

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-896

翼胴結合体まわり非粘性圧縮流の数値解析  
III. Euler方程式による計算

石黒登美子・小川哲・小口慶子

1985年12月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 翼胴結合体まわり非粘性圧縮流の数値解析\*

## III. Euler方程式による計算

石 黒 登美子\*\* 小 川 哲\*\* 小 口 慶 子\*\*

### Numerical Analysis of Inviscid Flows about Wing-Fuselage Combinations III. Calculation Based on the Euler Equations

Tomiko ISHIGURO, Satoru OGAWA  
and Keiko OGUCHI

#### ABSTRACT

The main purpose of this paper is to numerically analyse inviscid flows about wing-fuselage combinations. In the third series we present a numerical procedure for calculating flows based on the Euler equations by the finite volume method using the Runge-Kutta type scheme and the local time stepping technique. The grids, which have already been generated by the code YOKUDO-G in the first series, are used in the calculations.

Many examples are presented to show the utility of this numerical procedure for flows about several wing-fuselage combinations. Numerical results obtained by this procedure are compared with experimental results and the numerical results obtained using the full potential equation in the second series.

#### 1. 緒 言

翼胴結合体まわり定常非粘性圧縮流の数値解析のために用いる基礎方程式として完全ポテンシャル流方程式と Euler 方程式が挙げられるが、前者については第 II 編<sup>1)</sup>において数値解析コードを提示した。本編では第 II 編と同様に第 I 編<sup>2)</sup>において形成された格子を使って後者を用いた数値解析を試みる。

後者は前者の等エントロピーの仮定を持たないため、衝撃波の位置や衝撃波の強さをより正確に捉え

ることができる。又、後者は、前者において強いられる渦面に関する仮定や計算上の特別な取り扱いを必要としないで非粘性渦構造を厳密に捉えることができる。この長所にもかかわらず Euler 方程式を用いた翼胴結合体まわり流れの数値計算の論文は数少ない。これは完全ポテンシャル流方程式に比べ多大の記憶容量と計算時間を要求するためである(FACOM M380 計算機で前者は 20 分、後者は 1.5~4 時間)。

Rizzi<sup>3)</sup>, Schmidt-Jameson-Whitfield<sup>4),5)</sup>, Agarwal-Deese<sup>6)</sup>はいずれも、Runge-Kutta タイプに属する時間積分スキームと局所的時間刻みの技法を組み入れた有限容積法によって翼胴結合体まわりの Euler 方程式の解を求めた。その際、いずれも

\* 昭和60年11月30日受付

\*\* 計算センター

計算の安定性を保持するためにフィルタータイプ（平滑化タイプ）に属する分散項を付け加えた。彼等はそれぞれ、Eriksson<sup>7)</sup>, Yu<sup>8)</sup>, Chen-Caughey-Verhoff<sup>9)</sup> が形成した格子（参照 第 I 編<sup>2)</sup>）, それぞれの格子胞数  $64 \times 14 \times 14$ ,  $80 \times 16 \times 16$ ,  $88 \times 16 \times 18$ ）を使い数値計算を行った。その結果, いずれも完全ポテンシャル流よりも的確に衝撃波を捉えているが, 風洞実験結果と比較するには格子胞数が少なすぎた。又, 翼面の圧力分布に関して実験との比較は試みられているが胴体面のものに関しては比較を行っていない。

本論文でも Runge-Kutta タイプに属する時間積分スキームと局所的時間刻みの技法を組み入れた有限容積法を用いる。しかし, 解を滑らかにしすぎる傾向をもつフィルタータイプの分散項は高次(4次)のものに留めて, 新しく本論文で提示する増幅マトリックスの固有値を考慮した3次の人工粘性項を, 解の安定化のために用いる。格子胞数は上述のものより大幅に増して  $176 \times 24 \times 32$  とし格子は第 I 編のコードで形成する。数値計算は数種の翼胴結合体について行い, その結果を完全ポテンシャル流の数値解や風洞実験結果と比較検討する。勿論, 胴体面上の圧力分布の比較も含まれる。

## 2. 問題の設定

### 2.1 物理空間と基礎方程式

左右対称な翼胴結合体を対称中心面が  $z = 0$  の  $x$

-  $y$  平面になるようにデカルト表示の物理空間に置く(図 I)。この物理空間はある適当な基準距離で無次元化されている。流れ計算は偏揺角のない場合のみを取り扱うので  $z \geq 0$  の半空間のみを対象とする。

翼胴結合体外部における定常流れ場を支配する微分方程式は, 連続の式と運動量の式で構成される非定常な Euler 方程式に定常エネルギー式を組み合わせたものを使う。それ故, 計算で求める流れ場の解は, 上流無限遠方において主流マッハ数  $M_\infty$  と迎角  $\alpha$  で定まった主流をもち, 翼胴結合体表面に沿って流れるという条件を満たすこの微分方程式の漸近的定常解である。

〔三次元 Euler 微分方程式〕 (定常流れ解析用)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H^x}{\partial x} + \frac{\partial H^y}{\partial y} + \frac{\partial H^z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

ここに

$$U \equiv \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{pmatrix}, \quad H^x \equiv \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u w \end{pmatrix},$$

$$H^y \equiv \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \end{pmatrix}, \quad H^z \equiv \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w v \\ \rho w^2 + p \end{pmatrix}$$

〔定常エネルギー式〕

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{M_\infty^2} - \frac{1}{2} q^2 \right)$$

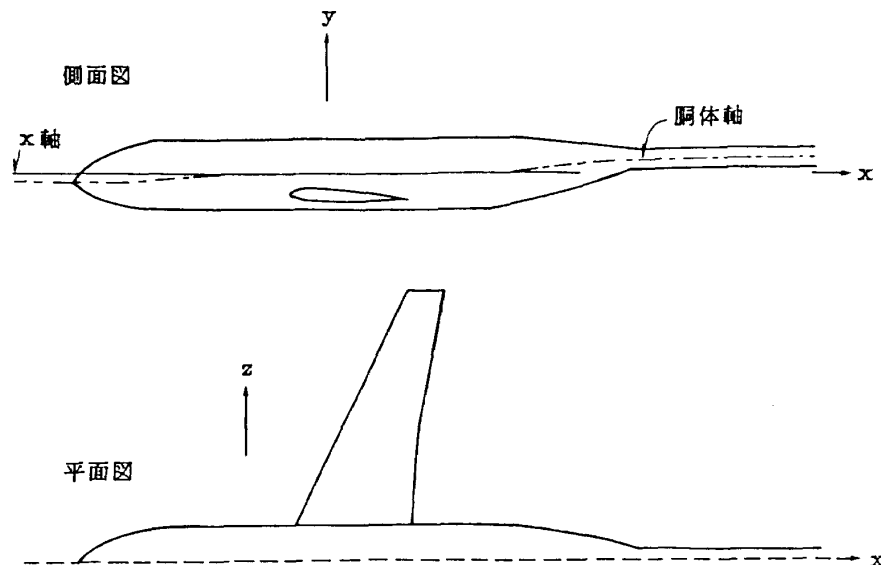


図 I 物理空間 ( $x, y, z$ )

〔関係式〕

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2, \quad \mathbf{q} = (u, v, w)$$

$$c^2 = \gamma p / \rho, \quad M = q / c, \quad C_p = 2 \{ p - 1 / (\gamma M_\infty^2) \}.$$

上述の諸元は  $\rho_\infty = 1, q_\infty = 1$  となるように無次元化が施されている。それ故、主流速度成分は  $u_\infty = \cos \alpha, v_\infty = \sin \alpha, w_\infty = 0$  である。ここに、 $t$  ; 時間,  $u, v, w$  ; それぞれ  $x, y, z$  方向の速度成分,  $\rho$  ; 密度,  $p$  ; 圧力,  $q$  ; 速さ,  $c$  ; 音速,  $M$  ; マッハ数,  $C_p$  ; 圧力係数,  $\gamma$  ; 比熱比 ( 1.4 とする ) であり、下添字  $\infty$  は主流を示す。

流れ計算は有限容積法を用いるため、(1)式に Gauss の発散定理を適用して得られる任意の cell に対する次の積分形式の Euler 方程式を基礎方程式とする。

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{U} \, d \text{vol} + \oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{H} = (H^x, H^y, H^z), \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = H^x n^x + H^y n^y + H^z n^z, \mathbf{n} = (n^x, n^y, n^z), V$  ; cell の体積,  $S$  ; cell の全周囲の閉曲面,  $\mathbf{n}$  ;  $S$  に対する外部法線の単位ベクトル。

(以下において記号  $\cdot$  はベクトルとベクトルの間にある場合は内積を表わし、マトリックスとベクトルの間にある場合はマトリックスの各行ベクトルとベクトルの内積を元とするベクトルを表わすことにする。)

### 2.2 計算 (格子) 空間と境界条件

胴体面, 翼面, 対称面, 及び無限遠における条件

を正確に数値計算に組入れるために翼胴結合体に適合した格子座標系を用いる。即ち、物理空間における翼胴結合体とその外部を計算空間における直方体とその内部に対応づけ、直方体に張られた一様格子網の全格子点に対応する物理空間の座標を予め用意しておく。この作業は既に第 I 編の格子形成でなされており図 II のように物理空間と格子空間 ( $I, J, K$ ) の対応がついている。ここでは計算空間 ( $X, Y, Z$ ) の整数値座標 ( $X=I, Y=J, Z=K$ ) が格子空間座標 ( $I, J, K$ ) と一致するように計算空間を定義する。つまり、計算空間の格子幅は  $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 1$  である。

計算空間の直方体の一様格子の胞数を  $NX \times NY \times NZ$  ( $NX$  : 偶数) とし、 $IC, KX, KY, KZ$  を次のように定義する。 $IC = (1 + KX) / 2, KX = NX + 1, KY = NY + 1, KZ = NZ + 1$ 。又、 $Y = KY$  面上で上面後縁線を  $X = IT1$ , 下面後縁線を  $X = IT2$ , 翼端線を  $Z = KT$ , 胴体ノーズの先端を  $\{Y = B(X), IC - X_B < X < IC + X_B\}$  (無限柱の場合  $X_B = 0$  で先端はない) で表わす (図 II)。

表 1 に計算空間の直方体表面の各部が対応する物理空間の個所とその境界条件が示される。表 1 における A, B, C, D, H, I, J の直方体表面部分は物理空間において境界に対応するが、E, F, G, K の部分は内点に対応する。

こうして、我々の問題、即ち、翼胴結合体まわりの流れを求めるということは表 1 の境界条件を満た

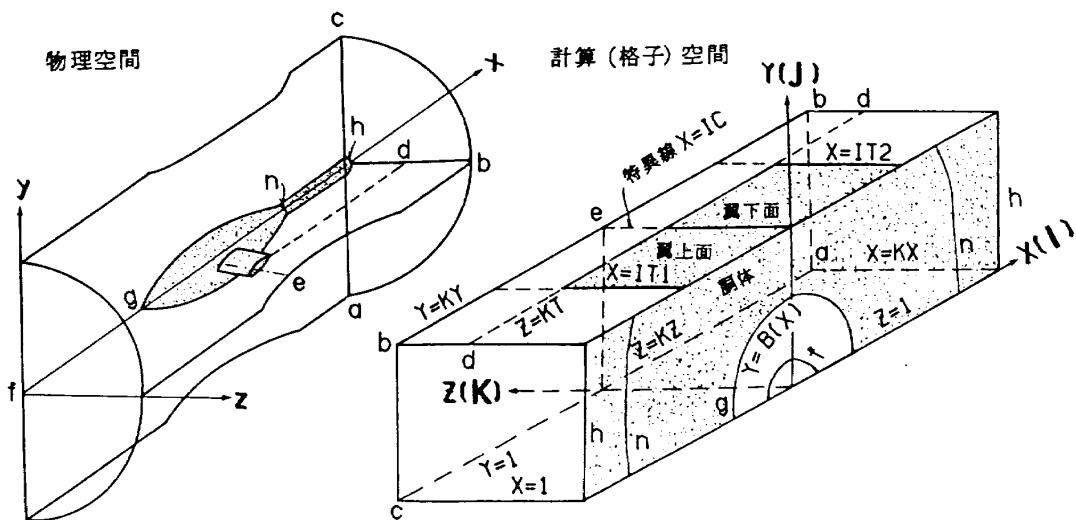


図 II 物理空間と計算空間の対応

表 1 計算空間と物理空間の対応及び境界条件

	計 算 空 間	物 理 空 間	境 界 条 件
A	$1 \leq X \leq KX$ $B(X) \leq Y \leq KY$ $Z = 1$	胴体面	スリップ条件
B	$IT1 < X < IT2$ $Y = KY$ $1 \leq Z \leq KT$	翼面	スリップ条件
C	$X = IT1, IT2$ $Y = KY$ $1 \leq Z \leq KT$	後縁	Kutta 条件 (有限容積法の計算ではこの条件は不用)
D	$1 \leq X < IC - 1$ $IC + 1 < X \leq KX$ $Y = 1$ $1 \leq Z \leq KZ$	対称面	対称条件
E	$1 \leq X < IT1$ $IT2 < X \leq KX$ $Y = KY$ $1 \leq Z \leq KT$	$(IT2 + I', KY, Z)$ と $(IT1 + I', KY, Z)$ の 対応点は同一の内点	周期条件 $U_{IT2+I',KY,Z} = U_{IT1-I',KY,Z}$
F	$X = IC$ $Y = KY$ $KT < Z < KZ$	内点であるが 写像の特異線	条件なし
G	$1 \leq X \leq KX, X \neq IC$ $Y = KY$ $KT < Z < KZ$	$(IC + I', KY, Z)$ と $(IC - I', KY, Z)$ の 対応点は同一の内点	周期条件 $U_{IC+I',KY,Z} = U_{IC-I',KY,Z}$
H	$X = 1, KX$ $1 \leq Y \leq KY$ $1 \leq Z \leq KZ$	$x \doteq \text{const} (\sim \infty)$ 下流遠方	境界に垂直な一次元流れに対しリ ーマン不変量の導入 (参照 3.1.1(e))
I	$1 \leq X \leq KX$ $1 \leq Y \leq KY$ $Z = KZ$	$y^2 + z^2 \sim \infty$	$U \equiv U_\infty$
J	$IC - 1 \leq X \leq IC + 1$ $0 \leq Y \leq 1$ $1 \leq Z \leq KZ$	上流無限遠 と上流遠方 ( $x \simeq -\infty$ )	$U \equiv U_\infty$
K	$IC - X_B < X < IC + X_B$ $Y < B(X)$ $Z = 1$ 但し, Jの部分を除く	胴体ノーズの上流側に おける仮想胴体軸, 内 点	条件なし

す(2)式の漸近的定常解を求めることに相当する。

### 3. 計算方法

前章で設定された問題を適当な初期値の下に有限容積法によって解くための計算スキームを提示する。

#### 3.1 基礎方程式の計算スキーム

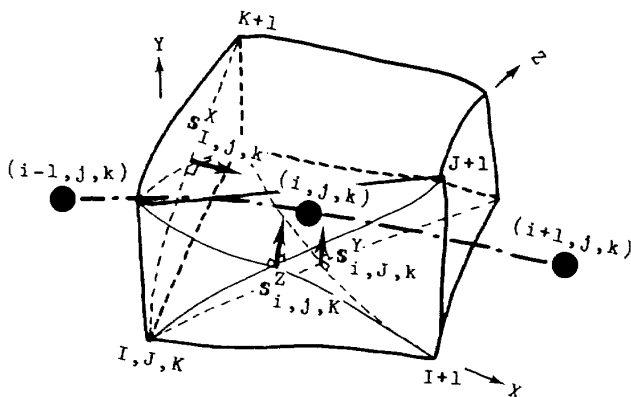
計算空間の一樣格子に対応する物理空間の各格子胞に対し、基礎方程式(2)は平均値の定理によって次式で近似される。

$$V_{i,j,k}(\partial U/\partial t)_{i,j,k} + \delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S})_{i,j,k} = 0 \quad (3)$$

$$\delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S})_{i,j,k} \equiv \mathbf{H}_{I+1,j,k} \cdot \mathbf{S}_{I+1,j,k}^X - \mathbf{H}_{I,j,k} \cdot \mathbf{S}_{I,j,k}^X + \mathbf{H}_{i,J+1,k} \cdot \mathbf{S}_{i,J+1,k}^Y - \mathbf{H}_{i,j,k} \cdot \mathbf{S}_{i,j,k}^Y + \mathbf{H}_{i,j,K+1} \cdot \mathbf{S}_{i,j,K+1}^Z - \mathbf{H}_{i,j,K} \cdot \mathbf{S}_{i,j,K}^Z \quad (4)$$

ここに  $i, j, k$  はそれぞれ  $X = I + \frac{1}{2}$ ,  $Y = J + \frac{1}{2}$ ,  $Z = K + \frac{1}{2}$  の位置に対応する。即ち、 $(i, j, k)$  は  $\{(I+1), (J+1), (K+1)\}$  の組合せでできる八個の頂点をもつ格子胞の(中心)座標表示でもある。又、格子胞を囲む六つの表面はそれぞれ大文字一つと小文字二つで(中心)座標表示される(例  $(I, j, k)$ )。  $V$  は格子胞の体積、 $\mathbf{S}^X, \mathbf{S}^Y, \mathbf{S}^Z$  はそれぞれ  $X, Y, Z$  方向の面積ベクトルを表わす(図Ⅲ)。これらはコード YOKUDO-G (第 I 編) によって得られた全格子点の  $(x, y, z)$  座標から予め求めておく。

有限容積法では(3)式を積分近似して  $\Delta t$  後の格子胞の中心の  $U$  を求める。次の 3.1.1 節では  $\delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S})$  の近似方法について、3.1.2 節では(3)式の時間方向



図Ⅲ 物理空間における格子胞と面積ベクトル

の積分スキームについて述べる。

#### 3.1.1 $\delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S})$ の近似法

格子胞の囲りの六面がいずれも境界面と接しない場合(4)式の右辺に含まれる各面の  $\mathbf{H}$  はその面を挟む二つの格子胞の中心の  $\mathbf{H}$  の平均で近似する。例えば  $\mathbf{H}_{I+1,j,k} \sim \frac{1}{2}(\mathbf{H}_{i,j,k} + \mathbf{H}_{I+1,j,k})$  次に格子胞が表 1 の境界面に接する場合、接する面に対応する(4)式の  $\mathbf{H}$  は以下(a)~(e)のように求めるが、接しない面の  $\mathbf{H}$  は上と同様に、その面を挟む二つの格子胞の  $\mathbf{H}$  の平均を取る。なお、後縁線及び特異線(表 1 の C, F) は計算空間では面ではなく線に対応するので有限容積法ではこれに対し特別な取り扱いが必要としない。

##### (a) 格子胞が壁面に接する場合

表 1 の A, B, D 境界に格子胞が接する場合を指す。  $K=1$  面の壁を例にとって述べよう。  $\mathbf{S}_{i,j,K=1}^Z$  は壁に垂直な面積ベクトルであるからスリップ条件から次式が成り立つ(下添字  $i, j, K=1$  を略す)。

$$q^z \equiv \mathbf{q} \cdot \mathbf{S}^z = uS^{zx} + vS^{zy} + wS^{zz} = 0$$

故に

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}^z = \begin{pmatrix} \rho q^z \\ \rho u q^z + p S^{zx} \\ \rho v q^z + p S^{zy} \\ \rho w q^z + p S^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p S^{zx} \\ p S^{zy} \\ p S^{zz} \end{pmatrix},$$

但し  $\mathbf{S}^z \equiv \begin{pmatrix} S^{zx} \\ S^{zy} \\ S^{zz} \end{pmatrix}$

これから壁における圧力  $p$  が求まれば(4)式の  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}^z$  は求まる。この圧力は入力制御変数 IP に 0 又は 1 のいずれかを指定することによって次のように内部の流れ場から求めることにする。

[IP=0 の場合]

壁における次の付加微分方程式を用いる。

$$\frac{\partial p}{\partial Z} = \frac{1}{|S^z|^2} \left[ \rho \left\{ (\mathbf{q} \cdot \frac{\partial S^z}{\partial X}) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}^x) + (\mathbf{q} \cdot \frac{\partial S^z}{\partial Y}) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}^y) \right\} - (S^z \cdot \mathbf{S}^x) \frac{\partial p}{\partial X} - (S^z \cdot \mathbf{S}^y) \frac{\partial p}{\partial Y} \right] (\equiv F) \quad (5)$$

この(5)式の導出については付録 1 で述べる。上式を次式で近似する。

$$P_{i,j,K=1} \sim P_{i,j,k=1} - \frac{\Delta Z}{2} F$$

Fは壁近辺の内部の流れを用いて近似する。

(IP=1の場合)

$P_{i,j,K=1}$ を $P_{i,j,k=1}$ と $P_{i,j,k=2}$ から物理空間における距離によって一次外挿して求める。但し( $i, j, k=1$ 又は $2$ )の( $x, y, z$ )座標は格子胞の八つの頂点の平均を与える。又、( $i, j, K=1$ )の( $x, y, z$ )座標は $K=1$ 面に接する格子胞の一面の四つの頂点の平均を与える。

(b) 格子胞が仮想胴体軸に接する場合

表1のK境界に格子胞が接する場合を指す。この格子胞が接するのは計算空間では面であるが物理空間では曲線であるので面積が0, つまり $S_{i,j,K=1}^2 = 0$ である。こうして対応する(4)式の $H \cdot S^2$ は0となる。

(c) 格子胞が周期条件の面と接する場合

表1のE, G境界に格子胞が接する場合を指す。周期条件により次の近似式を用いる。

$$H_{i,j=KY,k} \cdot S_{i,j=KY,k}^y \sim \frac{1}{2} (H_{i,j=NY,k} + H_{i^*,j=NY,k}) \cdot S_{i,j=KY,k}^y$$

ここに $i^* = KX + 1 - i$ 。

(d) 格子胞が主流条件の面と接する場合

表1のI, J境界に格子胞が接する場合を指す。

$U_{\infty}, p_{\infty}$ から $H_{\infty}$ を予め求めておき $H$ として $H_{\infty}$ を用いる。

(e) 格子胞が下流速方の面と接する場合

表1のH境界に格子胞が接する場合を指す。

Jameson-Baker<sup>10)</sup>に従って、境界に垂直な一次元流れに対するRiemannの不変量を導入し、以下の計算手順によって $H_{I=KX,j,k}$ を求める( $I=1$ も同様)。但し、下添字 $e$ は $i=NX$ と $NX-1$ の諸元から外挿によって求められた $I=KX$ のものを示す。 $\hat{n} = S_{KX,j,k}^x / |S_{KX,j,k}^x|$ 。又、略されている下添字は $I=KX, j, k$ である。

(計算手順)

$$U_{i=NX-1} \text{ と } U_{i=NX} \text{ から } q_e$$

↓

$$c_e^2 = (\gamma - 1) \{ 1 + 2 / \{ (\gamma - 1) M_{\infty}^2 \} - q_e^2 \} / 2$$

$$\downarrow$$

$$R_e = q_e \cdot \hat{n} + 2c_e / (\gamma - 1)$$

$$R_{\infty} = q_{\infty} \cdot \hat{n} - 2c_{\infty} / (\gamma - 1)$$

↓

$$\rho = \{ (\gamma - 1) (R_e - R_{\infty}) / (4c_e) \}^{2/(\gamma - 1)} \rho_e$$

↓

$$q = q_e + \left\{ \frac{1}{2} (R_e + R_{\infty}) - \hat{n} \cdot q_e \right\} \hat{n}$$

↓

$$\rho, q \text{ から } p \quad (\text{第2章の式})$$

↓

$$\rho, q, p \text{ から } H \quad (\text{第2章の式})$$

### 3.1.2 Runge-Kutta 積分スキーム

(3)式に対する時間方向の積分スキームとしてRunge-Kuttaスキーム<sup>3)</sup>を用いる。今、N stepにおける全領域の( $i, j, k$ )の解 $U_{i,j,k}^N$ が与えられているとして次のRunge-Kuttaスキームで $\{ 1 \leq i < KX, 1 \leq j < KY, 1 \leq k < KZ, \text{但し、常に主流が与えられる} (i=IC-1, IC, j=1, 1 \leq k < KZ) \text{は除く} \}$ における $N+1$  stepの $\tilde{U}_{i,j,k}^{N+1}$ を求める。

$$\tilde{U}^{(0)} = U^N$$

$$\tilde{U}^{(1)} = U^N - \frac{\Delta t}{2V} \{ \delta(H^N \cdot S) + \delta(\tilde{H}^{(0)} \cdot S) \}$$

$$= U^N - \frac{\Delta t}{V} \delta(H^N \cdot S)$$

$$\tilde{U}^{(2)} = U^N - \frac{\Delta t}{2V} \{ \delta(H^N \cdot S) + \delta(\tilde{H}^{(1)} \cdot S) \}$$

$$\tilde{U}^{(3)} = U^N - \frac{\Delta t}{V} \{ (1 - \theta) \delta(H^N \cdot S) + \theta \delta(\tilde{H}^{(2)} \cdot S) \}$$

$$\tilde{U}^{N+1} = \tilde{U}^{(3)}$$

ここに、 $(\theta \sim \frac{1}{2}, \theta > 0)$ ,  $\tilde{H}^{(L)} \equiv H(\tilde{U}^{(L)})$ ,  $L=0,$

$1, 2$ ,  $H^N \equiv H(U^N)$ .

