &\quad \left. - 2\mu k^2 \{ (s^2 + 1)^3 - 1 \} \Psi_{m1} \} \sin s y - \delta (f_3^0 + g_3^0) W_2^{(m1)} + 12(1 + \nu) W_4^{(m1)} \right. \\ &\quad \left. - \delta (f_3^0 + g_3^0) (2W_3^{(m1)} y + 3W_4^{(m1)} y^2) + 2(1 + \nu) \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(m1)} \sin \chi y + a^{(m1)} \cos \chi y) \right] \sin \theta \\ M_1^{(m1)} &= \left[\frac{4k^4}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \{ \{ s^8 - \frac{\nu(1 - \nu^2) g_3^0}{4k^4} \} \Phi_{m1} - 2\mu k^2 s^2 (s^2 + 1)^2 \Psi_{m1} \} \cos s y \right. \\ &\quad \left. - \delta \nu g_3^0 W_1^{(m1)} - 2(1 - \nu^2 + D_1) W_3^{(m1)} - \{ \delta \nu g_3^0 W_2^{(m1)} + 6(1 - \nu^2 + D_1) W_4^{(m1)} \} y \right. \\ &\quad \left. - \delta \nu g_3^0 (W_3^{(m1)} y^2 + W_4^{(m1)} y^3) + \operatorname{Re} \chi^6 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \right] \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
M_2^{(m1)} &= \left[\frac{4k^4}{s^2(s^2+1)^2(s^4+4k^4)} \left[\left\{ \nu s^8 - \frac{(1-\nu^2)(1-D_1)g_3^0}{4k^4} \right\} \Phi_{m1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\mu k^2 s^2 \left\{ \frac{1-\nu}{4k^4} s^8 + (s^2+1)^2 \right\} \Psi_{m1} \right] \cos sy - (1-D_1) \delta g_3^0 W_1^{(m1)} - 2\nu D_1 W_3^{(m1)} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ (1-D_1) \delta g_3^0 W_2^{(m1)} + 6\nu D_1 W_4^{(m1)} \right\} y - (1-D_1) \delta g_3^0 (W_3^{(m1)} y^2 + W_4^{(m1)} y^3) \right. \\
&\quad \left. + \nu \operatorname{Re} \chi^6 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \right] \cos \theta \\
M_{12}^{(m1)} &= \left[-\frac{4}{s(s^2+1)^2(s^4+4k^4)} \left\{ \left[4k^4 s^2 (s^2+1)^2 + \frac{1-\nu^2}{4} \left\{ (1-D_2) f_3^0 - (3+D_2) g_3^0 \right\} \right] \Phi_{m1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\mu k^2 s^8 \Psi_{m1} \right\} \sin sy + \delta \left\{ (1-D_2) f_3^0 - (3+D_2) g_3^0 \right\} W_2^{(m1)} - 12 \left\{ 1-\nu-D_2(1+\nu) \right\} W_4^{(m1)} \right. \\
&\quad \left. + \delta \left\{ (1-D_2) f_3^0 - (3+D_2) g_3^0 \right\} (2W_3^{(m1)} y + 3W_4^{(m1)} y^2) - 4 \operatorname{Re} \chi^5 (c^{(m1)} \sin \chi y - a^{(m1)} \cos \chi y) \right] \sin \theta \\
M_{21}^{(m1)} &= \left[-\frac{4}{s(s^2+1)^2(s^4+4k^4)} \left\{ \left[4k^4 s^2 (s^2+1)^2 + \frac{1-\nu^2}{4} \left\{ (1+D_3) f_3^0 - (3-D_3) g_3^0 \right\} \right] \Phi_{m1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\mu k^2 s^8 \Psi_{m1} \right\} \sin sy + \delta \left\{ (1+D_3) f_3^0 - (3-D_3) g_3^0 \right\} W_2^{(m1)} - 12 \left\{ 1-\nu+D_3(1+\nu) \right\} W_4^{(m1)} \right. \\
&\quad \left. + \delta \left\{ (1+D_3) f_3^0 - (3-D_3) g_3^0 \right\} (2W_3^{(m1)} y + 3W_4^{(m1)} y^2) - 4 \operatorname{Re} \chi^5 (c^{(m1)} \sin \chi y - a^{(m1)} \cos \chi y) \right] \sin \theta
\end{aligned} \tag{70}$$

(ii) Love-Reissner 理論

同様に，式 (53)，(54) および (55) より，それぞれ次式を得る。

変位：

$$\begin{aligned}
w^{(m1)} &= \left[\frac{1}{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2} \left\{ 4k^4(s^2+1) \Phi_{m1} + 2\mu k^2 s^4 \Psi_{m1} \right\} \cos sy \right. \\
&\quad \left. + W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y + W_3^{(m1)} \cosh \phi y + W_4^{(m1)} \sinh \phi y + \operatorname{Re} \chi^4 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \right] \cos \theta \\
u^{(m1)} &= -\left[-\frac{s}{(s^2+1)^2 \{ s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2 \}} \left\{ \left[4k^4(s^2+1)^2 + (1+\nu) s^8 \right] \Phi_{m1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\mu k^2 \nu s^6 \Psi_{m1} \right\} \sin sy + W_2^{(m1)} + \phi (W_3^{(m1)} \sinh \phi y + W_4^{(m1)} \cosh \phi y) \right. \\
&\quad \left. + \nu \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(m1)} \sin \chi y - a^{(m1)} \cos \chi y) \right] \cos \theta \\
v^{(m1)} &= \left[-\frac{1}{(s^2+1)^2 \{ s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2 \}} \left\{ \left[4k^4(s^2+1)^2 - (1+\nu) s^8 \right] \Phi_{m1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\mu k^2 (2+\nu) s^6 \Psi_{m1} \right\} \cos sy - W_1^{(m1)} - W_2^{(m1)} y - W_3^{(m1)} \cosh \phi y - W_4^{(m1)} \sinh \phi y \right. \\
&\quad \left. - (2+\nu) \operatorname{Re} \chi^2 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \right] \sin \theta
\end{aligned} \tag{71}$$

合応力およびモーメント：

$$\begin{aligned}
N_1^{(m1)} &= \left[-\frac{1-\nu^2}{(s^2+1)^2 \{ s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2 \}} \left\{ \left(s^8 + \frac{1+\nu}{2} \right) \Phi_{m1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\mu k^2 \left\{ (s^2+1)^3 - 1 \right\} \Psi_{m1} \right\} \cos sy - \delta \nu (W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1+\nu}{2} \delta (W_3^{(m1)} \cosh \phi y + W_4^{(m1)} \sinh \phi y) + (1-\nu^2) \operatorname{Re} \chi^2 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \right] \cos \theta \\
N_2^{(m1)} &= \left[-\frac{1-\nu^2}{(s^2+1)^2 \{ s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2 \}} \left\{ \left(s^{10} + \frac{9+\nu}{2} s^2 + 1 \right) \Phi_{m1} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\mu k^2 s^2 \{ (s^2+1)^3 - 1 \} \Psi_{m1} \} \cos s y - \delta (W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y) \\
& - \delta (W_3^{(m1)} \cosh \phi y + W_4^{(m1)} \sinh \phi y) + (1-\nu^2) \operatorname{Re} \chi^4 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \} \cos \theta \\
N_{12}^{(m1)} = N_{21}^{(m1)} = & \left[-\frac{2(1+\nu)s}{(s^2+1)^2 \{ s^6 + 4k^4 s^2 + (1-\nu)/2 \}} \left[\left(s^8 + \frac{1+\nu}{2} \right) \Phi_{m1} \right. \right. \\
& - 2\mu k^2 \{ (s^2+1)^3 - 1 \} \Psi_{m1} \} \sin s y + \frac{2\nu}{1-\nu} \delta W_2^{(m1)} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \delta \phi (W_3^{(m1)} \sinh \phi y + W_4^{(m1)} \cosh \phi y) \\
& \left. \left. + 2(1+\nu) \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(m1)} \sin \chi y - a^{(m1)} \cos \chi y) \right] \right] \sin \theta \\
M_1^{(m1)} = & \left[\frac{4k^4}{(s^2+1)^2 \{ s^6 + 4k^4 s^2 + (1-\nu)/2 \}} \left[s^8 \Phi_{m1} - 2\mu k^2 \left\{ s^2 (s^2+1)^2 + \frac{1-\nu}{8k^4} \right\} \Psi_{m1} \right] \cos s y \right. \\
& - \delta \nu (W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y) - \frac{1+\nu}{2} \delta (W_3^{(m1)} \cosh \phi y + W_4^{(m1)} \sinh \phi y) \\
& \left. \left. + \operatorname{Re} \chi^6 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \right] \right] \cos \theta \\
M_2^{(m1)} = & \left[\frac{4k^4}{(s^2+1)^2 \{ s^6 + 4k^4 s^2 + (1-\nu)/2 \}} \left[\nu s^8 \Phi_{m1} - 2\mu k^2 \left\{ \frac{1-\nu^2}{4k^4} s^{10} + s^2 (s^2+1)^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1-\nu}{8k^4} \right\} \Psi_{m1} \right] \cos s y - \delta (W_1^{(m1)} + W_2^{(m1)} y) - \delta (W_3^{(m1)} \cosh \phi y + W_4^{(m1)} \sinh \phi y) \\
& \left. \left. + \nu \operatorname{Re} \chi^6 (c^{(m1)} \cos \chi y + a^{(m1)} \sin \chi y) \right] \right] \cos \theta \\
M_{12}^{(m1)} = M_{21}^{(m1)} = & 2 \left[-\frac{2s}{(s^2+1)^2 \{ s^6 + 4k^4 s^2 + (1-\nu)/2 \}} \left\{ 2k^4 (s^2+1)^2 (2s^2+1) \Phi_{m1} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\mu k^2 s^8 \Psi_{m1} \right\} \sin s y + W_2^{(m1)} + \phi (W_3^{(m1)} \sinh \phi y + W_4^{(m1)} \cosh \phi y) \right. \\
& \left. \left. - 2 \operatorname{Re} \chi^5 (c^{(m1)} \sin \chi y - a^{(m1)} \cos \chi y) \right] \right] \sin \theta
\end{aligned} \tag{72}$$

5. 未定任意定数の決定

境界条件は、面外および面内に対する条件を組み合わせて、一般に次のようなものが解析に良く用いられる。

面外に対する条件

$$SS : w = M_1 = 0$$

$$C : w = w' = 0$$

面内に対する条件

$$1 : N_1 = N_{12} = 0$$

$$2 : u = N_{12} = 0$$

$$3 : N_1 = v = 0$$

$$4 : u = v = 0$$

上記の条件において、SS および C はそれぞれ単純支持および固定の条件を表わす。

本解析では、円筒の両端末で SS3 の境界条件を

適用する。すなわち、

$$y = \pm l \text{ において, } w = M_1 = N_1 = v = 0$$

(73)

このことと、殻形状の対称性および温度が式(16)に示されるように、円筒の中央 ($y=0$) に関して対称分布であることを考慮すれば、円筒の変形様式は、その中央に関し対称となる。すなわち、 w は y の偶関数でなければならないことから、式(61)~(72)の式中の任意定数のうち $a^{(00)}$, $a^{(m0)}$, $a^{(01)}$, $a^{(m1)}$ および $W_2^{(01)}$, $W_4^{(01)}$, $W_2^{(m1)}$, $W_4^{(m1)}$ は零と定まる。

$$\left. \begin{aligned}
a^{(00)} = a^{(m0)} = a^{(01)} = a^{(m1)} &= 0 \\
W_2^{(01)} = W_4^{(01)} = W_2^{(m1)} = W_4^{(m1)} &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{74}$$

したがって、境界条件を与える諸量は、それぞれの場合に対して次のようになる。

(1-1) $n=0, m=0$ の場合 ; 式 (61) および (62) より,

$$\left. \begin{aligned} w^{(00)} &= -\frac{\nu N_1^{(00)}}{1-\nu^2} + \Phi_{00} + \operatorname{Re} c^{(00)} \chi \cos \chi y \\ M_1^{(00)} &= \frac{D_1 N_1^{(00)}}{1-\nu^2} + \operatorname{Re} c^{(00)} \chi^3 \cos \chi y - 2\mu k^2 \Psi_{00} \\ N_1^{(00)} &= \text{constant} \\ \nu^{(00)} &= 0 \end{aligned} \right\} (75)$$

(1-2) $n=0, m \geq 1$ の場合 ; 式 (63) および (64) より,

$$\left. \begin{aligned} w^{(m0)} &= -\frac{\nu N_1^{(m0)}}{1-\nu^2} + \frac{1}{s^4 + 4k^4} (4k^4 \Phi_{m0} + 2\mu k^2 s^2 \Psi_{m0}) \cos sy + \operatorname{Re} c^{(m0)} \chi \cos \chi y \\ M_1^{(m0)} &= \frac{D_1 N_1^{(m0)}}{1-\nu^2} + \frac{4k^4}{s^4 + 4k^4} (s^2 \Phi_{m0} - 2\mu k^2 \Psi_{m0}) \cos sy + \operatorname{Re} c^{(m0)} \chi^3 \cos \chi y \\ N_1^{(m0)} &= \text{constant} \\ \nu^{(m0)} &= 0 \end{aligned} \right\} (76)$$

(2-1) $n=1, m=0$ の場合

(i) Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders および Novozhilov 理論 ; 式 (65) および (66) より,

$$\left. \begin{aligned} w^{(01)} &= (W_1^{(01)} + W_3^{(01)} y^2 + \operatorname{Re} c^{(01)} \chi^4 \cos \chi y) \cos \theta \\ M_1^{(01)} &= \{-\delta \nu g_3^0 W_1^{(01)} - 2(1-\nu^2 + D_1) W_3^{(01)} - \delta \nu g_3^0 W_3^{(01)} y^2 + \operatorname{Re} c^{(01)} \chi^6 \cos \chi y - 2\mu k^2 \Psi_{01}\} \cos \theta \\ N_1^{(01)} &= \{-\delta \nu g_3^0 W_1^{(01)} - 2(1-\nu^2) W_3^{(01)} - \delta \nu g_3^0 W_3^{(01)} y^2 + (1-\nu^2) \operatorname{Re} c^{(01)} \chi^2 \cos \chi y - (1-\nu^2) \Phi_{01}\} \cos \theta \\ \nu^{(01)} &= \{-W_1^{(01)} + 2\nu W_3^{(01)} - W_3^{(01)} y^2 - (2+\nu) \operatorname{Re} c^{(01)} \chi^2 \cos \chi y + (1+\nu) \Phi_{01}\} \sin \theta \end{aligned} \right\} (77)$$

