

ISSN 0389-4010  
UDC 532.525

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-904

理想流体を想定したコアンダ効果の2次元解析

高 沢 金 吾

1986年4月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 理想流体を想定したコアンダ効果の2次元解析\*

高 沢 金 吾\*\*

## Two-Dimensional Analysis of Coanda Effect in Ideal Fluid

Kingo TAKASAWA

### ABSTRACT

The Coanda effect, or the phenomenon of a jet running along a curved wall is analysed with a two-dimensional approach assuming an ideal fluid. A thick jet emerging from a nozzle with an arbitrary kick down angle is mainly concerned, relative to the upper-surface-blowing high lift concept. The result of the free stream line analysis of a jet running along an infinite plane wall is conformally transformed under the constraint of the conservation of the free stream line condition, and the Coanda flow along the curved wall is deduced. Not only the shape of the stream lines but also the flow velocity vector diagram and the wall pressure coefficient are calculated. The effect of the finiteness of a plane wall or the existence of the trailing edge of a wing/flap is also evaluated. Computation is executable with a 16-bit desk top computer, and programs written in the BASIC language are available.

### 1. ま え が き

ジェットが剝離することなく曲面壁に付着して流れる現象はコアンダ効果<sup>1)</sup>と呼ばれている。コアンダ効果を基本原理とするUSB方式高揚力システムがSTOL実験機に应用されるに至り<sup>2),3),4),5),6)</sup>航空分野での実用面における重要性も極めて高まっている。USB方式高揚力システムの空気力学的特性に関しては当研究所における風洞試験の蓄積をはじめとする多くの実験的研究のみならず解析的研究<sup>7),8),9),10)</sup>が行われてきた。しかし、その基本的なメカニズム

であるコアンダ効果自体に関して明瞭な数学的記述がなされている例は少ない。この問題の難かしさは粘性の効果が卓越するジェットの取り扱いにあると思われる。中口は狭いスリットから曲面壁に接するように噴出するジェットについて粘性流としての理論的取り扱い及び実験計測を含む広範な研究<sup>11)</sup>を行い、ジェットの付着のメカニズムを「ジェットに働く圧力は乱流混合によって生じると思われ、壁面に現われる負圧は壁の曲率半径と同一の半径で旋回して流れるジェットに働く遠心力による圧力と近似的に等しい。」(脚註の拙訳)と説明している。

(脚註)

The pressure acting on the jet is assumed to be provided by the turbulent mixing and the negative pressure appearing on the wall surface then equals approximately to the centrifugal pressure which may act on the jet turning with the same radius as that of curvature of the wall.

\* 昭和60年12月23日受付

\*\* 新型航空機研究グループ

ここでは、USB 高揚力システムへの適用を念頭においてキック・ダウン角  $\alpha$  (図 1 参照) のついたノズルから噴出する厚いジェット<sup>7),8),9)</sup> を考察する。この場合ノズル出口及び主翼とフラップ面付近は一部にポテンシャル・コアを含む流れの展開領域になっている。したがって将来粘性流の取り扱いが望まれるにしても、第一着手として理想流体の自由流線理論に立脚した取り扱いの可能性を検討する価値はあろう。40 年前に Lighthill が風洞の偏向部の設計<sup>12)</sup> に関連して、ごく最近では波多野が折れ曲った下壁を有する噴出口から出る噴流<sup>13)</sup> について同様の発想に基づく解析結果を報告している。

3 節ではまず理想流体について無限に広がった平面壁に沿う 2 次元ジェットの自由流線理論<sup>14),15)</sup> による定式化を行なう。この問題はジェットのキック・ダウン角が  $\pi$  の場合には有名な Borda の流出口の問題<sup>16)</sup> で Helmholtz によって解かれた。同じく  $\pi/2$  の場合には Kirchhoff と Rayleigh によって論じられた。これらのキック・ダウン角度を含め、7 種の角度についての von Mises による計算結果が Zeuner による重力の影響の補正を経た Weisbach による実験値と比較<sup>17)</sup> されている。ここでは任意のキック・ダウン角度をもつ場合に自由流線について数値積分を行なうことによって解を得る。数値積分の結果は  $\pi/4$  の場合の解析解との比較によって十分な精度を確認できる。自由流線ばかりでなく、一般の流線についても数値積分を行なう手法を示し流線の形状を求める。4 節ではジェットの色度分布と圧力分布を求める。5 節では自由流線に沿う色度の大きさが保たれるような写像変換を用いて平面壁に沿うジェットから円柱壁に沿うジェットを導く。6 節では写像関数を若干修正することによって近似的に自由流線が保存されるような楕円柱壁に沿うジェットの解析を行なう。7 節ではこれらのジェットについて色度分布と圧力分布を計算する。ジェットの初期の噴出方向に長軸をもつ楕円柱壁の場合にはジェットが加速流れになっていることが示され、これから剝離の抑制と楕円柱壁への強力なジェットの付着即ちコアンダ効果の発生を推察することができる。円柱壁に接するように噴出する薄いジェットについては壁面の圧力係数の解析解が得られ、参考文献 11) の (2

4) 式と一致する。8 節では 3 節に対する補足として平面壁に端がある場合 (USB フラップの後縁を考慮することに相当) について述べる。ノズルより後ろの平面壁の長さが短いと平面壁にたいして斜めになった後流が生じる。ノズルより後ろの平面壁の長さがノズルの高さの 2 倍以上になると流れは平面壁と殆ど平行になり、無限に広がる平面壁の場合と一致するとみなすことができる。付録 C には BASIC で書いた計算プログラムを記載した。

## 2. 主要な記号

- $b$  : 後流無限遠方でのジェットの高さ  
自由流線の流れ関数の値
- $b_0$  : ノズル後端 (B 点) の平面壁からの高さ
- $c$  : 一般の流線の流れ関数の値
- $C_p$  : 圧力係数
- $i$  : 虚数記号
- $p$  : 静圧
- $p_a$  : 周囲の圧力
- $q$  : 色度の大きさ
- $R$  : 円柱壁の半径
- $r$  :  $z$  平面を極座標表示した動径
- $T$  : 平面壁の後端 (E 点) に対応する  $t$  の値
- $t$  : Schwarz-Christoffel の変換で用いる複素平面…図 1 及び図 17 参照  $t = \sigma + i\tau$
- $u$  :  $x$  方向の色度成分
- $v$  :  $y$  方向の色度成分
- $w$  : 複素ポテンシャル関数
- $X$  :  $Z$  平面の実軸
- $x$  :  $z$  平面の実軸
- $Y$  :  $Z$  平面の虚軸
- $y$  :  $z$  平面の虚軸
- $Z$  : 複素平面  $Z = X + iY$ , 曲面壁に沿う流れを記述する物理面
- $z$  : 複素平面  $z = x + iy$ , 平面壁に沿う流れを記述する物理面…図 1 及び図 17 参照
- $\alpha$  : ノズルのキック・ダウン角度…図 1 及び図 17 参照
- $\zeta$  :  $dz/dw$  色度関数の逆数, ホドグラフ面…図 1 及び図 17 参照
- $\theta$  :  $z$  平面を極座標表示した偏角, 色度の偏角

$\Omega$  平面の虚軸

$\kappa$  : 正の常数, (15)式参照

$A$  : (14)式参照

$\mu$  : 常数,  $\exp(-\kappa b) > |\mu|$

$\pi$  : 円周率

$\sigma$  :  $t$  の実部

$\tau$  :  $t$  の虚部

$\phi$  : 平面壁の後端 (E点) に対応する  $\phi$  の値

$\phi$  : 速度ポテンシャル

$\Psi$  : B点を通る流線の  $\phi$  の値

$\phi$  : 流れ関数

$\Omega$  : 対数変換されたホドグラフ面…図1及び図17参照

### 3. 自由流線理論

理想流体の2次元流についてコアンダ効果を解析する目的で, まず図1の $z$ 面に描かれた任意のキック・ダウン角を持つ斜めのノズル壁ABと $x$ 軸に沿って無限に広がる平面壁DEの間の流れ(脚註)を調べる。流れは $x$ 軸の左から右に向かっており,  $x$ 軸の負の部分ではABとDEの間のチャンネル流,  $x$ 軸の正の部分ではDEに沿うジェットになっている。図の破線BCで表わされた部分はジェットの自由流線である。参考文献14)の73項に述べられている方法に従って解析を行なうことにし, ABと対称の位置に仮想のノズル壁A'B'を配置してこの間の流れを解く。

図1に示した5種の複素平面について簡単に説明を加え, のちほど必要となる数式を記述しておく。 $z$ 面は平面壁に沿う流れを記述する物理面である。

$w$ 面は複素ポテンシャル関数

$$w = \phi + i\psi \quad (1)$$

を記述する。

次に関数 $\zeta = dz/dw$ を考えると, これは速度関数の逆数で, 速度の絶対値を $q$ , 偏角を $\theta$ とすると

$$\zeta = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{u - iv} = \frac{\exp(i\theta)}{q} \quad (2)$$

したがって $\zeta$ 面はホドグラフ面である。

$\Omega$ 面は

$$\Omega = \log \zeta = -\log q + i\theta \quad (3)$$

によって得られる対数ホドグラフ面である。 $t$ 面は $w$ 面と $\Omega$ 面を関係づけるための媒介平面である。

Schwarz-Christoffelの変換を用いると図1の $t$ 面の上半分を $w$ 面及び $\Omega$ 面の斜線の領域に写像する関数を求めることができる。即ち $t$ 面と $w$ 面の関係については

$$w = -(2\Psi/\pi) \log t + i\Psi \quad (4)$$

$t$ 面と $\Omega$ 面の関係については

$t$ が実数の場合に $t > -1$ では

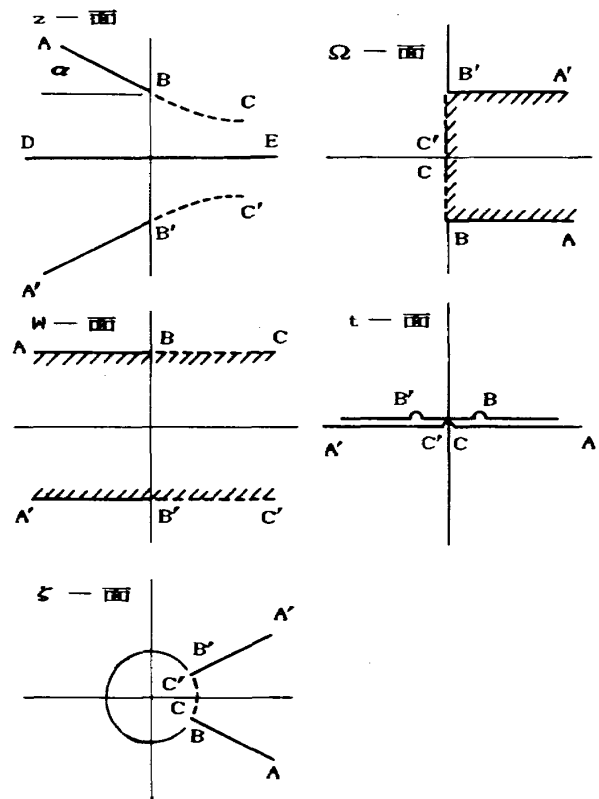


図1 自由流線理論の写像

(脚註)