上式では下添字 $i, j, k$ が省かれている。

このスキームは $\theta = \frac{1}{2}$ のとき時間に関し2次精度,

$\theta \neq \frac{1}{2}$ のとき1次精度である。

上式に対するvon Neumannの安定性解析による時間刻み $\Delta t$ の限界は次式で与えられる。

$$dt \leq \frac{\sqrt{2} \theta^{-\frac{1}{2}} V}{\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{\gamma}) (Q^x + Q^y + Q^z) + \left\{ (1 - \frac{1}{\gamma})^2 (Q^x + Q^y + Q^z)^2 + \frac{4c^2}{\gamma} \langle \mathbf{S} \rangle \right\}^{1/2}} \quad (6)$$

(≡ ΔT)

ここに

$$\langle \mathbf{S} \rangle \equiv \mathbf{S}^x \cdot \mathbf{S}^x + \mathbf{S}^y \cdot \mathbf{S}^y + \mathbf{S}^z \cdot \mathbf{S}^z \\ + 2(|\mathbf{S}^x \cdot \mathbf{S}^y| + |\mathbf{S}^y \cdot \mathbf{S}^z| + |\mathbf{S}^x \cdot \mathbf{S}^z|)$$

(6)式の導出については付録2において述べる。

定常流の計算のみを対象としているので、収束を早めるため、つまり、計算時間を短縮するために、局所的時刻みの方法を用いる。即ち、各格子点毎に異なる  $\Delta T_{i,j,k} \times C_{\Delta T}$  を  $\Delta t_{i,j,k}$  として使う ( $C_{\Delta T} \sim 1$ )。このスキームによって求めた  $\tilde{\mathbf{U}}^{N+1}$  を  $N+1$  ステップの解として繰り返し計算を行うと、不安定現象が衝撃波等の流れの変化の激しい所で現われて、計算の続行が不可能となる。それを避けるために、次節で述べる人工粘性項及び4階微分の数値拡散項を付け加える。

〔備考〕無条件安定に近いと考えられている有理型 Runge-Kutta スキーム<sup>11),12)</sup> を本問題に適用してみたが、この局所的時刻みの Runge-Kutta スキームの方が計算コストが低かった。詳細は付録3において記す。

### 3.2 人工粘性項及び4階微分の数値拡散項

前節で求められた  $\tilde{\mathbf{U}}^{N+1}$  に次のように3次の人工粘性項を加えて  $\hat{\mathbf{U}}^{N+1}$  とする。

$$\hat{\mathbf{U}}^{N+1} = \tilde{\mathbf{U}}^{N+1} + \frac{\Delta t}{\Delta X} \lambda^x \frac{\partial}{\partial X} \left( \left| \frac{\partial U^x}{\partial X} \right|^N \frac{\partial U^x}{\partial X} \right) (\Delta X)^3 \\ + \frac{\Delta t}{\Delta Y} \lambda^y \frac{\partial}{\partial Y} \left( \left| \frac{\partial U^y}{\partial Y} \right|^N \frac{\partial U^y}{\partial Y} \right) (\Delta Y)^3 \\ + \frac{\Delta t}{\Delta Z} \lambda^z \frac{\partial}{\partial Z} \left( \left| \frac{\partial U^z}{\partial Z} \right|^N \frac{\partial U^z}{\partial Z} \right) (\Delta Z)^3 \\ (\equiv \tilde{\mathbf{U}}^{N+1} + \Delta t \mathbf{A}(\mathbf{U}^N)) \quad (7)$$

ここに

$$U^x \equiv \frac{\Delta X}{V} (uS^{xx} + vS^{xy} + wS^{xz}),$$

$$U^y \equiv \frac{\Delta Y}{V} (uS^{yx} + vS^{yy} + wS^{yz}),$$

$$U^z \equiv \frac{\Delta Z}{V} (uS^{zx} + vS^{zy} + wS^{zz}),$$

人工粘性係数  $\lambda^x, \lambda^y, \lambda^z \sim O(1)$ 。

( $U^x, U^y, U^z$  は、付録2において、増幅マトリックスの固有値を構成する基礎変数  $\lambda$  に対応していることがわかる。)

上式を次のように差分近似する。

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left( \left| \frac{\partial U^x}{\partial X} \right| \frac{\partial U^x}{\partial X} \right) \right\}_{i,j,k}^N \sim |U_{i+1,j,k}^x - U_{i,j,k}^x| (U_{i+1,j,k}^x - U_{i,j,k}^x) - |U_{i,j,k}^x - U_{i-1,j,k}^x| (U_{i,j,k}^x - U_{i-1,j,k}^x) \\ S_{i,j,k}^{xx} \sim \frac{1}{2} (S_{i+1,j,k}^{xx} + S_{i,j,k}^{xx}), \quad (S^{xy}, S^{xz} \text{ も同様})。$$

$Y, Z$  方向の粘性項も同様に差分近似する。但し、( $i, j, k$ ) の格子胞が境界に接している場合、上のように差分近似できない項は省略することにする。

更に計算を安定化させるために4階微分の数値拡散項を  $\hat{\mathbf{U}}^{N+1}$  に付加し、解  $\mathbf{U}^{N+1}$  を求める。

$$\mathbf{U}^{N+1} = \hat{\mathbf{U}}^{N+1} - \varepsilon^x \frac{\partial^4 \mathbf{U}^N}{\partial X^4} (\Delta X)^4 - \varepsilon^y \frac{\partial^4 \mathbf{U}^N}{\partial Y^4} (\Delta Y)^4 \\ - \varepsilon^z \frac{\partial^4 \mathbf{U}^N}{\partial Z^4} (\Delta Z)^4$$

上式は次のように差分近似する。

例えば

$$\left( \frac{\partial^4 U}{\partial X^4} \right)_i = \frac{U_{i+2} - 4U_{i+1} + 6U_i - 4U_{i-1} + U_{i-2}}{(\Delta X)^4} \\ (\text{下添字 } j, k \text{ を省略})$$

### 3.3 収束解の処理

適当な初期値(全領域における主流、第II編の完全ポテンシャル流の数値解等)の下に前述のスキームを使って繰り返し計算を行い、収束した解を定常流とみなす。この解は格子胞の中心に位置するものであるため、格子胞と接する翼胴結合体面上の圧力は3.1.1(a)に記したのと同じ方法で、制御変数IPに0か1を指定して近くの収束解から近似して求める。又、その面上のマッハ数は近傍の収束解から物理空間の距離による外挿によって求める。翼端( $Z=KT$ )における  $C_p$  等は入力制御変数ITIPに0か1を指定



することによって次のいずれかの方法で求める。

ITIP=0 のとき 内挿

$$C_{p_{z=KT}} = (C_{p_{z=KT+\frac{1}{2}}} + C_{p_{z=KT-\frac{1}{2}}}) / 2$$

ITIP=1 のとき 外挿

$$C_{p_{z=KT}} = (3C_{p_{z=KT-\frac{1}{2}}} - C_{p_{z=KT-1\frac{1}{2}}}) / 2$$

更に、任意翼幅位置における翼断面形に関する揚力係数、抵抗係数、頭上げモーメント係数、及び全翼に関する同様の三つの係数、誘導抵抗係数の計算を行う。計算式は第Ⅱ編の完全ポテンシャル流<sup>1)</sup>で用いたものと同じである。

#### 4. 数値計算

本章では前章の計算法を用いて数種の翼胴結合体まわりの数値計算を行い、その結果を、第Ⅱ編<sup>1)</sup>の完全ポテンシャル流の解析コードYOKUDO-Pによって得た数値解や風洞実験の結果と比較する。使用する格子は、すべて第Ⅰ編<sup>2)</sup>の格子形成コードYOKUDO-Gによって形成されたものである。各翼胴結合体の形状等の特徴については第Ⅰ編第六章を参照されたい。又、流れ解析の計算に関する制御変数については以下に特記のない限り、次の値を指定する。

$$\theta = \frac{1}{2}, C_{dT} \sim 1, \lambda^X, \lambda^Y, \lambda^Z = 0.2, \epsilon^X, \epsilon^Y, \epsilon^Z = 0.01$$

$$IP = 1, ITIP = 0$$

計算は計算能率を考慮して、まず粗い格子( $NX \times NY \times NZ = 44 \times 6 \times 8$ )において全領域主流の初期値を与えて500~1000ステップのスweepを行い、次にその結果を初期値にして中間格子( $NX \times NY \times NZ = 88 \times 12 \times 16$ )において250~750ステップのスweepを行い、最後にその結果を初期値にして細かい格子( $NX \times NY \times NZ = 176 \times 24 \times 32$ )において200~700ステップのスweepを行って漸近的定常流を得るという三段階格子の方法を取る。

FACOM M-380の計算機は、この細かい格子に対し1時間につき約200ステップ、中間格子に対し、9分につき約250ステップ、粗い格子に対し、1分につき約200ステップの計算を行うことができる。つまり、1ケースにつき約1.5~4時間の計算時間

が必要である。勿論、完全ポテンシャル流の数値解を初期値にして細かい格子のみで計算を行ってみた。得られた数値解は三段階格子の方法のものと同じであるけれども、流れ場の様子によっては、必ずしも大幅に計算時間を短縮できるとは云えなかった。

以下、Euler方程式による数値解と実験結果の比較図を数多く示すが、図が煩雑になるため完全ポテンシャル流の数値解を含めた比較は行わない。これらのすべての図に対応する完全ポテンシャル流の数値解と実験結果の比較は既に第Ⅱ編<sup>1)</sup>において示した。それ故三者の比較は、ケース毎に第Ⅱ編と本編の二つの図を見比べて頂きたい。

##### 4.1 720211 翼胴結合体

当研究所において開発された実機形状に近い形状をもつ結合体(格子:図1.1, 第Ⅰ編<sup>2)</sup>例1A)について( $M_\infty = 0.792$ ,  $\alpha = 2.462^\circ$ )と( $M_\infty = 0.8$ ,  $\alpha = 0^\circ$ )の二組の条件の下に計算を行う。前者に関する計算結果を第Ⅱ編<sup>1)</sup>のプロッタ出力形式に合わせマッハ数の項目を加えて種々の形式で出力したのが図1.2~図1.15である。又、図1.16に、前者に対し翼面の4つのスパン位置における翼弦長に対する $C_p$ 曲線と風洞実験結果<sup>13)</sup>を示す。完全ポテンシャル流の数値解(第Ⅱ編<sup>1)</sup>図1.5)では実験で捉えられている20~40%コード位置における超音速から超音速への斜め衝撃波を捉えられなかったが、現在のEuler方程式による計算ではそれを捉えている。50~80%コード位置における超音速から亜音速への強い衝撃波に対し、計算の方が実験よりも跳びが大きい、これは実験における衝撃波による境界層剝離の影響であると考えられる。後者のケースに関する等圧線と等マッハ線図を図1.17に、上述と同様の風洞実験比較を図1.18に示す。やはり上面の強い衝撃波に対し、計算の方が跳びが大きい。20~40%半スパン位置における上面の前縁近辺の解は完全ポテンシャル流の解(第Ⅱ編<sup>1)</sup>図1.4)よりも実験結果に近い。

##### 4.2 円柱とONERA-M6翼の結合体

円柱にONERA-M6翼<sup>14)</sup>を低翼として取り付けた結合体(格子:図2.1, 第Ⅰ編<sup>2)</sup>例2B)に対し $M_\infty$

$=0.84$ ,  $\alpha=3.06^\circ$ の下に計算を行った。IP=0による翼面と胴体面における等圧線・音速線を図2.1に示す。又、同じ図に完全ポテンシャル流の翼上面のみの結果を示す。どちらの翼上面でも三重衝撃波パターンが数値的に捕獲されているが、翼上面の内側部分における超音速から超音速への斜め衝撃波である前方衝撃波は完全ポテンシャル流の数値解よりもEuler方程式によるものの方が明確に捉えていることがわかる。こうして三重衝撃波の三叉個所もEuler方程式によるものの方が明確である。

図2.2に四つのスパン位置における翼弦長に対する $C_p$ 曲線をIP=0, 1の本計算と完全ポテンシャル流の数値解について示す。上述のように完全ポテンシャル流の数値解の前方衝撃波が不明瞭であることがわかる。又、IP=0と1の解は $z=0.89, 1.17$ で上面の前縁近辺で小差をもつ(IP=0の方が $C_p$ が大きい)だけで他は一致する。

次に、円柱に中翼として後退翼のONERA-M6翼を取り付けた結合体(格子:図2.3, 第I編<sup>2)</sup>例2A), 及びONERA-M6翼の平面形を前進翼になるように変形し翼型はそのままにして構成しなおした翼を中翼として円柱に取り付けた結合体(格子:図2.3, 第I編<sup>2)</sup>例2C)の各々について,  $M_\infty=0.923$ ,  $\alpha=3^\circ$ の下に計算を行う。IP=0の翼面及び胴体面上の等圧線・音速線をコードYOKUDO-Pによる完全ポテンシャル流のもの(翼上面のみ)と共に図2.3に示す。上述の低翼機の場合と同様に後退翼上面の超音速から超音速への斜め衝撃波は完全ポテンシャル流のものよりEuler方程式によるものの方が明確に捉えていることがわかる。更に, IP=0の等間隔 $z$ の翼面総合 $x-C_p$ 図及び等間隔 $z$ に対する翼断面形の正規化されたSCL, SCD, SCMの変化図を図2.4に示す。これらの図によって後退翼と前進翼の圧力分布の相違を知ることができる。つまり, 後退翼では翼胴結合部から翼端に向かって後方衝撃波の等圧線の密度が濃くなって行くが, 前進翼ではその反対の傾向をもつ。又,  $z$ -SCD曲線についても両者の内側における勾配の符号は逆である。

### 4.3 Mc Devitt の翼胴結合体

Mc Devitt<sup>15)</sup>が風洞実験に使った翼胴結合体の基

本モデル(格子:図3.1, 第I編<sup>2)</sup>例3Aの三つの制御変数を変えたものSTIP=0.5, B=0.15, D=0.1)とそれに面積則を施して胴体形状のみを変形したモデル(格子:図3.2, 第I編<sup>2)</sup>例3Bで前者と同様の変更)の二つの上下対称な結合体につき $M_\infty=0.9$ ,  $\alpha=0^\circ$ の下に計算を行う。翼面及び胴体面における等圧線・音速線を図3.1と図3.2の左側に示す。これらより面積則を施すと翼胴結合部付近で衝撃波が弱まり超音速域が前縁寄りに移動することがわかる。

次に,  $M_\infty=1.06$ ,  $\alpha=0^\circ$ の下に計算を行う。翼面及び胴体面における等圧線・音速線を図3.1, 図3.2の右側に示す。ここでも, 面積則モデルの衝撃波が基本モデルのものより前縁寄りに位置し, 翼面の超音速域も面積則モデルの方が小さい。

以上四つのケースに対し, Mc Devitt<sup>15)</sup>の風洞実験結果と比較したのが図3.3, 図3.4である。 $x-C_p$ 曲線の傾向は一致しているが衝撃波の位置で差が見られる。実験における粘性効果や風洞壁干渉の影響が考えられる。図のROOTは翼胴結合部を指す。

### 4.4 RAE-W<sub>A</sub>B<sub>2</sub>(0)0 翼胴結合体

軸対称胴体に上下対称な後退翼が中翼として結合しているもの(格子:図4.1, 第I編<sup>2)</sup>例5)で, Treadgold等<sup>16)</sup>により豊富な胴体面・翼面の $C_p$ の風洞実験の結果データが発表されている。それらと計算結果を比較するために次の主流マッハ数, 迎角の下に計算を行う。

- (1)  $M_\infty=0.4$ ,  $\alpha=0^\circ$
- (2)  $M_\infty=0.4$ ,  $\alpha=2^\circ$
- (3)  $M_\infty=0.8$ ,  $\alpha=0^\circ$
- (4)  $M_\infty=0.8$ ,  $\alpha=2^\circ$
- (5)  $M_\infty=0.9$ ,  $\alpha=0^\circ$
- (6)  $M_\infty=0.9$ ,  $\alpha=1^\circ$
- (7)  $M_\infty=1.0$ ,  $\alpha=2^\circ$

但し, [7]に関しては実験データはない。

各ケースにつき次のa, b, cのような制御変数の組み合わせによる三通りの方法で計算を行う。

- a ;  $\lambda^x, \lambda^y, \lambda^z=0.2$ ,  $\epsilon^x, \epsilon^y, \epsilon^z=0.01$ , IP=1
- b ;  $\lambda^x, \lambda^y, \lambda^z=0.2$ ,  $\epsilon^x, \epsilon^y, \epsilon^z=0.01$ , IP=0
- c ;  $\epsilon^x, \epsilon^y, \epsilon^z=0$ , IP=1,  $\lambda^x, \lambda^y, \lambda^z$ は $k$ に依

存させて胴体近辺で大きく取り、そこから離れるにつれて小さくする。例えば

$$\{\chi^k(k), k=1\sim 32\}=\{4, 3, 2, 21\times 0.4, 8\times 0.2\}.$$

翼面圧力係数について各ケース毎に本計算の三通りの方法で得た結果と Treadgold 等による風洞実験結果を図 4.2～図 4.8 に示す。衝撃波のない流れ場に対応するケース [1]～[4] の計算結果と実験結果は良い一致を示す。但し、翼胴結合部(図の ROOT)においては三つの方法による結果に差が見られ、a の方法が一番実験に近く、IP=0 の b の方法による  $C_p$  は実験値より大きくなる傾向をもつ。又、[4] の方法 c のケースでは  $\epsilon^x, \epsilon^y, \epsilon^z=0$  のため前縁の  $-C_p$  の立ち上がりが大きい。衝撃波のある流れ場に対応するケース [5], [6] では実験と計算による衝撃波位置は一致しているが  $C_p$  の跳びは計算によるものの方が大きい。境界層剝離及び風洞壁干渉等による影響であろう。ケース [5] において  $M_\infty=0.9$  を 0.89 に置きかえ c の方法で計算を試み、同じ図 4.6 に結果を示した。 $M_\infty$  における 0.01 の小差であるが結果では大差であることがわかる。この場合、 $M_\infty=0.89$  の方が実験に近い。ケース [7] では  $M_\infty=1, \alpha=2^\circ$  の場合の強い衝撃波でもこの計算法は有効であることを示した。なお、いずれのケースの結果でも IP=0 の b の場合後縁における  $-C_p$  の落ち込みが大きい。これは 4.1 節と 4.2 節では見られなかったもので翼の形状によるものと考えられる。

次に各ケースの胴体面の子午線上の圧力係数について図 4.9～図 4.15 において a, b, c による三通りの計算の結果 (b の結果が a のものに一致している場合が多い) と風洞実験の結果を示す。いずれのケースも実験結果と計算結果は大部分において一致している。a, b, c の方法による結果比較では、4 階微分の数値拡散項をもたない ( $\epsilon^x, \epsilon^y, \epsilon^z=0$ ) c の方法が、大きい人工粘性係数にもかかわらず、最も厳しく極値を捉えている。又、IP=0 の b よりも IP=1 の a の方が厳しい。完全ポテンシャル流の数値解 (第 II 編<sup>1)</sup> 図 5.8～図 5.13) の場合、 $M_\infty$  或いは  $\alpha$  が大きくなる程、又、翼胴結合部から対称面 ( $\theta=\pm 90^\circ$ ) に行く程、計算と実験による前縁付近の  $x$  における  $-C_p$  の落ち込みの差が大きくなって行ったが、Euler 方程式の数値解においてはそのよう

な傾向もなく、完全ポテンシャル流の数値解よりの確にその極値を捉えていることがわかる。なお、図 4.1 にケース [4] につき四つの  $x$  断面における方法 a による等圧線図を示す。

## 5. むすび

本編では翼胴結合体まわり定常非粘性圧縮流を Euler 方程式を用いて数値解析するための計算法を提示した。計算格子は第 I 編のコード YOKUDO-G で形成されたものを用い、2 次精度の Runge-Kutta 時間積分スキームと局所的時間刻みの方法を組み入れた有限容積法によって Euler 方程式を解き、計算の安定化のために人工粘性項を付加した。

次にこの計算法の有効性を確かめるために、数種の翼胴結合体につき計算例を示し、完全ポテンシャル流の数値解より衝撃波 (特に超音速から超音速への斜め衝撃波) を明確に捉えることができた。又、風洞実験結果との比較も行い、本計算法による解は非粘性流として妥当なものであることがわかった。

残念ながら翼端近辺等の渦の構造は格子が粗すぎで正確に捉えることができなかった。これは FACOM M-380 計算機よりも能力の高いスーパーコンピュータによって解くことが可能であろう。

最後に、数値計算の際、御協力いただいた三向ソフトウェア開発株式会社 末次公平氏に謝意を表す。

### 付録1 壁面における付加微分 方程式(5)の導出

壁に垂直な任意長のベクトルを $\tilde{\mathbf{n}}$ とすると壁のスリップ条件及び壁境界の $(\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{n}})$ の流線上微分=0はそれぞれ次式で表わされる。

$$\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = 0 \quad (8)$$

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{n}}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{n}}) + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \cdot \text{grad}(\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{n}}) \\ = \mathbf{q}_t \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_t + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} \cdot \text{grad}) \tilde{\mathbf{n}} + (\mathbf{q} \cdot \text{grad}) \mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{n}} \quad (9)$$

$$\text{ここに } \mathbf{z} = (x, y, z), \text{ grad} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

さて、 $\tilde{\mathbf{n}}$ とEuler微分方程式(1)の2~4番目の元をもつベクトルとの内積を考える。即ち

$$(0, \tilde{\mathbf{n}}^T, 0) \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}^x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}^y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}^z}{\partial z} \right) = 0$$

展開すると

$$(\rho \mathbf{q})_t \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \{(\rho u \mathbf{q})_x + (\rho v \mathbf{q})_y + (\rho w \mathbf{q})_z\} \cdot \tilde{\mathbf{n}} \\ + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \text{grad } p = 0 \\ \rho_t \mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \rho \mathbf{q}_t \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \{(\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z\} \mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{n}} \\ + \rho (\mathbf{q} \cdot \text{grad}) \mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \text{grad } p = 0$$

これに(8)式と(9)式を代入すると

$$\rho \mathbf{q} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \text{grad} \right) \tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \text{grad } p$$

故に固定壁の場合次式が成り立つ。

$$\rho \mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} \cdot \text{grad}) \tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \text{grad } p \quad (10)$$

次に grad を計算空間表示に変える。

$$\text{grad} = \mathbf{i}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}^2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}^3 \frac{\partial}{\partial z} \\ = \mathbf{e}^1 \frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{e}^2 \frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{e}^3 \frac{\partial}{\partial Z} \\ = \frac{1}{\pm \sqrt{g}} \left( \hat{\mathbf{S}}^x \frac{\partial}{\partial X} + \hat{\mathbf{S}}^y \frac{\partial}{\partial Y} + \hat{\mathbf{S}}^z \frac{\partial}{\partial Z} \right) \quad (11)$$

ここに  $\mathbf{i}_i$ ; 物理空間の標準基底

$$\mathbf{i}_i = \mathbf{i}^i$$

(上つきの  $i$  は相反系,  $\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i$ ; (クロネッカー記号))

$\mathbf{e}_i$ ; 計算空間の基底

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i, \mathbf{e}_1 = \frac{\partial x}{\partial X} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial y}{\partial X} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial z}{\partial X} \mathbf{i}_3$$

$$\hat{\mathbf{S}}^x, \hat{\mathbf{S}}^y, \hat{\mathbf{S}}^z; \hat{\mathbf{S}}^x \equiv \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] \mathbf{e}^1$$

$$\hat{\mathbf{S}}^y \equiv \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] \mathbf{e}^2$$

$$\hat{\mathbf{S}}^z \equiv \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] \mathbf{e}^3$$

$\times$ は外積,

スカラー三重積

$$[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = \begin{vmatrix} x_x & x_y & x_z \\ y_x & y_y & y_z \\ z_x & z_y & z_z \end{vmatrix} [\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3]$$

右手系するとき  $[\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3] = 1$ , 左手系の時

とき  $[\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3] = -1$

(11)式を(10)式に代入すると

$$\rho \mathbf{q} \cdot \left\{ \mathbf{q} \cdot \left( \hat{\mathbf{S}}^x \frac{\partial}{\partial X} + \hat{\mathbf{S}}^y \frac{\partial}{\partial Y} + \hat{\mathbf{S}}^z \frac{\partial}{\partial Z} \right) \right\} \tilde{\mathbf{n}} \\ = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \left( \hat{\mathbf{S}}^x \frac{\partial}{\partial X} + \hat{\mathbf{S}}^y \frac{\partial}{\partial Y} + \hat{\mathbf{S}}^z \frac{\partial}{\partial Z} \right) p$$

今、 $K=1$ を壁とし位置  $i, j, K=1$  について上式を用いる。

$\tilde{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{S}}^z = \mathbf{S}_{i,j,K=1}^z$  とし上式にスリップ条件  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}_{i,j,K=1}^z = 0$  を代入すると

$$\rho \mathbf{q} \cdot \left\{ \mathbf{q} \cdot \left( \hat{\mathbf{S}}^x \frac{\partial}{\partial X} + \hat{\mathbf{S}}^y \frac{\partial}{\partial Y} \right) \right\} \mathbf{S}^z = \mathbf{S}^z \cdot \left( \hat{\mathbf{S}}^x \frac{\partial}{\partial X} \\ + \hat{\mathbf{S}}^y \frac{\partial}{\partial Y} + \hat{\mathbf{S}}^z \frac{\partial}{\partial Z} \right) p$$

故に

$$\frac{\partial p}{\partial Z} = \frac{1}{|\mathbf{S}^z|^2} \left[ \rho \left\{ \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}^z}{\partial X} \right\} (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{S}}^x) \right. \\ \left. + \left( \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}^z}{\partial Y} \right) (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{S}}^y) \right] - (\mathbf{S}^z \cdot \hat{\mathbf{S}}^x) \frac{\partial p}{\partial X} \\ - (\mathbf{S}^z \cdot \hat{\mathbf{S}}^y) \frac{\partial p}{\partial Y}$$

### 付録2 安定性条件(6)式の導出

局所的線形解析によるRung-Kuttaスキームの増幅マトリックスは次式で与えられる。

$$G = I - iD - \theta D^2 + \frac{1}{2} i \theta D^3 \quad (i; \text{虚数単位})$$

$$\text{ここに } D \equiv \frac{\Delta t}{V} (A\xi + B\eta + C\zeta)$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} S^{xx} & S^{yx} & S^{zx} \\ S^{xy} & S^{yy} & S^{zy} \\ S^{xz} & S^{yz} & S^{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \hat{\alpha} \\ \sin \hat{\beta} \\ \sin \hat{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$A \equiv \frac{\partial \mathbf{H}^x}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\gamma} - \frac{q^2}{\gamma} + v^2 + w^2 & \frac{\gamma+1}{\gamma} u & -\frac{\gamma-1}{\gamma} v & -\frac{\gamma-1}{\gamma} w \\ -uv & v & u & 0 \\ -uw & w & 0 & u \end{pmatrix}$$