(ii) Love-Reissner 理論 ; 式 (67) および (68) より,

$$\left. \begin{aligned} w^{(01)} &= (W_1^{(01)} + W_3^{(01)} \cosh \phi y + \operatorname{Re} c^{(01)} \chi^4 \cos \chi y) \cos \theta \\ M_1^{(01)} &= [-\delta \nu W_1^{(01)} - \{\delta(1+\nu)/2\} W_3^{(01)} \cosh \phi y + \operatorname{Re} c^{(01)} \chi^6 \cos \chi y - 2\mu k^2 \Psi_{01}] \cos \theta \\ N_1^{(01)} &= [-\delta \nu W_1^{(01)} - \{\delta(1+\nu)/2\} W_3^{(01)} \cosh \phi y + (1-\nu^2) \operatorname{Re} c^{(01)} \chi^2 \cos \chi y - (1-\nu^2) \Phi_{01}] \cos \theta \\ \nu^{(01)} &= \{-W_1^{(01)} - W_3^{(01)} \cosh \phi y - (2+\nu) \operatorname{Re} c^{(01)} \chi^2 \cos \chi y + (1+\nu) \Phi_{01}\} \sin \theta \end{aligned} \right\} (78)$$

(2-2) $n=1, m \geq 1$ の場合

(i) Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders および Novozhilov 理論 ; 式 (69) および (70) より,

$$\left. \begin{aligned} w^{(m1)} &= \left\{ \frac{1}{s^2(s^4 + 4k^4)} \{4k^4(s^2 + 1)\Phi_{m1} + 2\mu k^2 s^4 \Psi_{m1}\} \cos sy \right. \\ &\quad \left. + W_1^{(m1)} + W_3^{(m1)} y^2 + \operatorname{Re} c^{(m1)} \chi^4 \cos \chi y \right\} \cos \theta \\ M_1^{(m1)} &= \left[\frac{4k^4}{s^2(s^2 + 1)^2(s^4 + 4k^4)} \left[\left\{ s^8 - \frac{\nu(1-\nu^2)g_3^0}{4k^4} \right\} \Phi_{m1} - 2\mu k^2 s^2(s^2 + 1)^2 \Psi_{m1} \right] \cos sy \right. \\ &\quad \left. - \delta \nu g_3^0 W_1^{(m1)} - 2(1-\nu^2 + D_1) W_3^{(m1)} - \delta \nu g_3^0 W_3^{(m1)} y^2 + \operatorname{Re} c^{(m1)} \chi^6 \cos \chi y \right] \cos \theta \\ N_1^{(m1)} &= \left[-\frac{1-\nu^2}{s^2(s^2 + 1)^2(s^4 + 4k^4)} \left[(s^8 + \nu g_3^0) \Phi_{m1} - 2\mu k^2 \{(s^2 + 1)^3 - 1\} \Psi_{m1} \right] \cos sy \right. \\ &\quad \left. - \delta \nu g_3^0 W_1^{(m1)} - 2(1-\nu^2) W_3^{(m1)} - \delta \nu g_3^0 W_3^{(m1)} y^2 + (1-\nu^2) \operatorname{Re} c^{(m1)} \chi^2 \cos \chi y \right] \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

$$v^{(m1)} = \left[\left[-\frac{1}{s^2(s^2+1)^2(s^4+4k^4)} \left\{ \{4k^4(s^2+1)^2 - (1+\nu)s^8\} \Phi_{m1} + 2\mu k^2(2+\nu)s^6\psi_{m1} \right\} \cos sy \right. \right. \\ \left. \left. - W_1^{(m1)} + 2\nu W_3^{(m1)} - W_3^{(m1)}y^2 - (2+\nu)\operatorname{Re}c^{(m1)}\chi^2 \cos \chi y \right] \right] \sin \theta \quad (79)$$

(iii) Love-Reissner 理論；式 (71) および (72) より，

$$w^{(m1)} = \left[\frac{1}{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2} \left\{ 4k^4(s^2+1)\Phi_{m1} + 2\mu k^2s^4\psi_{m1} \right\} \cos sy \right. \\ \left. + W_1^{(m1)} + W_3^{(m1)} \cosh \phi y + \operatorname{Re}c^{(m1)}\chi^4 \cos \chi y \right] \cos \theta \\ M_1^{(m1)} = \left[\frac{4k^4}{(s^2+1)^2 \{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2\}} \left\{ s^8\Phi_{m1} - 2\mu k^2 \left\{ s^2(s^2+1)^2 + \frac{1-\nu}{8k^4} \right\} \psi_{m1} \right\} \cos sy \right. \\ \left. - \delta\nu W_1^{(m1)} - \left\{ \delta(1+\nu)/2 \right\} W_3^{(m1)} \cosh \phi y + \operatorname{Re}c^{(m1)}\chi^6 \cos \chi y \right] \cos \theta \\ N_1^{(m1)} = \left[-\frac{1-\nu^2}{(s^2+1)^2 \{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2\}} \left\{ \left(s^8 + \frac{1+\nu}{2} \right) \Phi_{m1} \right. \right. \\ \left. \left. - 2\mu k^2 \{ (s^2+1)^3 - 1 \} \psi_{m1} \right\} \cos sy - \delta\nu W_1^{(m1)} - \left\{ \delta(1+\nu)/2 \right\} W_3^{(m1)} \cosh \phi y \right. \\ \left. + (1-\nu^2)\operatorname{Re}c^{(m1)}\chi^2 \cos \chi y \right] \cos \theta \\ v^{(m1)} = \left[-\frac{1}{(s^2+1)^2 \{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2\}} \left\{ \{4k^4(s^2+1)^2 - (1+\nu)s^8\} \Phi_{m1} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\mu k^2(2+\nu)s^6\psi_{m1} \right\} \cos sy - W_1^{(m1)} - W_3^{(m1)} \cosh \phi y - (2+\nu)\operatorname{Re}c^{(m1)}\chi^2 \cos \chi y \right] \sin \theta \quad (80)$$

式 (75) ~ (80) のそれぞれを，境界条件，式 (73)，に代入し，それぞれの未定任意定数 $c^{(00)}$ ； $c^{(m0)}$ ； $W_1^{(01)}$ ， $W_3^{(01)}$ ， $c^{(01)}$ ； $W_1^{(m1)}$ ， $W_3^{(m1)}$ ， $c^{(m1)}$ を定めればよい。

一例として， $c^{(00)}$ を定める演算を行なう。式 (75) と (73) とから，直ちに次式を得る。

$$N_1^{(00)} = 0 \quad (81)$$

したがって， $c^{(00)}$ を定める方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \chi \cos \chi l & \bar{\chi} \cos \bar{\chi} l \\ \chi^3 \cos \chi l & \bar{\chi}^3 \cos \bar{\chi} l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c^{(00)} \\ \bar{c}^{(00)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\Phi_{00} \\ 4\mu k^2\psi_{00} \end{Bmatrix} \quad (82)$$

ここに， $\bar{\chi}$ および $\bar{c}^{(00)}$ は，それぞれ χ および $c^{(00)}$ の共役複素数である。式 (82) より $c^{(00)}$ は次のように定まる。

$$c^{(00)} = -\frac{2(\bar{\chi}^2\Phi_{00} + 2\mu k^2\psi_{00})}{\chi(\bar{\chi}^2 - \chi^2) \cos \chi l} \quad (83)$$

あるいは，式 (57) の関係を用い整理すれば次式を得る。

$$c^{(00)} = -\frac{1}{2k} \left\{ \frac{(F_{00} + G_{00})S_l + (F_{00} - G_{00})C_l}{S_l^2 + C_l^2} + i \cdot \frac{(F_{00} - G_{00})S_l - (F_{00} + G_{00})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right\} \quad (84)$$

ただし，

$$F_{00} = \Phi_{00}, \quad G_{00} = -\mu\psi_{00} \quad (85)$$

および

$$\left. \begin{aligned} S_l &= \sin k l \sinh k l \\ C_l &= \cos k l \cosh k l \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

同様にして, $c^{(m_0)}$ は

$$N_1^{(m_0)} = 0 \quad (87)$$

なることに留意すれば, 次のように定まる。

$$c^{(m_0)} = -\frac{k \cos s l}{s^4 + 4k^4} \left\{ \frac{(F_{m_0} + G_{m_0})S_l + (F_{m_0} - G_{m_0})C_l}{S_l^2 + C_l^2} + i \cdot \frac{(F_{m_0} - G_{m_0})S_l - (F_{m_0} + G_{m_0})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right\} \quad (88)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} F_{m_0} &= 2k^2 \Phi_{m_0} + \mu s^2 \Psi_{m_0} \\ G_{m_0} &= s^2 \Phi_{m_0} - 2\mu k^2 \Psi_{m_0} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

梁様曲げ変形解に対する未定任意定数も同様にして定めることができる。しかし, この場合, 境界条件から得られる4元連立方程式の根 $W_1^{(01)}$, $W_3^{(01)}$, $c^{(01)}$ および $W_1^{(m_1)}$, $W_3^{(m_1)}$, $c^{(m_1)}$ は, δ の高次の項を含む非常に煩雑な表示となる。そこで, これらの根に対して, 式(1)および(59)に基づく近似化を行なう。この近似化によって, 当然, 境界条件, 式(73), を厳密に満足し得ない場合も生じるが, 一次近似精度の範囲で十分な解を与える定数として, 次の表示が得られる。

○ Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders および Novozhilov 理論に対して,

$$\left. \begin{aligned} W_1^{(01)} &= \frac{(2 + l^2) \Phi_{01}}{2H}, \quad W_3^{(01)} = -\frac{\Phi_{01}}{2H} \\ c^{(01)} &= \frac{1}{4k^4 H} \left\{ \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} + i \cdot \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

ここに,

$$F_{01} = \Phi_{01}, \quad G_{01} = -\mu \Psi_{01} \quad (91)$$

および

$$H = 1 + \frac{\nu g_3^0 (1 - \nu^2) (1 - \nu g_3^0) l^2}{32k^8} \quad (92)$$

また,

$$\left. \begin{aligned} W_1^{(m_1)} &= -\frac{\cos s l}{2H s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left[2 \{ s^8 + 4k^4 (s^2 + 1)^2 \} \Phi_{m_1} \right. \\ &\quad \left. + s^2 l^2 \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4k^4} s^6 \Phi_{m_1} + 2\mu k^2 (s^2 + 2) \Psi_{m_1} \right\} \right] \\ W_3^{(m_1)} &= \frac{\cos s l}{2H (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4k^4} s^6 \Phi_{m_1} + 2\mu k^2 (s^2 + 2) \Psi_{m_1} \right\} \\ c^{(m_1)} &= \frac{\cos s l}{2k^2 H s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left\{ \frac{G_{m_1} S_l + F_{m_1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} + i \cdot \frac{F_{m_1} S_l - G_{m_1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} F_{m_1} &= 2k^2 s^2 (s^2 + 1)^2 \Phi_{m_1} + \mu s^8 \Psi_{m_1} \\ G_{m_1} &= s^8 \Phi_{m_1} - 2\mu k^2 s^2 (s^2 + 1)^2 \Psi_{m_1} \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

○ Love-Reissner 理論に対して,

$$\left. \begin{aligned} W_1^{(01)} &= \frac{8k^4}{1 - \nu} \Phi_{01}, \quad W_3^{(01)} = -\frac{8k^4}{(1 - \nu) \cosh \phi l} \Phi_{01} \\ c^{(01)} &= \frac{1}{4k^4} \left\{ \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} + i \cdot \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

ここに,

$$F_{01} = (1+\nu)\Phi_{01}, \quad G_{01} = -\mu\Psi_{01} \quad (96)$$

また,

$$\left. \begin{aligned} W_1^{(m1)} &= -\frac{8k^4 \cos s\ell}{(1-\nu)(s^2+1)^2\{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2\}} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1+\nu}{2} \left\{ \frac{(1-\nu^2)^2}{4k^4} s^8+1 \right\} \Phi_{m1} + 2\mu k^2 s^2 (s^2+2) \Psi_{m1} \right\} \\ W_3^{(m1)} &= \frac{8k^4 \cos s\ell}{(1-\nu)(s^2+1)^2\{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2\} \cosh \phi\ell} \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{\nu}{4k^4} s^8 - \frac{1-\nu}{2} \right) \Phi_{m1} + 2\mu k^2 s^2 (s^2+2) \Psi_{m1} \right\} \\ c^{(m1)} &= \frac{\cos s\ell}{2k^2(s^2+1)^2\{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2\}} \left\{ \frac{G_{m1}S_l + F_{m1}C_l}{S_l^2 + C_l^2} + i \cdot \frac{F_{m1}S_l - G_{m1}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} F_{m1} &= \left\{ 2k^2 s^2 (s^2+1)^2 + \frac{(1+\nu)(2+\nu)(1-\nu^2)}{16k^6} \right\} \Phi_{m1} + \mu s^8 \Psi_{m1} \\ G_{m1} &= s^8 \Phi_{m1} - 2\mu k^2 \left\{ s^2 (s^2+1)^2 + \frac{1-\nu}{8k^4} \right\} \Psi_{m1} \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

以上で、全ての任意定数は定められたから問題は解けたことになる。

6. 解の実関数による表示

複素表示による解では、その性質の見通しに不便であるので、実数に表示し直した結果を以下に列記する。

6.1 軸対称変形

6.1.1 $n=0, m=0$ の場合

変位:

$$\left. \begin{aligned} w^{(00)} &= \Phi_{00} - \left\{ \frac{G_{00}S_l + F_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky + \frac{F_{00}S_l - G_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \\ u^{(00)} &= \Phi_{00} y + \frac{\nu}{2k} \left\{ \frac{(F_{00} + G_{00})S_l + (F_{00} - G_{00})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \right. \\ &\quad \left. - \frac{(F_{00} - G_{00})S_l - (F_{00} + G_{00})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \\ v^{(00)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

ここに、得られた解 $w^{(00)}$ は、もし肉厚方向の温度勾配が零であるならば、 G_{00} なる因子は消失することになり、Hoff³⁾によって得られた結果に一致する。