ここで考えている理想流体の流れに対して, 粘性の効果を含む現実的な流れは噴流 (turbulent jet) である。そのうちノズル出口に近い部分は一部にポテンシャル・コアを含む流れの展開領域になっている。2次元壁面噴流の場合に噴流の高さの増加は, 図2に示したようにノズル出口の高さを $b_0$ としたときに, 出口から上流に $10b_0$ さかのぼった所を仮想原点として $b=0.068x$ 程度である<sup>18)</sup>とされている。したがってノズル出口から $b_0$ の数倍程度下流までの領域を考察の対象とするかぎりでは, 理想流体による解析でも物理現象からのひどい逸脱を免れることが期待される。

$$Q = (2\alpha/\pi) \log \{ t + (t^2 - 1)^{1/2} \} - i\alpha \quad (5-a)$$

$t < -1$  では

$$Q = -(2\alpha/\pi) \log \{ t + (t^2 - 1)^{1/2} \} + i3\alpha \quad (5-b)$$

虚部  $\tau$  が正である複素数  $t = \sigma + i\tau$  について

$\sigma \geq 0$  では

$$Q = (2\alpha/\pi) \log \{ t + (t^2 - 1)^{1/2} \} - i\alpha \quad (6-a)$$

$\sigma < 0$  では

$$Q = -(2\alpha/\pi) \log \{ t + (t^2 - 1)^{1/2} \} - i\alpha \quad (6-b)$$

$\alpha$  が特定の値である場合には自由流線 BC について解析解が得られている。<sup>14), 15), 16), 17), 19)</sup>

つぎに  $\phi = c$  ( $0 \leq c \leq b$ ) なる一般の流線の形状を求める。(2)式と(3)式から

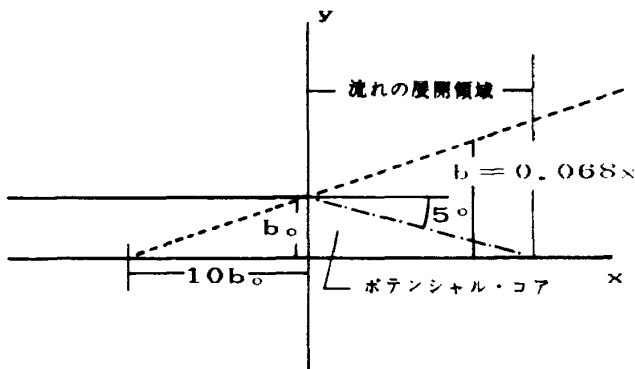


図2 2次元壁面噴流

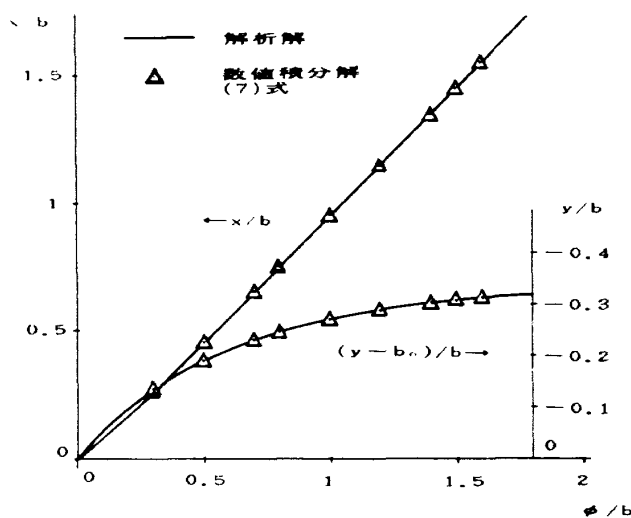


図3 自由流線の計算精度の確認  $\alpha = \pi/4$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{dz}{dw} \frac{dw}{\partial \phi} = \zeta = \exp Q \quad (7)$$

(4)式で  $w = \phi + ic$  および  $\Psi = b$  とすると

$$t = \exp \{ -(\pi/2)(\phi/b) + i\pi(1-c/b)/2 \} \quad (8)$$

(8)式を(5-a, b)式及び(6-a, b)式に代入して  $t$  を消去し, さらに(7)式に代入して  $Q$  を消去すると  $\partial z/\partial \phi$  は  $\alpha$ ,  $\phi/b$ , 及び  $c/b$  の関数として表わすことができる。 $\alpha=0$  では  $Q=0$  となり,  $(\partial z/\partial \phi) = 1$  即ち流線は  $x$  軸に平行になる。

$\alpha = \pi/4$  かつ  $c = b$  の場合に  $\phi = 0$  を起点として  $\partial x/\partial \phi$ ,  $\partial y/\partial \phi$  を数値積分して得られる  $x/b$  と  $(y-b_0)/b$  を図3に△印で示し解析解と比較してある。数値積分解は解析解とよく一致しており, 数値積分の精度を確認することができる。一般の流線の場合には  $\phi = 0$  での  $x$  及び  $y$  の値は共に未知である。しかし上流側の無限遠方で  $\partial \phi/\partial n = 0$ , 下流側の無限遠方で  $\phi = y$ , 固定境界面と自由流線の形状が既知である故に境界条件を確定できるので  $\phi$  に関するラプラスの方程式を解くことによって流れ場を決定できる筈である。ここではこの正統なやり方の繁雑さを避けるために若干簡便なやり方で進んでみる。

計算を行なってみると  $\phi/b$  が3程度で  $\partial x/\partial \phi$  は1に,  $\partial y/\partial \phi$  は0に収れんしていることが分かる。従ってこれよりも後流側では流線は互いに平行な直線群とみなしてよく, 速度の大きさは至るところで1になっていることが分かる。流線の形状を決定するために  $\partial x/\partial \phi$ ,  $\partial y/\partial \phi$  を  $\phi$  に関して積分し始める起点を便宜的に  $\phi/b = 2.8$  に選んだ。この起点で総ての流線の勾配は近似的に

$$dy/dx = (\partial y/\partial \phi) / (\partial x/\partial \phi) = 0$$

になっている。 $\phi = 0$  の流線の起点 ( $\phi/b = 2.8$ ) での座標を  $(x_0, y_0)$  とする。他の流線  $\phi = c$  の起点 ( $\phi/b = 2.8$ ) での座標  $(x_c, y_c)$  は

$$x_c = \frac{-(\partial y/\partial \phi) \cdot c}{\{(\partial x/\partial \phi)^2 + (\partial y/\partial \phi)^2\}^{1/2}}$$

$$y_c = \frac{(\partial x/\partial \phi) \cdot c}{\{(\partial x/\partial \phi)^2 + (\partial y/\partial \phi)^2\}^{1/2}}$$

と設定できる。よって一般の流線は

$$x = \int_{2.8b}^{\phi} \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi + x_c \quad (9-a)$$

$$y = \int_{2.8b}^{\phi} \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi + y_c \quad (9-b)$$

言うまでもなく、(9-a, b)式で  $c$  を  $b$  と置き換えると流線 ABC,  $c$  を 0 と置き換えると流線 DEF が得られる。(  $x_0, y_0$  ) を適当に選べば、DE が

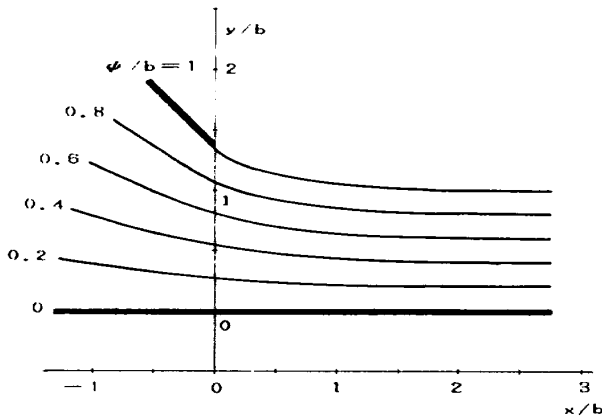


図4a 平面壁に沿うジェットの流れ  $\alpha = \pi/4$

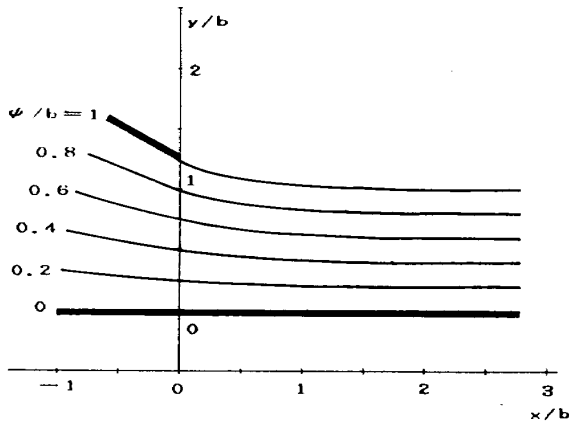


図4b 平面壁に沿うジェットの流れ  $\alpha = \pi/6$

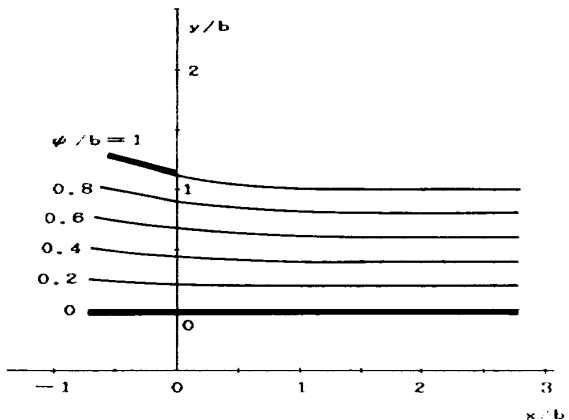


図4c 平面壁に沿うジェットの流れ  $\alpha = \pi/12$

$x$  軸に重なり、ノズル後端が  $y$  軸上に来るようにできる。

ノズルの上流では錐状流になっていることが容易に推察され、(9-a, b)式を実際に計算すると明瞭に確認できる。図4a, b及びcには  $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/12$  の各場合について  $c$  をパラメタとして流線を計算した結果を示す。チャンネル流の部分では流線はほぼ直線で、その  $x$  軸となす角度が流れ関数の値に比例しており、ノズル出口に向かって増速していることがわかる。ジェットの部分では流線は次第に増速し下壁に平行に近づく。キック・ダウン角度  $\alpha$  が大きい場合ほど増速の傾向が顕著で  $x/b$  の大きな値まで増速が持続する。

#### 4. 速度分布及び圧力分布

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \phi} + i \frac{\partial y}{\partial \phi} &= \frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{dz}{dw} \frac{dw}{\partial \phi} = \frac{dz}{dw} \\ &= \frac{1}{u - iv} = \frac{u + iv}{u^2 + v^2} \end{aligned}$$

であるから

$$u = \frac{\partial x / \partial \phi}{(\partial x / \partial \phi)^2 + (\partial y / \partial \phi)^2} \quad (10-a)$$

$$v = \frac{\partial y / \partial \phi}{(\partial x / \partial \phi)^2 + (\partial y / \partial \phi)^2} \quad (10-b)$$