B, C ; 同様。

Dの固有値は直接求めにくいので同じ固有値をもつ  $P^{-1}DP$  の固有値を求める。

$$P^{-1}DP = \frac{\Delta t}{V} (P^{-1}AP\xi + P^{-1}BP\eta + P^{-1}CP\zeta)$$

$$P \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ w & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \text{ とすると } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho\gamma} & \frac{u}{\gamma} & -\frac{\gamma-1}{\gamma} v & -\frac{\gamma-1}{\gamma} w \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

$P^{-1}BP, P^{-1}CP$  ; 同様。

故に

$$P^{-1}DP = \frac{\Delta t}{V} \begin{pmatrix} u\xi + v\eta + w\zeta & \rho\xi \\ \frac{c^2}{\rho\gamma} \xi & \frac{u}{\gamma} \xi + v\eta + w\zeta \\ \frac{c^2}{\rho\gamma} \eta & -\frac{\gamma-1}{\gamma} u\eta \\ \frac{c^2}{\rho\gamma} \zeta & -\frac{\gamma-1}{\gamma} u\zeta \\ \rho\eta & \rho\zeta \\ -\frac{\gamma-1}{\gamma} v\xi & -\frac{\gamma-1}{\gamma} w\xi \\ u\xi + \frac{v}{\gamma}\eta + w\zeta & -\frac{\gamma-1}{\gamma} w\eta \\ -\frac{\gamma-1}{\gamma} v\zeta & u\xi + v\eta + \frac{w}{\gamma}\zeta \end{pmatrix}$$

$\tilde{q} \equiv u\xi + v\eta + w\zeta$  とすると  $\frac{V}{\Delta t} P^{-1}DP$  の固有値は次の  $\tilde{\lambda}$  である。

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \tilde{q}$$

$$\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_4 = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \tilde{q} \pm \left\{ \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^2 \tilde{q}^2 + \frac{4c^2}{\gamma} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}$$

故に D の固有値は  $\frac{\Delta t}{V} (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_4)$  である。

さて、D の固有値を  $\lambda$  とすると増幅マトリックス G の固有値  $g$  は次式で表わされる。

$$g = 1 - i\lambda - \theta\lambda^2 + \frac{1}{2}i\theta\lambda^3$$

$|\lambda| \leq \sqrt{2}\theta^{-\frac{1}{2}}$  ならば  $|g| \leq 1$  となるので、この条件に上述の  $\lambda$  を代入して(6)式の  $\Delta t$  の上限を得る。

### 付録3 有理型 Runge-Kutta スキームによる流れ解析

Runge-Kutta の積分スキームは解の安定性を保つためには  $\Delta t$  に(6)式の制限があるが、計算効率を上げるためにより大きな  $\Delta t$  を使っても安定性を保つことのできる方法として Wambecq<sup>11)</sup> の有理型 Runge-Kutta 法が挙げられる。<sup>17), 18)</sup> この方法を本文の流れ解析に適用してみよう。

(3)式に(7)式と同様の人工粘性項(ここでは4階微分の数値拡散項は考慮しないことにする)を付け加えると次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\delta \{ \mathbf{H}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{S} \} / V + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{B}(\mathbf{U})$$

この式を有理型 Runge-Kutta 法で次のように積分する。

$$\mathbf{f}_{i,j,k}^{(1)} = -\Delta t \mathbf{B}(\mathbf{U}^N)_{i,j,k}$$

$$\mathbf{f}_{i,j,k}^{(2)} = -\Delta t \mathbf{B}(\mathbf{U}^N + c_2 \mathbf{f}^{(1)})_{i,j,k}$$

$$\mathbf{f}_{i,j,k} = (1 - b_2) \mathbf{f}_{i,j,k}^{(1)} + b_2 \mathbf{f}_{i,j,k}^{(2)}$$

$$\mathbf{U}_{i,j,k}^{N+1} = \mathbf{U}_{i,j,k}^N + (2\mathbf{f}_{i,j,k}^{(1)} + \mathbf{f}_{i,j,k}^{(2)})$$

$$- \mathbf{f}_{i,j,k} < \mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(1)} > / < \mathbf{f}, \mathbf{f} >$$

ここに記号  $\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle \equiv \sum_{i,j,k} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{h})_{i,j,k}$ 、 $\sum_{i,j,k}$  は全格子胞の和、 $b_2 c_2 \leq -\frac{1}{2}$ 、 $b_2 c_2 = -\frac{1}{2}$  のとき時間に

関し二次精度、 $b_2 c_2 < -\frac{1}{2}$  のとき一次精度。

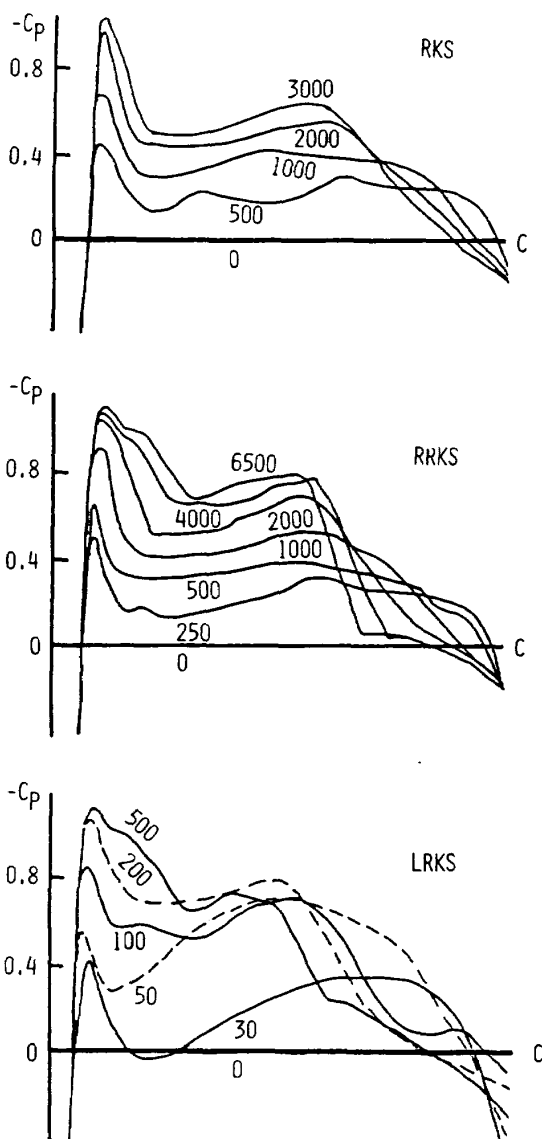
さて、 $\Delta t_{i,j,k} = C_{\Delta t} \min_{i,j,k} \Delta T_{i,j,k}$  ( $\Delta T$ : (6)式)の下に二次精度の有理型 Runge-Kutta 法を適用したスキーム (RRKS)、本文の  $\Delta t_{i,j,k} = \Delta T_{i,j,k}$  の局所的時間刻みのスキーム (LRKS) 及び  $\Delta t_{i,j,k} = \min_{i,j,k} \Delta T_{i,j,k}$  の全領域一定時間刻みの Runge-Kutta スキーム (RKS) の三つについて計算効率を比較する。計算は円柱つき ONERA-M6 (低翼機、本文 4.2 節)

に対し、 $M_\infty=0.84$ 、 $\alpha=3.06^\circ$ で初期値を全領域主流にして格子( $NX \times NY \times NZ=88 \times 12 \times 16$ )の下に行った。その結果、RRKSの $C_{dt}$ の大きさに使用限界があった。つまり、大きくなるにつれ(例 $C_{dt}=10$ )より若いステップ(84ステップ)で残差が大き(4.9)が1ステップ間の平均 $|\Delta p|$ が非常に小さい( $4.4 \times 10^{-7}$ )という空回り状態に入り計算が進展しなかった。図Nは $z=0.68$ の翼上面の $C_p$ 分布(RRKSの $C_{dt}=5$ )であり、ステップを追うと各スキームの収束具合がわかる。なお1ステップのRRKSと

RKS(LRKS)の計算時間比は19:20である。こうしてLRKSの方がRRKSよりも計算効率が良いことがわかる。

### 参考文献

- 1) 石黒登美子; 翼胴結合体まわり非粘性圧縮流の数値解析 II. 完全ポテンシャル流解析コード YOKUDO-Pの開発, 航空宇宙技術研究所報告 TR-881, 1985年10月.
- 2) 石黒登美子, 神谷信彦, 小口慶子; 翼胴結合体まわり非粘性圧縮流の数値解析 I. 格子形成コード YOKUDO-Gの開発, 航空宇宙技術研究所報告 TR-864, 1985年7月.
- 3) A. Rizzi; Damped Euler-Equation Method to Compute Transonic Flow Around Wing-Body Combinations, AIAA J., Vol. 20, No. 10 (1982), pp. 1321-1328.
- 4) W. Schmidt, A. Jameson & D. Whitfield; Finite Volume Solution for the Euler Equation for Transonic Flow over Airfoils and Wings Including Viscous Effects, AIAA Paper 81-1265 (1981).
- 5) W. Schmidt, A. Jameson & D. Whitfield; Finite Volume Solutions to the Euler Equations in Transonic Flow, J. Aircraft, Vol. 20, No. 2 (1983), pp. 127-133.
- 6) R.K. Agarwal & J.E. Deese; Transonic Wing-Body Calculations Using Euler Equations, AIAA Paper 83-0501 (1983).
- 7) L.E. Eriksson; Generation of Boundary-Conforming Grid Around Wing-Body Configurations Using Transfinite Interpolation, AIAA J., Vol. 20, No. 10 (1982), pp. 1313-1320.
- 8) N.J. Yu; Grid Generation and Transonic Flow Calculations for Three-Dimensional Configurations, AIAA Paper 80-1391 (1980).
- 9) L-T. Chen, D.A. Caughey & A. Verhoff; A Nearly Conformal Grid-Generation Method for Transonic Wing-Body Flowfield Calculations, AIAA Paper 82-0108 (1982).



図N 翼面圧力分布の比較,

RKS;  $\Delta t_{i,j,k} = \min_{i,j,k} \Delta T_{i,j,k}$ , 未収束,

RRKS;  $\Delta t_{i,j,k} = 5 \min_{i,j,k} \Delta T_{i,j,k}$ , 未収束,

LRKS;  $\Delta t_{i,j,k} = \Delta T_{i,j,k}$ , 収束

- 10) A. Jameson & T.J. Baker; Solution of the Euler Equations for Complex Configurations, AIAA Paper 83-1929 (1983).
- 11) A. Wambecq; Rational Runge-Kutta Methods for Solving Systems of Ordinary Differential Equations, Computing, Vol. 20 (1978), pp. 333-342.
- 12) E. Harrier; Unconditionally Stable Explicit Methods for Parabolic Equations, Numer. Math., Vol. 35 (1980), pp. 57-68.
- 13) 神谷信彦; 私信.
- 14) B. Monnerie & F. Charpin; Essais de Buffeting d'une Aile en Fleche en Transsonique, 10<sup>e</sup> Colloque D'Aérodynamique Appliquée, No. V, (1973).
- 15) J.B. McDevitt; An Experimental Investigation of Two Methods for Reducing Transonic Drag of Swept-Wing and Body Combinations, NACA-RM-A-55B21, April, (1955).
- 16) T.A. Treadgold, A.F. Jones & K.H. Wilson; Pressure Distribution Measured in the RAE 8 ft × 6 ft Transonic Wind Tunnel on RAE Wing 'A' in Combination with an Axisymmetric Body at Mach Number of 0.4, 0.8 and 0.9, Experiment Data Base for Computer Program Assessment, AGARD-AR-138 (1979).
- 17) 里深信行, 杉浦繁貴; 3次元物体まわりの粘性圧縮性流の数値計算, 第16回流体力学講演会講演集, (1984), pp.190-193.
- 18) 里深信行, 西田雄亮; 翼型まわり遷音速流及び超音速粘性流の数値計算, 第16回流体力学講演会講演集, (1984), pp.194-197.

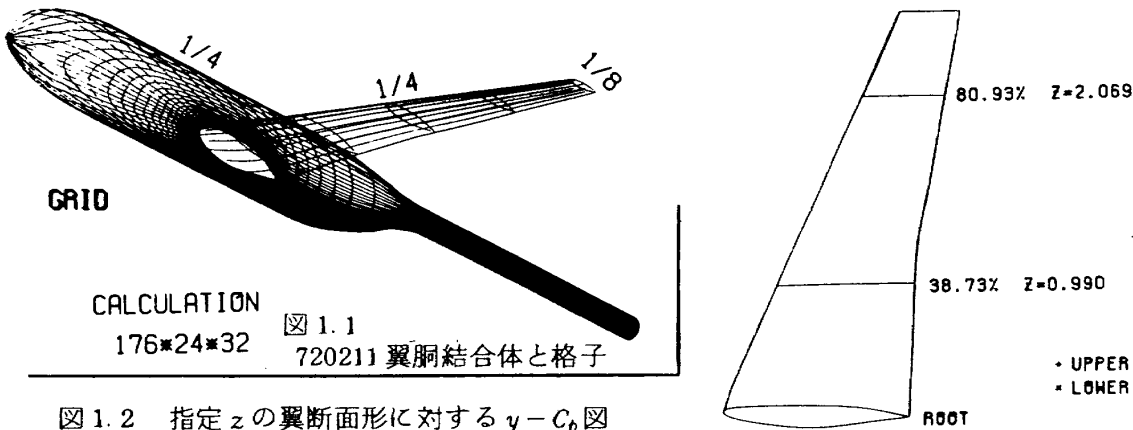


図 1.2 指定 z の翼断面形に対する  $y-C_p$  図

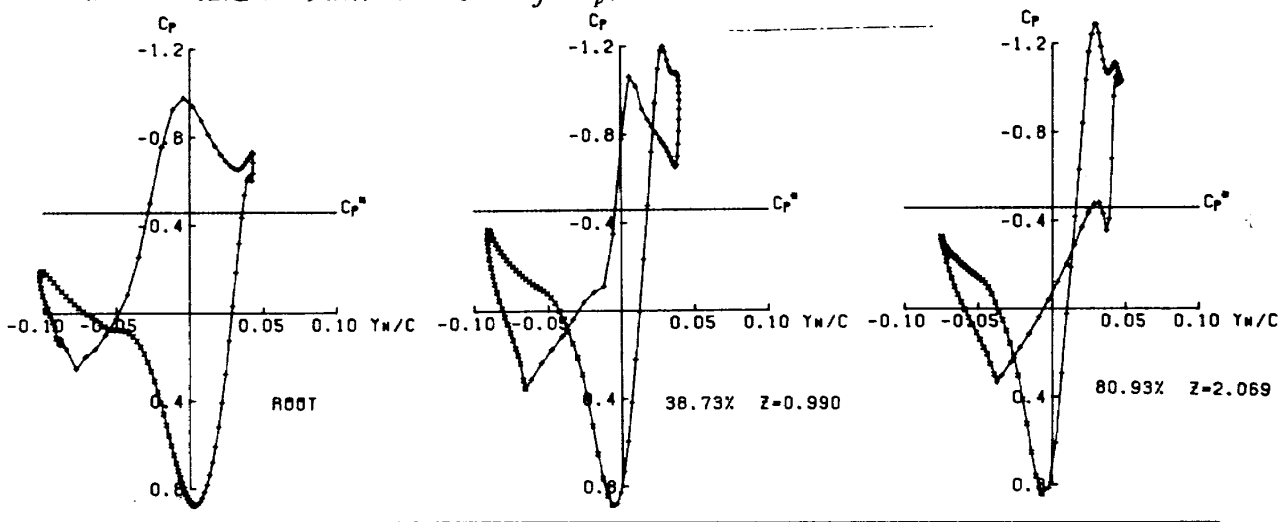


図 1.3 等間隔 z の総合翼断面形図

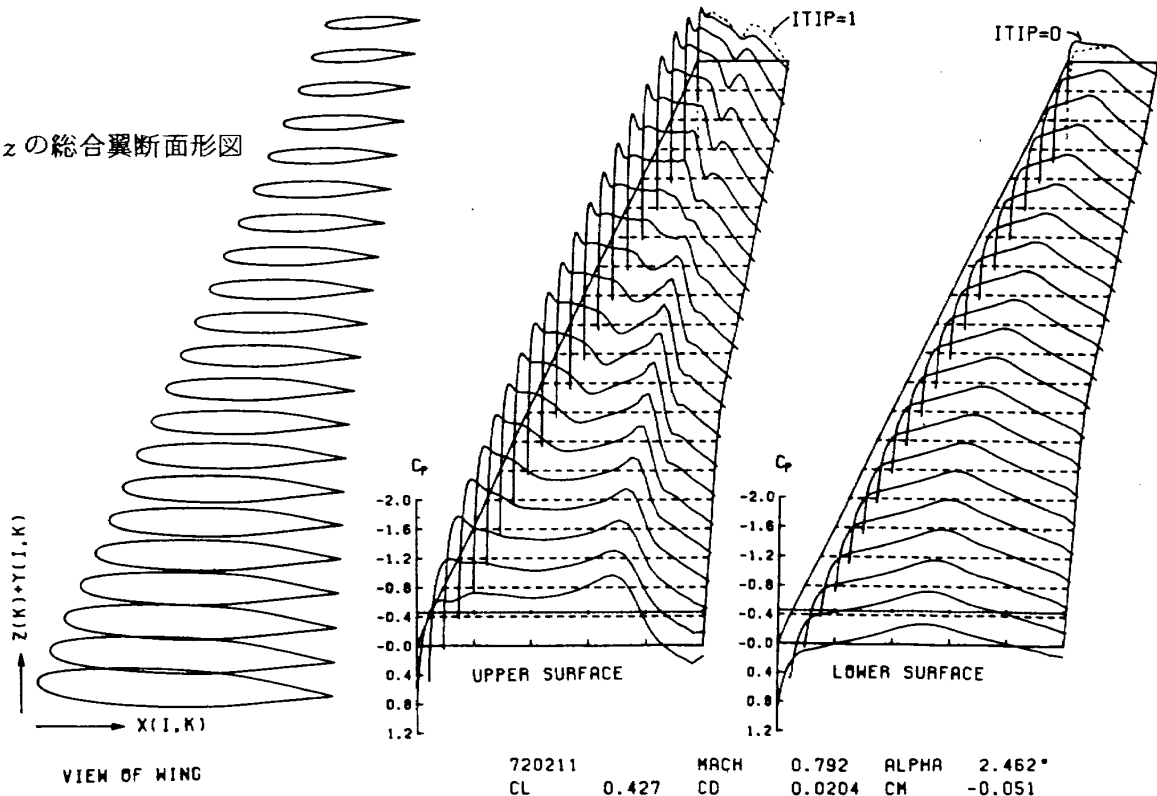
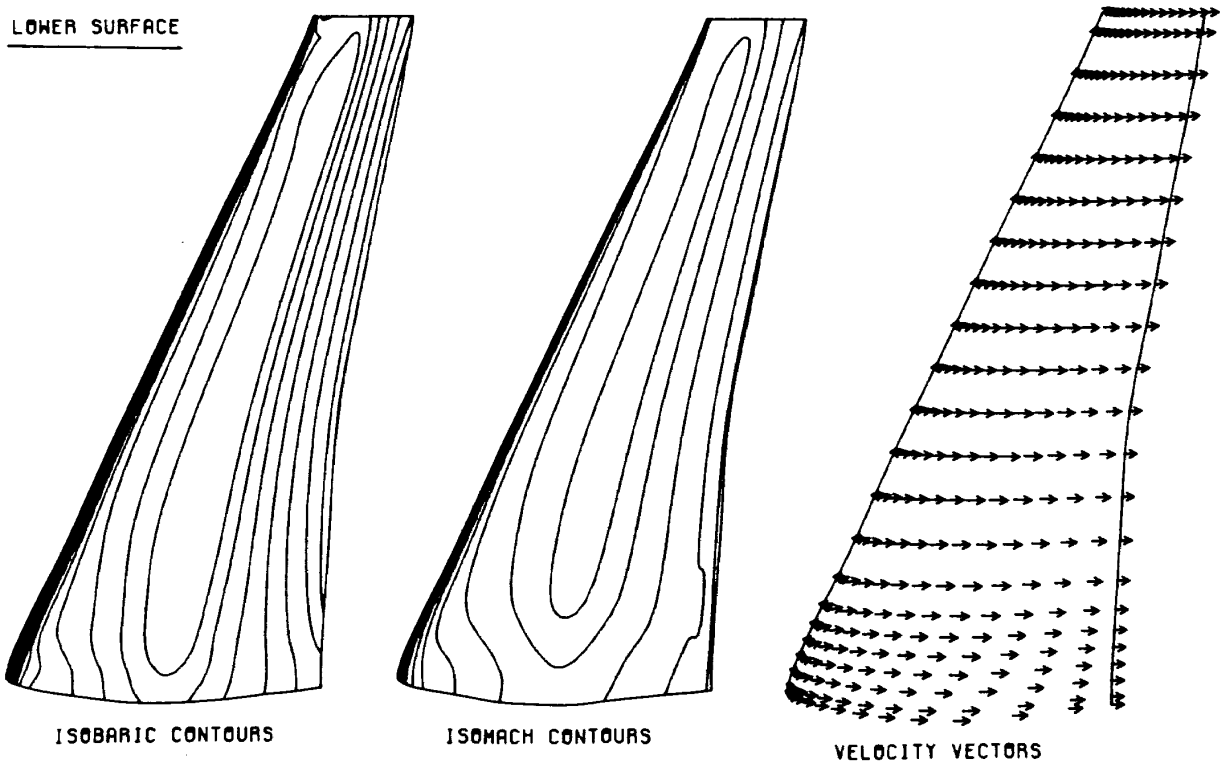
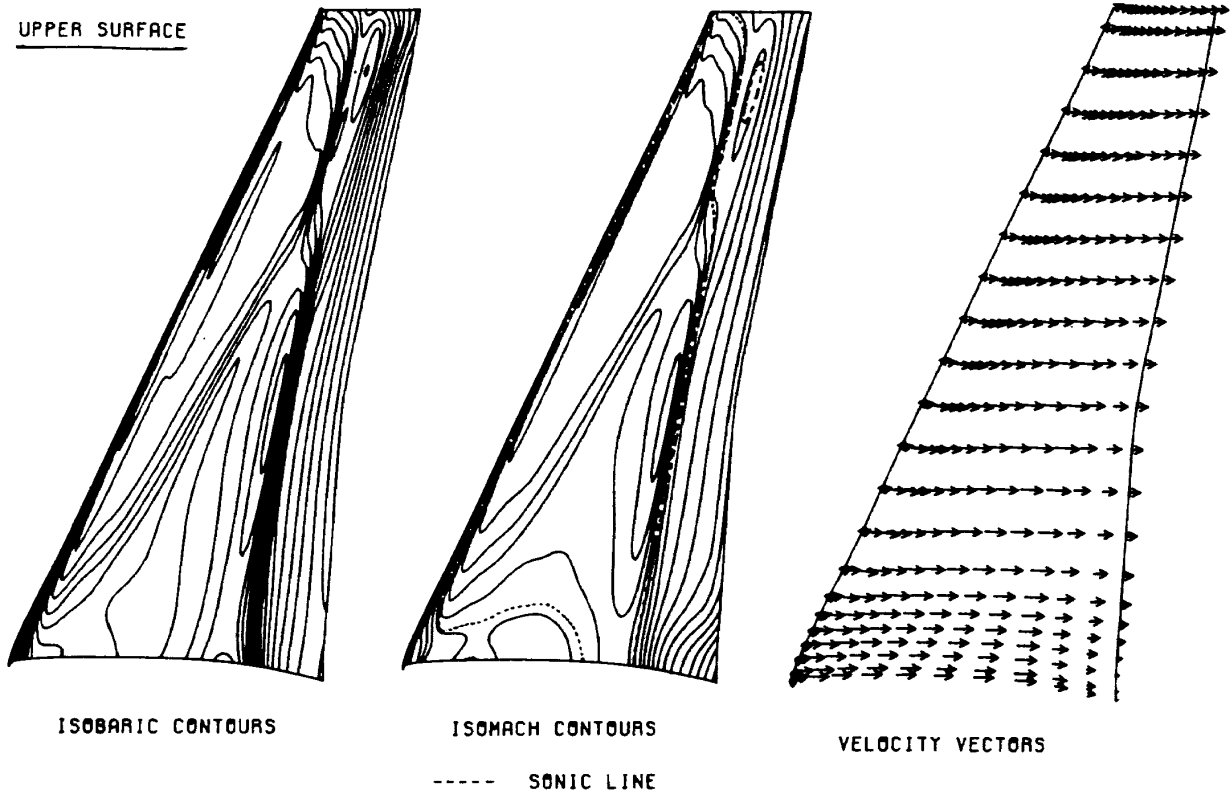


図 1.4 等間隔 z の翼面総合  $x-C_p$  図





$\Delta C_p = 0.085$	720211	MACH	0.792	ALPHA	2.462°	
$\Delta M = 0.07$	CL	0.427	CD	0.0204	CM	-0.051