合応力およびモーメント:

$$\left. \begin{aligned} N_1^{(00)} &= 0 \\ N_2^{(00)} &= -(1-\nu^2) \left\{ -\frac{E_2 \Phi_{00}}{4k^4} + \frac{G_{00}S_l + F_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky + \frac{F_{00}S_l - G_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
N_{12}^{(00)} &= N_{21}^{(00)} = 0 \\
M_1^{(00)} &= 2k^2 \left\{ -\mu \Psi_{00} + \frac{F_{00} S_l - G_{00} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky - \frac{G_{00} S_l + F_{00} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \\
M_2^{(00)} &= 2k^2 \left[-\mu \Psi_{00} + \nu \left\{ \frac{F_{00} S_l - G_{00} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky - \frac{G_{00} S_l + F_{00} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \right] \\
M_{12}^{(00)} &= M_{21}^{(00)} = 0
\end{aligned} \tag{100}$$

6.1.2 $n=0$, $m \geq 1$ の場合

変位:

$$\begin{aligned}
w^{(m0)} &= \frac{1}{s^4 + 4k^4} \left[(4k^4 \Phi_{m0} + 2\mu k^2 s^2 \Psi_{m0}) \cos sy - 2k^2 \cos s\ell \left\{ \frac{G_{m0} S_l + F_{m0} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{F_{m0} S_l - G_{m0} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \right] \\
u^{(m0)} &= \frac{1}{s^4 + 4k^4} \left[\frac{1}{s} \left[\{ (1+\nu) s^4 + 4k^4 \} \Phi_{m0} - 2\mu k^2 \nu s^2 \Psi_{m0} \right] \sin sy \right. \\
&\quad \left. + \nu k \cos s\ell \left\{ \frac{(F_{m0} + G_{m0}) S_l + (F_{m0} - G_{m0}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(F_{m0} - G_{m0}) S_l - (F_{m0} + G_{m0}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \right] \\
v^{(m0)} &= 0
\end{aligned} \tag{101}$$

合応力およびモーメント:

$$\begin{aligned}
N_1^{(m0)} &= 0 \\
N_2^{(m0)} &= \frac{1-\nu^2}{s^4 + 4k^4} \left[\{ E_2 \Phi_{m0} - s^2 (s^2 \Phi_{m0} - 2\mu k^2 \Psi_{m0}) \} \cos sy \right. \\
&\quad \left. - 2k^2 \cos s\ell \left\{ \frac{G_{m0} S_l + F_{m0} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky + \frac{F_{m0} S_l - G_{m0} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \right] \\
N_{12}^{(m0)} &= N_{21}^{(m0)} = 0 \\
M_1^{(m0)} &= \frac{4k^4}{s^4 + 4k^4} \left[(s^2 \Phi_{m0} - 2\mu k^2 \Psi_{m0}) \cos sy \right. \\
&\quad \left. + \cos s\ell \left\{ \frac{F_{m0} S_l - G_{m0} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky - \frac{G_{m0} S_l + F_{m0} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \right] \\
M_2^{(m0)} &= \frac{4k^4}{s^4 + 4k^4} \left[\left[\nu s^2 \Phi_{m0} - 2\mu \left\{ 1 + \frac{(1-\nu) s^4}{4k^4} \right\} k^2 \Psi_{m0} \right] \cos sy \right. \\
&\quad \left. + \nu \cos s\ell \left\{ \frac{F_{m0} S_l - G_{m0} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky - \frac{G_{m0} S_l + F_{m0} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \right] \\
M_{12}^{(m0)} &= M_{21}^{(m0)} = 0
\end{aligned} \tag{102}$$

6.2 梁様曲げ変形

6.2.1 $n = 1, m = 0$ の場合

(i) Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders および Novozhilov 理論

変位：

$$\begin{aligned}
 w^{(01)} &= \frac{1}{H} \left\{ \frac{\Phi_{01}}{2} (2 + \ell^2 - y^2) - \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky - \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \cos \theta \\
 u^{(01)} &= \frac{1}{H} \left[\Phi_{01} y + \frac{\nu}{2k} \left\{ \frac{(F_{01} + G_{01}) S_l + (F_{01} - G_{01}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{(F_{01} - G_{01}) S_l - (F_{01} + G_{01}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \right] \cos \theta \\
 v^{(01)} &= -\frac{1}{H} \left[\frac{\Phi_{01}}{2} (\ell^2 - y^2) - \frac{2 + \nu}{2k^2} \left\{ \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \right] \sin \theta
 \end{aligned} \tag{103}$$

合応力およびモーメント：

$$\begin{aligned}
 N_1^{(01)} &= -\frac{1 - \nu^2}{2k^2 H} \left\{ \frac{\nu g_3^0 \Phi_{01}}{4k^2} (2 + \ell^2 - y^2) + \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky \right. \\
 &\quad \left. - \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \cos \theta \\
 N_2^{(01)} &= -\frac{1 - \nu^2}{H} \left\{ \frac{(\nu f_3^0 + g_2^0 - g_3^0 + E_1 - E_2) \Phi_{01}}{4k^4} + \frac{g_3^0 \Phi_{01}}{8k^4} (\ell^2 - y^2) + \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky \right. \\
 &\quad \left. + \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \cos \theta \\
 N_{12}^{(01)} = N_{21}^{(01)} &= -\frac{1 + \nu}{kH} \left\{ -\frac{(1 - \nu)(f_3^0 + g_3^0) \Phi_{01}}{4k^3} y + \frac{(F_{01} + G_{01}) S_l + (F_{01} - G_{01}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(F_{01} - G_{01}) S_l - (F_{01} + G_{01}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \sin \theta \\
 M_1^{(01)} &= \frac{2k^2}{H} \left\{ -\frac{\nu(1 - \nu^2) g_3^0 \Phi_{01}}{16k^6} (\ell^2 - y^2) - \mu \Psi_{01} + \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky \right. \\
 &\quad \left. - \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \cos \theta \\
 M_2^{(01)} &= \frac{2k^2}{H} \left[-\frac{(1 - \nu^2)(1 - D_1) g_3^0 \Phi_{01}}{16k^6} (\ell^2 - y^2) - \mu \Psi_{01} \right. \\
 &\quad \left. + \nu \left\{ \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky - \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \right] \cos \theta \\
 M_{12}^{(01)} &= -\frac{4k}{H} \left[\frac{(1 - \nu^2) \{ (1 - D_1) f_3^0 - (3 + D_2) g_3^0 \} \Phi_{01}}{16k^5} y \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(F_{01} - G_{01}) S_l - (F_{01} + G_{01}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(F_{01} + G_{01})S_l + (F_{01} - G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \} \sin \theta \\
M_{21}^{(01)} = & - \frac{4k}{H} \left[\frac{(1 - \nu^2) \{ (1 + D_3) f_3^0 - (3 - D_3) g_3^0 \} \Phi_{01}}{16k^5} y \right. \\
& + \frac{(F_{01} - G_{01})S_l - (F_{01} + G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \\
& \left. + \frac{(F_{01} + G_{01})S_l + (F_{01} - G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right] \sin \theta
\end{aligned} \tag{104}$$

(ii) Love-Reissner 理論

変位:

$$\begin{aligned}
w^{(01)} = & \left\{ \frac{8k^4 \Phi_{01}}{1 - \nu} \left(1 - \frac{\cosh \phi y}{\cosh \phi l} \right) - \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky \right. \\
& \left. - \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \cos \theta \\
u^{(01)} = & \left[\frac{4k^2 \Phi_{01}}{1 - \nu} \sqrt{\frac{1 - \nu}{2}} \cdot \frac{\sinh \phi y}{\cosh \phi l} + \frac{\nu}{2k} \left\{ \frac{(F_{01} + G_{01})S_l + (F_{01} - G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(F_{01} - G_{01})S_l - (F_{01} + G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \right] \cos \theta \\
v^{(01)} = & - \left[\frac{8k^4 \Phi_{01}}{1 - \nu} \left(1 - \frac{\cosh \phi y}{\cosh \phi l} \right) - \frac{2 + \nu}{2k^2} \left\{ \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \right] \sin \theta
\end{aligned} \tag{105}$$

合応力およびモーメント:

$$\begin{aligned}
N_1^{(01)} = & - \frac{1 - \nu^2}{2k^2} \left\{ \frac{2(1 + \nu)k^2 \Phi_{01}}{1 - \nu} \left(1 - \frac{\cosh \phi y}{\cosh \phi l} \right) + \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky \right. \\
& \left. - \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \cos \theta \\
N_2^{(01)} = & - (1 - \nu^2) \left\{ \frac{2\Phi_{01}}{1 - \nu} \left(1 - \frac{\cosh \phi y}{\cosh \phi l} \right) + \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky \right. \\
& \left. + \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \cos \theta \\
N_{12}^{(01)} = N_{21}^{(01)} = & - \frac{1 + \nu}{k} \left\{ \frac{(1 + \nu)\Phi_{01}}{(1 - \nu)k} \sqrt{\frac{1 - \nu}{2}} \cdot \frac{\sinh \phi y}{\cosh \phi l} + \frac{(F_{01} + G_{01})S_l + (F_{01} - G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \right. \\
& \left. - \frac{(F_{01} - G_{01})S_l - (F_{01} + G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \sin \theta \\
M_1^{(01)} = & 2k^2 \left\{ -\mu \Psi_{01} + \frac{(1 + \nu)^2 \Phi_{01}}{2k^2} \cdot \frac{\cosh \phi y}{\cosh \phi l} + \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin k y \sinh k y \} \cos \theta \\
M_2^{(01)} = & 2 k^2 \left[-\mu \Psi_{01} + \frac{(1+\nu) \Phi_{01}}{k^2} \cdot \frac{\cosh \phi y}{\cosh \phi l} + \nu \left\{ \frac{F_{01} S_l - G_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos k y \cosh k y \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{G_{01} S_l + F_{01} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin k y \sinh k y \right\} \right] \cos \theta \\
M_{12}^{(01)} = M_{21}^{(01)} = & -4 k \left\{ \frac{2 k \Phi_{01}}{1-\nu} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \frac{\sinh \phi y}{\cosh \phi l} + \frac{(F_{01} - G_{01}) S_l - (F_{01} + G_{01}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin k y \cosh k y \right. \\
& \left. + \frac{(F_{01} + G_{01}) S_l + (F_{01} - G_{01}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos k y \sinh k y \right\} \sin \theta
\end{aligned} \tag{106}$$

6.2.2 $n=1, m \geq 1$ の場合

(i) Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders および Novozhilov 理論

変位:

$$\begin{aligned}
w^{(m1)} = & \frac{1}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left[(s^2 + 1)^2 \{ 4k^4 (s^2 + 1) \Phi_{m1} + 2\mu k^2 s^4 \Psi_{m1} \} \cos s y \right. \\
& - \frac{\cos s l}{2H} \left[2 \{ s^8 + 4k^4 (s^2 + 1)^2 \} \Phi_{m1} + \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4k^4} s^6 \Phi_{m1} + 2\mu k^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \right\} s^2 (l^2 - y^2) \right] \\
& \left. - \frac{2k^2 \cos s l}{H} \left\{ \frac{G_{m1} S_l + F_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos k y \cosh k y + \frac{F_{m1} S_l - G_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin k y \sinh k y \right\} \right] \cos \theta \\
u^{(m1)} = & \frac{1}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left[s \left[\{ 4k^4 (s^2 + 1)^2 + (1+\nu) s^8 \} \Phi_{m1} - 2\mu k^2 \nu s^6 \Psi_{m1} \right] \sin s y \right. \\
& - \frac{\cos s l}{H} \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4k^4} s^6 \Phi_{m1} + 2\mu k^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \right\} s^2 y + \frac{\nu k \cos s l}{H} \left\{ \frac{(F_{m1} + G_{m1}) S_l + (F_{m1} - G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right. \\
& \left. \times \sin k y \cosh k y - \frac{(F_{m1} - G_{m1}) S_l - (F_{m1} + G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos k y \sinh k y \right\} \right] \cos \theta \\
v^{(m1)} = & \frac{1}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left[- \left[\{ 4k^4 (s^2 + 1)^2 - (1+\nu) s^8 \} \Phi_{m1} + 2\mu k^2 (2+\nu) s^6 \Psi_{m1} \right] \cos s y \right. \\
& + \frac{\cos s l}{2H} \left[2 \{ s^8 + 4k^4 (s^2 + 1)^2 \} \Phi_{m1} + \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4k^4} s^6 \Phi_{m1} + 2\mu k^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \right\} s^2 (l^2 - y^2) \right] \\
& \left. + \frac{(2+\nu) \cos s l}{H} \left\{ \frac{F_{m1} S_l - G_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos k y \cosh k y - \frac{G_{m1} S_l + F_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin k y \sinh k y \right\} \right] \sin \theta
\end{aligned} \tag{107}$$