$\alpha = 0$  では  $(\partial z / \partial \phi) = 1$  即ち  $u = 1, v = 0$  である。図5に  $\alpha = \pi/4, b = 1$  の場合の流線に沿う速度ベクトルを示す。自由流線に沿う速度の大きさは1である。速度ベクトルの基点は一定の  $\phi$  になるように選んである。ラプラス方程式を厳密に解く代わ

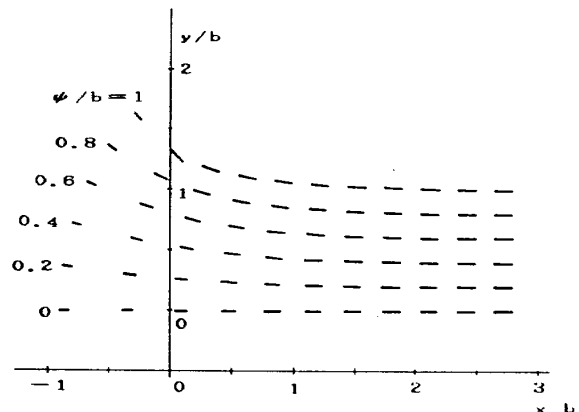


図5 平面壁に沿うジェットの流れ  $\alpha = \pi/4$

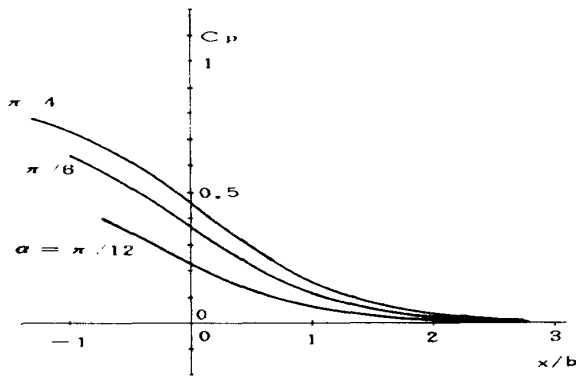


図6 平面壁の表面圧力係数

りに  $\phi/b = 2.8$  で便宜的に流線の積分の初期条件を決めたけれども、等ポテンシャル線と流線は直交しており、妥当な結果が得られたことが分かる。

総ての流線について全圧が一定であるものとし、自由流線の外側の静圧を  $p$  とする。自由流線に沿う速度は 1 であるから、ジェットの静圧を圧力係数で表わすと

$$C_p = \frac{p - p_a}{\rho/2} = 1 - (u^2 + v^2) \quad (11)$$

$$= 1 - \frac{1}{(\partial x / \partial \phi)^2 + (\partial y / \partial \phi)^2}$$

となる。図6には  $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/12$  の各場合について平板の表面の圧力係数をプロットしてある。キック・ダウン角度の増加とともにノズルの出口付近の圧力係数が増加する。

## 5. 円柱壁に沿うジェット

(1) 適当な写像関数を  $Z = f(z)$  とし、この逆関数  $z = g(Z)$  を複素ポテンシャル  $w = w(z)$  に代入すると複素数  $Z$  の正則関数  $w = w\{g(Z)\}$  を得る。 $Z$  面での速度は

$$U - iV = \frac{dw}{dZ} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dZ} = (u - iv) \frac{dz}{dZ} \quad (12)$$

である。自由流線の上で  $dz/dZ$  の絶対値が 0 でない常数になるような写像関数  $f(z)$  を求めることができれば  $U - iV$  の絶対値も常数になって、写像を行なったのちにも自由流線は引き続き自由流線であり続ける。 $|dz/dZ|$  が常数であるかぎりその値の大きさは単に  $z$  面と  $Z$  面の尺度を変えるだけであるからこの値を 1 としてパラメタの数を節約する。得られた写像を行なうことによって平面壁に沿うジェ

ットから曲面壁に沿うジェットの 1 例を得たことになる。

$x^* = (b_0 - b) / \tan \alpha$  とおいて、平面壁に沿うジェットの自由流線を

$$z = x + ib + i(b_0 - b)x^* / (x + x^*) \quad (13)$$

と近似すると、自由流線の高さと勾配を  $x = 0$  および  $x = \infty$  においてともに正しく表わすことができる。このときに

$$|dz/dx| = \{1 + (b_0 - b)^2 x^{*2} / (x + x^*)^4\}^{1/2} = A(x; \alpha) \quad (14)$$

を用いて関数

$$Z = X + iY = (iA/\kappa) \exp(-i\kappa x) \quad (15)$$

を作る。

(13)式の逆関数は

$$x = (z - x^* - ib) / 2 + \{(z - x^* - ib)^2 + 4(z - ib_0)x^*\}^{1/2} / 2 \quad (16)$$

である。

(16)式は  $z$  の陽関数であるからこれを(15)式の  $x$  に代入すると写像関数  $f(z)$  が得られる。ちなみに

$$|dZ/dx|^2 = A^2 + (dA/dx)^2 / \kappa^2 = A^2 + 4(b_0 - b)^8 / \{\kappa^2 \tan^4 \alpha A^2 (x + x^*)^{10}\}$$

であって、右辺第 2 項が誤差で  $x$  の増加とともに急激に減少する。

近似に伴う誤差を  $\alpha = \pi/4$  の場合について評価した結果を表 1 に示す。平面壁に沿うジェットの自

表 1 近似の程度に関する検討 ( $\alpha = \pi/4$  の場合)

$\phi/b$	(16)式による $x/b$	$z/b$ の実部	$ dZ/dz $
2.80	2.749 - 0.037 i	2.748	0.982
2.65	2.599 - 0.037 i	2.598	0.981
2.50	2.449 - 0.038 i	2.448	0.981
2.35	2.299 - 0.039 i	2.298	0.980
2.20	2.149 - 0.039 i	2.148	0.980
2.05	1.999 - 0.039 i	1.998	0.980
1.90	1.849 - 0.039 i	1.848	0.980
1.75	1.700 - 0.039 i	1.698	0.980
1.60	1.550 - 0.038 i	1.549	0.980
1.45	1.400 - 0.036 i	1.399	0.981
1.30	1.250 - 0.034 i	1.249	0.982
1.15	1.101 - 0.030 i	1.099	0.984
1.00	0.952 - 0.025 i	0.950	0.986
0.85	0.803 - 0.019 i	0.801	0.990
0.70	0.654 - 0.011 i	0.653	0.996
0.55	0.506 - 0.002 i	0.506	1.006
0.40	0.359 + 0.006 i	0.360	1.039
0.25	0.214 + 0.011 i	0.218	1.300
0.10	0.078 + 0.007 i	0.082	3.094

由流線上の  $z$  を(10)式に代入して得られる複素数  $x$  を  $z$  の実部と比較すると誤差は  $\phi/b \geq 0.40$  では2%以下である。自由流線に沿う  $|dZ/dz|$  の誤差は  $\phi/b \geq 0.40$  では4%以下である。USB高揚力システムで用いられるより小さいキック・ダウン角度では誤差は更に小さくなる。

図7はこの場合の流線図 ( $\alpha = \pi/4$ ,  $\kappa b = 0.5$ ,  $\phi/b = \sim 2.8$ ) である。 $\phi/b$  が小さくなると流線の形が近似にともなう誤差のために異常になるので妥当と思われる範囲だけを示した。 $z$  面の実軸は  $Z$  面の円に写像されている。

(2) ジェットが面に接するように噴出する場合 ( $\alpha = 0$  の場合) にはしばしば実験が行なわれている。この場合については(13)式に相当する  $z = x + ib$  が厳密に成立する。この逆関数は  $x = z - ib$  であり、写像関係は厳密に

$$Z = f(z) = (i/\kappa) \cdot \exp(-i\kappa z - \kappa b) \quad (17)$$

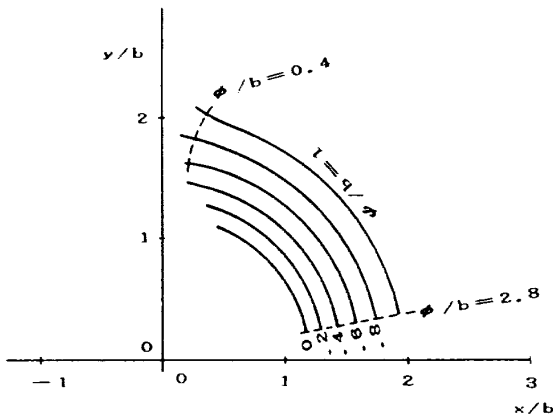


図7 円柱壁に沿うジェットの流線  
 $\alpha = \pi/4$ ,  $\kappa b = 0.5$

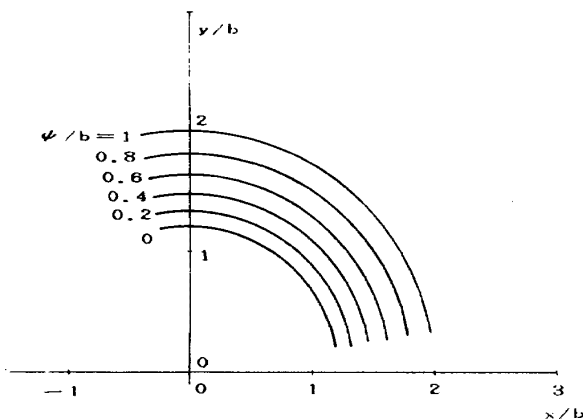


図8 円柱壁に沿うジェットの流線  
 $\alpha = 0$ ,  $\kappa b = 0.5$

である。 $z$  面の実軸に平行な直線  $z = x + iy$  は半径が  $\exp\{\kappa(y-b)\}/\kappa$  の円に写像される。すなわち円柱壁に接するように噴出するジェットの流れ場については厳密解が得られる。

図8はこの場合の流線図 ( $\alpha = 0$ ,  $\kappa b = 0.5$ ,  $\phi/b = -0.4 \sim 2.8$ ) である。内側ほど速度が大きい非回転流れの流線が描かれている。

(3) 平面壁に沿うジェットを自由流線が維持される条件のもとで写像変換することにより任意のキック・ダウン角を持つノズルより噴出し円柱壁に沿うジェットの解が得られた。キック・ダウン角度が0でない場合に得られる解は近似解であるけれどもノズルの近傍を除けば十分に精度がある。特にジェットが円柱壁に接するように噴出し、キック・ダウン角が0になる場合には厳密解が得られた。

自由境界をもつジェットが曲面に付着して流れる、いわゆるコアンダ効果を示す解が理想流体を想定して導かれたわけで、コアンダ効果は粘性の効果を想定していない理想流体の概念の範囲内で記述できる性質と推察される。

## 6. 楕円柱壁に沿うジェット

試みに  $\exp(-\kappa b) > \mu > 0$  であるような常数  $\mu$  を導入して、 $y$  の増加とともに(17)式に近づく次の写像関数を作ってみる。

$$\begin{aligned} Z &= (i/\kappa) \exp(-i\kappa z - \kappa b) - (i\mu/\kappa) \\ &\times \exp(i\kappa z) = (1/\kappa) \{ \exp(\kappa y - \kappa b) \\ &+ \mu \exp(-\kappa y) \} \sin \kappa x + (i/\kappa) \{ \exp(\kappa y - \kappa b) - \mu \exp(-\kappa y) \} \cos \kappa x \end{aligned} \quad (18)$$