図 1.5 翼面の等圧線，等マッハ線，及び流速ベクトル図

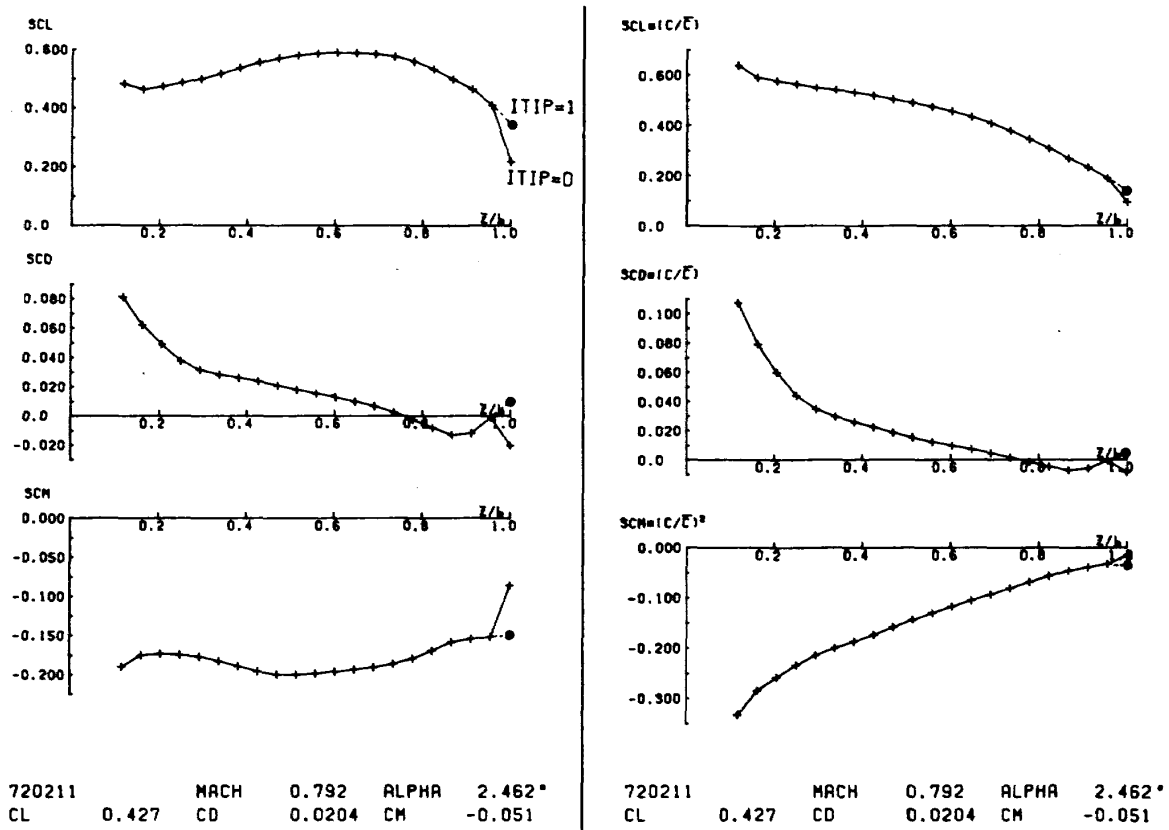


図 1.6 等間隔  $z$  に対する翼断面形の SCL, SCD, SCM 等の変化図

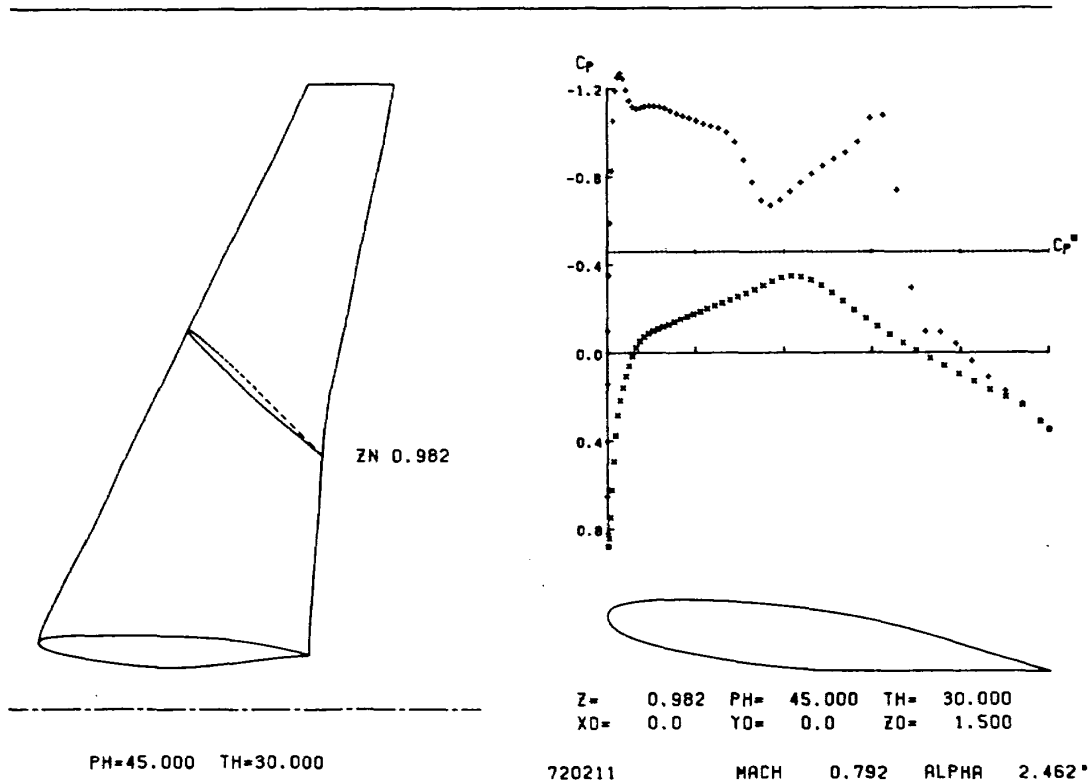


図 1.7 指定切断平面における翼断面形に対する  $x-C_p$  図

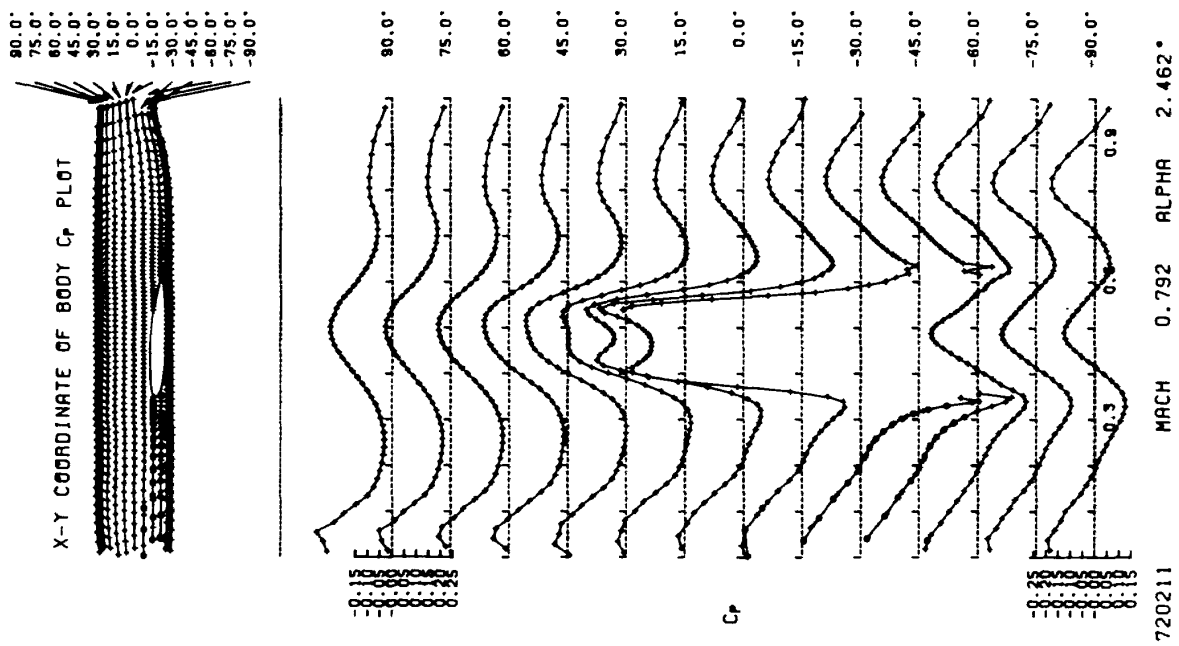


図 1.8 胴体軸まわりの指定角度に対する胴体面の総合  $x-C_p$  図

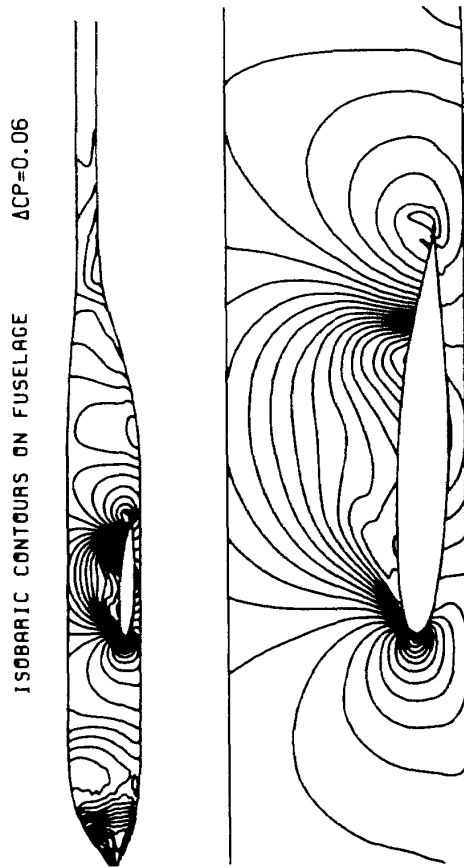


図 1.9 胴体面の等圧線図 (下は拡大図)

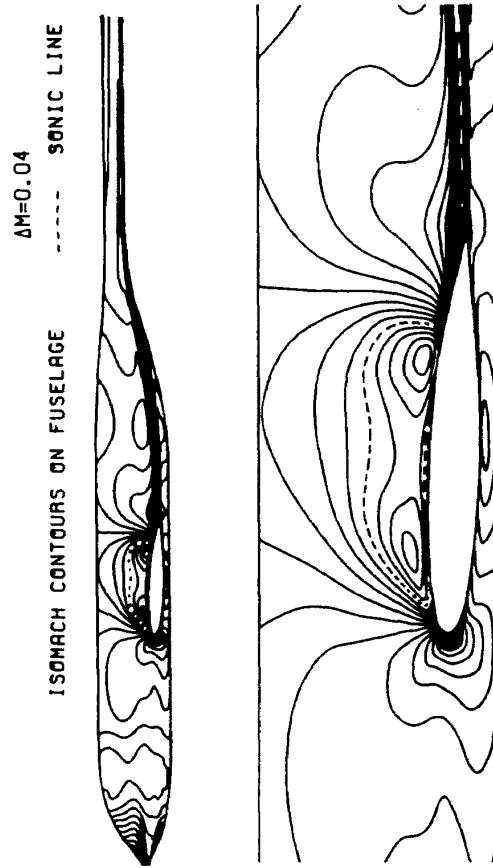


図 1.10 胴体面の等マッハ線図 (下は拡大図)