合応力およびモーメント:

$$\begin{aligned}
N_1^{(m1)} = & \frac{1-\nu^2}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left[- \left[(s^8 + \nu g_3^0) \Phi_{m1} - 2\mu k^2 \{ (s^2 + 1)^3 - 1 \} \Psi_{m1} \right] \cos s y \right. \\
& + \frac{\cos s l}{2H} \left[2 \{ \nu g_3^0 \Phi_{m1} - 2\mu k^2 s^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \} + \frac{\nu g_3^0}{4k^4} \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4k^4} s^6 \Phi_{m1} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\mu k^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \right\} s^2 (l^2 - y^2) \right] - \frac{\cos s l}{H} \left\{ \frac{F_{m1} S_l - G_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos k y \cosh k y \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{G_{m1} S_l + F_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \} \Big] \cos \theta \\
N_2^{(m1)} = & \frac{1 - \nu^2}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left[- \left[\{ s^{10} + (E_1 - E_2 + \nu f_3^0 + g_2^0 + g_3^0) s^2 + g_3^0 \} \Phi_{m1} \right. \right. \\
& - 2 \mu k^2 s^2 \{ (s^2 + 1)^3 - 1 \} \Psi_{m1} \Big] \cos sy + \frac{g_3^0 \cos s \ell}{8 k^4 H} \left[2 \{ s^8 + 4 k^4 (s^2 + 1)^2 \} \Phi_{m1} \right. \\
& \left. \left. + \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4 k^4} s^6 \Phi_{m1} + 2 \mu k^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \right\} s^2 (\ell^2 - y^2) \right] \\
& - \frac{2 k^2 \cos s \ell}{H} \left\{ \frac{G_{m1} S_l + F_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky + \frac{F_{m1} S_l - G_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \Big] \cos \theta \\
N_{12}^{(m1)} = N_{21}^{(m1)} = & - \frac{2(1 + \nu)}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left[s \left[\left\{ s^8 - \frac{1 - \nu}{2} (f_3^0 + g_3^0) \right\} \Phi_{m1} \right. \right. \\
& - 2 \mu k^2 \{ (s^2 + 1)^3 - 1 \} \Psi_{m1} \Big] \sin sy + \frac{(1 - \nu) (f_3^0 + g_3^0) \cos s \ell}{8 k^4 H} \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4 k^4} s^6 \Phi_{m1} \right. \\
& \left. \left. + 2 \mu k^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \right\} s^2 y + \frac{k \cos s \ell}{H} \left\{ \frac{(F_{m1} + G_{m1}) S_l + (F_{m1} - G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(F_{m1} - G_{m1}) S_l - (F_{m1} + G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \Big] \cos \theta \\
M_1^{(m1)} = & \frac{1}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left[4 k^4 \left[\left\{ s^8 - \frac{\nu (1 - \nu^2) g_3^0}{4 k^4} \right\} \Phi_{m1} - 2 \mu k^2 s^2 (s^2 + 1)^2 \Psi_{m1} \right] \cos sy \right. \\
& \left. + \frac{\cos s \ell}{2H} \left[2 \left\{ \nu g_3^0 (1 - \nu^2 - \frac{D_1}{4 k^4} s^8) \Phi_{m1} - 2 \mu k^2 (1 - \nu^2 + D_1) s^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \right\} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\nu (1 - \nu^2) g_3^0}{4 k^4} \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4 k^4} s^6 \Phi_{m1} - 2 \mu k^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \right\} s^2 (\ell^2 - y^2) \right] \right. \\
& \left. + \frac{4 k^4 \cos s \ell}{H} \left\{ \frac{F_{m1} S_l - G_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky - \frac{G_{m1} S_l + F_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \Big] \cos \theta \\
M_2^{(m1)} = & \frac{1}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left[4 k^4 \left[\left\{ \nu s^8 - \frac{(1 - \nu^2) (1 - D_1) g_3^0}{4 k^4} \right\} \Phi_{m1} \right. \right. \\
& - 2 \mu k^2 s^2 \left\{ \frac{1 - \nu}{4 k^4} s^8 + (s^2 + 1)^2 \right\} \Psi_{m1} \Big] \cos sy + \frac{\cos s \ell}{2H} \left\{ 2 \left[g_3^0 \{ (1 - \nu^2) (1 - D_1) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1 - \nu^2 - D_1}{4 k^4} s^8 \right\} \Phi_{m1} - 2 \mu k^2 \nu D_1 s^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \right] + \frac{(1 - \nu^2) (1 - D_1) g_3^0}{4 k^4} \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4 k^4} s^6 \Phi_{m1} \right. \\
& \left. \left. + 2 \mu k^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \right\} s^2 (\ell^2 - y^2) \right\} + \frac{4 k^4 \nu \cos s \ell}{H} \left\{ \frac{F_{m1} S_l - G_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky \right. \\
& \left. - \frac{G_{m1} S_l + F_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \Big] \cos \theta \\
M_{12}^{(m1)} = & - \frac{4}{s^2 (s^2 + 1)^2 (s^4 + 4k^4)} \left[s \left[\left[4 k^4 s^2 (s^2 + 1)^2 + \frac{1 - \nu^2}{4} \{ (1 - D_2) f_3^0 - (3 + D_2) g_3^0 \} \right] \Phi_{m1} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\mu k^2 s^8 \Psi_{m1} \} \sin sy - \frac{(1-\nu^2) \{ (1-D_2) f_3^0 - (3+D_2) g_3^0 \} \cos s\ell}{16k^4 H} \\
& \times \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4k^4} s^6 \Phi_{m1} + 2\mu k^2 (s^2+2) \Psi_{m1} \right\} s^2 y + \frac{2k^3 \cos s\ell}{H} \left\{ \frac{(F_{m1}-G_{m1}) S_l - (F_{m1}+G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right. \\
& \times \sin ky \cosh ky + \frac{(F_{m1}+G_{m1}) S_l + (F_{m1}-G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \left. \right\} \sin \theta \\
M_{21}^{(m1)} = & - \frac{4}{s^2 (s^2+1)^2 (s^4+4k^4)} \left[s \left\{ \left[4k^4 s^2 (s^2+1)^2 + \frac{1-\nu^2}{4} \{ (1+D_3) f_3^0 - (3-D_3) g_3^0 \} \right] \Phi_{m1} \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\mu k^2 s^8 \Psi_{m1} \right\} \sin sy - \frac{(1-\nu^2) \{ (1+D_3) f_3^0 - (3-D_3) g_3^0 \} \cos s\ell}{16k^4 H} \right. \\
& \times \left\{ \frac{\nu g_3^0}{4k^4} s^6 \Phi_{m1} + 2\mu k^2 (s^2+2) \Psi_{m1} \right\} s^2 y + \frac{2k^3 \cos s\ell}{H} \left\{ \frac{(F_{m1}-G_{m1}) S_l - (F_{m1}+G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right. \\
& \left. \times \sin ky \cosh ky + \frac{(F_{m1}+G_{m1}) S_l + (F_{m1}-G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \sin \theta
\end{aligned} \tag{108}$$

(iii) Love-Reissner 理論

変位:

$$\begin{aligned}
w^{(m1)} = & \frac{1}{(s^2+1)^2 \{ s^6 + 4k^4 s^2 + (1-\nu)/2 \}} \left[\left\{ (s^2+1)^2 \{ 4k^4 (s^2+1) \Phi_{m1} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\mu k^2 s^4 \Psi_{m1} \right\} \cos sy - \frac{8k^4 \cos s\ell}{1-\nu} \left[\left\{ \frac{(1+\nu)(1-\nu^2)-2\nu}{8k^4} s^8 + 1 \right\} \Phi_{m1} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left\{ \left(\frac{\nu}{4k^4} s^8 - \frac{1-\nu}{2} \right) \Phi_{m1} + 2\mu k^2 s^2 (s^2+2) \Psi_{m1} \right\} \left(1 - \frac{\cosh \phi y}{\cosh \phi l} \right) \right] \right. \\
& \left. - 2k^2 \cos s\ell \left\{ \frac{G_{m1} S_l + F_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky + \frac{F_{m1} S_l - G_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \right] \cos \theta \\
u^{(m1)} = & \frac{1}{(s^2+1)^2 \{ s^6 + 4k^4 s^2 + (1-\nu)/2 \}} \left[s \left[\left\{ 4k^4 (s^2+1)^2 + (1+\nu) s^8 \right\} \Phi_{m1} \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\mu k^2 \nu s^6 \Psi_{m1} \right\} \sin sy - \frac{4k^2}{1-\nu} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \cos s\ell \left\{ \left(\frac{\nu}{4k^4} s^8 - \frac{1-\nu}{2} \right) \Phi_{m1} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\mu k^2 s^2 (s^2+2) \Psi_{m1} \right\} \frac{\sinh \phi y}{\cosh \phi l} + \nu k \cos s\ell \left\{ \frac{(F_{m1}+G_{m1}) S_l + (F_{m1}-G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sin ky \sinh ky - \frac{(F_{m1}-G_{m1}) S_l - (F_{m1}+G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \right] \cos \theta \\
v^{(m1)} = & \frac{1}{(s^2+1)^2 \{ s^6 + 4k^4 s^2 + (1-\nu)/2 \}} \left[- \left[\left\{ 4k^4 (s^2+1)^2 - (1+\nu) s^8 \right\} \Phi_{m1} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\mu k^2 (2+\nu) s^6 \Psi_{m1} \right\} \cos sy + \frac{8k^4 \cos s\ell}{1-\nu} \left[\left\{ \frac{(1+\nu)(1-\nu^2)^2 - 2\nu}{8k^4} s^8 + 1 \right\} \Phi_{m1} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left\{ \left(\frac{\nu}{4k^4} s^8 - \frac{1-\nu}{2} \right) \Phi_{m1} + 2\mu k^2 s^2 (s^2+2) \Psi_{m1} \right\} \left(1 - \frac{\cosh \phi y}{\cosh \phi l} \right) \right] \right.
\end{aligned}$$

$$+(2+\nu)\cos s\ell\left\{\frac{F_{m1}S_l-G_{m1}C_l}{S_l^2+C_l^2}\cos ky\cosh ky-\frac{G_{m1}S_l+F_{m1}C_l}{S_l^2+C_l^2}\sin ky\sinh ky\right\}\sin\theta\quad (109)$$

合応力およびモーメント：

$$N_1^{(m1)}=\frac{1-\nu^2}{(s^2+1)^2\{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2\}}\left[\left[-\left(s^8+\frac{1+\nu}{2}\right)\Phi_{m1}\right.\right. \\ \left.-2\mu k^2\{(s^2+1)^3-1\}\Psi_{m1}\right]\cos sy-\frac{(1+\nu)\cos s\ell}{1-\nu}\left[\left\{\frac{\nu^3(2-\nu^2)}{4k^4}s^8-\frac{1+\nu}{2}\right\}\Phi_{m1}\right. \\ \left.+\frac{1-\nu}{1+\nu}\{2\mu k^2s^2(s^2+2)\}\Psi_{m1}-\left\{\left(\frac{\nu}{4k^4}s^8-\frac{1-\nu}{2}\right)\Phi_{m1}\right.\right. \\ \left.+\left.2\mu k^2s^2(s^2+2)\Psi_{m1}\right\}\left(1-\frac{\cosh\phi y}{\cosh\phi\ell}\right)\right]-\cos s\ell\left\{\frac{F_{m1}S_l-G_{m1}C_l}{S_l^2+C_l^2}\cos ky\cosh ky\right. \\ \left.-\frac{G_{m1}S_l+F_{m1}C_l}{S_l^2+C_l^2}\sin ky\sinh ky\right\}\cos\theta$$

$$N_2^{(m1)}=\frac{1-\nu^2}{(s^2+1)^2\{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2\}}\left[\left[-\left(s^{10}+\frac{9+\nu}{2}s^2+1\right)\Phi_{m1}\right.\right. \\ \left.-2\mu k^2s^2\{(s^2+1)^3-1\}\Psi_{m1}\right]\cos sy+\frac{2\cos s\ell}{1-\nu}\left[\left\{\frac{(1+\nu)(1-\nu^2)^2-2\nu}{8k^4}s^8+1\right\}\Phi_{m1}\right. \\ \left.+\left\{\left(\frac{\nu}{4k^4}s^8-\frac{1-\nu}{2}\right)\Phi_{m1}+2\mu k^2s^2(s^2+2)\Psi_{m1}\right\}\left(1-\frac{\cosh\phi y}{\cosh\phi\ell}\right)\right] \\ -2k^2\cos s\ell\left\{\frac{G_{m1}S_l+F_{m1}C_l}{S_l^2+C_l^2}\cos ky\cosh ky+\frac{F_{m1}S_l-G_{m1}C_l}{S_l^2+C_l^2}\sin ky\sinh ky\right\}\cos\theta$$

$$N_{12}^{(m1)}=N_{21}^{(m1)}=-\frac{2(1+\nu)}{(s^2+1)^2\{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2\}}\left[\left[s\left(s^8+\frac{1+\nu}{2}\right)\Phi_{m1}\right.\right. \\ \left.-2\mu k^2\{(s^2+1)^3-1\}\Psi_{m1}\right]\sin sy-\frac{1+\nu}{2k^2(1-\nu)}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\cos s\ell\left\{\left(\frac{\nu}{4k^4}s^8-\frac{1-\nu}{2}\right)\Phi_{m1}\right. \\ \left.+\left.2\mu k^2s^2(s^2+2)\Psi_{m1}\right\}\frac{\sinh\phi y}{\cosh\phi\ell}+k\cos s\ell\left\{\frac{(F_{m1}+G_{m1})S_l+(F_{m1}-G_{m1})C_l}{S_l^2+C_l^2}\sin ky\cosh ky\right. \\ \left.-\frac{(F_{m1}-G_{m1})S_l-(F_{m1}+G_{m1})C_l}{S_l^2+C_l^2}\cos ky\sinh ky\right\}\sin\theta$$

$$M_1^{(m1)}=\frac{1}{(s^2+1)^2\{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2\}}\left[\left[4k^4\left[s^8\Phi_{m1}-2\mu k^2\left\{s^2(s^2+1)^2+\frac{1-\nu}{8k^4}\right\}\Psi_{m1}\right]\cos sy\right.\right. \\ \left.-(1+\nu)^2\cos s\ell\left[\left\{\frac{\nu^3(2-\nu^2)}{4k^4}s^8-\frac{1+\nu}{2}\right\}\Phi_{m1}+\frac{1-\nu}{1+\nu}\{2\mu k^2s^2(s^2+2)\}\Psi_{m1}\right.\right. \\ \left.-\left\{\left(\frac{\nu}{4k^4}s^8-\frac{1-\nu}{2}\right)\Phi_{m1}+2\mu k^2s^2(s^2+2)\Psi_{m1}\right\}\left(1-\frac{\cosh\phi y}{\cosh\phi\ell}\right)\right] \\ \left.+\left.4k^4\cos s\ell\left\{\frac{F_{m1}S_l-G_{m1}C_l}{S_l^2+C_l^2}\cos ky\cosh ky-\frac{G_{m1}S_l+F_{m1}C_l}{S_l^2+C_l^2}\sin ky\sinh ky\right\}\right]\cos\theta$$