この関数を使って  $z$  面の実軸を  $Z$  面に写像してみると長軸が  $2\{\exp(-\kappa b) + \mu\}/\kappa$ 、短軸が  $2\{\exp(-\kappa b) - \mu\}/\kappa$  の楕円になり、長軸が  $X$  軸に重なる。近似された自由流線  $z = x + ib$  は長軸が  $2\{1 + \mu \exp(-\kappa b)\}/\kappa$ 、短軸が  $2\{1 - \exp(-\kappa b)\}/\kappa$  の楕円に写像される。この楕円も長軸が  $X$  軸に重なっており、半径  $1/\kappa$  の円に近い。

この場合の流線図の例 ( $\alpha = \pi/4$ ,  $\kappa b = 0.5$ ,  $\mu = \exp(-\kappa b)/3 = 0.2022$ ) を図9に示す。このケースでは流線の間隔が下流に進むにつれて狭まって増速流になっている。従って実際の流れでも境界層の発達が抑制され、曲壁に強力に付着する流れが実



現し、いわゆるコアンダ効果を生じるものと考えられる。図 10 には意図的に  $\mu$  の符号だけを変えた場合の計算の結果を示している。この場合は減速流に

表 2 自由流線に沿う速度の大きさ  
( $\alpha = \pi/4$  の場合)

$\phi/b$		自由流線に沿う速度の大きさ			
		平面壁	円柱壁	楕円柱壁	
				$\mu = 0.2022$	$\mu = -0.2022$
2.8	1		1.019	1.126	0.897
2.6	1		1.019	1.109	0.905
2.4	1		1.020	1.087	0.917
2.2	1		1.020	1.062	0.931
2.0	1		1.021	1.035	0.947
1.8	1		1.021	1.007	0.965
1.6	1		1.020	0.979	0.985
1.4	1		1.019	0.953	1.004
1.2	1		1.017	0.928	1.021
1.0	1		1.014	0.905	1.034
0.8	1		1.008	0.883	1.040
0.6	1		0.998	0.861	1.035
0.4	1		0.963	0.838	1.017
0.2	1		0.820	0.812	0.983

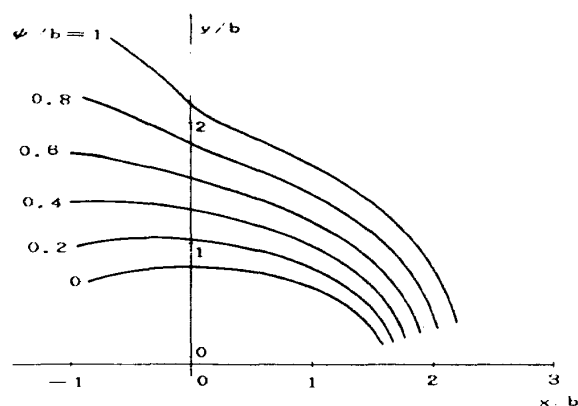


図 9 楕円柱壁に沿うジェットの流れ  $\alpha = \pi/4$ ,  $\kappa b = 0.5$ ,  $\mu = 0.2022$

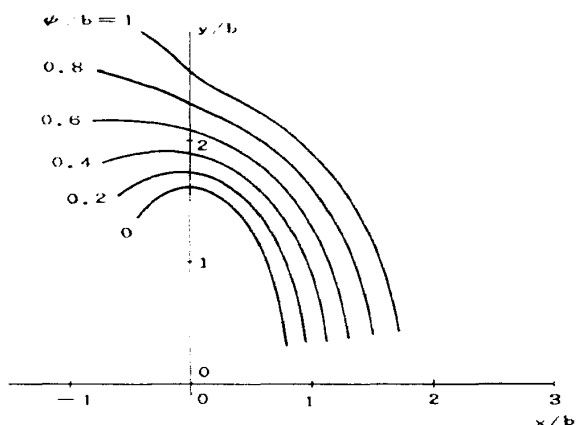


図 10 楕円柱壁に沿うジェットの流れ  $\alpha = \pi/4$ ,  $\kappa b = 0.5$ ,  $\mu = -0.2022$

なって速やかに剥離が生じるものと思われる。

図 9 及び図 10 の最外側の流線に沿う速度の大きさ  $(U_1^2 + V_1^2)^{1/2}$  は、写像関数が便宜的に決められているために表 2 に示すように 1 とはある程度異なっており、近似的な自由流線にすぎない。しかし剥離を起こしにくいと推察される図 9 のタイプの曲面の存在を示唆しているのでこれらの図をあえて記載する。

## 7. 曲面柱壁に沿うジェットの速度分布及び圧力分布

これまで曲面に沿うジェットの流線について記述を続けてきたが、USBフラップなど実際的な応用に際しては速度分布と圧力分布を知ることが重要である。速度分布は  $x$  面の速度成分  $u$ ,  $v$  と  $z$  面の速度成分  $U$ ,  $V$  の間の関係式(2)を用いるとやや複雑な計算の後に得られる。既に図 7, 図 9 及び図 10 に流線を示した円柱壁及び 2 種の楕円柱壁に沿うジェ

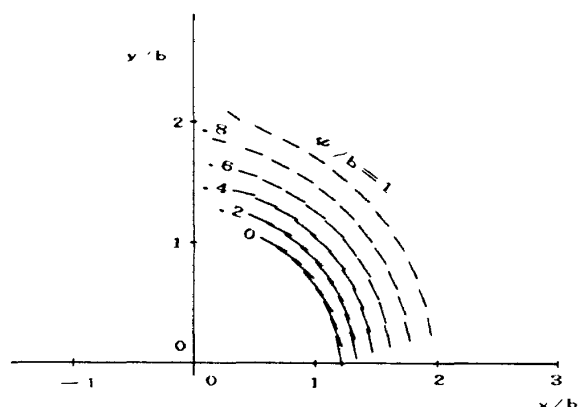


図 11 円柱壁に沿うジェットの速度ベクトル  $\alpha = \pi/4$ ,  $\kappa b = 0.5$

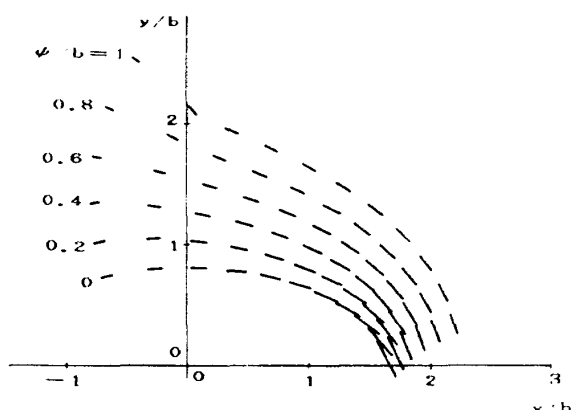


図 12 楕円柱壁に沿うジェットの速度ベクトル  $\alpha = \pi/4$ ,  $\kappa b = 0.5$ ,  $\mu = 0.2022$

ットの速度ベクトルを図 11, 図 12 および図 13 に示す。

総ての流線について全圧が一定であるものとし, 自由流線の外側の静圧を  $p_a$  とする。自由流線に沿う速度の大きさ  $(U_1^2 + V_1^2)^{1/2}$  を 1 にしようという意図のもとに解析を進めてきているので, ジェットの静圧を対応する自由流線の動圧で無次元化する。

$$\frac{p - p_a}{(\rho/2)(U_1^2 + V_1^2)} = 1 - \frac{U^2 + V^2}{U_1^2 + V_1^2} \quad (19)$$

図 14, 図 15 a, b 及び図 16 に円柱壁及び 2 種の楕円柱壁の無次元化された壁圧分布を示す。図 15 a と図 15 b を比較するとキック・ダウン角  $\alpha$  が小さい方がジェットによる揚力が大きくなることが分かる。

とくに円柱壁に接するようにジェットが噴出している場合を解くにあたっては, もとの平面壁に沿う速度成分は至るところで  $x$  方向に 1,  $y$  方向に 0 になるから円柱壁に沿う速度成分は