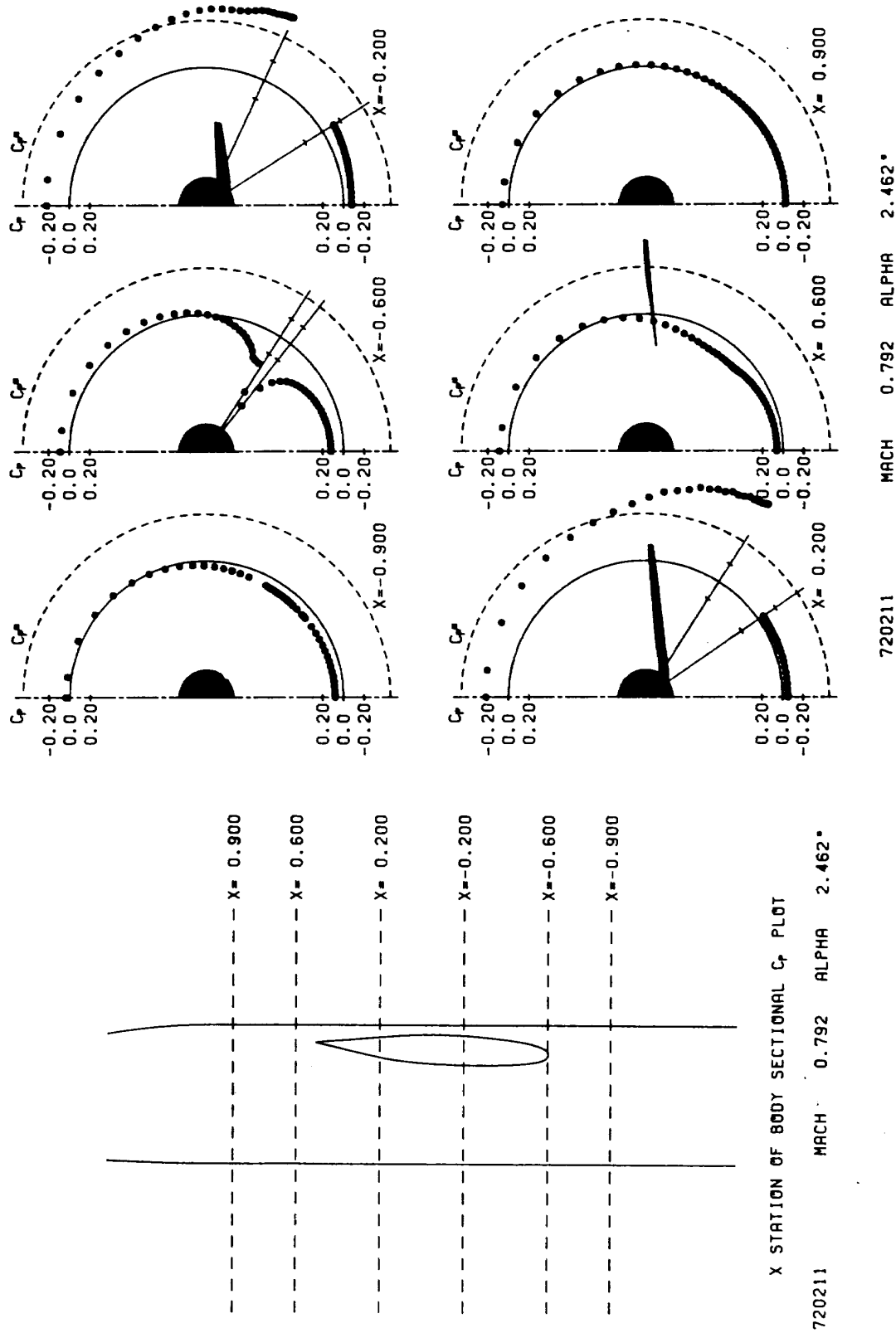


図1.11 指定xの翼胴断面図と胴体面の $C_p$ 図

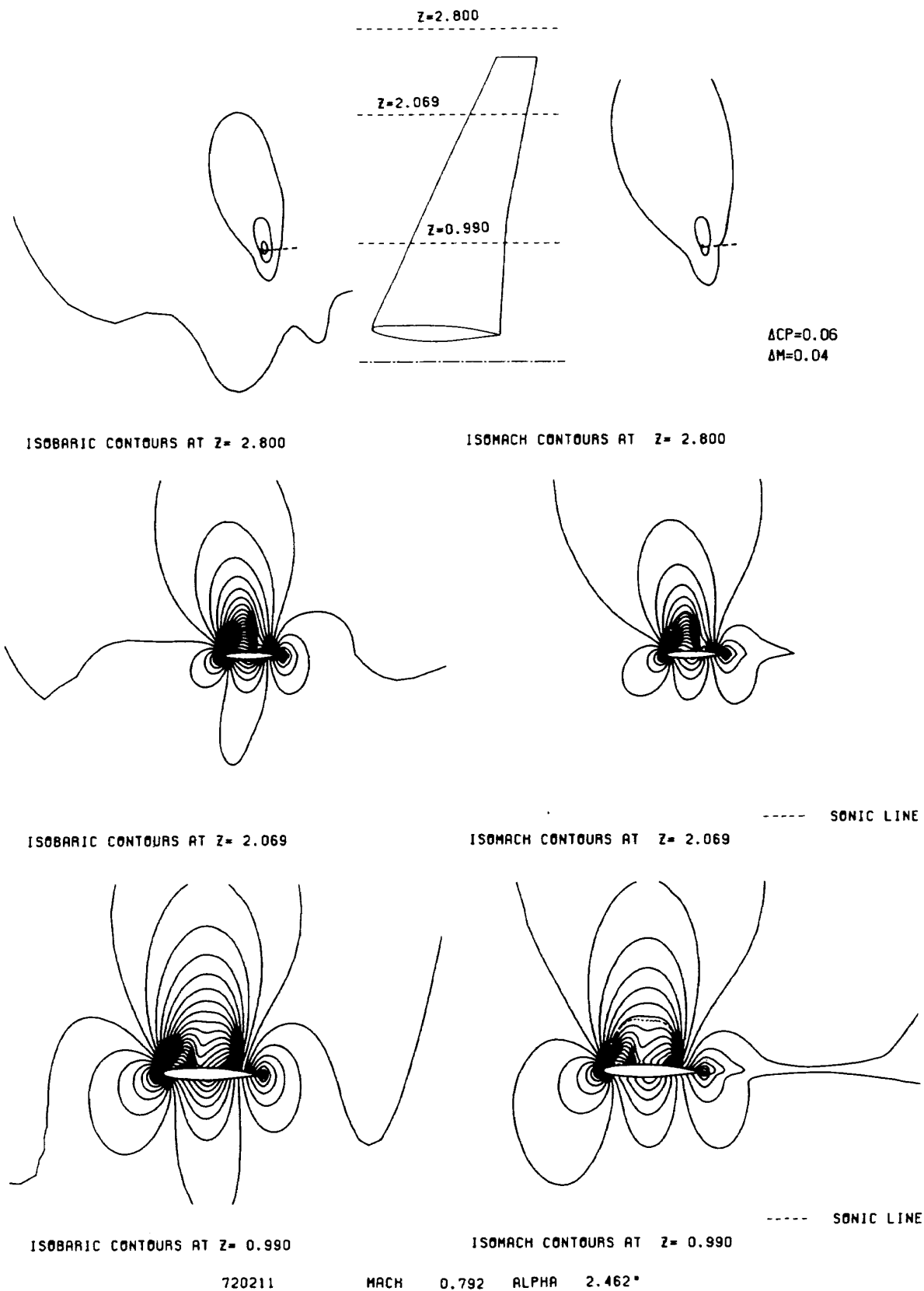


図1.12 指定  $z$  の  $(x, y)$  平面における等圧線図及び等マッハ線図

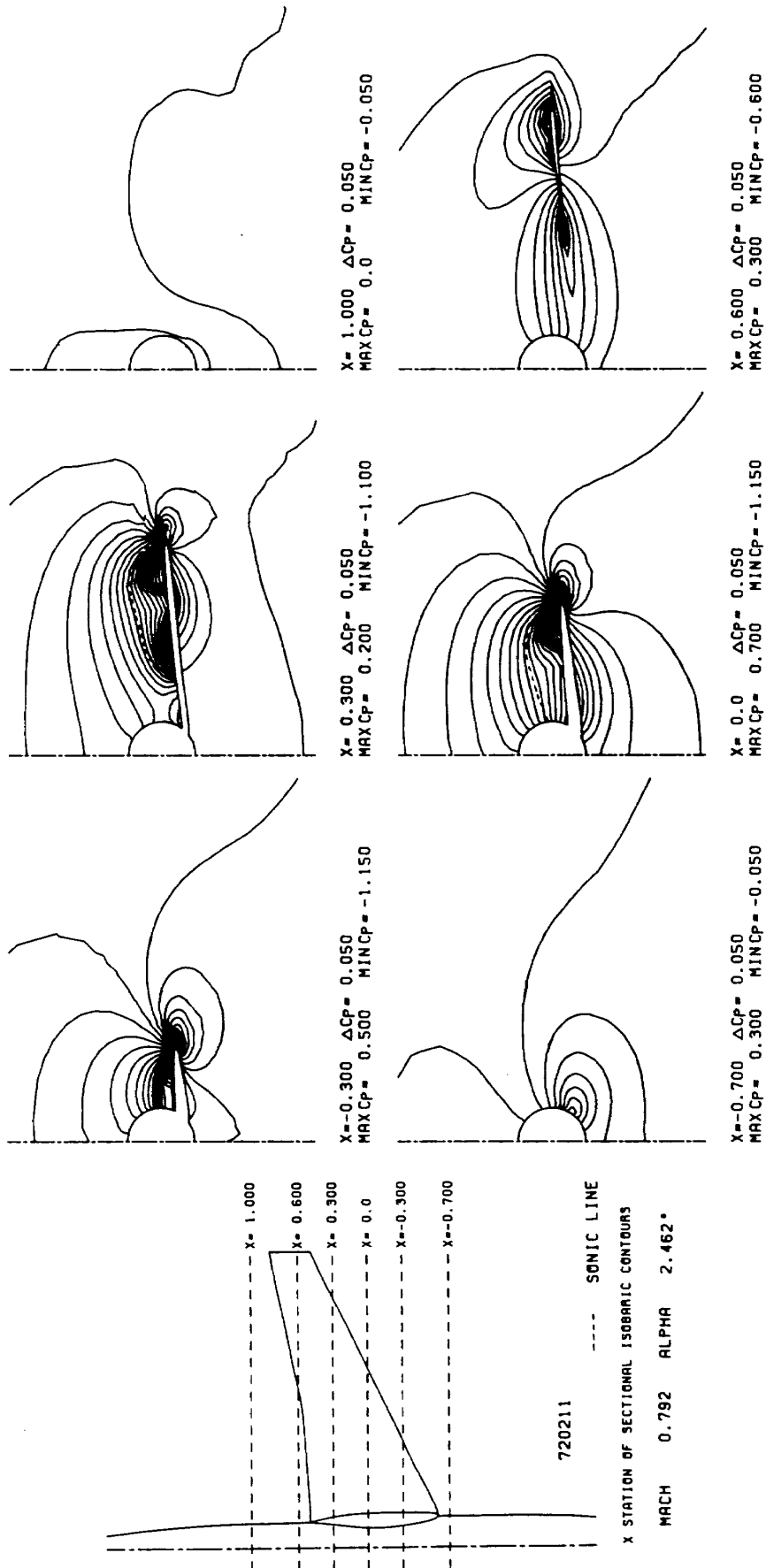


図1.13 指定  $x$  の  $(y, z)$  平面における等圧線及び音速線図

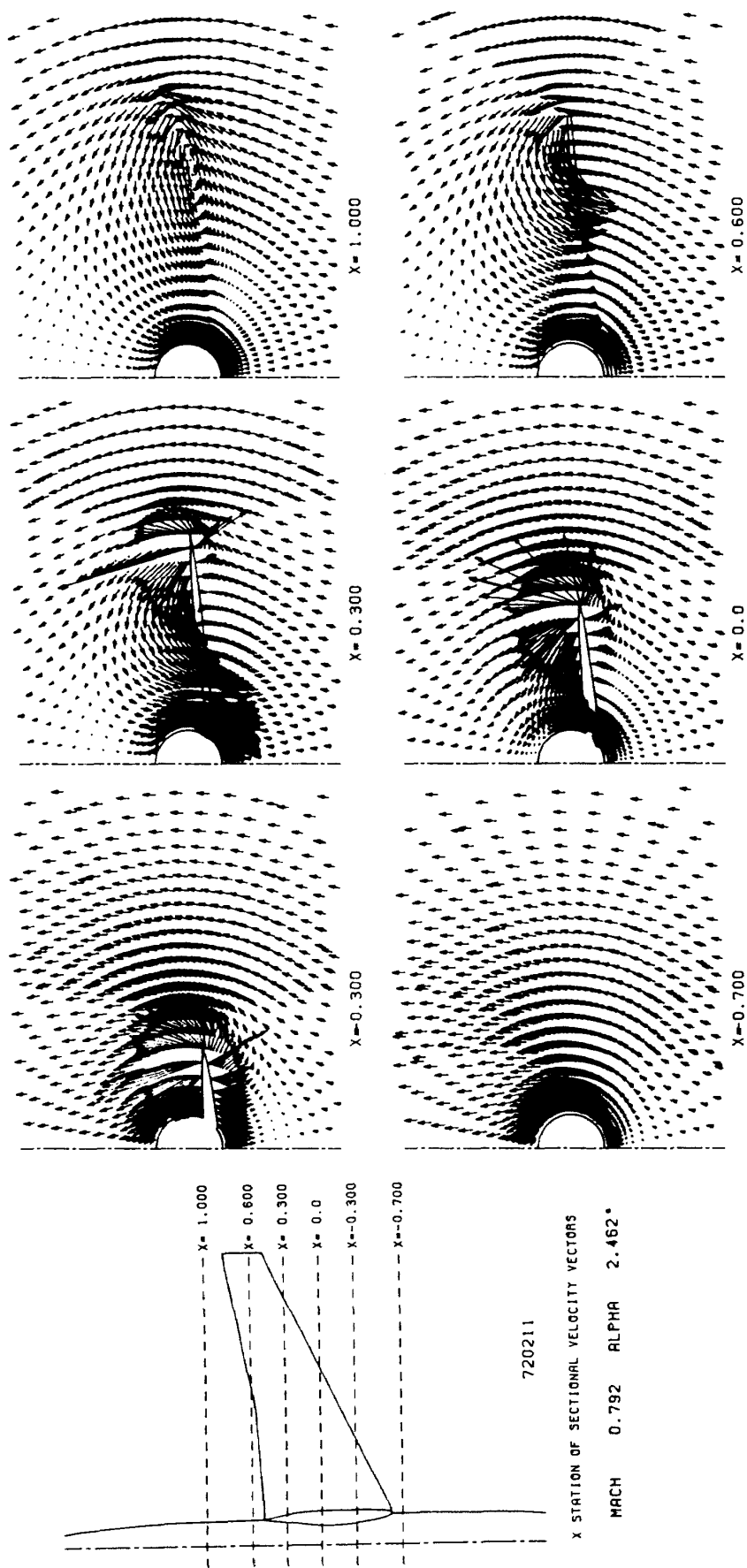


図1.14 指定  $x$  の  $(y, z)$  平面における流速ベクトルの分布図

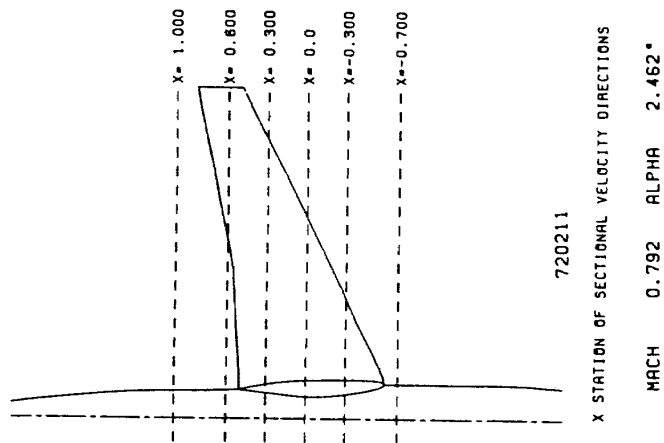
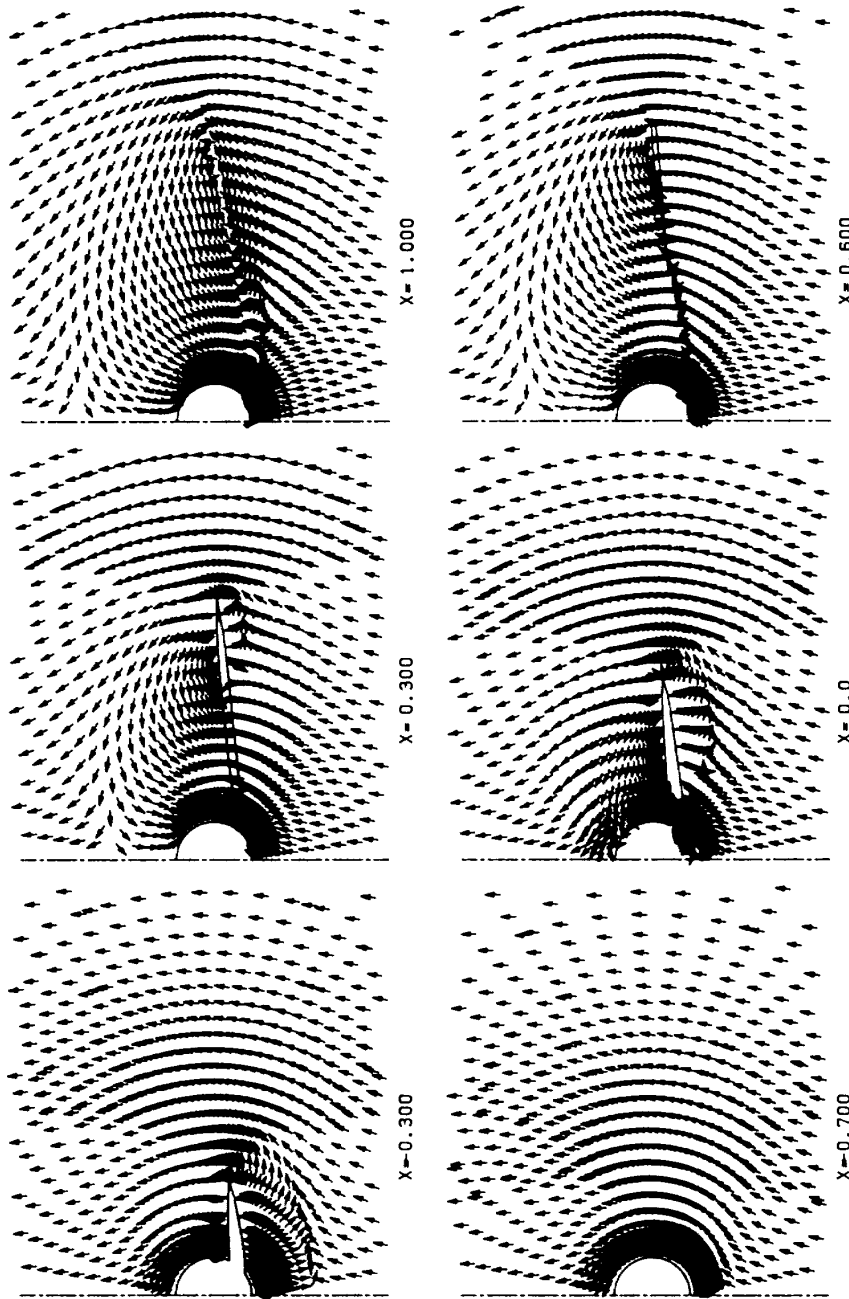


図1.15 指定  $x$  の  $(y, z)$  平面における流速ベクトルの方向の分布図



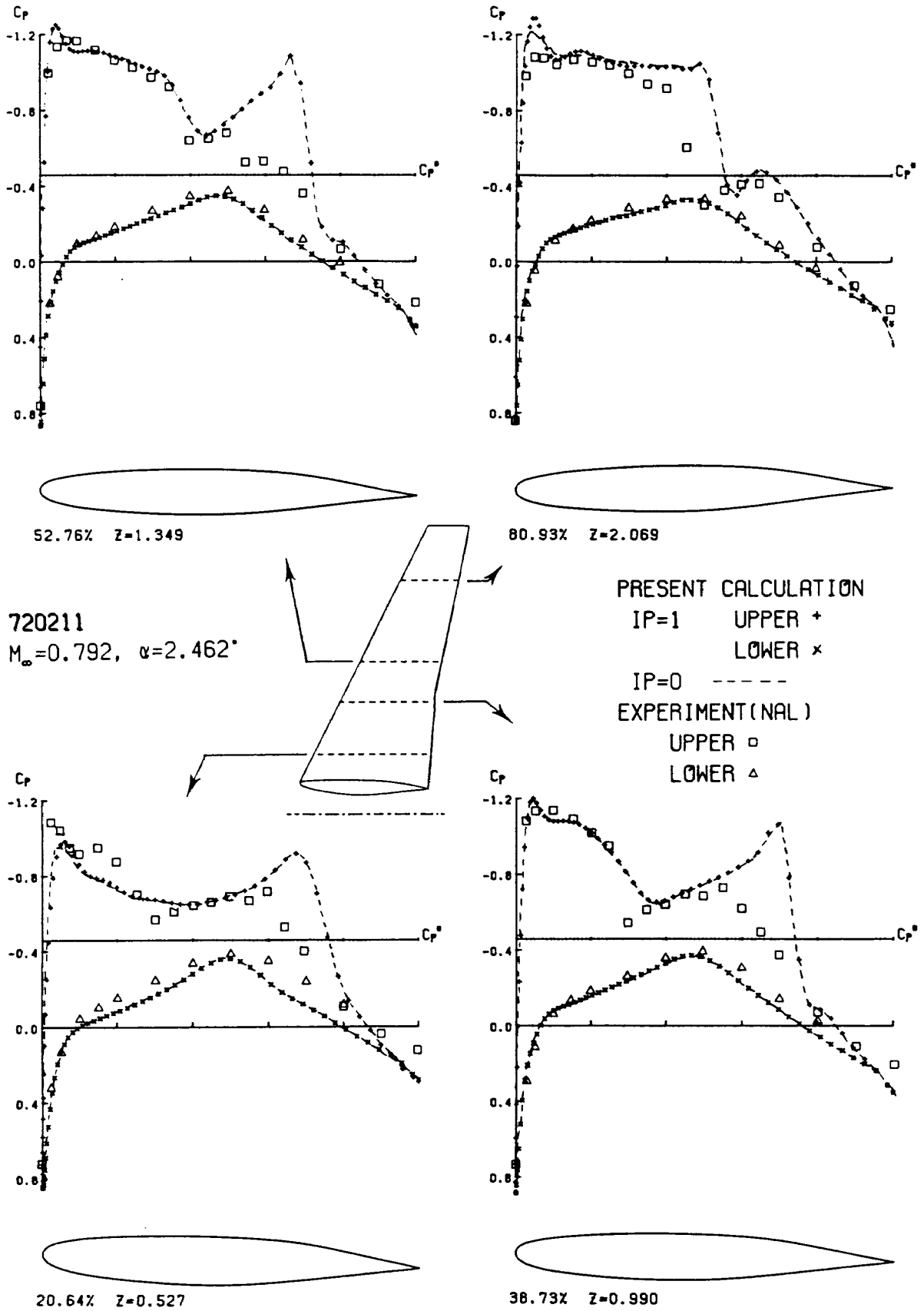


図1.16 720211 翼胴結合体の翼面圧力分布図

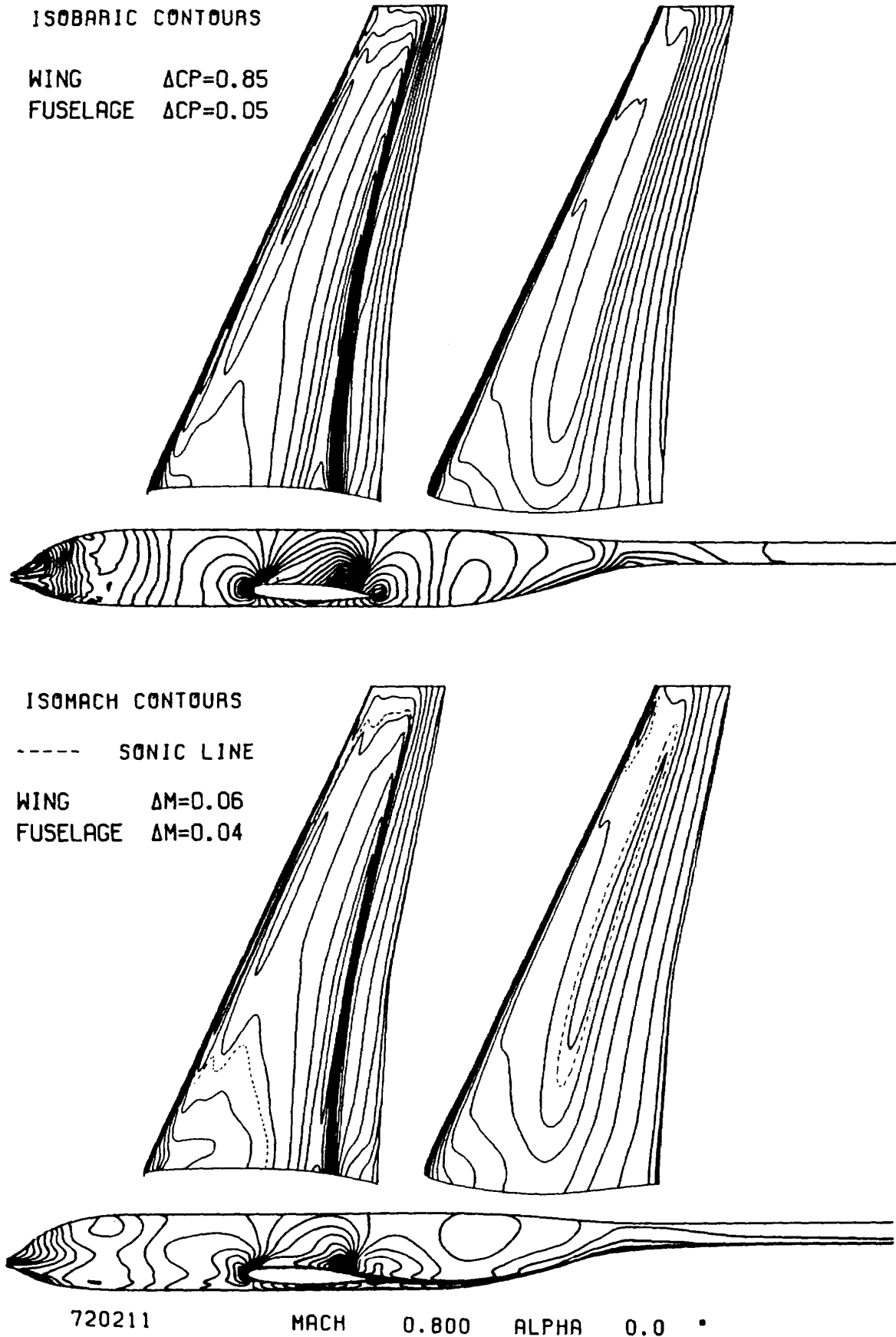


図1.17 720211 翼胴結合体の表面における等圧線及び等マッハ線図

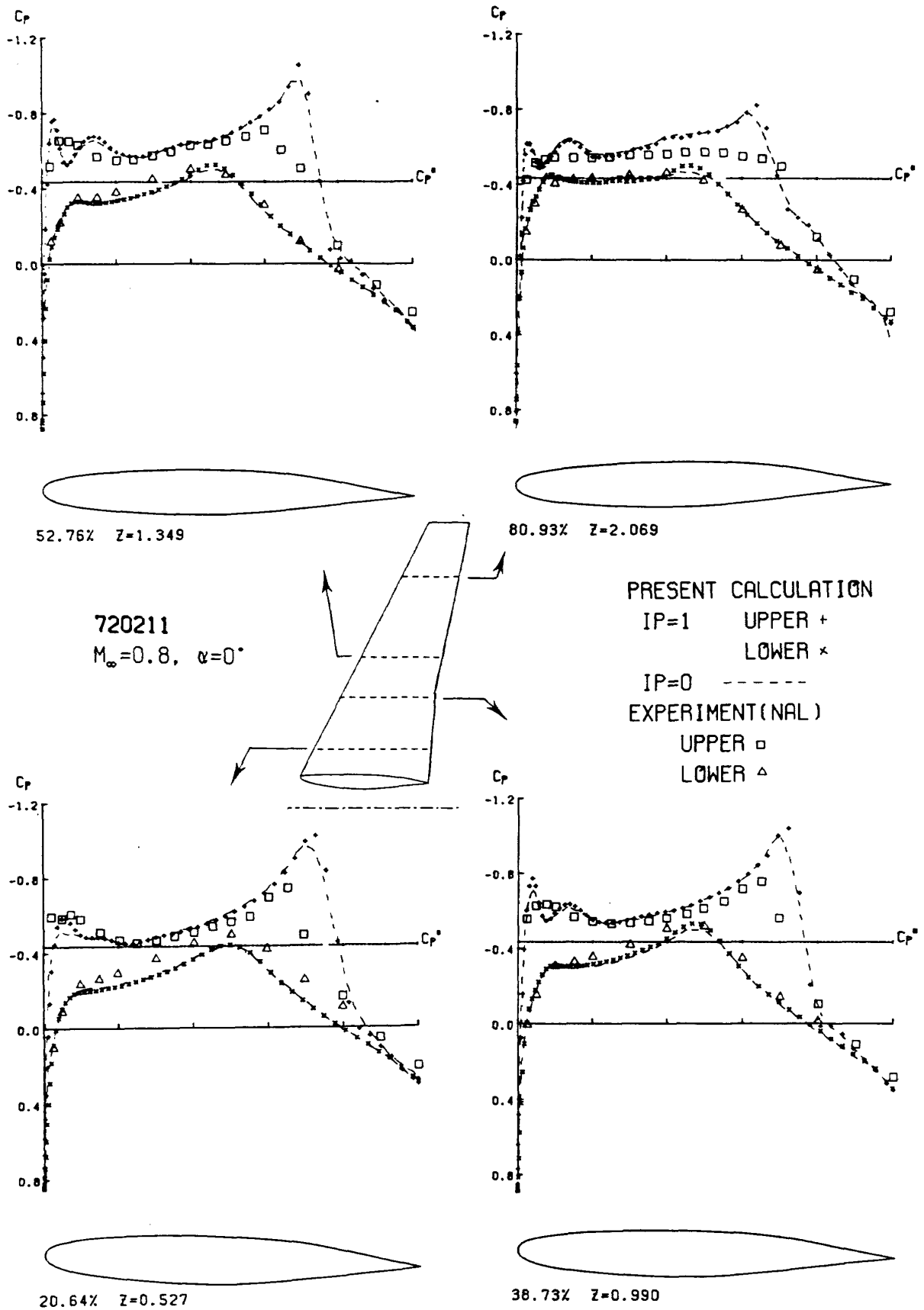


図1.18 720211 翼胴結合体の翼面圧力分布図

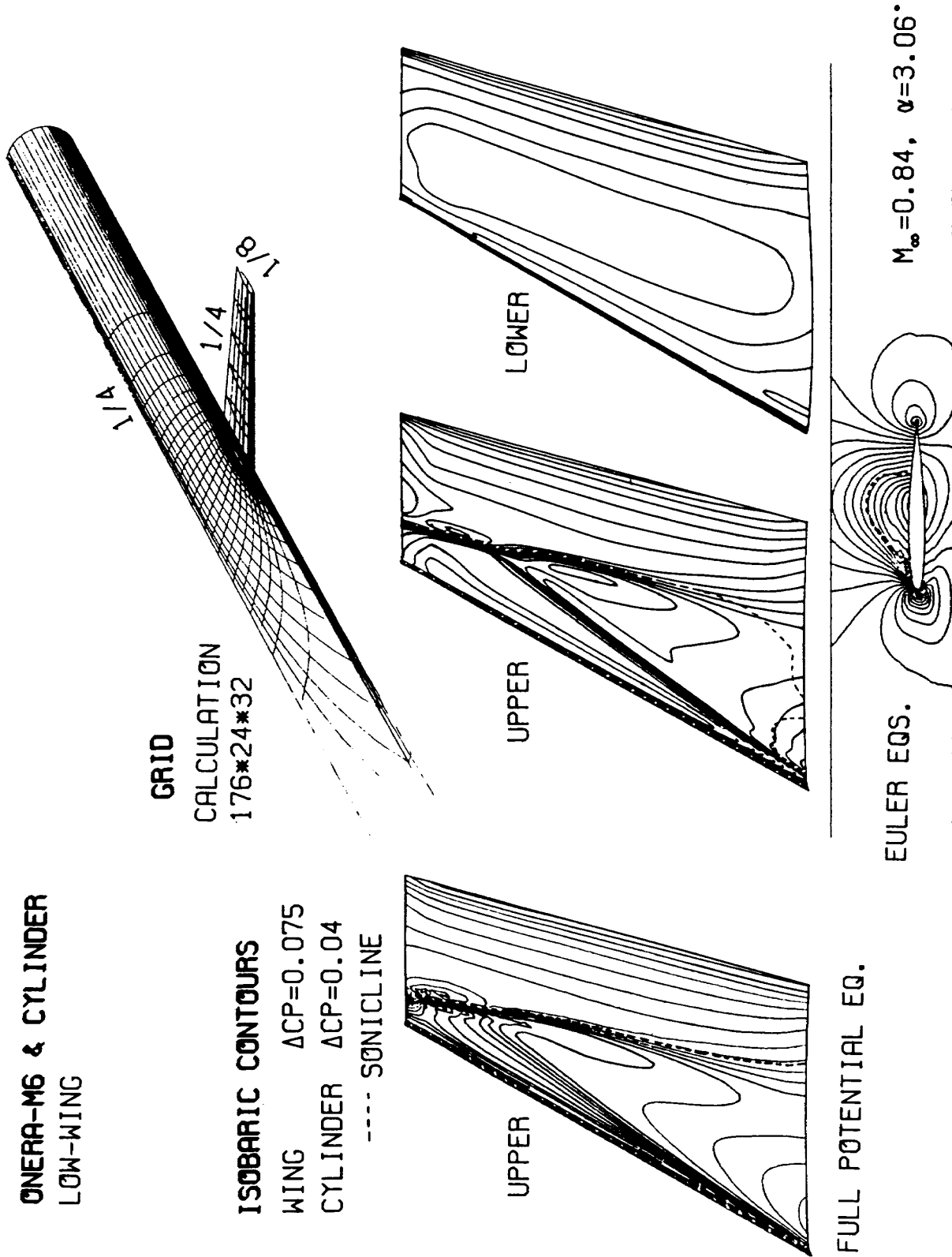


図 2.1 円柱と ONERA-M6 翼の結合体 (低翼機) に対する格子と表面等圧線図 (IP=0), 完全ポテンシャル流との比較

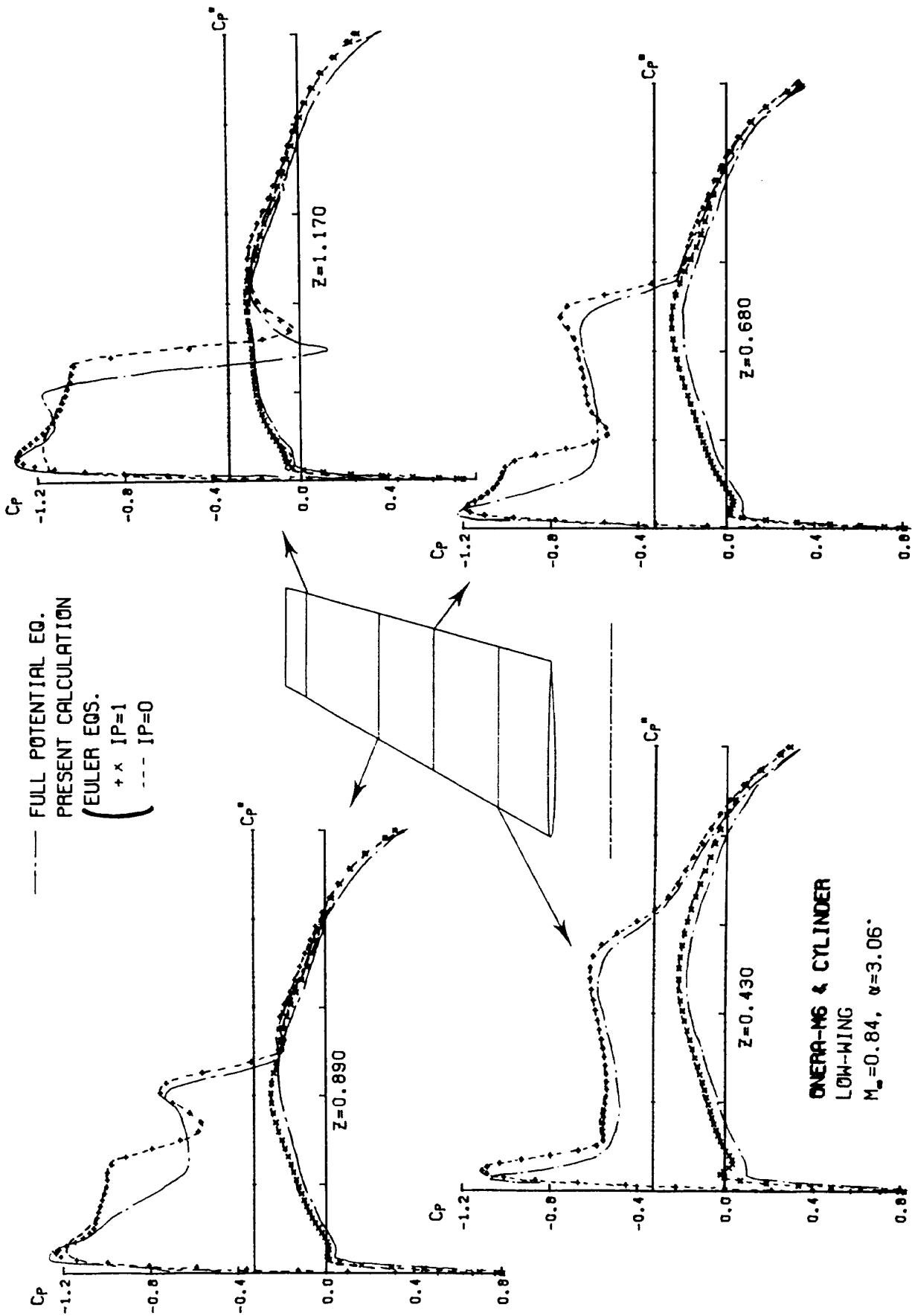


図 2.2 円柱と ONERA-M6 翼の結合体 (低翼機) に対する翼面圧力分布の完全ポテンシャル流との比較

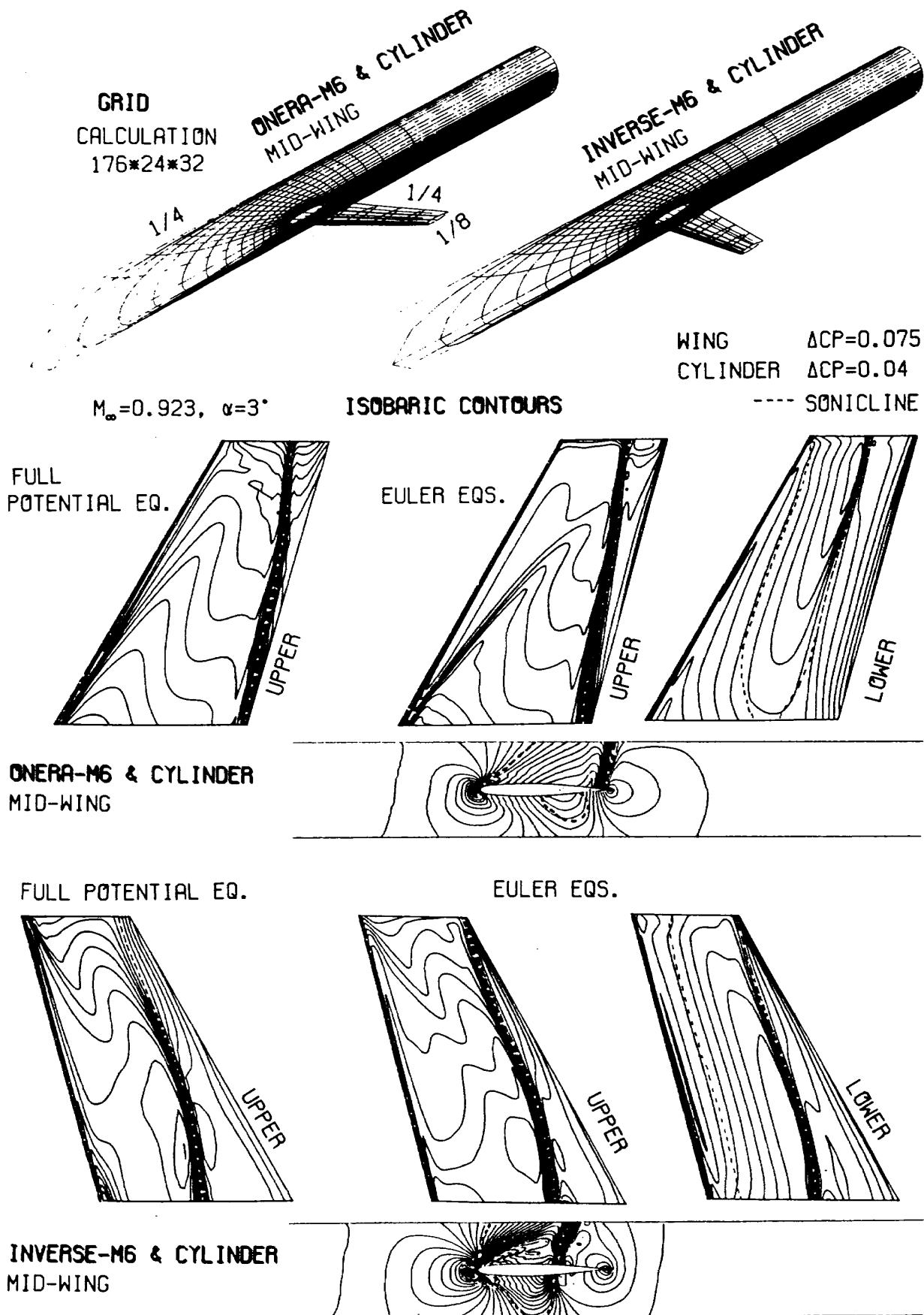


図 2.3 円柱と ONERA-M6 翼の結合体 (中翼機) 及び円柱と前進翼の結合体 (中翼機) に対する格子と表面等圧線図 (IP=0), 完全ポテンシャル流との比較