$$M_2^{(m1)}=\frac{1}{(s^2+1)^2\{s^6+4k^4s^2+(1-\nu)/2\}}\left[\left[4k^4\left[\nu s^8\Phi_{m1}-2\mu k^2\left\{\frac{1-\nu^2}{4k^4}s^{10}+s^2(s^2+1)^2\right\}\Psi_{m1}\right]\cos sy\right.\right. \\ \left.-\left(1+\nu\right)^2\cos s\ell\left[\left\{\frac{\nu^3(2-\nu^2)}{4k^4}s^8-\frac{1+\nu}{2}\right\}\Phi_{m1}+\frac{1-\nu}{1+\nu}\{2\mu k^2s^2(s^2+2)\}\Psi_{m1}\right.\right. \\ \left.-\left\{\left(\frac{\nu}{4k^4}s^8-\frac{1-\nu}{2}\right)\Phi_{m1}+2\mu k^2s^2(s^2+2)\Psi_{m1}\right\}\left(1-\frac{\cosh\phi y}{\cosh\phi\ell}\right)\right] \\ \left.+\left.4k^4\cos s\ell\left\{\frac{F_{m1}S_l-G_{m1}C_l}{S_l^2+C_l^2}\cos ky\cosh ky-\frac{G_{m1}S_l+F_{m1}C_l}{S_l^2+C_l^2}\sin ky\sinh ky\right\}\right]\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1-\nu}{8k^4} \Psi_{m1} \cos sy + (1+\nu) \cos s\ell \left[\left\{ \frac{(1+\nu)(1-\nu^2)^2 - 2\nu}{8k^4} s^8 + 1 \right\} \Phi_{m1} \right. \\
& + \left. \left\{ \left(\frac{\nu}{4k^4} s^8 - \frac{1-\nu}{2} \right) \Phi_{m1} - 2\mu k^2 s^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \right\} \left(1 - \frac{\cosh \phi y}{\cosh \phi l} \right) \right] \\
& + 4k^4 \nu \cos s\ell \left\{ \frac{F_{m1} S_l - G_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky - \frac{G_{m1} S_l + F_{m1} C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \cos \theta \\
M_{12}^{(m1)} = M_{21}^{(m1)} = & - \frac{4}{(s^2 + 1)^2 \{ s^6 + 4k^4 s^2 + (1-\nu)/2 \}} \left[s \{ 2k^4 (s^2 + 1)^2 (2s^2 + 1) \Phi_{m1} \right. \\
& + 2\mu k^2 s^8 \Psi_{m1} \} \sin sy - \frac{2k^2}{1-\nu} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \cos s\ell \left\{ \left(\frac{\nu}{4k^4} s^8 - \frac{1-\nu}{2} \right) \Phi_{m1} \right. \\
& + 2\mu k^2 s^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1} \} \frac{\sinh \phi y}{\cosh \phi l} + 2k^3 \cos s\ell \left\{ \frac{(F_{m1} - G_{m1}) S_l - (F_{m1} + G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right. \\
& \times \sin ky \cosh ky + \left. \frac{(F_{m1} + G_{m1}) S_l + (F_{m1} - G_{m1}) C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \left. \right] \sin \theta
\end{aligned} \tag{110}$$

このように、実関数の形に書き改めると、それぞれの表示式の右辺には、 y を変数とする三角正弦あるいは余弦関数と双曲線正弦あるいは余弦関数とを積の形で含む項の存在が判る。この項は、いわゆる縁領域変形解で、他の項が殻全体にわたっての変形を表わす全体変形解であるのに対し、殻の端末に近い領域に生じ中央部に向けて周期的に変化しつつ急激に減衰する変形を表わしている。この減衰は、構造パラメタ kl $[= \{ \sqrt{3(1-\nu^2)} (R/h) \}^{1/2} \cdot (L/R)]$ の値に依存し、 kl の値が大きくなるに伴い端末の影響はますます端末近傍の領域に限定されることが判る。

これらの諸式において、梁様曲げ変形に対する Love-Reissner 理論による解とそれ以外の理論による解とでは、その表示に異なる関数形が現われ形式上顕著な差異が認められる。しかし、この梁様曲げ変形に対する Love-Reissner 理論による解を別にすれば、理論により異なる値をとるパラメタが現われるのは、 $1/k^2$ 以上の微小量が掛かる項にのみである。このことは、通常、それらの項が他の項に比較して省略し得る量と見做して差し支えないことを示している。例えば、 $w^{(m1)}$ を与える式(107)の第1式の右辺〔 〕内の第2項に現われる $\nu g_3^0 s^6 \Phi_{m1} / 4k^4$ なる項は、 s^6 のオーダーが k^4 か、それ以下であ

ば、 $2\mu k^2 (s^2 + 2) \Psi_{m1}$ なる項に比較して省略して差し支えない。すなわち、 l に対して軸方向の変形半波数が極端に大きくならない限り、この項は省略できる。

同様のことが、Love-Reissner 理論を除く梁様曲げ変形解に現われる量 H 、式(92)、に対しても言える。式(92)の右辺第2項に現われるパラメタ g_3^0 は、Flügge および Naghdi 理論では零、Koiter-Sanders および Novozhilov 理論では1をとるけれども、次の形状パラメタの範囲では、この第2項は第1項に比較して省略でき、 $H=1$ として差し支えない。

$$l^2 \ll 32k^8 \tag{111}$$

すなわち、 l が k^3 のオーダーか、それ以下であれば、換言すれば、円筒の長さが半径に比較して極端に大きくなければ、Koiter-Sanders および Novozhilov 理論による解は、Flügge および Naghdi の理論による解と近似的に一致する。

梁様曲げ変形に対する Love-Reissner 理論による解は、式(103)、(107)と式(105)、(109)とから、もし次式が成立するならば、Flügge 理論などによる解と近似的に一致する。

$$\frac{l^2 - y^2}{2} = \frac{8k^4}{1-\nu} \left(1 - \frac{\cosh \phi y}{\cosh \phi l} \right) \tag{112}$$

上式の右辺を級数展開すると次式を得る。

$$\frac{l^2 - y^2}{2} \approx \frac{\{ (l^2 - y^2)/2! + \phi^2(l^4 - y^4)/4! + \phi^4(l^6 - y^6)/6! + \dots \}}{\{ 1 + (\phi l)^2/2! + (\phi l)^4/4! + \dots \}} \quad (113)$$

この式が成立するための条件は、 $-l \leq y \leq l$ 、に注意すれば、次式で与えられる。

$$\phi^2 l^2 \ll 1 \quad (114)$$

書き換えれば、

$$l^2 \ll 8k^4 \quad (115)$$

すなわち、 l が k のオーダーか、それ以下であれば、言い換えれば、円筒殻の長さが半径に比較して極めて長い場合を除けば、Love-Reissner理論による解は、Flügge理論などによる解に近似的に一致することが判る。

7. 合応力およびモーメントの極値

強度設計の観点から、合応力およびモーメントの最大値や、その位置を容易に評価し得ることが望ましい。本章では、前章までの解析結果を用いて合

力およびモーメントの軸方向についての極値とその位置を求める。

今、温度が軸および肉厚方向に、それぞれ一様および線形に分布し、周方向には $n=0$ と $n=1$ の場合の分布が重ね合わさった形で与えられる場合を考える。このような温度分布は式(18)および(32)により次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha T(\theta, \zeta) &= \Phi(\theta) + \zeta \Psi(\theta) \\ \Phi(\theta) &= \Phi_{00} + \Phi_{01} \cos \theta \\ \Psi(\theta) &= \Psi_{00} + \Psi_{01} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

この温度上昇によって生じる円筒の変位ならびに合応力およびモーメントは、Flügge理論を用いることにすれば、式(99)と(103)ならびに(100)と(104)とをそれぞれ重ね合わせることにより直ちに次のように求まる。

変位：

$$\left. \begin{aligned} w &= \Phi_{00} + \frac{\Phi_{01}}{2}(2+l^2-y^2)\cos\theta - \left\{ \frac{G_{00}S_l + F_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} + \frac{G_{01}S_l + F_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos\theta \right\} \cos ky \cosh ky \\ &\quad - \left\{ \frac{F_{00}S_l - G_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} + \frac{F_{01}S_l - G_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos\theta \right\} \sin ky \sinh ky \\ u &= (\Phi_{00} + \Phi_{01} \cos\theta)y + \frac{\nu}{2k} \left\{ \frac{(F_{00} + G_{00})S_l + (F_{00} - G_{00})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(F_{01} + G_{01})S_l + (F_{01} - G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos\theta \right\} \sin ky \cosh ky \\ &\quad - \frac{\nu}{2k} \left\{ \frac{(F_{00} - G_{00})S_l - (F_{00} + G_{00})C_l}{S_l^2 + C_l^2} + \frac{(F_{01} - G_{01})S_l - (F_{01} + G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos\theta \right\} \cos ky \sinh ky \\ v &= - \left[\frac{\Phi_{01}}{2}(l^2 - y^2) - \frac{2 + \nu}{2k^2} \left\{ \frac{F_{01}S_l - G_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky - \frac{G_{01}S_l + F_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \right] \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

合応力およびモーメント：

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -\frac{1-\nu^2}{2k^2} \left\{ \frac{F_{01}S_l - G_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \cosh ky - \frac{G_{01}S_l + F_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \sinh ky \right\} \cos\theta \\ N_2 &= -(1-\nu^2) \left[-\frac{1}{4k^4} \{ \Phi_{00} - (2-\nu)\Phi_{01} \cos\theta \} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{G_{00}S_l + F_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} + \frac{G_{01}S_l + F_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos\theta \right\} \cos ky \cosh ky \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{F_{00}S_l - G_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} + \frac{F_{01}S_l - G_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos \theta \right\} \sin ky \sinh ky \\
N_{12} = N_{21} = & - \frac{1+\nu}{k} \left\{ \frac{(1-\nu)\Phi_{01}}{4k^3} y + \frac{(F_{01}+G_{01})S_l + (F_{01}-G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \right. \\
& \left. - \frac{(F_{01}-G_{01})S_l - (F_{01}+G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \sin \theta \\
M_1 = & 2k^2 \left[-\mu(\Psi_{00} + \Psi_{01} \cos \theta) + \left\{ \frac{F_{00}S_l - G_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} + \frac{F_{01}S_l - G_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos \theta \right\} \cos ky \cosh ky \right. \\
& \left. - \left\{ \frac{G_{00}S_l + F_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} + \frac{G_{01}S_l + F_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos \theta \right\} \sin ky \sinh ky \right] \\
M_2 = & 2k^2 \left[-\mu(\Psi_{00} + \Psi_{01} \cos \theta) + \nu \left\{ \frac{F_{00}S_l - G_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} + \frac{F_{01}S_l - G_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos \theta \right\} \cos ky \cosh ky \right. \\
& \left. - \nu \left\{ \frac{G_{00}S_l + F_{00}C_l}{S_l^2 + C_l^2} + \frac{G_{01}S_l + F_{01}C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos \theta \right\} \sin ky \sinh ky \right] \\
M_{12} = & -4k \left\{ \frac{(F_{01}-G_{01})S_l - (F_{01}+G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \right. \\
& \left. + \frac{(F_{01}+G_{01})S_l + (F_{01}-G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \sin \theta \\
M_{21} = & -4k \left\{ -\frac{(1-\nu^2)\Phi_{01}}{8k^5} y + \frac{(F_{01}-G_{01})S_l - (F_{01}+G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \sin ky \cosh ky \right. \\
& \left. + \frac{(F_{01}+G_{01})S_l + (F_{01}-G_{01})C_l}{S_l^2 + C_l^2} \cos ky \sinh ky \right\} \sin \theta
\end{aligned} \tag{118}$$

合応力およびモーメントが極値をとる y の値は、式 (118) のそれぞれを y で微分した式を零とおけば得られる。ここで、 N_1 の大きさは N_2 に比較して非常に小さく実際上 $N_1 = 0$ と見做し得るので、その極値を求めることは省略し、まず N_2 について考えてみると、極値を与える y の値は次の方程式の根であることが判る。

$$\begin{aligned}
\tan ky \coth kl & = \frac{B}{A} \\
\text{ただし、} \\
A & = \{ F_{00} + G_{00} + (F_{01} + G_{01}) \cos \theta \} \cos kl \cosh kl - \{ F_{00} - G_{00} + (F_{01} - G_{01}) \cos \theta \} \sin kl \sinh kl \\
B & = \{ F_{00} + G_{00} + (F_{01} + G_{01}) \cos \theta \} \sin kl \sinh kl + \{ F_{00} - G_{00} + (F_{01} - G_{01}) \cos \theta \} \cos kl \cosh kl
\end{aligned} \tag{119}$$

ここで、極値をとる位置が問題となるのは、 $|y|$ の値がかなり大きな所であるから、 $k|y|$ が次式が成り立つ程度に十分大きい場合を考える。

$$\coth k|y| \approx 1 \tag{120}$$

この場合、 $|y| \leq l$ に注意すれば、また次の近似も成り立つことになる。

$$\sinh kl \approx \cosh kl \tag{121}$$

したがって、このような場合、式 (119) は次のように書ける。

$$\tan ky = \frac{\{ F_{00} + G_{00} + (F_{01} + G_{01}) \cos \theta \} \sin kl + \{ F_{00} - G_{00} + (F_{01} - G_{01}) \cos \theta \} \cos kl}{\{ F_{00} + G_{00} + (F_{01} + G_{01}) \cos \theta \} \cos kl - \{ F_{00} - G_{00} + (F_{01} - G_{01}) \cos \theta \} \sin kl} \tag{122}$$

上式の根を y_{N_2} 、これに対応する極値を N_2^* と記すならば、次式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{|y_{N_2}|}{l} &= 1 - \frac{1}{kl} \left\{ r\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \right\} \\
N_2^* &= -(1-\nu^2) \left[-\frac{1}{4k^4} \left\{ \Phi_{00} - (2-\nu)\Phi_{01} \cos\theta \right\} + (-1)^r e^{-\{r\pi - \tan^{-1}(b/a)\}} \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ (F_{00} + F_{01} \cos\theta) \cos(\tan^{-1}(b/a)) - (G_{00} + G_{01} \cos\theta) \sin(\tan^{-1}(b/a)) \right\} \right] \\
\text{ここに,} \\
\frac{b}{a} &= \frac{F_{00} - G_{00} + (F_{01} - G_{01}) \cos\theta}{F_{00} + G_{00} + (F_{01} + G_{01}) \cos\theta} \\
r &= \begin{cases} 1, 2, 3, \dots & (b/a > 0) \\ 0, 1, 2, \dots & (b/a < 0) \end{cases}
\end{aligned} \tag{123}$$