$$U = \exp\{\kappa(b-y)\} \cos \kappa x$$

$$V = -\exp\{\kappa(b-y)\} \sin \kappa x$$

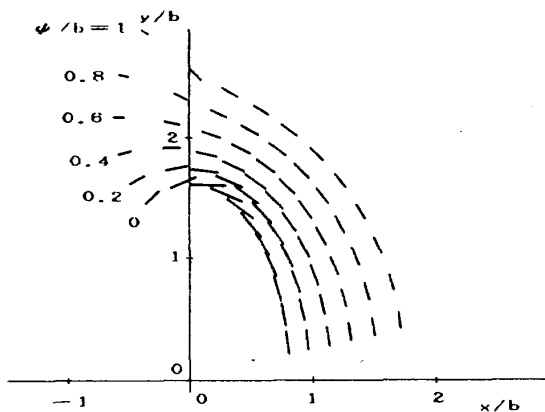


図 13 楕円柱壁に沿うジェットの速度ベクトル  $\alpha = \pi/4$ ,  $\kappa b = 0.5$ ,  $\mu = -0.2022$

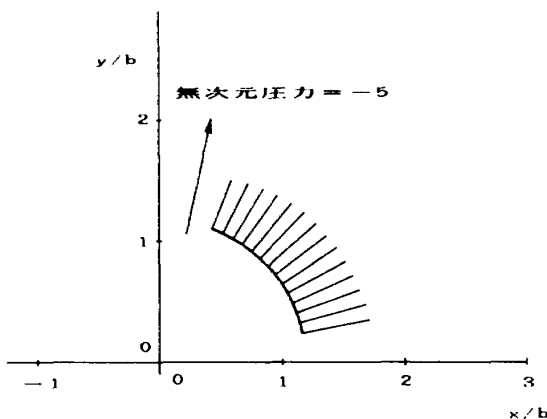


図 14 円柱壁の圧力分布  $\alpha = \pi/4$ ,  $\kappa b = 0.5$

円柱壁に沿うジェットの圧力係数は

$$C_p = 1 - \exp(2\kappa b) \quad (20-a)$$

しかるに円柱の半径は  $R = \exp(-\kappa b)/\kappa$ , 自由流線の半径は  $1/\kappa$  でジェットの厚さは

$$h = \{1 - \exp(-\kappa b)\}/\kappa$$

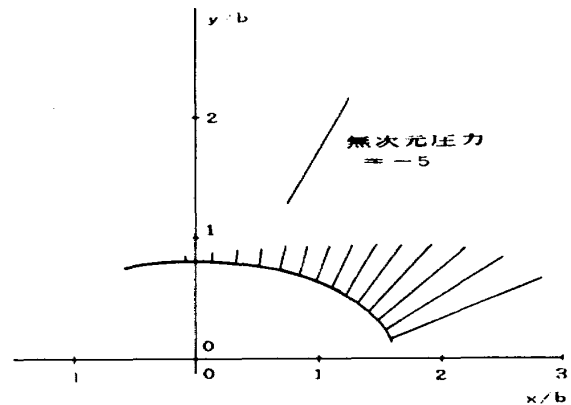


図 15 a 楕円柱壁の圧力分布  $\alpha = \pi/4$ ,  $\kappa b = 0.5$ ,  $\mu = 0.2022$

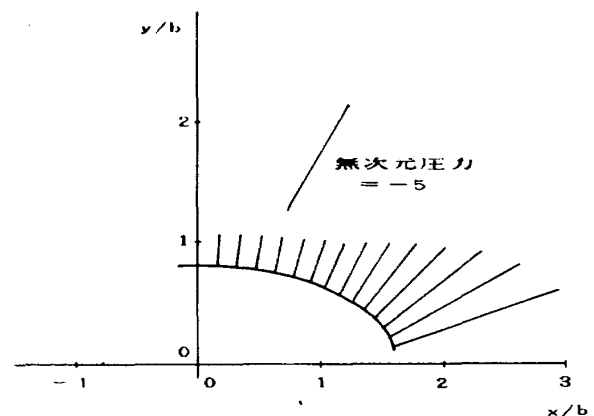


図 15 b 楕円柱壁の圧力分布  $\alpha = 0$ ,  $\kappa b = 0.5$ ,  $\mu = 0.2022$

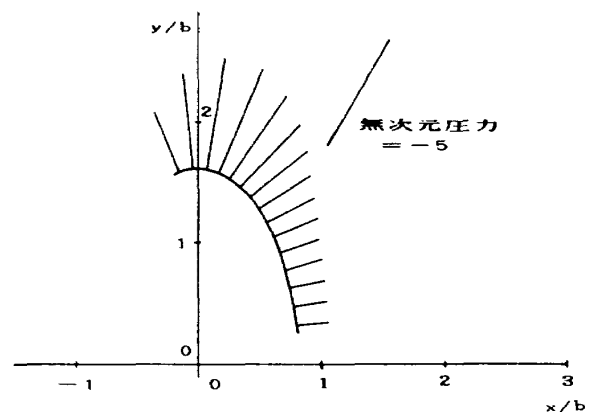


図 16 楕円柱壁の圧力分布  $\alpha = 0$ ,  $\kappa b = 0.5$ ,  $\mu = -0.2022$

であるから薄いジェットでは

$$C_p \approx -2h/R \quad (20-b)$$

となって参考文献11)の(2.4)式と一致する。

## 8. フラップの後縁を考慮する解析

これまで無限平板に沿う流れを基礎として理想流体の2次元流についてコアンダ効果を解析してきた。USB 高揚力システムを構成する翼とフラップの系では後縁があるので、平板に端がある場合に事情が変わるのかどうかについて調べておく必要があるように思われる。図17の $z$ 面に描かれた斜めの平面ABと $x$ 軸に沿う端のある平面DEの間の流れを調べる。解析の手法は3節の場合とほぼ同じであるからその詳細を付録Bに記した。

図18には $T$ をパラメタとした流線図を示す。図18cは図4aとよく似ていて、下側の壁を後ろへ延ばすにつれて3節で求めた無限平板に沿う流れに極限移行することが分かる。下側の壁がノズルの高さの2倍程度後ろに延びていれば無限平板に沿う流れと変わるところはない。

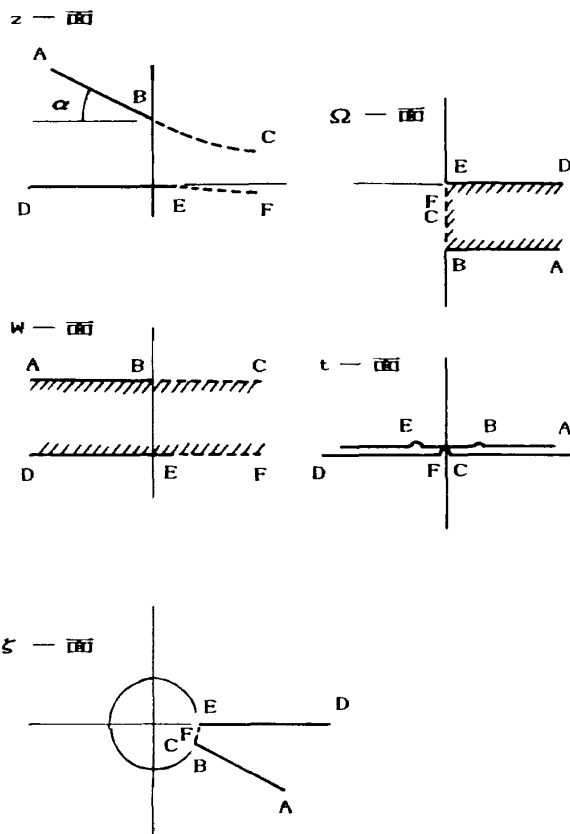


図17 自由流線理論の写像

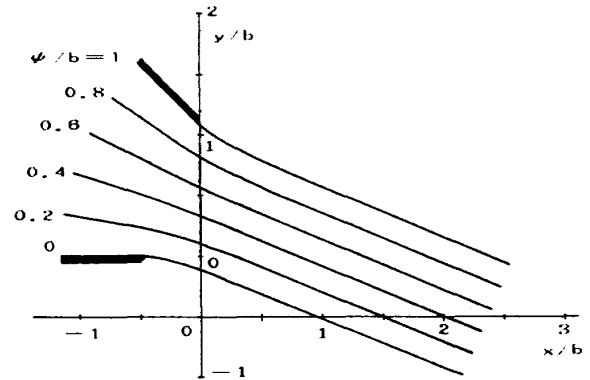


図18a 端のある平面壁に沿うジェットの流線  
 $\alpha = \pi/4, T = -1$

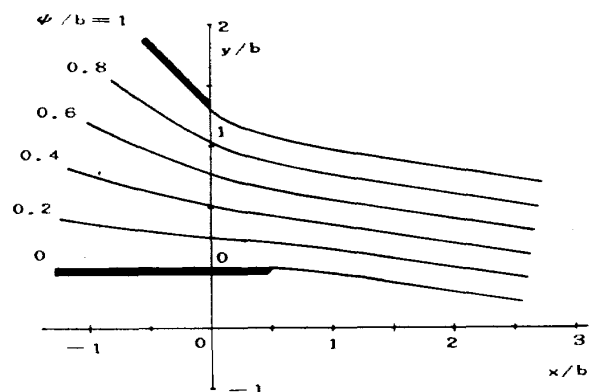


図18b 端のある平面壁に沿うジェットの流線  
 $\alpha = \pi/4, T = -0.1$

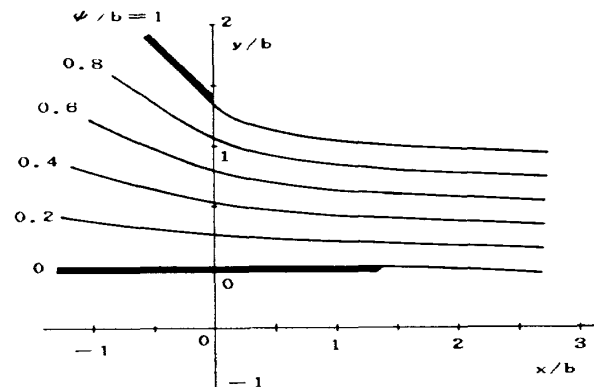


図18c 端のある平面壁に沿うジェットの流線  
 $\alpha = \pi/4, T = -0.01$

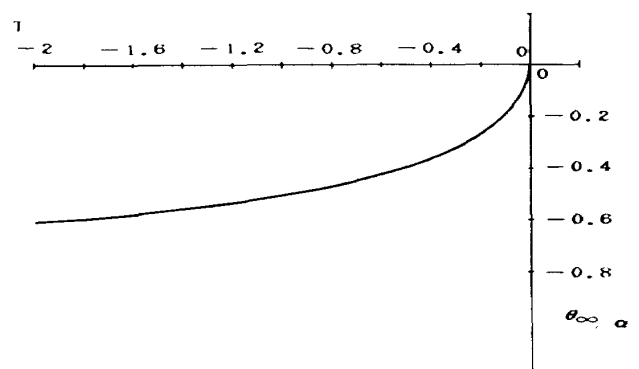


図19 無限遠方の後流の方向

## 9. 結 論

USB高揚力システムへの適用を念頭において、任意のキック・ダウン角度のついたノズルから噴出し曲面壁面に沿って流れる厚いジェットのコアンダ効果について、理想流体を想定し、2次元理論によって解析を行なった。

任意のキック・ダウン角度のついたノズルから噴出し、無限に広がる平面壁に沿う2次元ジェットの解を、自由流線に沿う速度の大きさが保存される条件のもとで等角写像変換することによって円柱壁に沿う2次元ジェットの解を得た。この解による壁面吸引力はジェットが薄い場合には従来から知られている解と一致する。

等角写像関数を若干修正して楕円柱壁に沿う2次元ジェットの近似解を得た。このうちにはジェットが増速流になっている場合があって、ジェットの壁面への強力な付着即ちコアンダ効果の発生を窺わせる。

キック・ダウン角度が大きいとノズル出口付近の壁面吸引力が減少する。

端のある有限の平面壁に沿う2次元ジェットは無限遠方でキック・ダウン角度に応じた斜流れになる。ただし、平面壁の長さがノズル高さの2倍以上であるとほぼ無限平面壁とみなしてよい。USB高揚力システムでは翼とフラップの翼弦方向の長さはノズル高さの10倍近いので無限平面壁に沿うジェットから出発する取り扱いでよい。

## 10. 謝 辞

新型航空機研究グループの同僚、高橋俣グループ・リーダーから参考文献についてご教示をいただいた。STOLプロジェクト推進本部総括室の岡部正典室長には本研究に大方の時間を割くことについてご寛恕いただいた。校閲者から有益なご指摘を戴き内容の吟味と体裁の改善がなされた。川崎重工業株式会社の宮下純一氏には有益な助言をいただいた。ここにお礼申し上げる。

## 参 考 文 献

- 1) R. Wille and H. Fernholz: Report on the first European Mechanics Colloquium, on the Coanda effect. Jour. of Fluid Mechanics Vol. 23, part 4, p. 801-819, 1965.
- 2) C.A. Grotz: Development for the YC-14 Propulsion System. AIAA Paper 76.
- 3) A.G. Boissevain and J.A. Cochrane: Quiet Short-Haul Research Aircraft; A Perspective of Current Status and Future Plans. AIAA 78-1468, 1978. 8.
- 4) M.D. Shovlin and J.A. Cochrane: An Overview of the Quiet Short-Haul Research Aircraft Program. NASA Technical Memorandum 78545, 1978. 11.
- 5) 武田 峻: STOL 技術開発: 日本機械学会誌, 第 88 巻, 第 803 号, 昭和 60 年 10 月号
- 6) STOL プロジェクト推進本部: 低騒音 STOL 実験機の基本設計, 航空宇宙技術研究所資料, TM-452, 1981 年 12 月
- 7) C.E. Lan and J.F. Campbell: Theoretical Aerodynamics of Upper-Surface-Blowing Jet-Wing Interaction. NASA TN D-7936, 1975. 11.
- 8) C.R. Hough: A Study of Blown Flap/Jet Flap Analogy. AIAA Paper 79-0119, 1979. 1.
- 9) M.R. Mendenhall et. al.: Calculation of the Longitudinal Aerodynamics Characteristics of Upper-Surface-Blown Wing-Flap Configuration. AIAA Paper 79-0120, 1979.
- 10) N.D. Malmuth, W.D. Murphy, V. Shankar, J.D. Cole and E. Cumberbatch: Studies of Upper Surface Blown Airfoils in Incompressible and Transonic Flows. AIAA Paper 80-0270, 1980. 1.
- 11) H. Nakaguchi: Jet Along a Curved Wall, T. Moriya Memorial Seminar for Aerodynamics, Research Memo, No. 4, 1961.
- 12) M.J. Lighthill: Notes on the Deflection of Jets by Insertion of Curved Surfaces, and on the Design of Bends in Wind Tunnels, A.R.C. R&M 2105, 1945. 9.