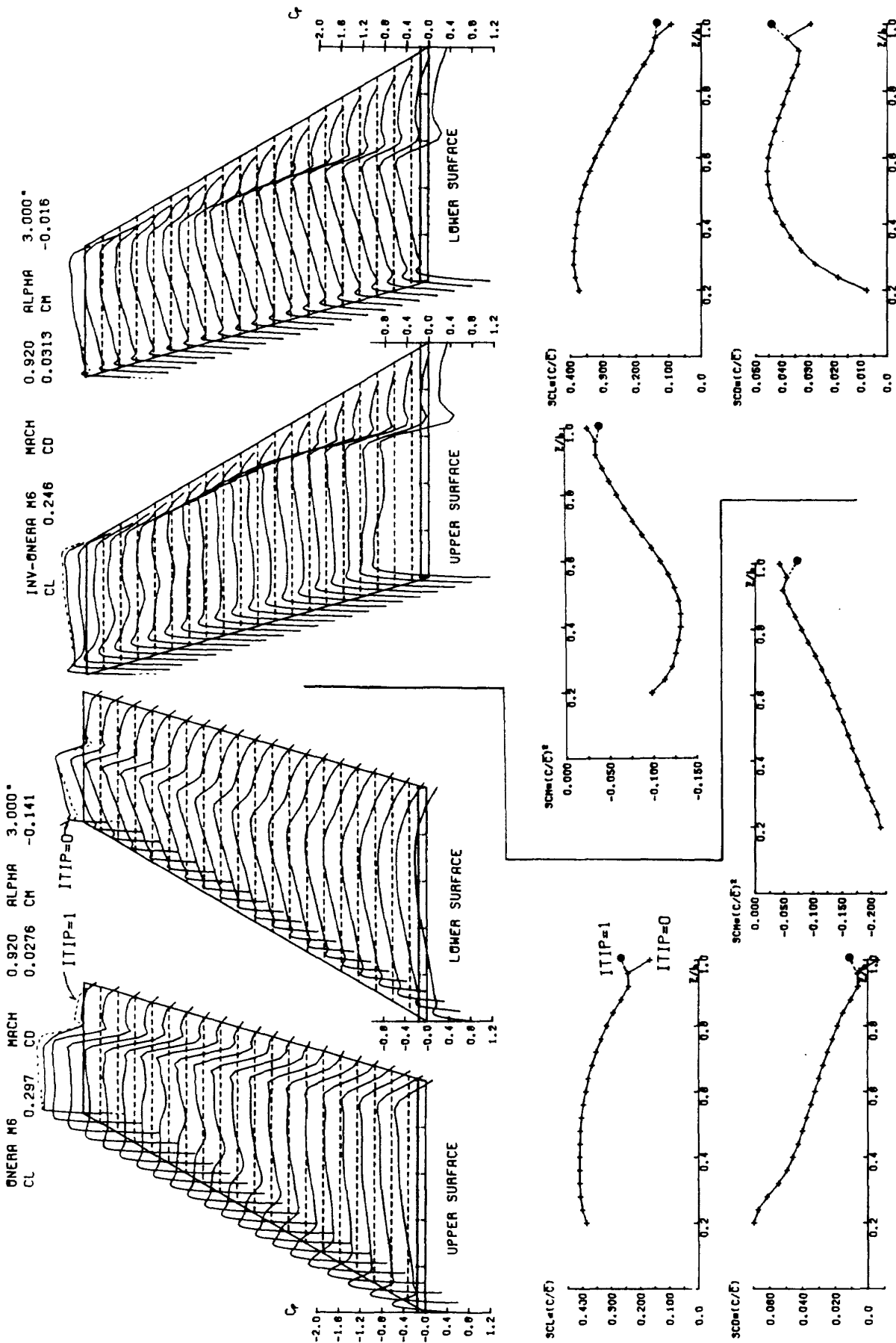


図 2.4 円柱と ONERA-M6 翼の結合体 (中翼機) 及び円柱と前進翼の結合体 (中翼機) に対する翼面総合

$x-C_p$  図,  $z-SCL$  図,  $z-SCD$  図,  $z-SCM$  図 (IP=0)