式(123)が適用されるのは、式(120)が成り立つ程度に $|y_{N_2}|$ が大であることを条件とするから、 r のとる値に上限があることは勿論である。

他の合応力およびモーメントについても、全く同様に取り扱うことができ、 N_2 の場合に用いた表記法にしたがえば、結果は次のとおりである。

$$\begin{aligned}
\frac{|y_{N_{12}}|}{l} &= \frac{|y_{N_{21}}|}{l} = 1 - \frac{1}{kl} \left\{ r\pi - \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) \right\} \\
N_{12}^* &= N_{21}^* = \pm \frac{(-1)^{r+1}(1+\nu)}{k} e^{-\{r\pi - \tan^{-1}(a/b)\}} \left[(F_{01} + G_{01}) \cos(\tan^{-1}(a/b)) \right. \\
&\quad \left. + (F_{01} - G_{01}) \sin(\tan^{-1}(a/b)) \right] \sin\theta \quad (\text{複号は } y_{N_{12}}, y_{N_{21}} \text{ と同符号}) \\
\text{ここに,} \\
\frac{a}{b} &= \frac{F_{01}}{G_{01}} \\
r &= \begin{cases} 1, 2, 3, \dots & (a/b > 0) \\ 0, 1, 2, \dots & (a/b < 0) \end{cases}
\end{aligned} \tag{124}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|y_{M_1}|}{l} &= \frac{|y_{M_2}|}{l} = 1 - \frac{1}{kl} \left\{ r\pi + \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) \right\} \\
M_1^* &= 2k^2 \left[-\mu(\Psi_{00} + \Psi_{01} \cos\theta) + (-1)^r e^{-\{r\pi + \tan^{-1}(a/b)\}} \left\{ (F_{00} + F_{01} \cos\theta) \sin(\tan^{-1}(a/b)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (G_{00} + G_{01} \cos\theta) \cos(\tan^{-1}(a/b)) \right\} \right] \\
M_2^* &= 2k^2 \left[-\mu(\Psi_{00} + \Psi_{01} \cos\theta) + (-1)^r \nu e^{-\{r\pi + \tan^{-1}(a/b)\}} \left\{ (F_{00} + F_{01} \cos\theta) \sin(\tan^{-1}(a/b)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (G_{00} + G_{01} \cos\theta) \cos(\tan^{-1}(a/b)) \right\} \right] \\
\text{ここに,} \\
\frac{a}{b} &= \frac{F_{00} + G_{00} + (F_{01} + G_{01}) \cos\theta}{F_{00} - G_{00} + (F_{01} - G_{01}) \cos\theta} \\
r &= \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & (a/b > 0) \\ 1, 2, 3, \dots & (a/b < 0) \end{cases}
\end{aligned} \tag{125}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{|y_{M_{12}}|}{l} = \frac{|y_{M_{21}}|}{l} &= 1 - \frac{1}{kl} \left\{ r\pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \right\} \\ M_{12}^* = M_{21}^* &= \pm (-1)^{r+1} 4k e^{-\{r\pi + \tan^{-1}(b/a)\}} \left[(F_{01} - G_{01}) \cos(\tan^{-1}(b/a)) \right. \\ &\quad \left. + (F_{01} + G_{01}) \sin(\tan^{-1}(b/a)) \right] \sin\theta \\ &\quad \text{(複号は } y_{M_{12}}, y_{M_{21}} \text{ と同符号)} \\ \text{ここに,} \\ \frac{b}{a} &= \frac{G_{01}}{F_{01}} \\ r &= \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & (b/a > 0) \\ 1, 2, 3, \dots & (b/a < 0) \end{cases} \end{aligned} \right\} (126)$$

ただし、式(118)の N_{12} および M_{21} から、それぞれ極値とその位置を求める際に、それら右辺{ }内の第1項は、 $|y|$ が極端に大きくない範囲では常に微小量となるから、これを省略した。

式(123)～(126)から次の結論が得られる。すなわち、軸方向に一樣な温度上昇に対して、 l が余り小でない円筒の支持端末から余り離れていない位置に生じる合応力およびモーメント — これらは、式(5)に示されるように K , Gh , D/R および $Gh^3/24R$ で無次元化されている — の極値は、 θ を一定に保てば、 l に無関係に、構造パラメタ k が定まれば温度に対して一義的に定まる。

殻の肉厚が“熱的に薄く”肉厚方向の温度勾配を無視できる場合を考えると式(123)～(126)は次に示すように簡単化される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{|y_{N_2}|}{l} &= 1 - \frac{(4r-1)\pi}{4kl} \\ N_2^* &= -(1-\nu^2) \left[-\frac{1}{4k^4} \{ \Phi_{00} - (2-\nu)\Phi_{01} \cos\theta \} + (-1)^r \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-(4r-1)\pi/4} (F_{00} + F_{01} \cos\theta) \right] \\ \text{ここに,} \quad r &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} (127)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{|y_{N_{12}}|}{l} &= 1 - \frac{(2r-1)\pi}{2kl} \\ N_{12}^* = N_{21}^* &= \pm \frac{(-1)^{r+1}(1+\nu)}{k} e^{-(2r-1)\pi/2} F_{01} \sin\theta \\ &\quad \text{(複号は, } y_{N_{12}}, y_{N_{21}} \text{ と } F_{01} \text{ とが同符号のとき正, 異符号のとき負をとる)} \\ \text{ここに,} \quad r &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} (128)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{|y_{M_1}|}{l} = \frac{|y_{M_2}|}{l} &= 1 - \frac{(4r+1)\pi}{4kl} \\ M_1^* &= (-1)^r \sqrt{2} k^2 e^{-(4r+1)\pi/4} (F_{00} + F_{01} \cos\theta) \\ M_2^* &= (-1)^r \sqrt{2} \nu k^2 e^{-(4r+1)\pi/4} (F_{00} + F_{01} \cos\theta) \\ \text{ここに,} \quad r &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} (129)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{|y_{M_{12}}|}{l} = \frac{|y_{M_{21}}|}{l} = 1 - \frac{r\pi}{kl} \\ M_{12}^* = M_{21}^* = \pm (-1)^{r+1} 4ke^{-r\pi} F_{01} \sin\theta \\ \text{(複号は } y_{M_{12}}, y_{M_{21}} \text{ と同符号)} \\ \text{ここに, } r = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} (130)$$

8. 数値計算例

両端単純支持の円筒殻に対する前章までの解析結果の具体的問題への適用を示すこととする。簡単のために、温度分布が式(116)で与えられる前章で取り扱った問題について実際の数値を代入して解を求めることにする。

いま、図3に示すように円筒内面が一様な一定温度

$$\alpha T^- = \alpha T_0 \quad (131)$$

で、外表面の温度分布が

$$\alpha T^+ = \alpha T_0 + \frac{\alpha T_1}{2} (1 + \cos\theta) \quad (132)$$

で与えられる温度境界条件の定常熱弾性問題を考え

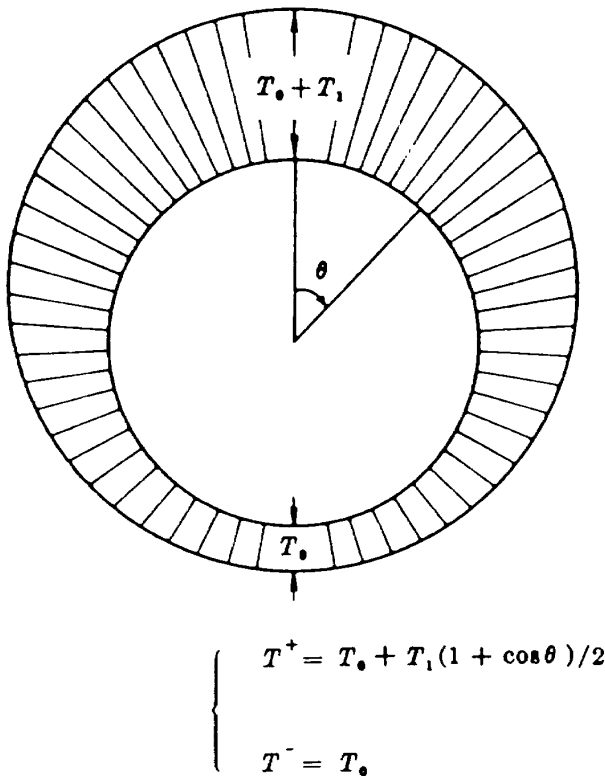


図3 円筒表面の温度分布の一例

る。ここに、定数 T_1 は内面と外面との最大温度差を表わす。まず、温度分布は上記の温度境界条件を満たすように式(116)の ϕ および ψ を定めればよい。すなわち、定数 ϕ_{00} , ϕ_{01} , ψ_{00} および ψ_{01} を次のように与えればよい。

$$\phi_{00} = \alpha T_0 + \frac{\alpha T_1}{4}, \quad \phi_{01} = \psi_{00} = \psi_{01} = \frac{\alpha T_1}{4} \quad (133)$$

したがって、温度分布は次式で与えられる。

$$\alpha T(\theta, \zeta) = \alpha T_0 + \frac{\alpha T_1}{4} (1 + \cos\theta)(1 + \zeta) \quad (134)$$

また、殻の肉厚が“熱的に薄く”肉厚方向の温度勾配を無視できる場合には、式(116)において $\psi = 0$ であるから、式(133)で規定される定数のうち ψ_{00} および ψ_{01} を零とおくことにより温度分布は直ちに次のように求まる。

$$\alpha T(\theta) = \alpha T_0 + \frac{\alpha T_1}{4} (1 + \cos\theta) \quad (135)$$

ここに、定数 T_0 および $T_1/2$ は、今の場合、それぞれ周方向温度変化における最低温度および最大温度差を表わす。式(135)は、式(134)において $\zeta = 0$ (円筒の中央面)とおくことによって得られる結果に他ならない。

計算に使用した αT_0 および αT_1 の値は、それぞれ次のとおりである。

$$\alpha T_0 = 0.0022, \quad \alpha T_1 = 0.0044$$

図4に、この数値に対して、式(134)から得られる肉厚方向に線形な温度勾配を考慮した場合 ($\psi \neq 0$) の円筒の内外面温度の周方向変化を実線で、また式(135)から得られる温度勾配を無視した場合 ($\psi = 0$) の周方向温度変化を破線で示す。なお、他の図においても、この2つの場合の計算結果を区別する

場合、同様な表示を用いることとする。

上記の温度分布の下での円筒殻の変位ならびに合応力およびモーメントを、 $h/R=1/50$ 、 $\nu=1/3$ (したがって、 $k=9.036$)として、式(117)ならびに(118)を用い、次の2つの場合に対して計算した結果を図5~12に示す。

- i) $2L/R=8$; ii) $2L/R=1$

これらの図の中で、破線による表示が無い図があるが、これは肉厚方向温度勾配を考慮した場合と無視した場合とで、殆ど同じ値が得られ、破線による表示が実線に重なったためである。

図5の変位 w の軸方向変化を見ると、縁領域解の影響は $2l=8$; ($l=L/R$)、の円筒では、 y/l の値が1から約0.9までの端末に近い領域に限定さ