- 13) 波多野正英：折れ曲った下壁を有する噴出口から出る理想流体の噴流，第 17 回流体力学講演会講演集，昭和 60 年 10 月
- 14) H. Lamb: Hydrodynamics (6th edition), Cambridge Univ., 1932.
- 15) L.M. Milne-Thomson: Theoretical Hydrodynamics (5th edition), Macmillan, 1968.
- 16) 石津武彦，斎藤 修：関数論とその応用，コロナ社，昭和 38 年
- 17) G. Birkhoff, E.H. Zarantonello: Jets Wakes and Cavities, Academic Press, 1957.
- 18) N. Rajaratnam (野村安正 訳)：噴流，森北出版，1983 年
- 19) 今井 功：等角写像とその応用，岩波書店，1979 年

## 付 録 A

$b > a$  かつ  $t \geq 0$  なる場合の  $\{1/(a+it)^{1/2}\} \times \{1/(b+it)^{1/2}\}$  と  $1/\{(a+it)(b+it)\}^{1/2}$  の値の，逆正接関数  $\text{ATAN}(x, y)$  の主値設定に伴う関係について

本論文で逆正接関数を計算するのに  $\text{ATAN}(x, y)$  を用い，この関数の主値を次のように設定している。

$$x > 0, y \geq 0 \text{ で } \pi/2 > \phi \geq 0$$

$$x > 0, y < 0 \text{ で } 0 > \phi > -\pi/2$$

$$x = 0, y \geq 0 \text{ で } \phi = \pi/2$$

$$x = 0, y < 0 \text{ で } \phi = -\pi/2$$

$$x < 0, y \geq 0 \text{ で } \pi \geq \phi > \pi/2$$

$$x < 0, y < 0 \text{ で } -\pi/2 > \phi > -\pi$$

さて

$$\begin{aligned} \{1/(a+it)^{1/2}\} &= 1/\{(a^2+t^2)^{1/2} \\ &\quad \cdot \exp(i\alpha)\}^{1/2} \end{aligned}$$

ここで

$$\alpha = \text{ATAN}(a, t)$$

$$\begin{aligned} \{1/(b+it)^{1/2}\} &= 1/\{(b^2+t^2)^{1/2} \\ &\quad \cdot \exp(i\beta)\}^{1/2} \end{aligned}$$

ここで

$$\beta = \text{ATAN}(b, t)$$

したがって

$$\begin{aligned} \{1/(a+it)^{1/2}\} \{1/(b+it)^{1/2}\} \\ = 1/\{ \{(a^2+t^2)(b^2+t^2)\}^{1/2} \\ \cdot \exp\{i(\alpha+\beta)\} \}^{1/2} \end{aligned}$$

他方

$$\begin{aligned} 1/\{(a+it)(b+it)\}^{1/2} \\ = 1/\{ \{(ab-t^2)^2 + (a+b)^2 t^2 \}^{1/2} \\ \cdot \exp(ir) \}^{1/2} = 1/\{ \{(a^2+t^2) \\ \cdot (b^2+t^2)\}^{1/2} \exp(ir) \}^{1/2} \end{aligned}$$

ここで

$$r = \text{ATAN}\{(ab-t^2), (a+b)t\}$$

また逆正接関数  $\text{ATAN}$  の性質から

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ &= (a+b)t / \{(a^2+t^2) \\ &\quad \cdot (b^2+t^2)\}^{1/2} = \sin r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &= (ab-t^2) / \{(a^2+t^2) \\ &\quad \cdot (b^2+t^2)\}^{1/2} = \cos r \end{aligned}$$

が成り立っている。

### 1. $t = 0$ の場合

- (1)  $0 > b > a$  ならば  $\alpha = \pi$ ,  $\beta = \pi$ ,  $r = 0$  であるから

$$\begin{aligned} & \{1/(a+it)^{1/2}\} \{1/(b+it)^{1/2}\} \\ & = -1/\{(a+it)(b+it)\}^{1/2} \end{aligned}$$

- (2)  $0 = b > a$  ならば  $\alpha = \pi$ ,  $\beta = \pi/2$ ,  $r = \pi/2$  であるから

$$\begin{aligned} & \{1/(a+it)^{1/2}\} \{1/(b+it)^{1/2}\} \\ & = -i/\{(a+it)(b+it)\}^{1/2} \end{aligned}$$

- (3)  $b > 0$ ,  $0 > a$  ならば  $\alpha = \pi$ ,  $\beta = 0$ ,  $r = \pi$  であるから

$$\begin{aligned} & \{1/(a+it)^{1/2}\} \{1/(b+it)^{1/2}\} \\ & = 1/\{(a+it)(b+it)\}^{1/2} \end{aligned}$$

- (4)  $b > a = 0$  ならば  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$ ,  $r = \pi/2$  であるから

$$\begin{aligned} & \{1/(a+it)^{1/2}\} \{1/(b+it)^{1/2}\} \\ & = 1/\{(a+it)(b+it)\}^{1/2} \end{aligned}$$

- (5)  $b > a > 0$  ならば  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $r = 0$  であるから

$$\begin{aligned} & \{1/(a+it)^{1/2}\} \{1/(b+it)^{1/2}\} \\ & = 1/\{(a+it)(b+it)\}^{1/2} \end{aligned}$$

### 2. $t > 0$ の場合

- (1)  $0 > a + b$  ならば  $0 > a$  で

$\alpha$  は 2 象限の角即ち  $\pi > \alpha > \pi/2$ ,

$\beta$  は 1 ~ 2 象限の角即ち  $\pi > \beta > 0$  である。

$r$  は 3 ~ 4 象限の角即ち  $0 > r > -\pi$  である。

$$\therefore r + 2\pi = (\alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned} & \{1/(a+it)^{1/2}\} \{1/(b+it)^{1/2}\} \\ & = -1/\{(a+it)(b+it)\}^{1/2} \end{aligned}$$

- (2)  $a + b \geq 0$  ならば  $b > 0$  で

$\alpha$  は 1 ~ 2 象限の角即ち  $\pi > \alpha > 0$ ,

$\beta$  は 1 象限の角即ち  $\pi/2 > \beta > 0$  である。

$r$  は 1 ~ 2 象限の角即ち  $\pi > r > 0$  である。

$$\therefore r = (\alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned} & \{1/(a+it)^{1/2}\} \{1/(b+it)^{1/2}\} \\ & = 1/\{(a+it)(b+it)\}^{1/2} \end{aligned}$$

## 付録B 平面壁に端がある場合の解析

平面壁に端がある場合についてこれに沿うジェットの流れを調べる。図 17 の  $z$  面に描かれた斜めの平面  $AB$  と  $x$  軸に沿う端のある平面  $DE$  の間の流れを調べる。流れは  $x$  軸の左から右に向かっており、 $AB$  と  $DE$  の間ではチャンネル流、それより右側ではジェットになっている。図の破線  $BC$  及び  $EF$  で表わされた部分はジェットの自由流線である。3 節でふれた考え方に従って解析を行なう。

流れ場を表現する複素ポテンシャル関数は(1)式で表わされる。 $AB$  に沿う流れは引き続き自由流線  $BC$  になるので  $ABC$  は 1 本の流線であり、流れ関数は一定の値  $\phi = \Psi$  をとる。 $DE$  に沿う流れも自由流線  $EF$  になるので  $DEF$  も 1 本の流線で、その流れ関数の値を  $\phi = 0$  とする。流れは  $z$  面で  $x$  の増加する方向に流れているので速度ポテンシャルの値は図 17 の  $w$  面の左の端では  $\phi = -\infty$ 、右の端では  $\phi = \infty$  とする。

次に関数  $\zeta = dz/dw$  については(2)式が成り立つ。

さらに  $\Omega = \log \zeta$  とおくと(3)式が成り立つ。

Schwarz-Christoffel の変換を用いて図 17 の  $t$  面の上半分を  $w$  面及び  $\Omega$  面の斜線の領域に写像する関数を求める。 $t$  と関係式

$$\frac{dw}{dt} = A(t-0)^{-\pi/\pi} = \frac{A}{t}$$

で結び付けられている複素変数  $w$  を考える。これを積分すると

$$w = A \log t + B$$

ここで  $A$ ,  $B$  は複素数であると考え。任意の実数  $\phi$  を選んで  $t > 0$  で  $w = \phi + i\Psi$  を要求すると

$$A \log |t| + B = \phi + i\Psi$$

$t < 0$  で  $w = \phi$  を要求すると

$$A \log |t| + Ai\pi + B = \phi$$

ここでおなじ絶対値をとる  $t$  にたいして同じ  $\phi$  が対応していると考えと

$$A = -\Psi/\pi$$

$B$  点即ち  $t = 1$  で  $w = i\Psi$  を要求すると

$$B = i\Psi$$

従って

$$w = -(\Psi/\pi) \cdot \log t + i\Psi \quad (B1)$$

E点即ち  $t = T (T < 0)$  での  $\phi$  の値は

$$\phi = -(\Psi/\pi) \cdot \log |T| \quad (B2)$$

次に  $t$  面と  $\mathcal{Q}$  面の関係を求める。 $t$  面で  $t = T$  および  $t = 1$  の周りで上側に半円形の出っ張りをもつ実軸に沿った線を考える。点がこの線に沿って  $t = -\infty$  から  $t = \infty$  へ動いて行くときに  $t$  と関係式

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = C(t-T)^{-\frac{\pi}{2}}(t-1)^{-\frac{\pi}{2}}$$

で結び付けられている複素変数  $\mathcal{Q}$  を考える。実数  $t$  については、逆正接関数の主値を  $-\pi$  から  $\pi$  の間に設定すると、付録 A の考察に従って

$t > T$  では

$$d\mathcal{Q}/dt = C/\{(t-T)^{1/2}(t-1)^{1/2}\}$$

$t < T$  では

$$d\mathcal{Q}/dt = -C/\{(t-T)^{1/2}(t-1)^{1/2}\}$$

積分を行なうと

$t > T$  では

$$\mathcal{Q} = C \cdot \log \{2t - (1+T) + 2\{t^2 - (1+T)t + T\}^{1/2}\} + D_1$$