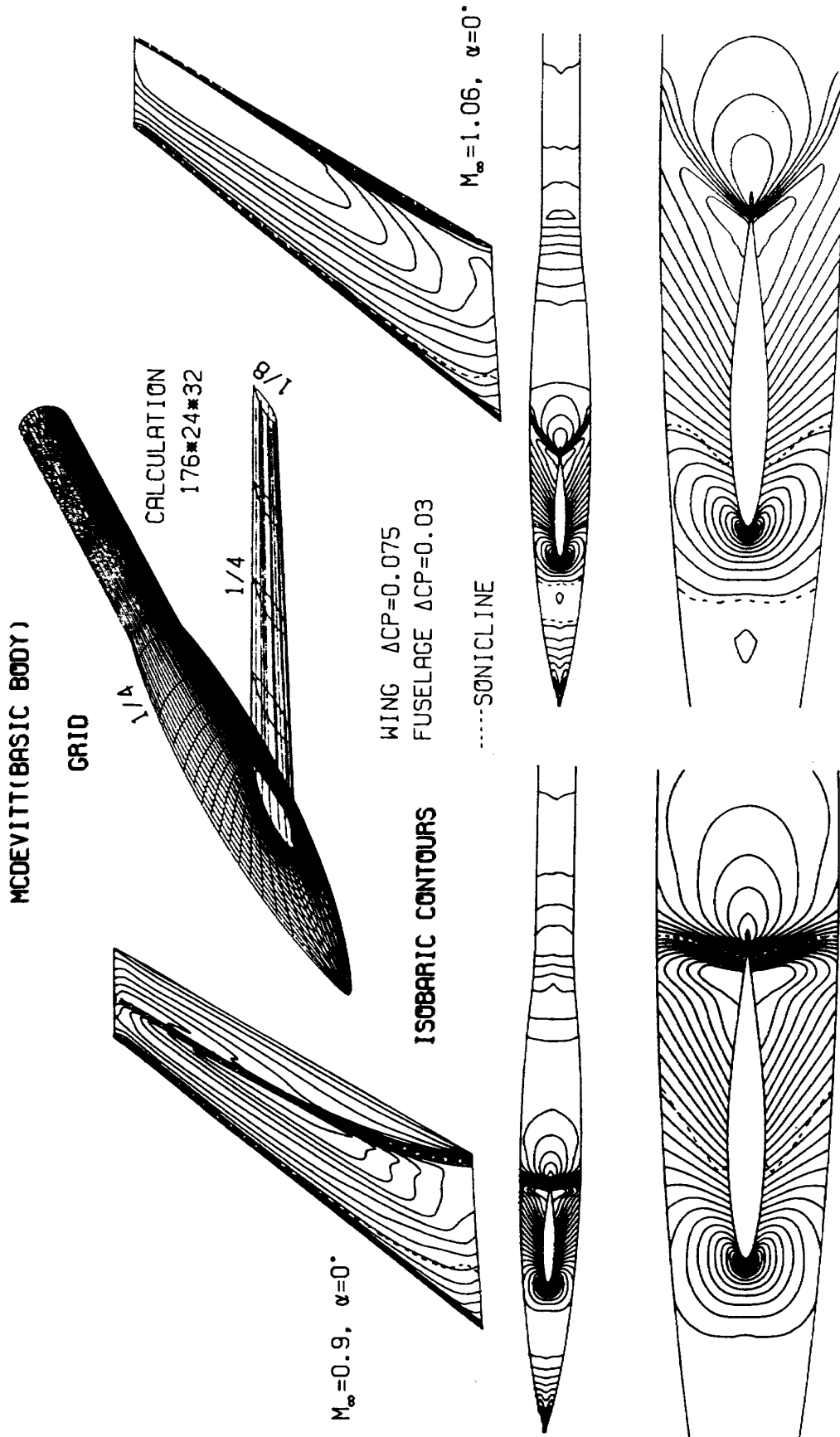


図 3.1 McDevitt の翼胴結合体 (基本モデル) の格子と表面等圧線図



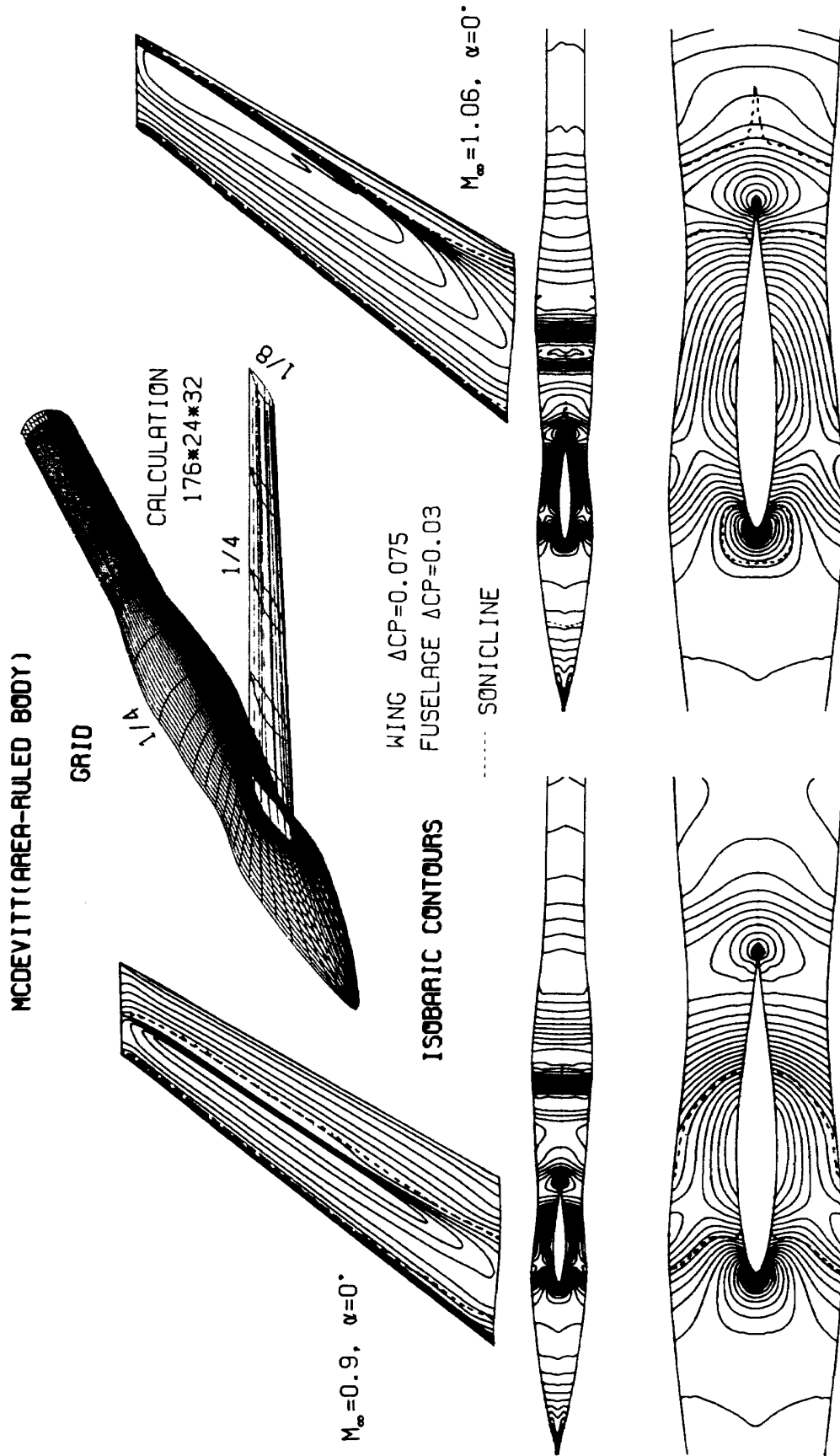


図 3.2 Mc Devitt の翼胴結合体 (面積則モデル) の格子と表面等圧線図

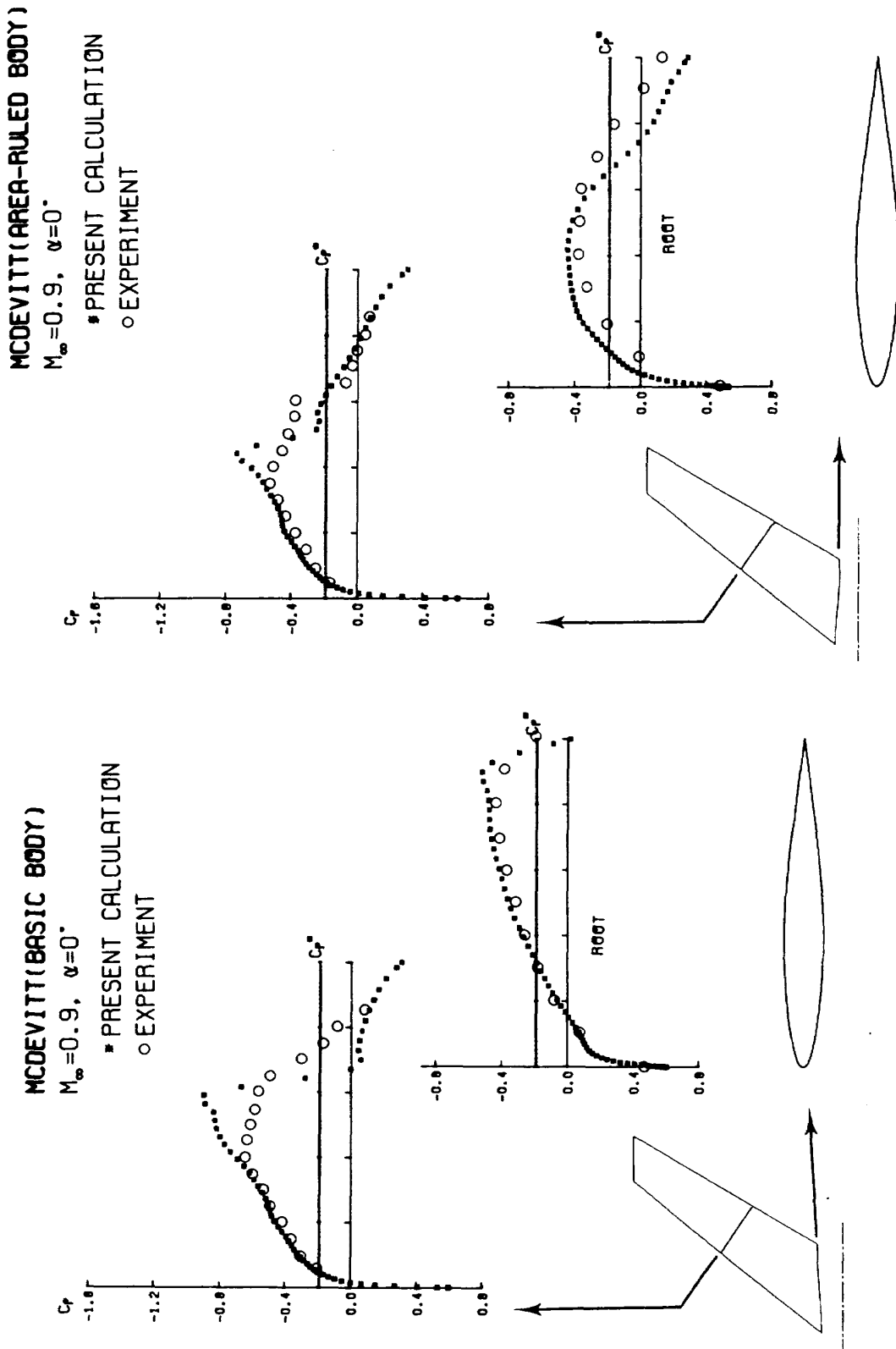


図 3.3 計算と実験による翼面圧力分布の比較

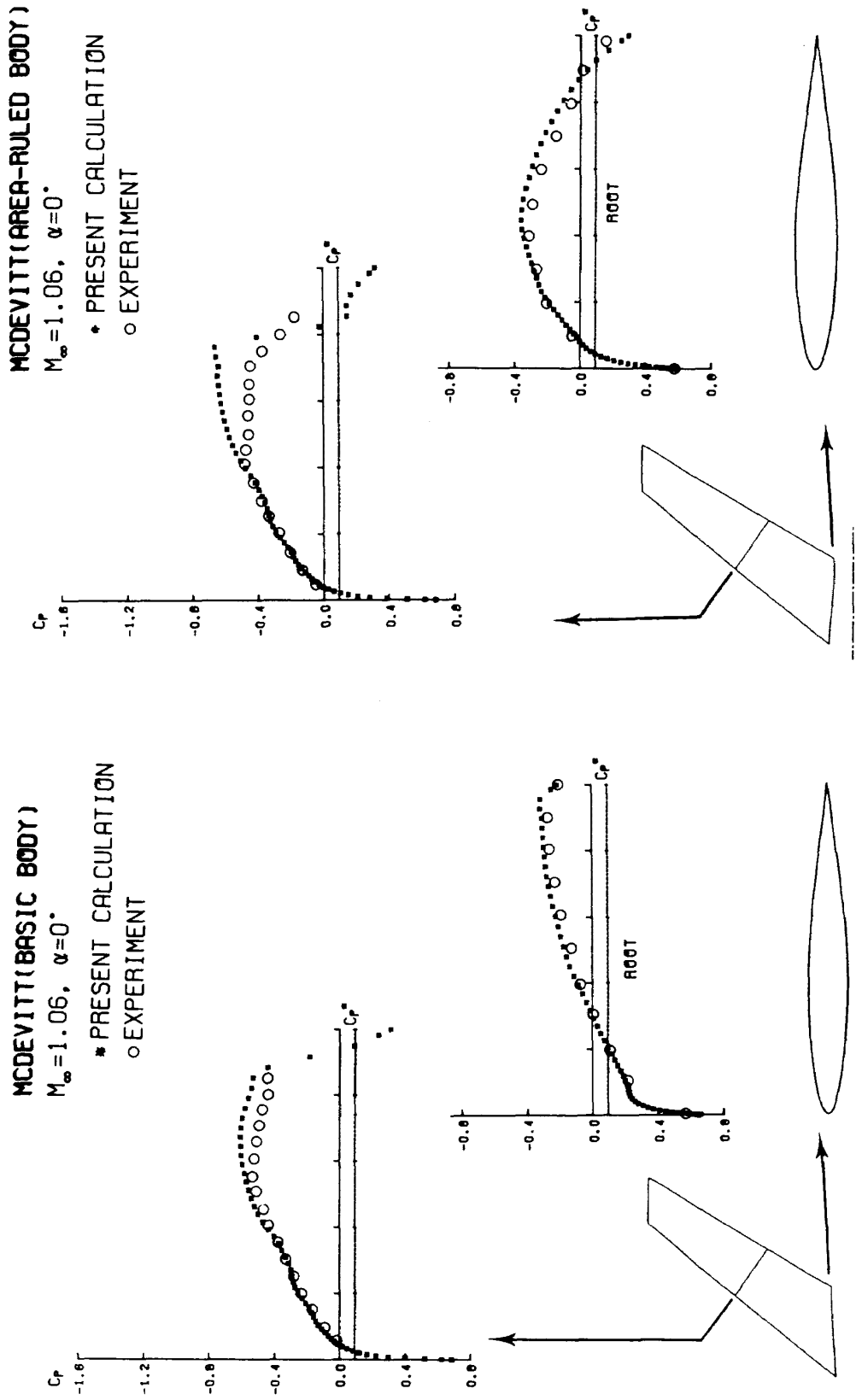


図 3.4 計算と実験による翼面圧力分布の比較

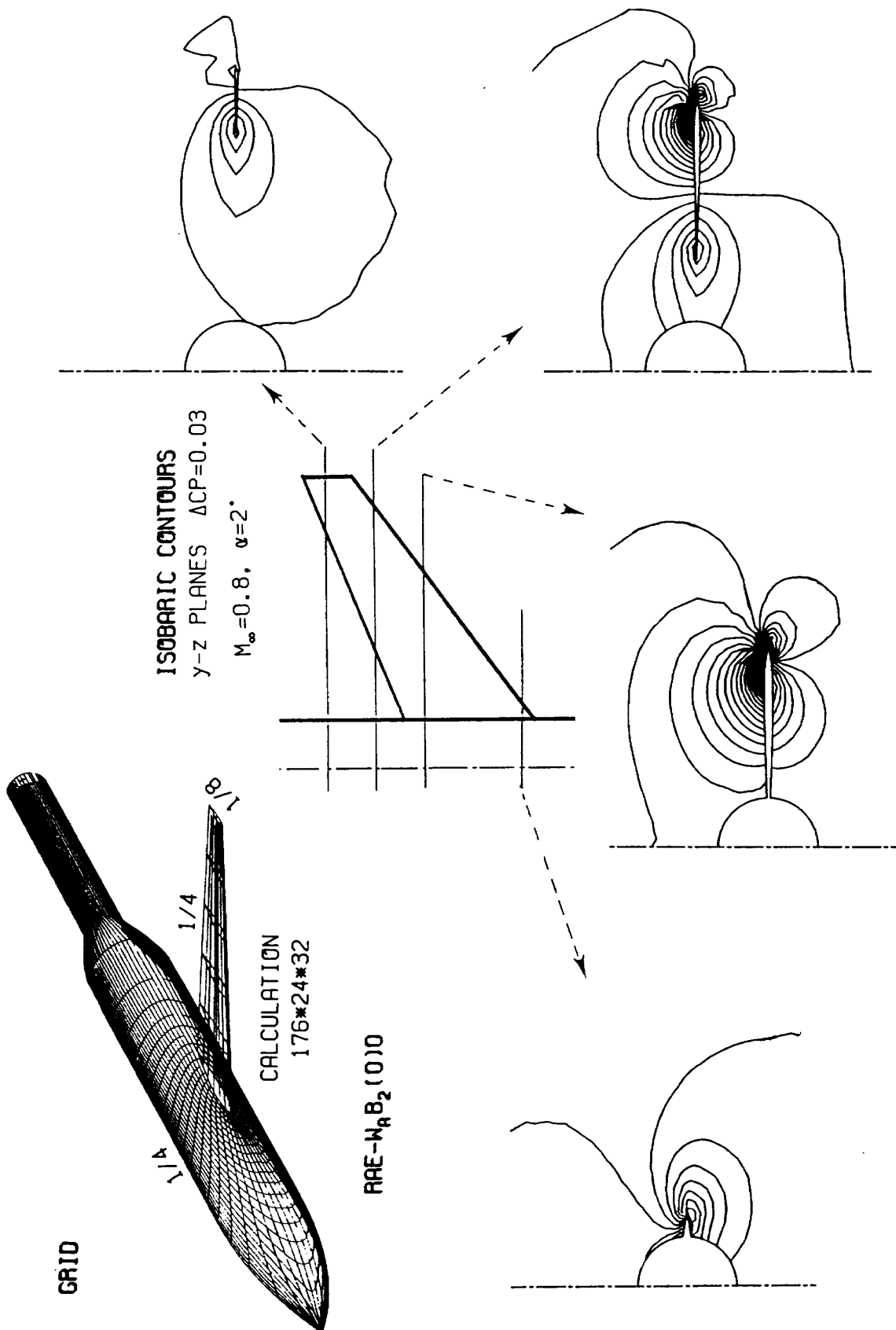


図 4.1 RAE-W<sub>A</sub>B<sub>2</sub>(0)0 翼胴結合体に対する格子及び  $\alpha$  断面等圧線図

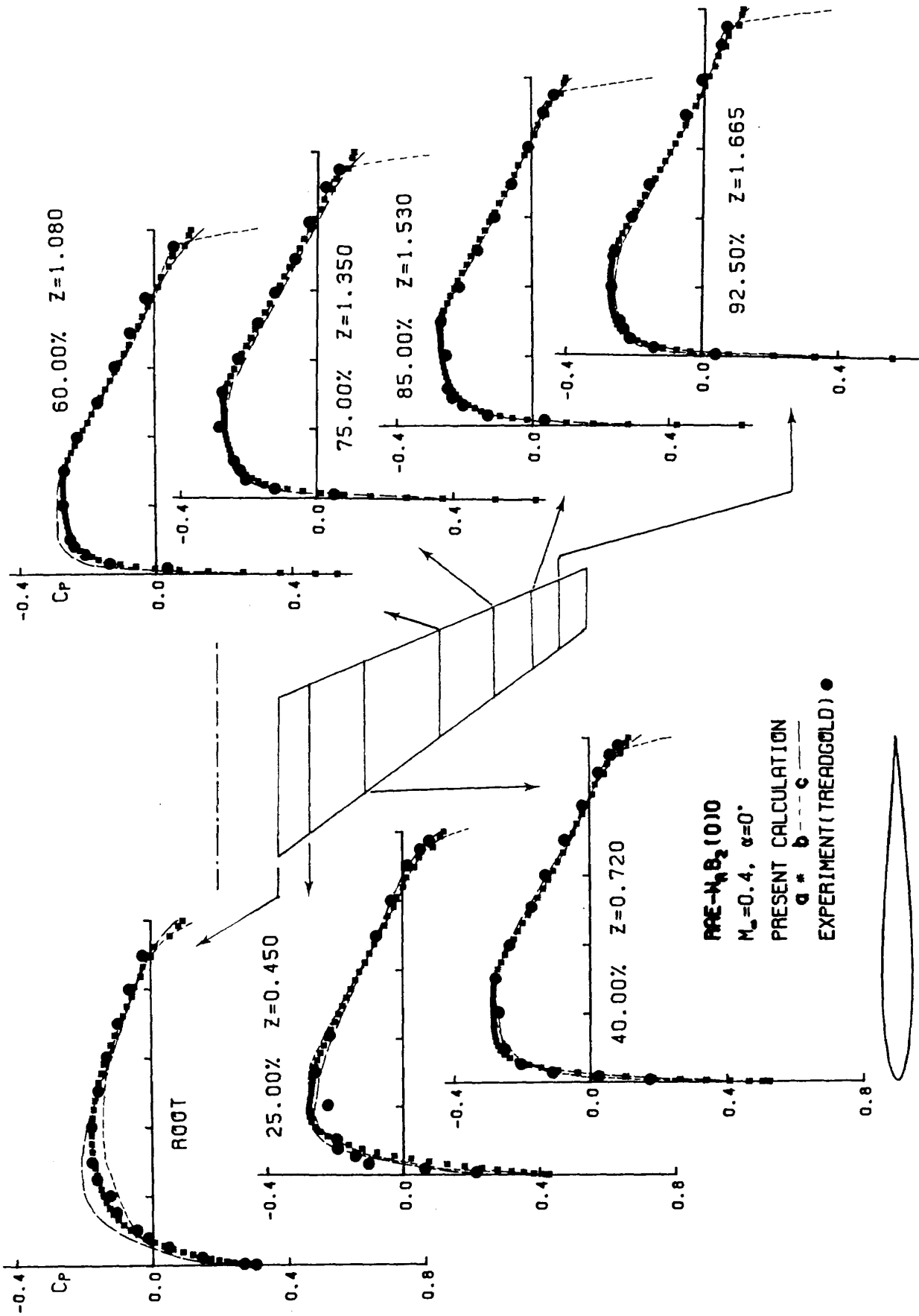


図 4.2 計算と実験による翼面圧力分布の比較

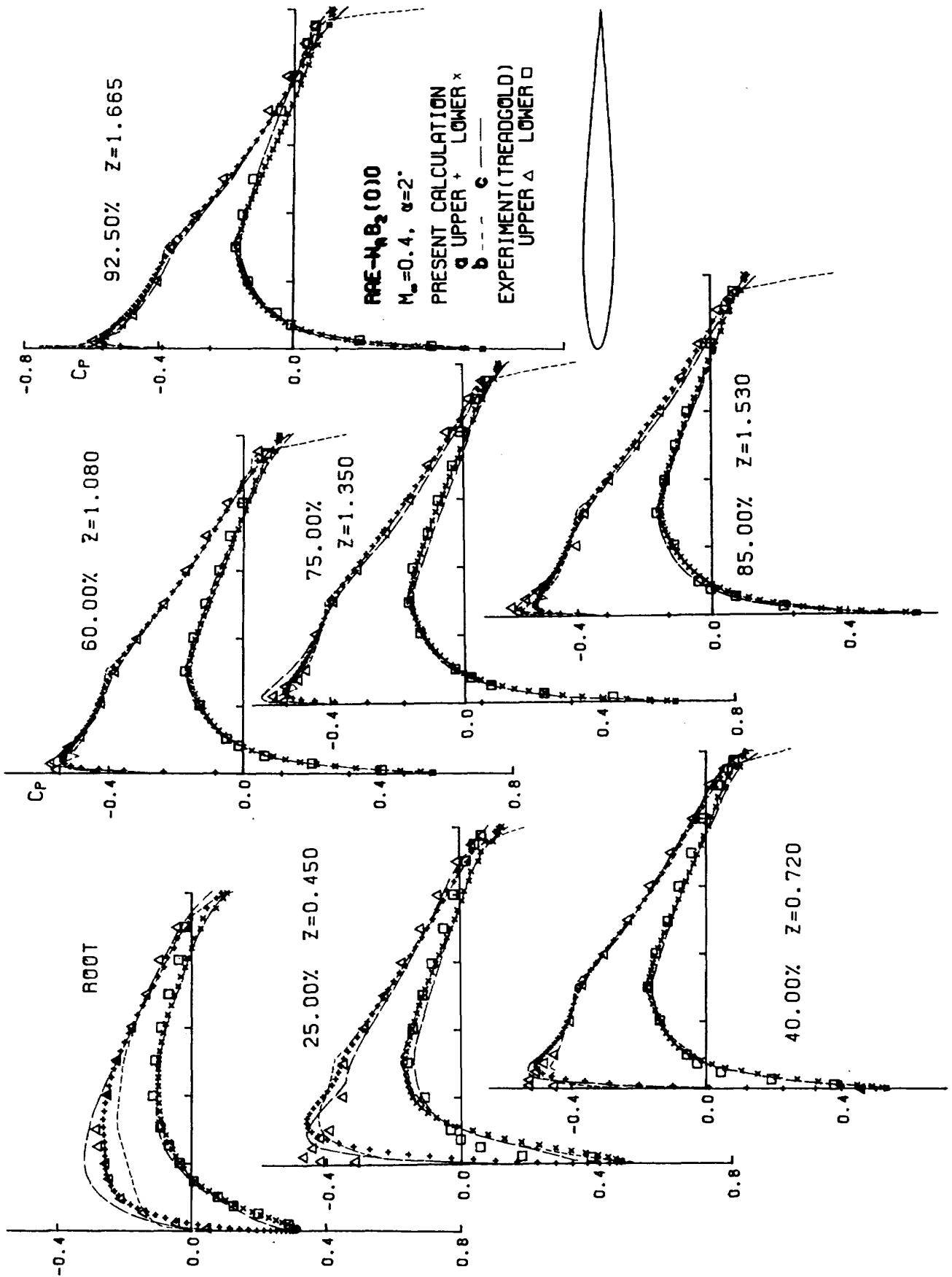


図 4.3 計算と実験による翼面圧力分布の比較

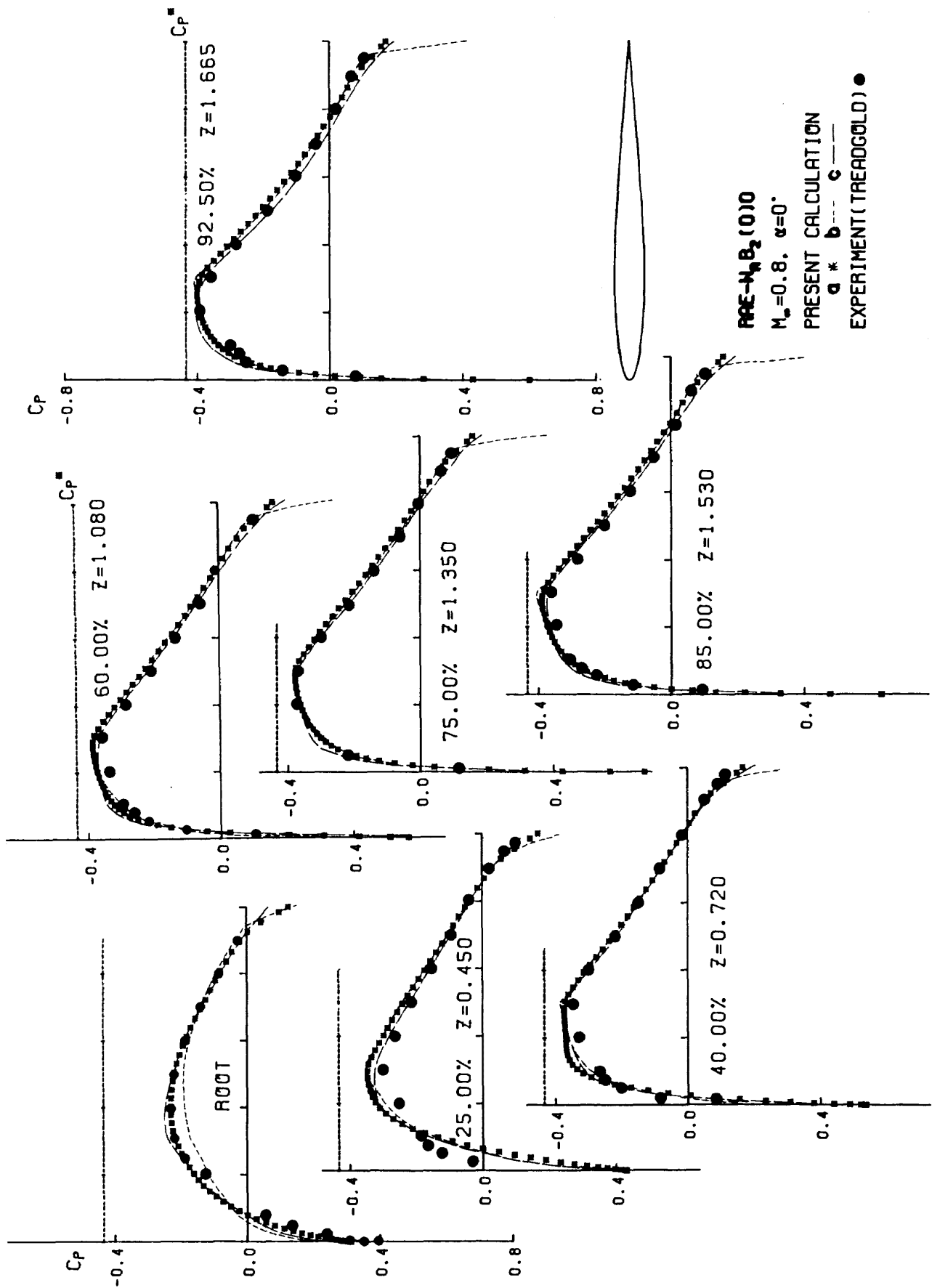


図 4.4 計算と実験による翼面圧力分布の比較

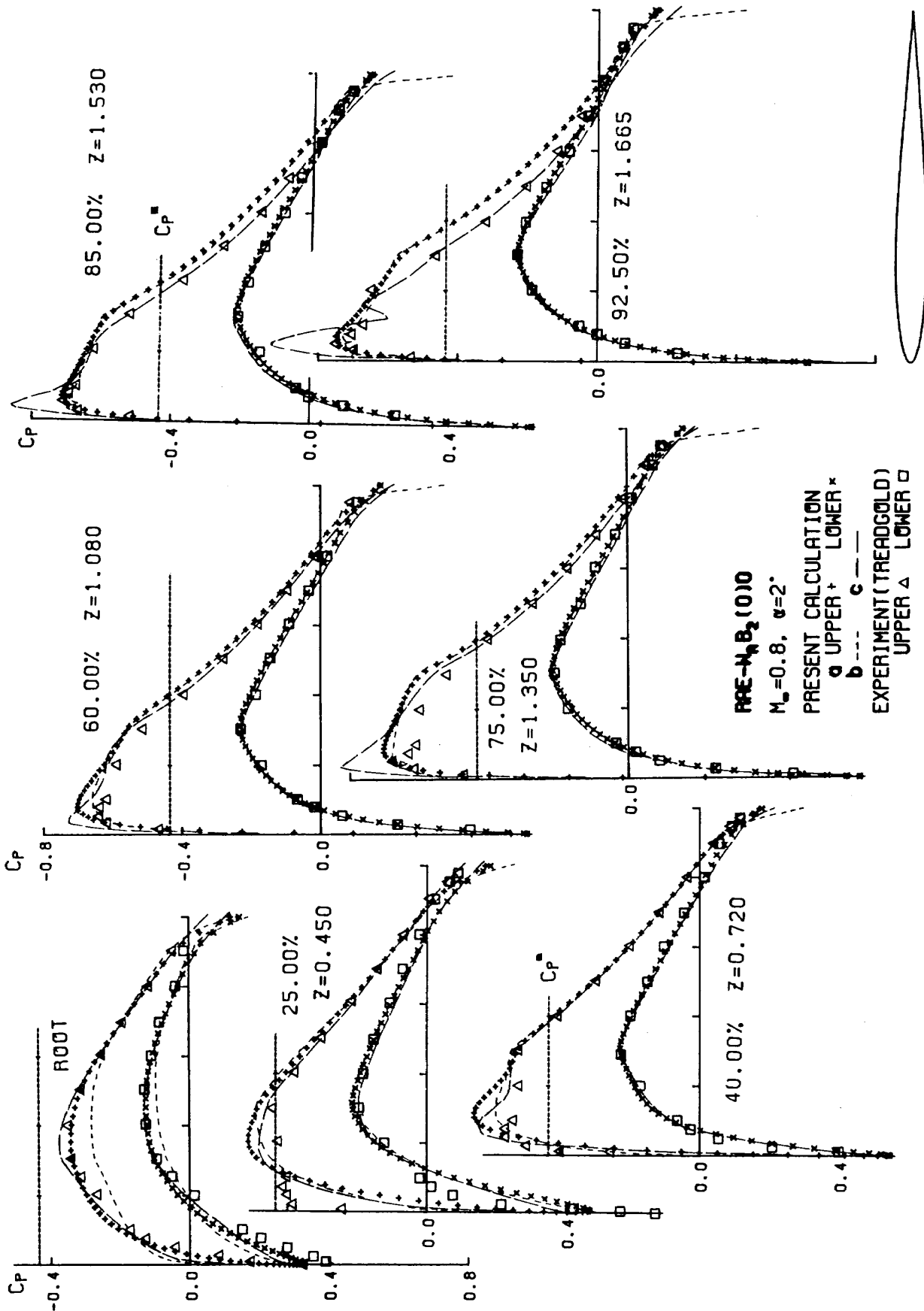


図 4.5 計算と実験による翼面圧力分布の比較



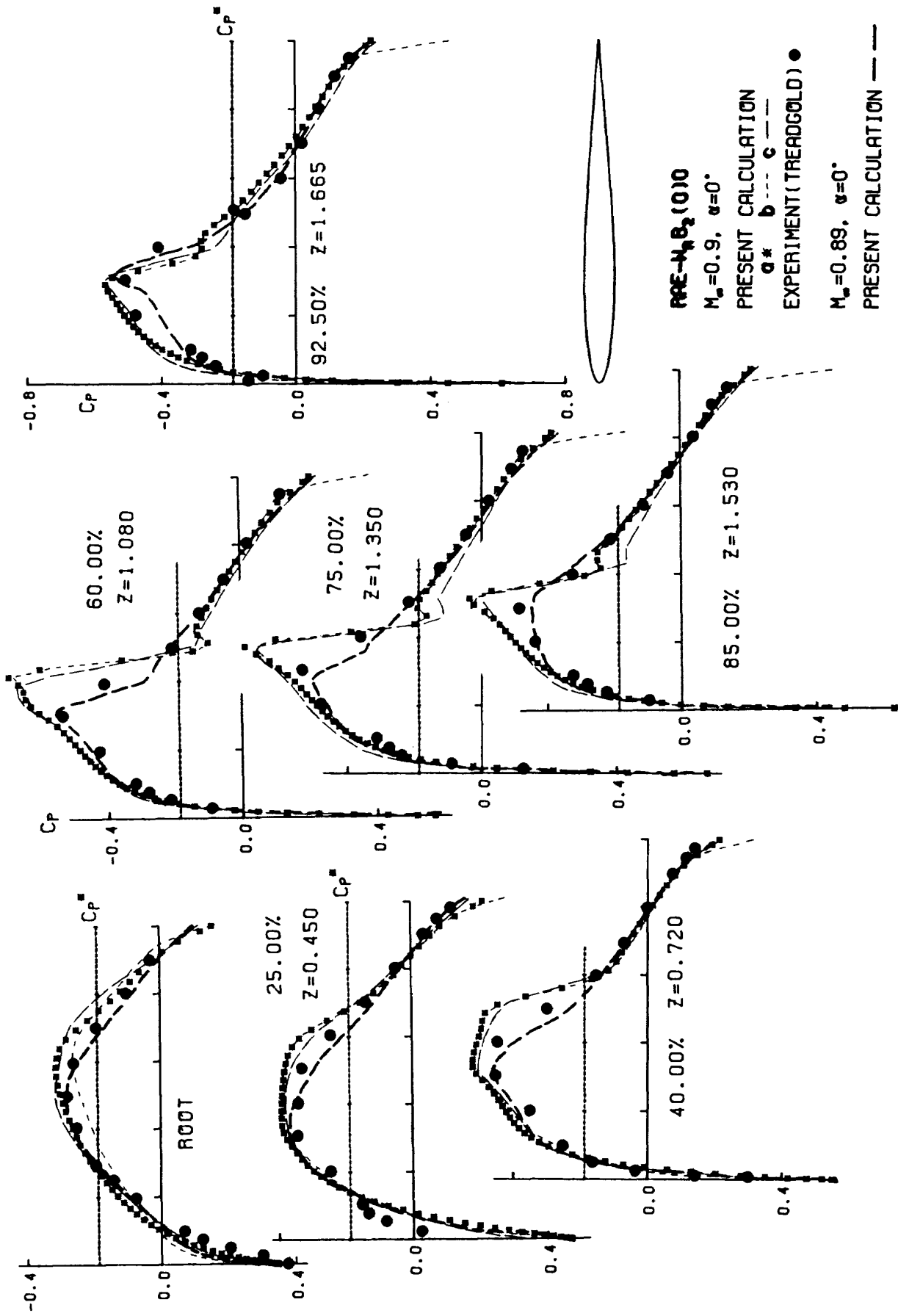