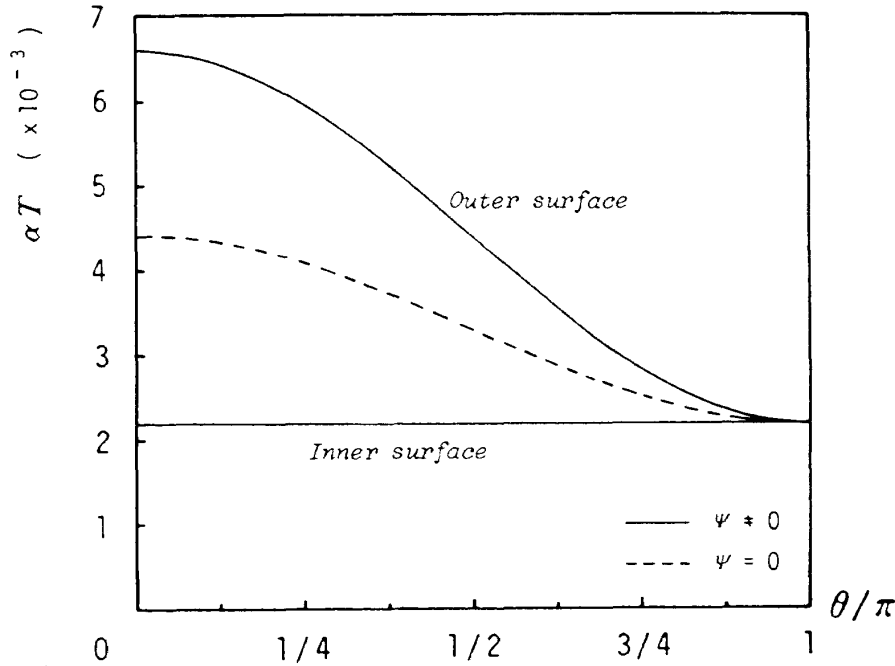


図4 数値例に用いた円筒の周方向温度変化

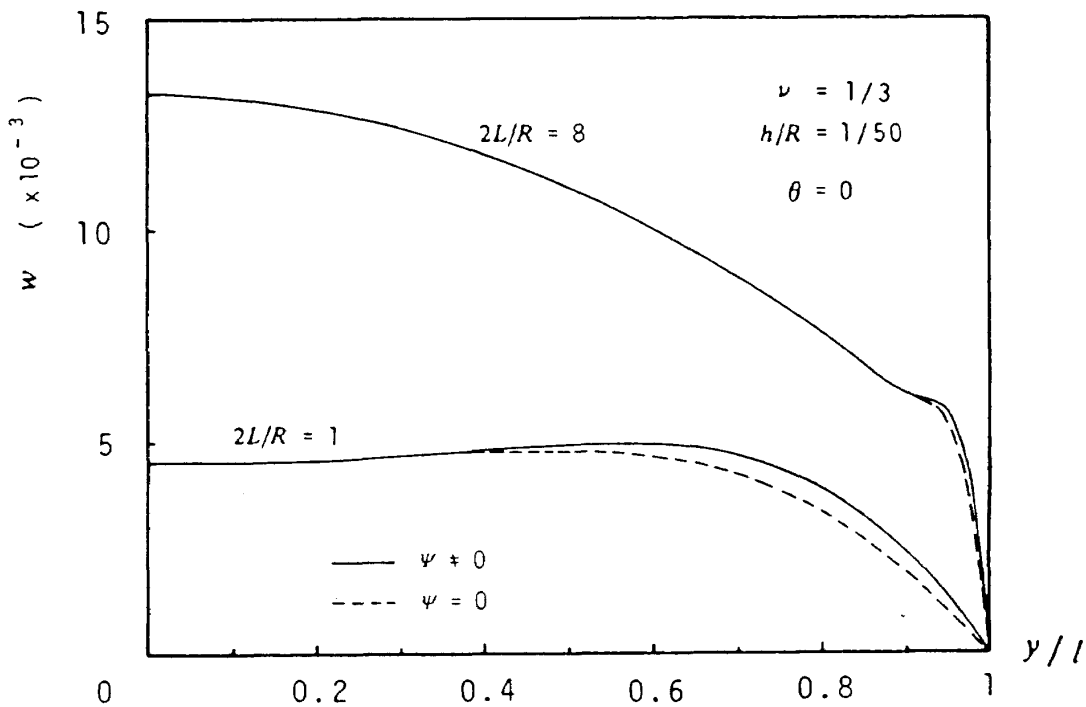


図5(a) 面外変位 w の軸方向変化

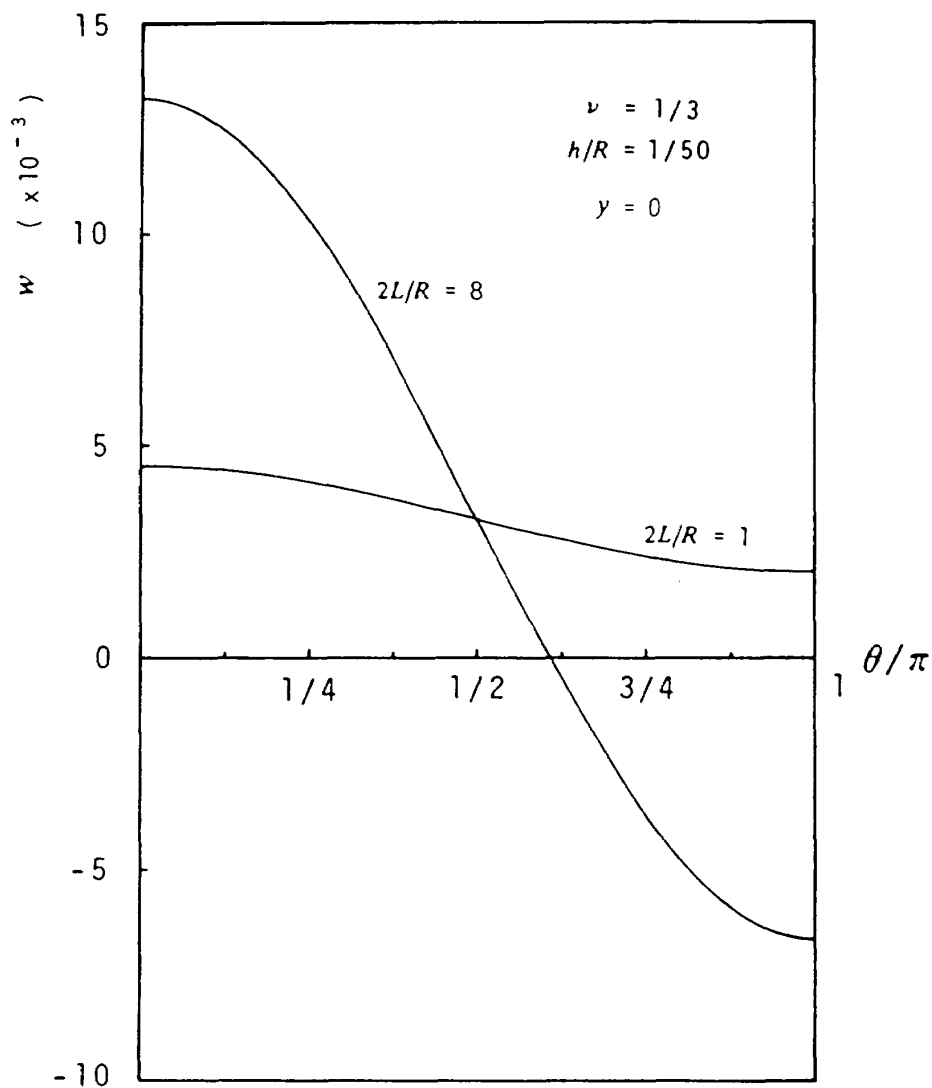


図 5(b) 面外変位 w の周方向変化

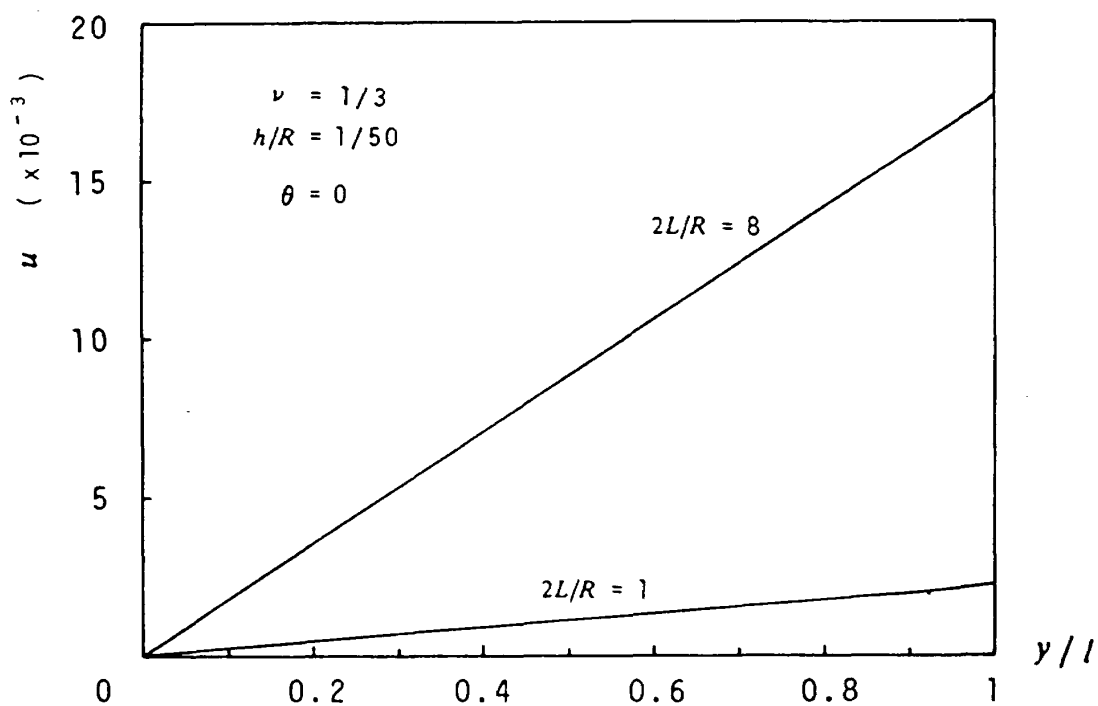


図 6 軸方向変位 u の軸方向変化

れるのに対し、 $2l = 1$ の円筒では、中央部への波及が著しく y/l の値が1から約0.2までの広い範囲にわたっていることが判る。これは、先に述べた縁領域解の円筒中央部に向けての減衰が構造パラメタ kl の値に依存し、 k の同一の値に対しては l の値が大きくなるにしたがって末端の影響は、ますます末端近傍の領域に限定されるということを明らかに示している。式(117)の第2式および第3式の u

および v の右辺の縁領域解に対応する項には、それぞれ微小量 $\nu/2k$ および $(2+\nu)/2k^2$ が乗じられているので、縁領域解の影響の度合は w に比べて非常に小さいであろうことは容易に予想される。実際、図6および図7は、この数値例に対して、 u および v が縁領域解の影響を殆ど受けていないことを示している。これらのことから、 $2l$ がある程度の大きさの円筒では、末端近傍を除き、変位は全体変形解

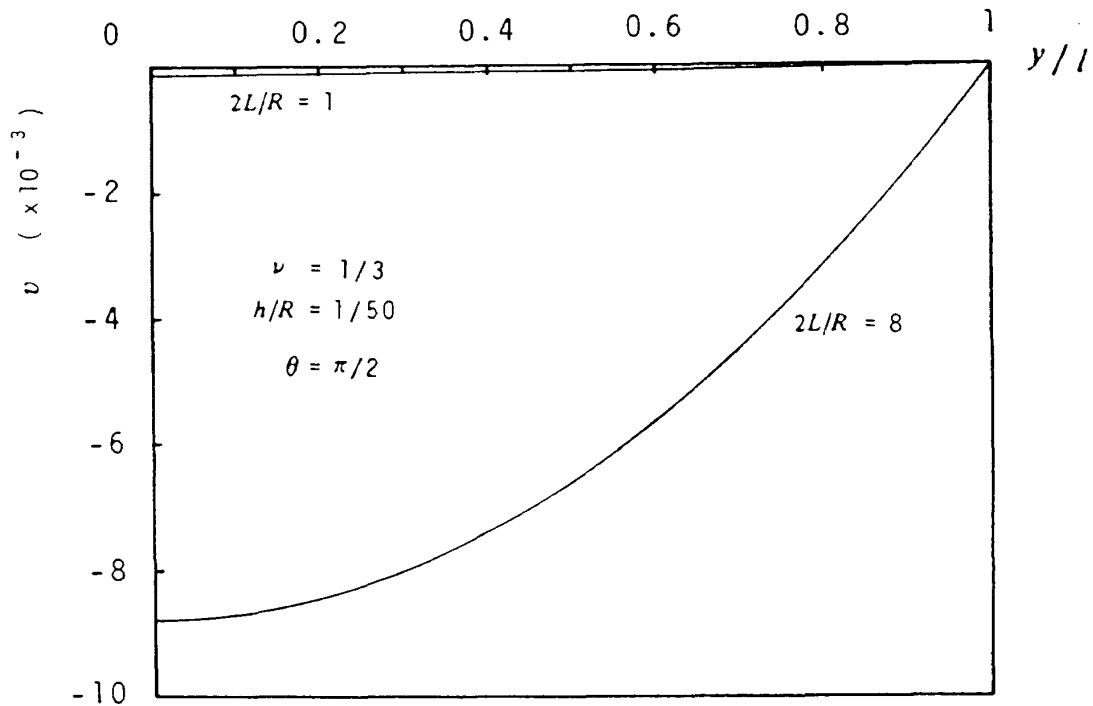


図7 周方向変位 v の軸方向変化

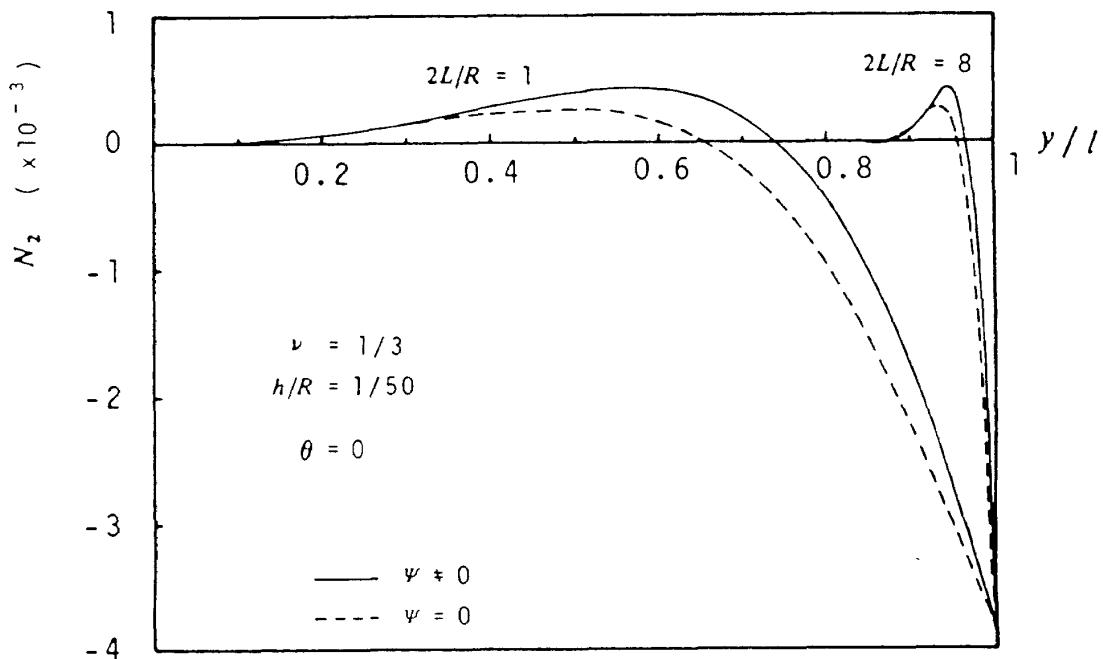


図8 法線力 N_2 の軸方向変化

が支配的であるということが言える。同様のことが、
 図8～図12に示される合応力およびモーメントに
 ついても観察でき、結局、ある程度の長さの円筒で
 は縁領域解を無視した梁近似が適用できることを示