$t$  を大きい方から  $T$  に近付けた極限では

$$\mathcal{Q} = \log(1-T)C + i\pi C + D_1$$

$t < T$  では

$$\mathcal{Q} = -C \cdot \log \{2t - (1+T) + 2\{t^2 - (1+T)t + T\}^{1/2}\} + D_2$$

$t$  を小さい方から  $T$  に近付けた極限では

$$\mathcal{Q} = -\log(1-T)C - i\pi C + D_2$$

であるから両方の極限值がともに  $\mathcal{Q} = 0$  に一致するように  $D_1$  と  $D_2$  を決めると

$$D_1 = -C \cdot \log(1-T) - i\pi C$$

$$D_2 = 2 \cdot \log(1-T)C + i2\pi C + D_1$$

B点即ち  $t = 1$  で  $\mathcal{Q} = -i\alpha$  を要求すると

$$-i\alpha = C \cdot \log(1-T) + D_1$$

$$C = \alpha/\pi$$

$$D_1 = -i\alpha - (\alpha/\pi) \cdot \log(1-T)$$

$t > T$  では

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & (\alpha/\pi) \cdot \log \{2t - (1+T) \\ & + 2\{t^2 - (1+T)t + T\}^{1/2}\} \\ & - i\alpha - (\alpha/\pi) \cdot \log(1-T) \end{aligned} \quad (B3-a)$$

$t < T$  では

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & -(\alpha/\pi) \cdot \log \{2t - (1+T) \\ & + 2\{t^2 - (1+T)t + T\}^{1/2}\} \\ & + (\alpha/\pi) \cdot \log(1-T) + i\alpha \end{aligned} \quad (B3-b)$$

(B3-a) 式で  $t$  を 0 とすると

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & (\alpha/\pi) \cdot \log \{-(1+T) + 2(T)^{1/2}\} \\ & - i\alpha - (\alpha/\pi) \cdot \log(1-T) = i(\alpha/\pi) \\ & \cdot \arctan \{2(-T)^{1/2}/(-1-T)\} - i\alpha \end{aligned} \quad (B4)$$

即ち下流の無限遠方では流線 BC と流線 EF が平行になって DE とある角度をなす方向に流れている。この角度を計算すれば図 19 のようになって、物理的な考察と適合していることが分かる。(B4) 式の実部は 0 であるから速度の絶対値は 1 であることが分かる。両方の流線の間隔を  $b$  とし、その間で速度が一樣な値 1 になっているものと考えれば  $\Psi = b$  であることが分かる。

また虚部  $\tau$  が正である複素数  $t = \sigma + i\tau$  については、逆正接関数の主値を  $-\pi$  から  $\pi$  の間に設定すると、付録 A の考察に従って

$\sigma \geq (1+T)/2$  では

$$d\mathcal{Q}/dt = C/\{(t-T)^{1/2}(t-1)^{1/2}\}$$

$\sigma < (1+T)/2$  では

$$d\mathcal{Q}/dt = -C/\{(t-T)^{1/2}(t-1)^{1/2}\}$$

積分を行なうと  $\sigma \geq (1+T)/2$  では

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & C \cdot \log \{2t - (1+T) \\ & + 2\{t^2 - (1+T)t + T\}^{1/2}\} + D_1 \end{aligned}$$

$\sigma$  を大きい方から  $(1+T)/2$  に近付けた極限では

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & \log \{2\tau + 2\{\tau^2 + (1-T)^2/4\}^{1/2}\}C \\ & + i(\pi/2)C + D_1 \end{aligned}$$

$\sigma < (1+T)/2$  では

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & -C \cdot \log \{2t - (1+T) \\ & + 2\{t^2 - (1+T)t + T\}^{1/2}\} + D_3 \end{aligned}$$

$\sigma$  を小さい方から  $(1+T)/2$  に近付けた極限では

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & -\log \{-2\tau + 2\{\tau^2 + (1-T)^2/4\}^{1/2}\}C \\ & + i(\pi/2)C + D_3 \end{aligned}$$

であるから両方の極限值が一致するように  $D_3$  を決めると

$$\begin{aligned} D_3 = & \log \{2\tau + 2\{\tau^2 + (1-T)^2/4\}^{1/2}\}C \\ & + \log \{-2\tau + 2\{\tau^2 + (1-T)^2/4\}^{1/2}\}C \\ & + D_1 \end{aligned}$$

$t$  が実数のときに求まっている  $C$  と  $D_1$  を代入して

$t \geq (1+T)/2$ では

$$\begin{aligned} Q &= (\alpha/\pi) \cdot \log \{ 2t - (1+T) \\ &\quad + 2 \{ t^2 - (1+T)t + T \}^{1/2} \} \\ &\quad - i\alpha - (\alpha/\pi) \cdot \log(1-T) \quad (\text{B5-a}) \end{aligned}$$

$t < (1+T)/2$ では

$$\begin{aligned} Q &= -(\alpha/\pi) \cdot \log \{ 2t - (1+T) \\ &\quad + 2 \{ t^2 - (1+T)t + T \}^{1/2} \} \\ &\quad - i\alpha - (\alpha/\pi) \cdot \log(1-T) + (\alpha/\pi) \\ &\quad \cdot \log \{ 2\tau + 2 \{ \tau^2 + (1-T)^2/4 \}^{1/2} \} \\ &\quad + (\alpha/\pi) \cdot \log \{ -2\tau + 2 \{ \tau^2 \\ &\quad + (1-T)^2/4 \}^{1/2} \} \quad (\text{B5-b}) \end{aligned}$$

つぎに  $\phi = c$  ( $0 \leq c \leq b$ ) なる一般の流線の形状を求める。

(B1)式で  $w = \phi + ic$ ,  $\Psi = b$  とすると

$$\begin{aligned} \phi + ic &= -(b/\pi) \cdot \log(t) + ib \\ \therefore t &= \exp \{ -\pi\phi/b + i\pi(1-c/b) \} \quad (\text{B6}) \end{aligned}$$

(B3-a, b)式及び(B5-a, b)式に(B6)式を代入して  $t$  を消去し, さらに(7)式に代入して  $Q$  を消去すると  $\partial z/\partial \phi$  は,  $\alpha$ ,  $\phi/b$ ,  $c/b$  及び  $T$  の陽関数として表わすことができる。計算を行なってみると  $\phi/b$  が3程度で  $\partial x/\partial \phi$ ,  $\partial y/\partial \phi$  はほぼ一定の値に収れんし, その2乗和は

$$(\partial x/\partial \phi)^2 + (\partial y/\partial \phi)^2 = 1$$

に収れんしていることが分かる。従ってこれよりも後流側では流線は互いに平行な直線群とみなしてよく, 速度は至るところで1になっていることが分かる。流線の形状を決定するために  $\partial x/\partial \phi$ ,  $\partial y/\partial \phi$  を  $\phi$  に関して積分し始める起点を便宜的に  $\phi/b = 2.8$  に選んだ。この起点で総ての流線の勾配は近似的に  $dy/dx = (\partial y/\partial \phi)/(\partial x/\partial \phi) = \text{const}$  になっている。 $\phi = 0$  の流線の起点 ( $\phi = 0$ ) で座標を  $(x_0, y_0)$  とすると他の流線  $\phi = c$  の起点 ( $\phi = 0$ ) での座標  $(x_c, y_c)$  を3節の場合と同様に求めることができる。一般の流線の形状は(9-a, b)式で求めることができる。自由流線の流れ関数は  $\Psi = b$  になっていることを想起すれば, (B2)式によって  $T$  を  $\phi/b$  と関係付けることができる。

図18には  $T$  をパラメタとした流線図を示す。図18 c は図4aとよく似ていて, 下側の壁を後ろへ延ばすにつれて6節で求めた無限平面壁に沿う流れに極

限移行することが分かる。下側の壁がノズルの高さの2倍程度後ろに延びていれば無限平面壁に沿う流れと変わるところはない。



## 付 録 C

```

10 REM ***** JAN29A ***** COANDA EFFECT ** 1986.1.29
20 REM Coanda effect on a circular cylinder wall. ¥¥¥
30 REM Mapping adaptive upto near nozzle position. ¥¥¥
40 REM The choice of parameters ALP, kb is left to users. ¥¥¥
50 REM Length is nondimensionalized by "b", kb=kappa*b. ¥¥¥
60 ALP=0.7853981
70 kb=0.5
80 OPTION BASE 1
90 DIM DX(113),DY(113),x(57),y(57),X(57),Y(57),u(57),v(57)
100 DIM U(57),V(57),XP(12,6),YP(12,6),UP(12,6),VP(12,6),PC(7)
110 PRINT "Input c/b.The 1st must be 1. The 2nd must be 0."
120 PRINT "If c/b=-10 then terminating procedure starts."
130 TA=TAN(ALP)
140 REM Parameters PBL,PBU,JM are recommended to be kept as they are. ¥¥¥
150 PBU=0
160 PBL=2.8
170 JM=113
180 DPB=(PBU-PBL)/(JM-1)
190 BOUNDS 0,719,0,479
200 WINDOW -1.503,3,-0.1,2.9
210 PLOAD "DXDY.1B/0"
220 N=0
230 IF N=6 THEN PRINT "Input c/b=-10."
240 PRINT "Input c/b."
250 INPUT CB
260 N=N+1
270 IF CB=-10 THEN 1250
280 CALL DXDY(ALP,CB,PBU,PBL,JM,DX(),DY())
290 REM DX=dx/dphi,DY=dy/dphi, namely the real and imaginary ¥¥¥
300 REM components of formula (7). ¥¥¥
310 DN=SQR(DX(1)^2+DY(1)^2)
320 x(1)=-CB*DY(1)/DN
330 y(1)=CB*DX(1)/DN
340 DD=DX(1)^2+DY(1)^2
350 u(1)=DX(1)/DD
360 v(1)=DY(1)/DD
370 KM=(JM-1)/2
380 FOR K=1 TO KM
390 J=2*K-1
400 REM Integration to get x and y. Formula (9-a,b). ¥¥¥
410 x(K+1)=x(K)+(DX(J)+4*DX(J+1)+DX(J+2))*DPB/3
420 y(K+1)=y(K)+(DY(J)+4*DY(J+1)+DY(J+2))*DPB/3
430 DD=DX(J+2)^2+DY(J+2)^2
440 REM Velocity components of jet along the plane wall. Formula (10-a,b). ¥¥¥
450 u(K+1)=DX(J+2)/DD
460 v(K+1)=DY(J+2)/DD