図 4.6 計算と実験による翼面圧力分布の比較

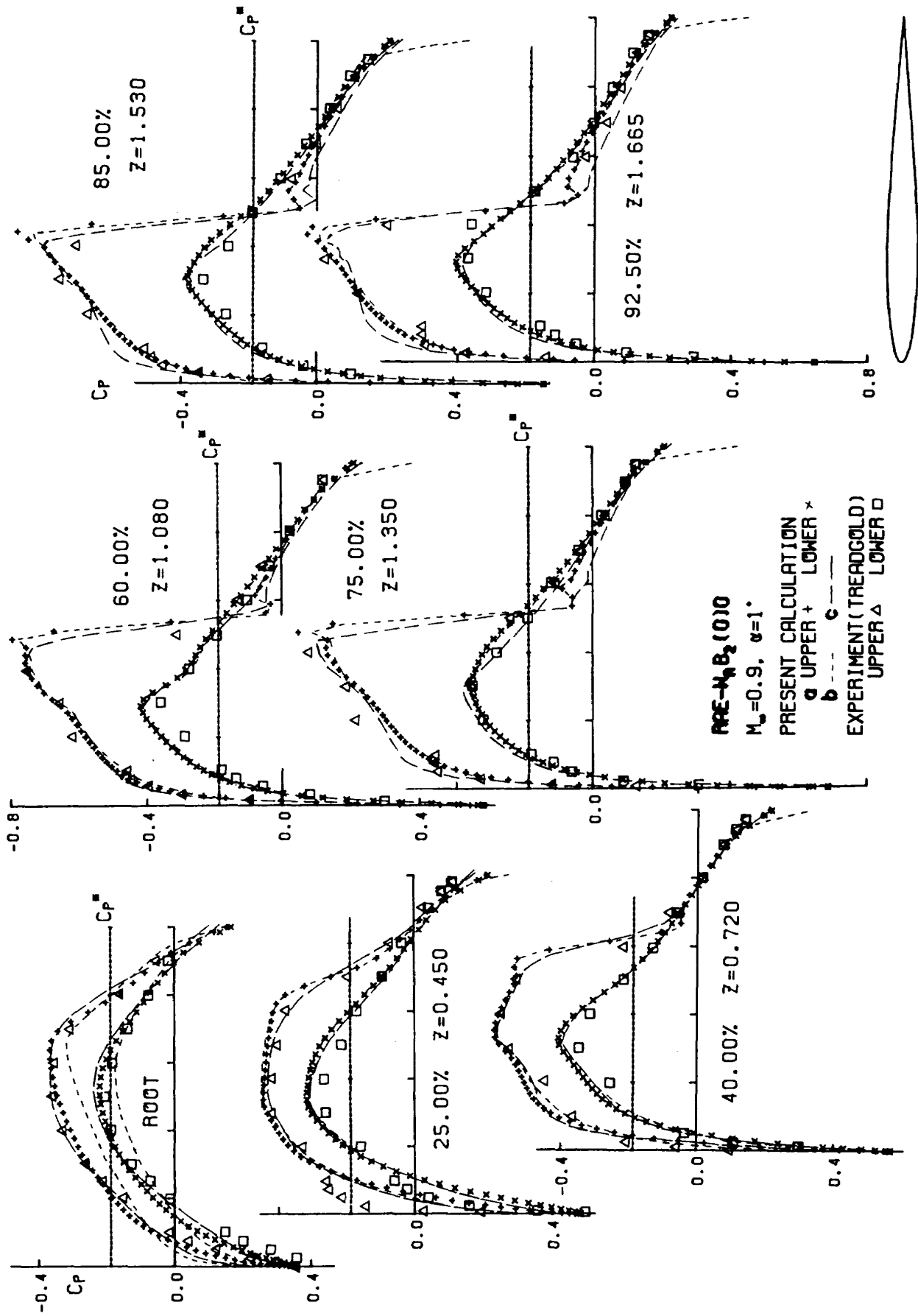


図 4.7 計算と実験による翼面圧力分布の比較

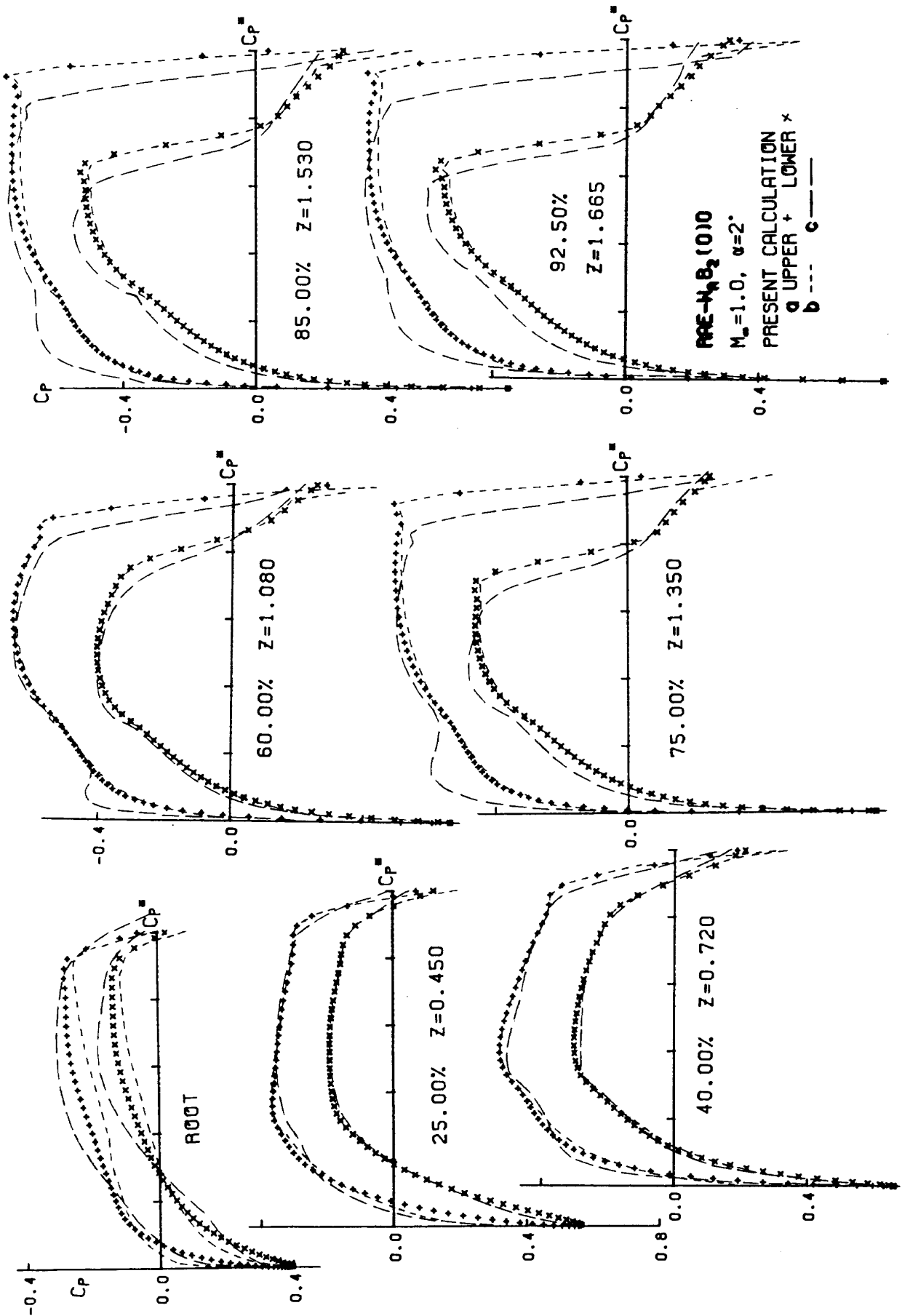


图 4.8 翼面压力分布

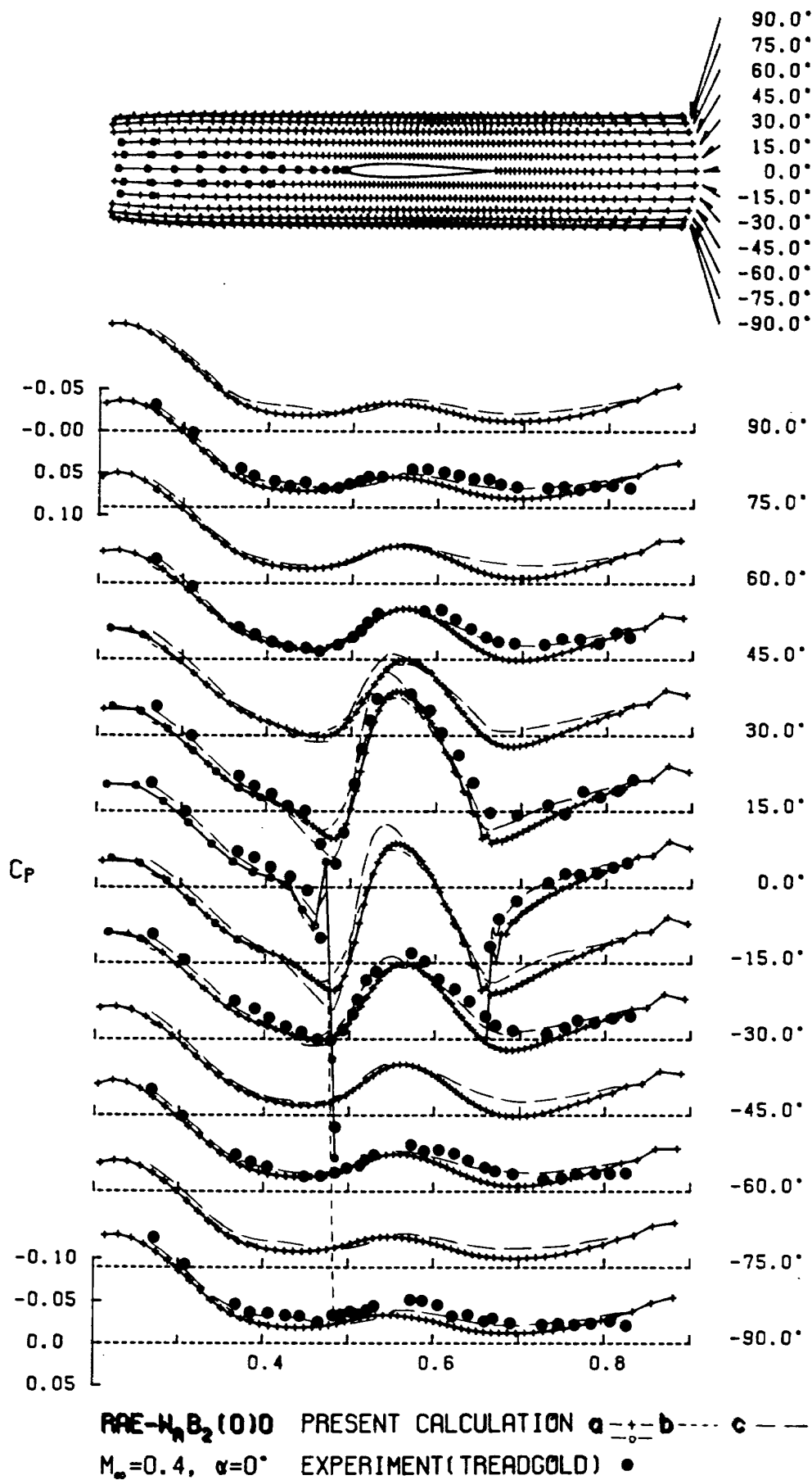


図 4.9 計算と実験による胴体面圧力分布の比較

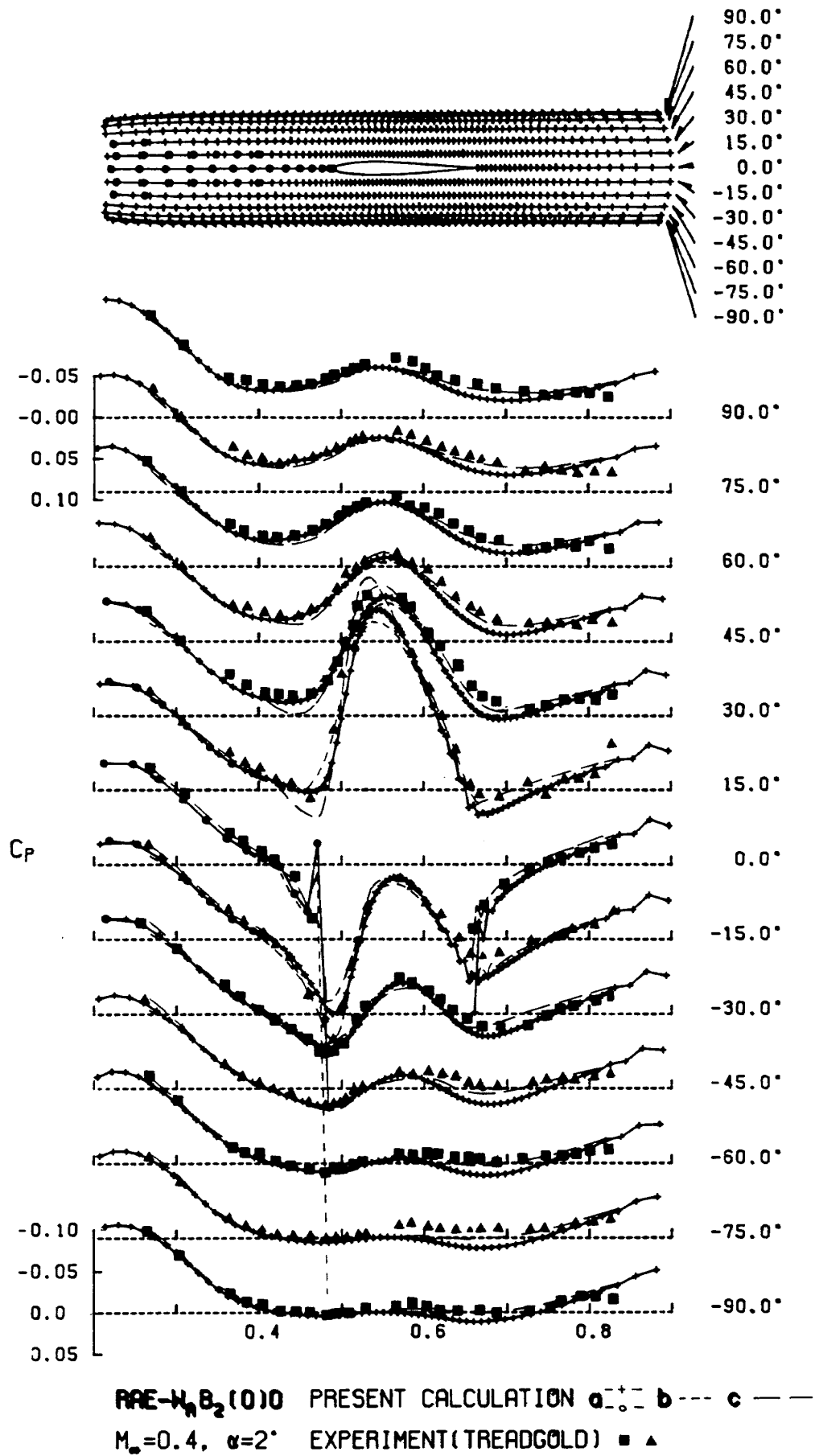


図4.10 計算と実験による胴体面圧力分布の比較

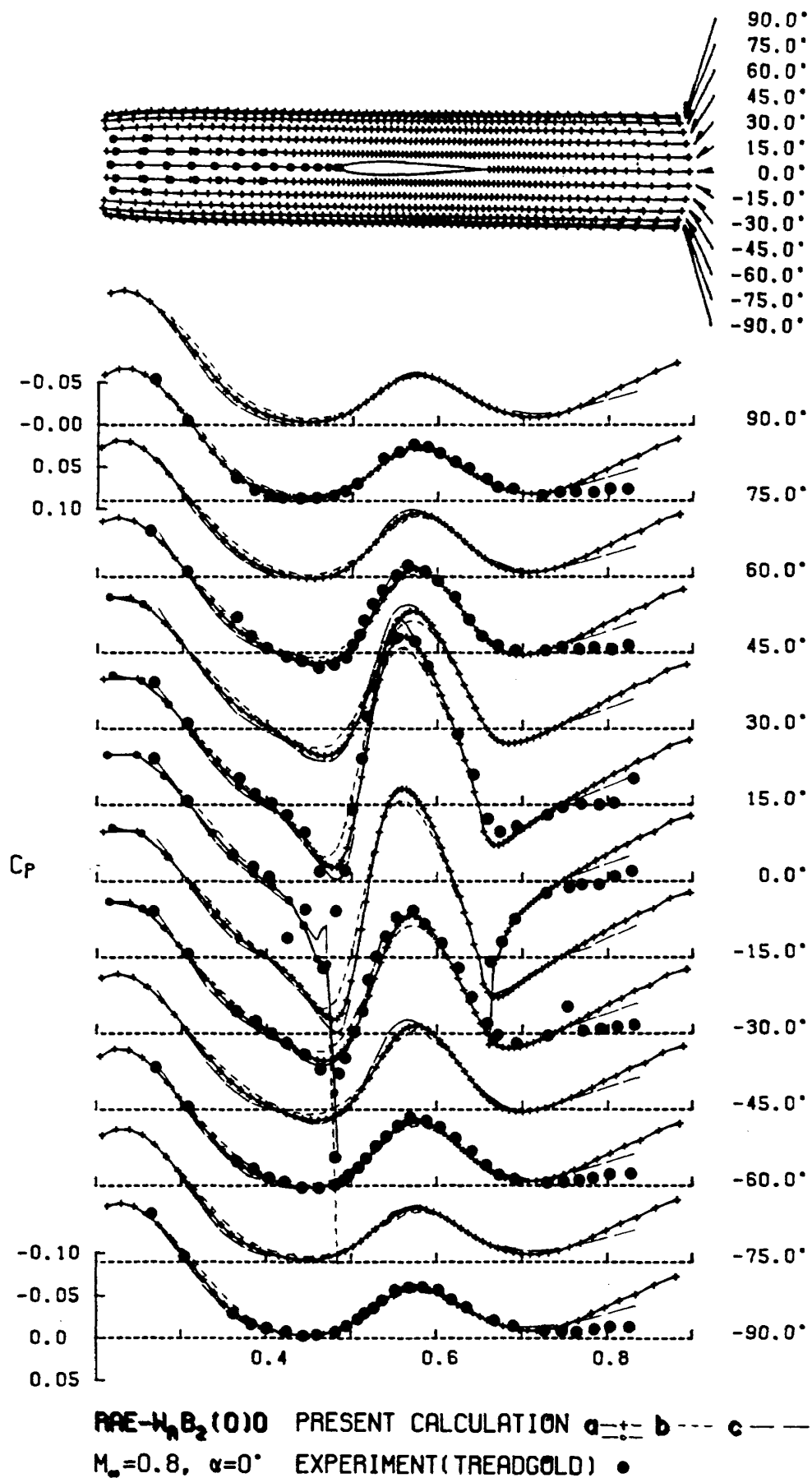


図4.11 計算と実験による胴体面圧力分布の比較

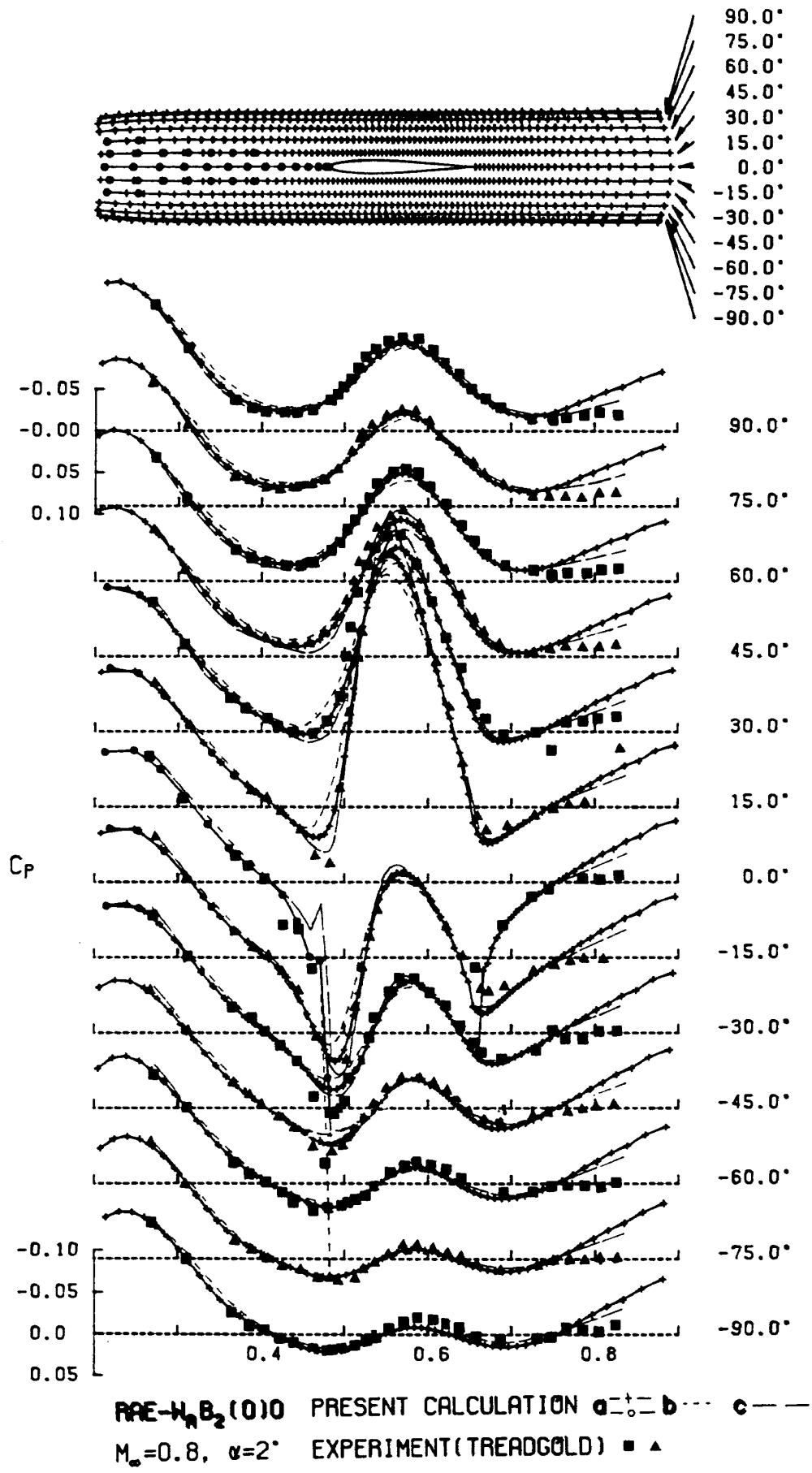


図4.12 計算と実験による胴体面圧力分布の比較

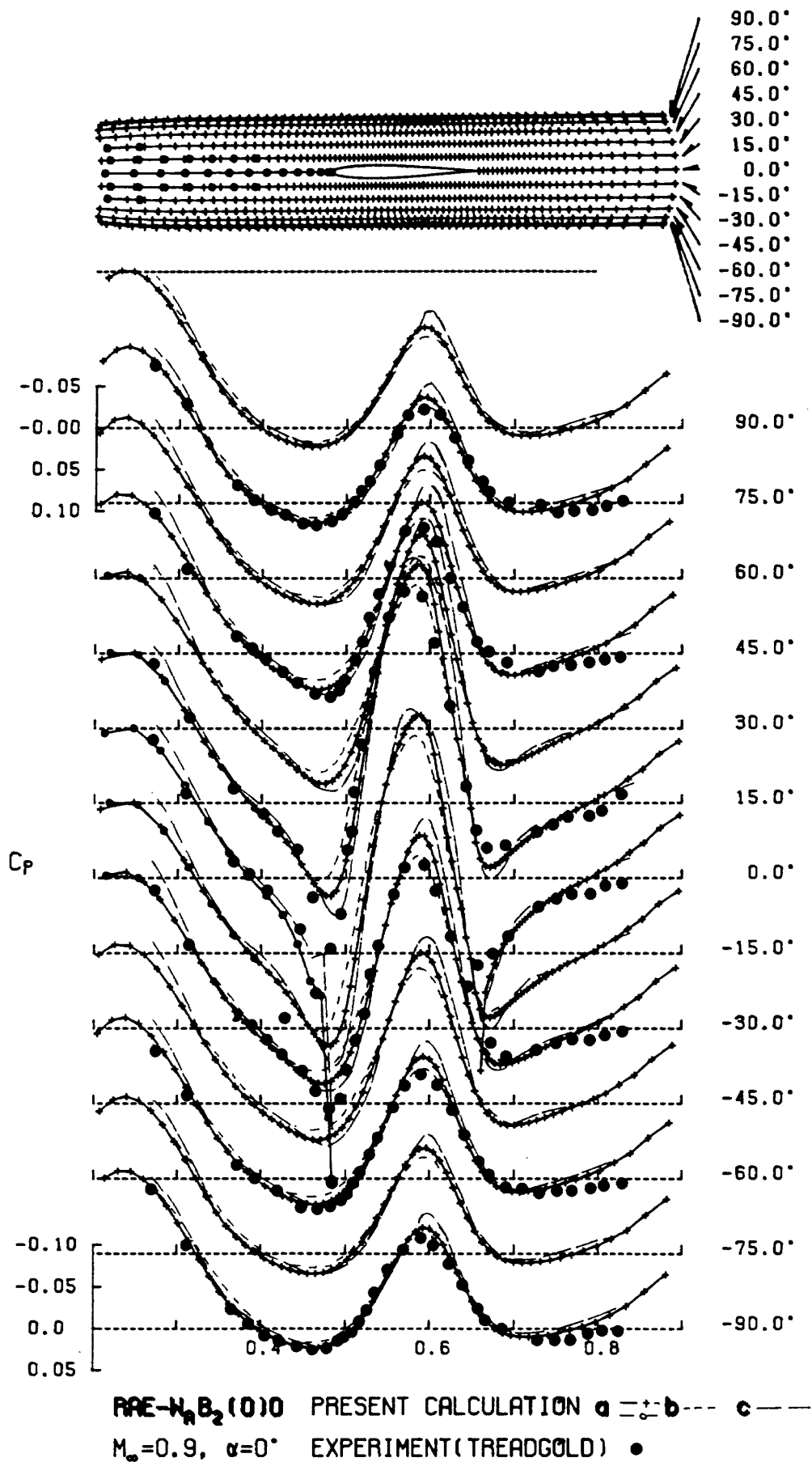


図4.13 計算と実験による胴体面圧力分布の比較



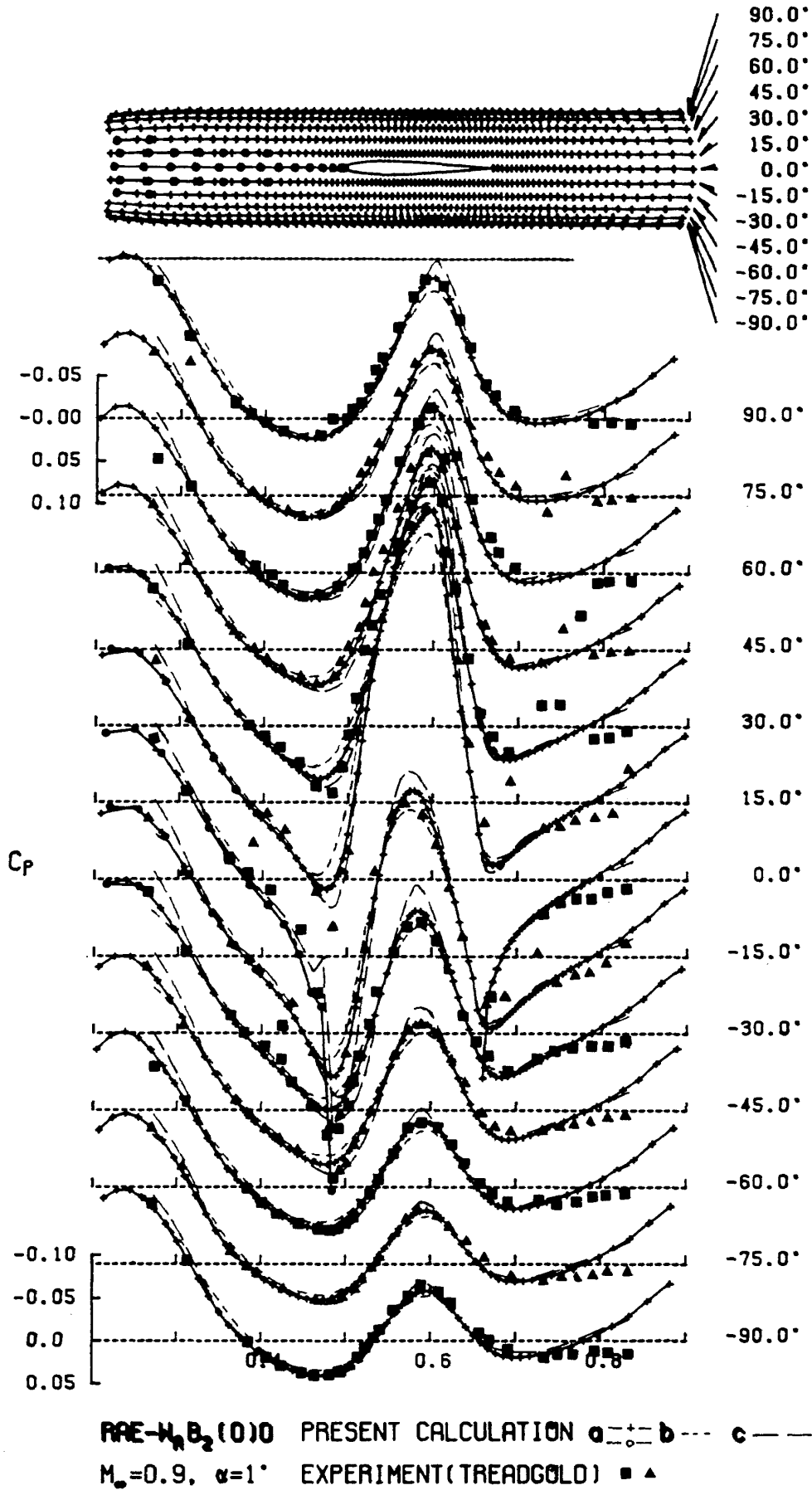


図4.14 計算と実験による胴体面圧力分布の比較

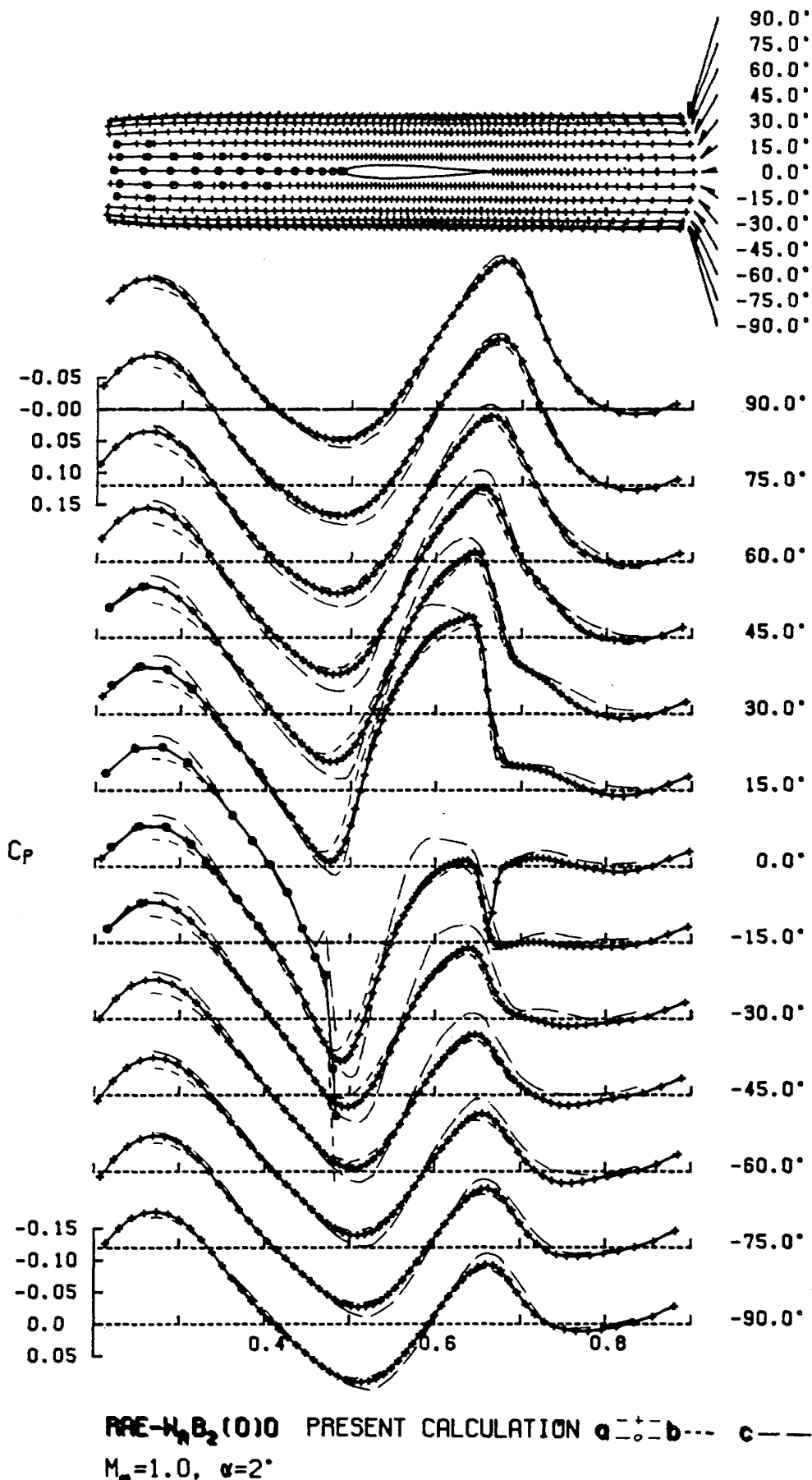


図4.15 胴体面圧力分布

---

## 航空宇宙技術研究所報告 896号

昭和60年12月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川 2 - 27 - 12

---