している。

肉厚方向の温度勾配は、式(117)ならびに(118)
 のそれぞれ右辺の縁領域の解に対応する項には、平
 均温度上昇と組み合わせられた形で含まれているのに

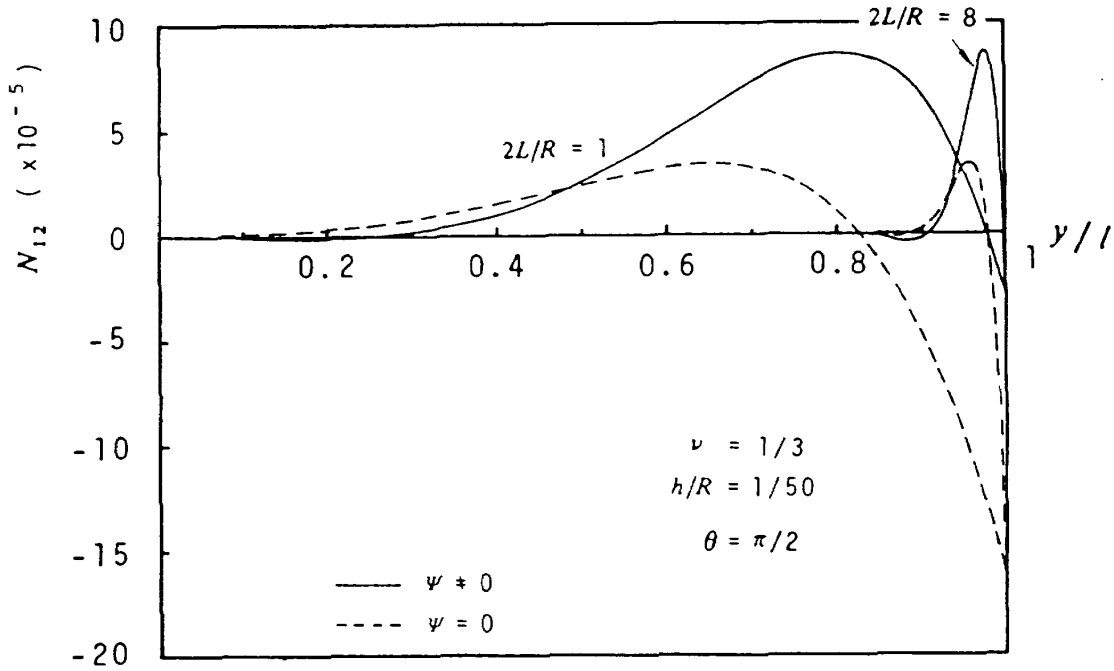


図9 面内せん断力 N_{12} の軸方向変化

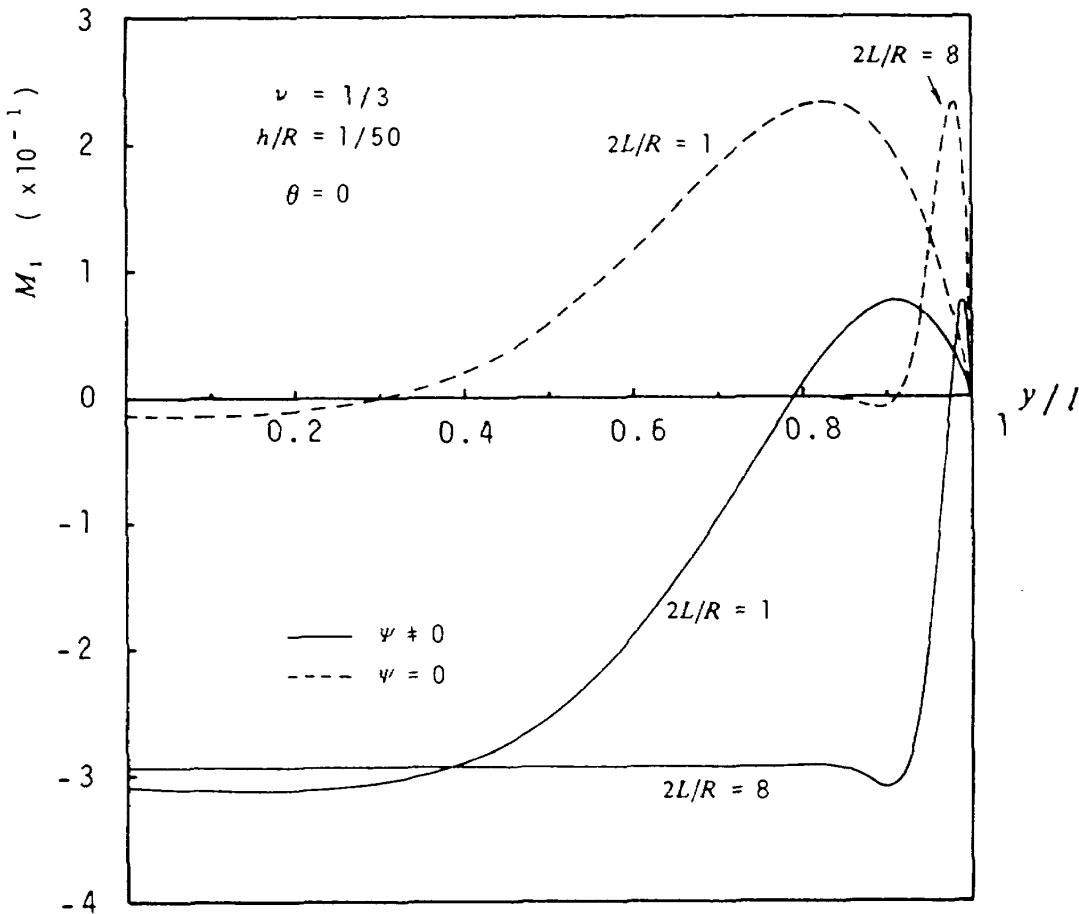


図10 曲げモーメント M_1 の軸方向変化

対し、全体変形の解に対応する項には、曲げモーメント M_1 および M_2 の表示にのみしか現われない。したがって、全体変形解が支配的と見做し得るある程度の長さの円筒に対し、肉厚方向温度勾配が円筒殻の熱変形に及ぼす影響は、平均温度上昇による熱変形に比べてかなり小さく、その影響を無視して差し支えないということが言える。このことは事実、図5、図6および図7より明らかである。しかし、肉厚方向の温度勾配の存在は、当然、それに起因する

モーメントを考慮することであるから、 M_1 および M_2 に大きな影響を与えることは明らかで、図10および図11は、このことを明確に示している。

この数値例の合応力およびモーメントに対し、式(123)～(126)ならびに式(127)～(130)を用いて、円筒の端末に最も近い位置に生じる極値を計算した結果を表2に示す。これらの結果と図8～図12のグラフより得られる極値との間には良好な一致が認められる。

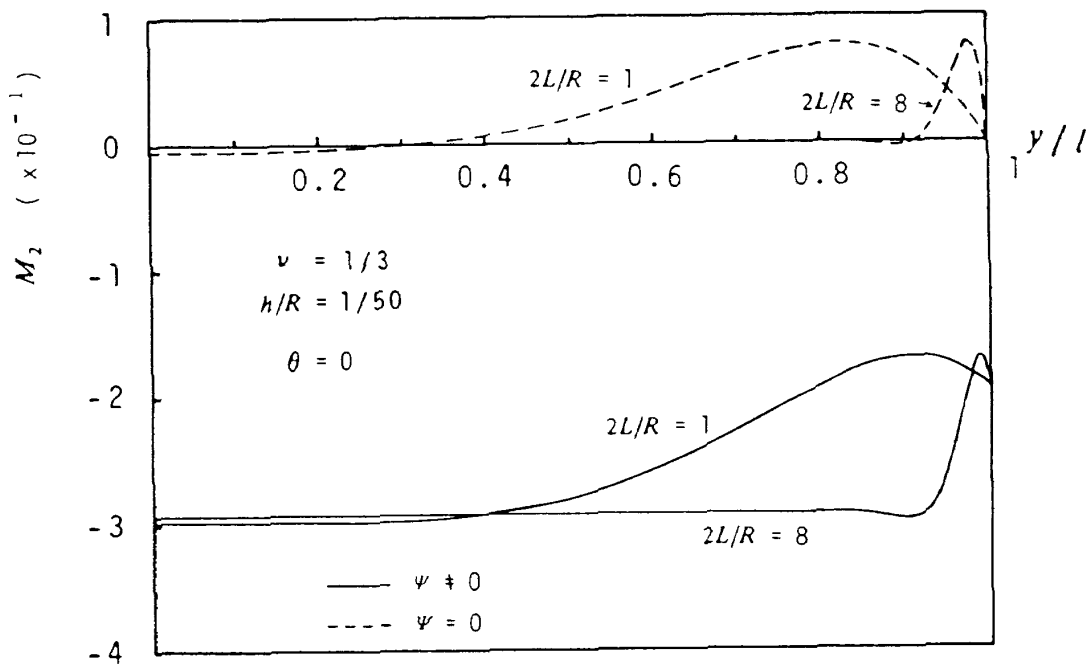


図11 曲げモーメント M_2 の軸方向変化

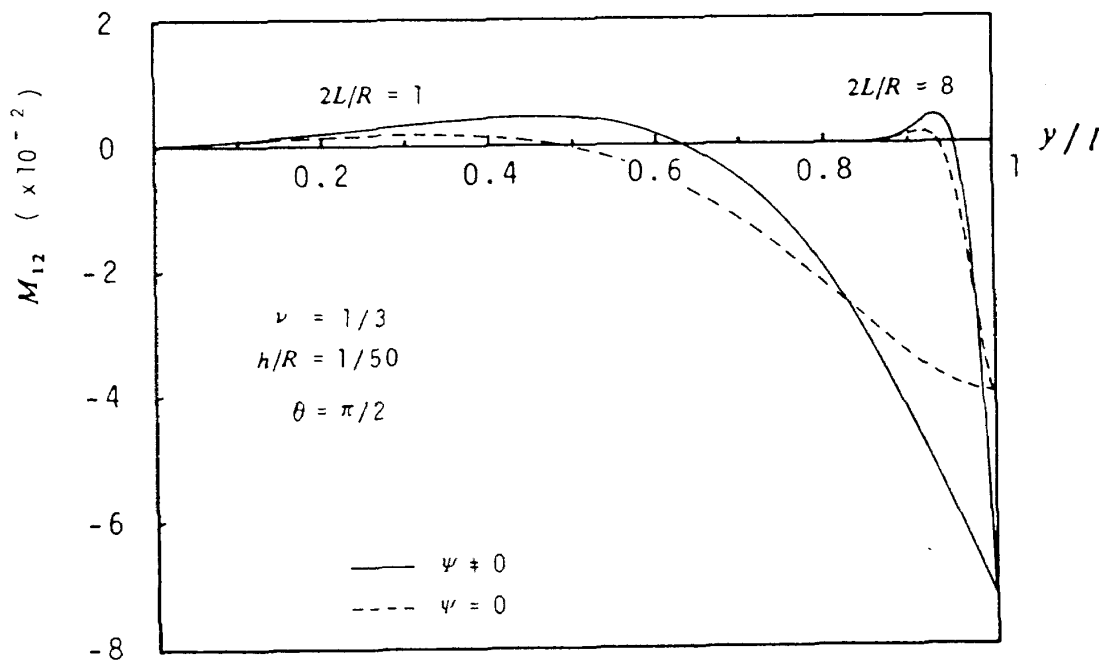


図12 振りモーメント $M_{1,2}$ の軸方向変化

表2 合応力およびモーメントの極値

()内の値は $\psi = 0$ の場合の結果

	$2L/R$	極値を与える位置: y/l	極 値
$N_2 _{\theta=0}$	8	0.946 (0.935)	0.417×10^{-3} (0.262×10^{-3})
	1	0.564 (0.478)	
$N_{12} _{\theta=\pi/2}$	8	0.975 (0.957)	8.638×10^{-5} (3.374×10^{-5})
	1	0.804 (0.652)	
$M_1 _{\theta=0}$	8	0.989 (0.978)	0.753×10^{-1} (2.316×10^{-1})
	1	0.912 (0.826)	
$M_2 _{\theta=0}$	8	0.989 (0.978)	-1.705×10^{-1} (0.772×10^{-1})
	1	0.912 (0.826)	
$M_{12} _{\theta=\pi/2}$	8	0.932 (1)	0.440×10^{-2} (-3.976×10^{-2})
	1	0.456 (1)	

9. 結 言

参 考 文 献

熱荷重によって生じる両端を単純支持された円筒殻の軸対称および梁様曲げ変形問題を Kirchhoff-Love の仮定に基づく種々の線形殻理論を用いて解析した。解として、変位ならびに合応力およびモーメントが Kirchhoff-Love の仮定に基づく一次近似精度で閉じた形で表示された。その結果、円筒が極端に長い場合を除けば、Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders, Novozhilov および Love-Reissner 理論のいずれを用いても一次近似解として正しい解を与えることが示された。また、温度上昇が軸方向に一樣な場合について、円筒の縁領域内に生じる合応力およびモーメントの極値を計算した結果、極端に短くない円筒に対して、極値は円筒の長さに無関係に定まることが明らかになった。

終りに、本解析に当たり宇宙開発事業団人工衛星開発本部の戸田 勲 主任開発部員（当時、当所機体第二部）には数々の御教示ならびに御支援を戴いた。また当所機体第一部の市川輝雄熱弾性研究室長は原稿に目を通され幾つかの御注意を与えて下さった。ここに深く謝意を表します。

- 1) Goodier, J. N., "Thermal Stress and Deformation," Journal of Applied Mechanics, Vol.24, No.3, Trans. ASME, Vol.79, September 1957, pp.467-474
- 2) Tsao, C. H., "Thermal Stresses in Long Cylindrical Shells," Journal of Applied Mechanics, Vol.26, No.1, Trans. ASME, Vol.81, Series E, March 1959, pp.147-148
- 3) Hoff, N. J., "Buckling of Thin Cylindrical Shell Under Hoop Stresses Varying in Axial Direction," Journal of Applied Mechanics, Vol.24, No.3, Trans. ASME, Vol. 79, September 1957, pp.405-412
- 4) 砂川 恵, "円筒殻の熱変形と熱挫屈," 航空学会誌, 第10巻, 第99号, 1962年4月, pp.(105)-(117)
- 5) Mizoguchi, K., "On Thermoelasticity of Cylindrical Shells," Bulletin of University of Osaka Prefecture, Series A, Vol. 15, No.2, 1966, pp.1-9
- 6) Katayama, T. and Sekiya T., "Thermal Stress Analysis of Cylindrical Shells

- under Radiant Heating,” Theoretical and Applied Mechanics, Vol.23, Proceedings of the 23rd Japan National Congress for Applied Mechanics, University of Tokyo Press, 1973, pp.243-254
- 7) 日本機械学会 P-SC 56熱応力と設計に関する研究分科会(主査 竹内洋一郎), “熱応力文献標題集,” 昭和59年 9月, pp.79-90
 - 8) Koga, T., “An Eighth Order Differential Equation for Circular Cylindrical Shells and Its Reduction to Fourth Order,” 1975 Joint JSME-ASME Applied Mechanics Western Conference, JSME PAPER 75-AM JSME A-21, the Japan Society of Mechanical Engineers, March 1975
 - 9) 古賀達蔵, “線形円筒かく理論における八階微分方程式とその固有値について,” 日本機械学会論文集, 第43巻, 第375号, 昭和52年11月, pp.4029-4037
 - 10) 遠藤修司, “円筒シェルの熱変形基礎式について,” 航空宇宙技術研究所報告 TR-577, 昭和54年 6月
 - 11) Koga, T. and Endo, S., “Comparison of Accuracies of Solutions of Linear Shell Theories for Closed Circular Cylinders Under Edgewise Loading,” NAL TR-552T, National Aerospace Laboratory, November 1978
 - 12) 古賀達蔵, 遠藤修司, “円筒かくの線形境界値問題の解の精度,” 日本機械学会論文集, A編, 第45巻, 第393号, 昭和54年 5月, pp.481-488
 - 13) Toda, S., “Some Considerations on the Buckling of the Thin Cylindrical Shells with Cutouts,” Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Vol.23, No.60, August 1980, pp. 104-112

航空宇宙技術研究所報告 891号

昭和60年11月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川2-27-12