```

```

470 NEXT K
480 IF CB<>1 THEN 520
490 xo=x(57)
500 YB=y(57)
510 xA=(YB-1)/TA
520 REM Transformation from z-plane to Z-plane. ***
530*PRINT "Input KE. When you change c/b, input 0."
540*INPUT KE
550*IF KE=0 THEN 230
560 FOR K=1 TO KE
570 x(K)=x(K)-xo
580 xK=x(K)
590 yK=y(K)
600 R=xK-xA
610 I=yK-1
620 R1=R*R-I*I+4*xK*xA
630 I1=2*R*I+4*(yK-YB)*xA
640 RHO=SQR(R1*R1+I1*I1)
650 PHI=ATN(I1/R1)
660 SR=SQR(RHO)
670 C=COS(PHI/2)
680 S=SIN(PHI/2)
690 REM Approximated inverse function. Formula (16). ***
700 xR=(R+SR*C)/2
710 xI=(I+SR*S)/2
720*REM PRINT xK,yK,xR,xI
730 R=xK+xA
740 REM dx/dz. ***
750 xzR=0.5+(R*C+I*S)/(2*SR)
760 xzI=(-R*S+I*C)/(2*SR)
770 R=xR+xA
780 I=xI
790 R2=R*R-I*I
800 I2=2*R*I
810 R4=R2*R2-I2*I2
820 I4=2*R2*I2
830 L2R=1+((YB-1)*xA)^2*R4/(R4*R4+I4*I4)
840 L2I=-((YB-1)*xA)^2*I4/(R4*R4+I4*I4)
850 RHO=SQR(L2R*L2R+L2I*L2I)
860 PHI=ATN(L2I/L2R)
870 REM Lambda. Formula (14). ***
880 LR=SQR(RHO)*COS(PHI/2)
890 LI=SQR(RHO)*SIN(PHI/2)
900 E=EXP(kb*xI)
910 C=COS(kb*xR)
920 S=SIN(kb*xR)

```

```

930 REM Z. Formula (15). ¥¥¥
940 X(K)=E*(LR*S-LI*C)/kb
950 Y(K)=E*(LR*C+LI*S)/kb
960 R5=R4*R-I4*I
970 I5=R4*I+I4*R
980 R5L=R5*LR-I5*LI
990 I5L=R5*LI+I5*LR
1000 dLR=-2*((YB-1)*xA)^2*R5L/(R5L*R5L+I5L*I5L)
1010 dLI=2*((YB-1)*xA)^2*I5L/(R5L*R5L+I5L*I5L)
1020 R=LR-dLI/kb
1030 I=LI+dLR/kb
1040*REM PRINT LR,LI,dLR,dLI,SQR(LR*LR+LI*LI)
1050 REM dZ/dx. ¥¥¥
1060 ZxR=E*(R*C+I*S)
1070 ZxI=E*(-R*S+I*C)
1080 REM dZ/dz. ¥¥¥
1090 ZzR=ZxR*xzR-ZxI*xzI
1100 ZzI=ZxR*xzI+ZxI*xzR
1110 U(K)=(u(K)*ZzR-v(K)*ZzI)/(ZzR*ZzR+ZzI*ZzI)
1120 V(K)=(u(K)*ZzI+v(K)*ZzR)/(ZzR*ZzR+ZzI*ZzI)
1130 k=INT((K-1)/5)+1
1140 IF INT((K-1)/5)<>(K-1)/5 THEN 1190
1150 XP(k,N)=X(K)
■
1160 YP(k,N)=Y(K)
1170 UP(k,N)=U(K)
1180 VP(k,N)=V(K)
1190*REM PRINT X(K),Y(K),U(K),V(K),SQR(U(K)^2+V(K)^2)
1200 NEXT K
1210 FOR K=1 TO KE-1
1220*PLOT X(K),Y(K);X(K+1),Y(K+1)
1230 NEXT K
1240*GOTO 530
1250 XAXIS 1,0,0
1260 YAXIS 1,0,0
1270 PAUSE
1280 ERASE
1290 PAUSE
1300 CLEAR #0
1310 REM Nondimensionalized pressure on the circular wall.
1320 PDELETE "DXDY.1B/0"
1330 FOR k=1 TO 8
1340 Q2=UP(k,1)^2+VP(k,1)^2
1350 IF Q2=0 THEN 1410
1360 Q=SQR(Q2)
1370 CP=1-(UP(k,2)^2+VP(k,2)^2)/Q2
1380 CPX=CP*VP(k,2)/Q*0.2

```

```
1390 CPY=-CP*UP(k,2)/Q*0.2
1400 REM Here, 0.2 is the scale factor to match plotting space. ¥¥¥
1410*REM PRINT Q2,Q,CP,CPX,CPY
1420 PLOT XP(k,2),YP(k,2);XP(k,2)+CPX,YP(k,2)+CPY
1430 IF k=8 THEN 1450
1440 PLOT XP(k,2),YP(k,2);XP(k+1,2),YP(k+1,2)
1450 NEXT k
1460 XAXIS 1,0,0
1470 YAXIS 1,0,0
1480 PAUSE
1490 ERASE
1500 PAUSE
1510 REM Velocity vectors plotting. ¥¥¥
1520 PC(1)=11
1530 PC(2)=6
1540 PC(3)=-1.503
1550 PC(4)=3
1560 PC(5)=-0.1
1570 PC(6)=2.9
1580 PC(7)=0.15
1590 CLEAR #0
1600 PLOAD "VCTPLOT.1B/0"
1610 CALL VCTPLOT(XP(,),YP(,),UP(,),VP(,),PC())

1620 PDELETE "VCTPLOT.1B/0"
1630 XAXIS 1,0,0
1640 YAXIS 1,0,0
1650 PAUSE
1660 CLEAR #0
1670 END
1680 SUB ATAN(X,Y,ANS)
1690 REM ***** ATAN *****
1700 REM 1985,9,27
1710 REM ANS takes value between -PI and PI corresponding to X,Y.
1720 IF X<0 AND Y=0 THEN 1750
1730 ANS=ATN(Y/X)-(1-SGN(X))*SGN(Y)*SGN(X)*PI/2
1740 GOTO 1760
1750 ANS=PI
1760 SUBEXIT
1770 SUBEND
```

```

10 REM ***** DEC11 ***** COANDA EFFECT ** 1985.12.11
20 REM Coanda effect on an elliptic cylinder wall. ***
30 REM A circular cylinder is treated when mu=0. ***
40 OPTION BASE 1
50 REM The choice of parameters ALP,kb,mu is left to users.
60 ALP=PI/4
70 kb=0.5
80 mu=EXP(-kb)/3
90 DIM DX(65),DY(65),x(33),y(33),u(33),v(33)
100 DIM X(33,6),Y(33,6),U(33,6),V(33,6),PC(7)
110 REM PB=phi/b, CB=c/b, XB=x/b, YB=y/b. ***
120 PRINT "Input CB. The first CB must be 1. The second CB must be 0."
130 PRINT "If CB=-10 then terminating procedure starts."
140 REM Parameters PBL,PBU,JM are recommended to be kept as they are. ***
150 PBL=2.8
160 PBU=-0.4
170 JM=65
180 DPB=(PBU-PBL)/(JM-1)
190 AP=ALP/PI
200 BOUNDS 0,719,0,479
210 WINDOW -1.503,3,-0.1,2.9
220 PLOAD "VCTPLOT.1B/0"
230 PLOAD "DXDY.1B/0"
240 PLOAD "ATAN.1B/0"
250 N=0
260*INPUT CB
270 N=N+1
280 IF CB=-10 THEN 740
290 CALL DXDY(ALP,CB,PBU,PBL,JM,DX(),DY())
300 REM DX=dx/dphi,DY=dy/dphi, namely the real and imaginary ***
310 REM components of formula (7). ***
320 DN=SQR(DX(1)^2+DY(1)^2)
330 REM Setting of initial value of x and y, temporally. ***
340 x(1)=-CB*DY(1)/DN
350 y(1)=CB*DX(1)/DN
360 DD=DX(1)^2+DY(1)^2
370 u(1)=DX(1)/DD
380 v(1)=DY(1)/DD
390 REM Integration to get x and y. formula (9-a,b) ***
400 XB=x(1)
410 YB=y(1)
420 KM=(JM-1)/2
430 FOR K=1 TO KM
440 J=2*K-1
450 XB=XB+(DX(J)+4*DX(J+1)+DX(J+2))*DPB/3
460 YB=YB+(DY(J)+4*DY(J+1)+DY(J+2))*DPB/3

```

```

470 x(K+1)=XB
480 y(K+1)=YB
490 REM Velocity components of jet along the plane wall. Formula (10-a,b). ***
500 DD=DX(J+2)^2+DY(J+2)^2
510 u(K+1)=DX(J+2)/DD
520 v(K+1)=DY(J+2)/DD
530 NEXT K
540 IF CB=1 THEN xo=x(29)
550 REM Transformation from z-plane to Z-plane. Formula (18). ***
560 REM kb=kappa*b. ***
570 FOR K=1 TO KM+1
580 E1=EXP(kb*(y(K)-1))
590 E2=mu/EXP(kb*y(K))
600 TSK=SIN(kb*(x(K)-xo))
610 TCK=COS(kb*(x(K)-xo))
620 X(K,N)=(E1+E2)*TSK/kb
630 Y(K,N)=(E1-E2)*TCK/kb
640 REM Velocity components in Z-plane. Formula (12). ***
650 ZR=(E1+E2)*TCK
660 ZI=(-E1+E2)*TSK
670 ZD=ZR^2+ZI^2
680 U(K,N)=(u(K)*ZR-v(K)*ZI)/ZD
690 V(K,N)=(u(K)*ZI+v(K)*ZR)/ZD
700 NEXT K
710 IF N=6 THEN PRINT "Input -10."
720 GOTO 260
730 REM Nondimensionalized pressure on the elliptic wall.
740 FOR K=1 TO KM-3
750 Q2=U(K,1)^2+V(K,1)^2
760 Q=SOR(Q2)
770 CP=1-(U(K,2)^2+V(K,2)^2)/Q2
780 CPX=CP*V(K,2)/Q*0.2
790 CPY=-CP*U(K,2)/Q*0.2
800 REM Here 0.2 is the scale factor to match plotting space. ***
810 REM Nondimensional pressure plotting. ***
820 ERASE
830 PLOT X(K,2),Y(K,2);X(K,2)+CPX,Y(K,2)+CPY
840 PLOT X(K,2),Y(K,2);X(K+1,2),Y(K+1,2)
850 NEXT K
860 XAXIS 1,0,0
870 YAXIS 1,0,0
880 PAUSE
890 PRINT "If you need stream line plotting, then input STR, else input 0."
900 INPUT ST$
910 IF ST$<>"STR" THEN 1030
920 REM Stream line plotting. ***

```

```
930 ERASE
940 CLEAR #0
950 FOR N=1 TO 6
960 FOR K=1 TO KM
970 PLOT X(K,N),Y(K,N);X(K+1,N),Y(K+1,N)
980 NEXT K
990 NEXT N
1000 XAXIS 1,0,0
1010 YAXIS 1,0,0
1020 PAUSE
1030 PRINT "If you need velocity vectors plotting, then input VCT."
1040 INPUT VV$
1050 IF VV$<>"VCT" THEN 1310
1060 REM Velocity vectors plotting. ¥¥¥
1070 CLEAR #0
1080 ERASE
1090 FOR N=1 TO 6
1100 FOR L=1 TO (KM+1)/3
1110 X(L,N)=X(3*L-1,N)
1120 Y(L,N)=Y(3*L-1,N)
1130 U(L,N)=U(3*L-1,N)
1140 V(L,N)=V(3*L-1,N)
1150 NEXT L
1160 NEXT N
1170 PC(1)=11
1180 PC(2)=6
1190 PC(3)=-1.503
1200 PC(4)=3
1210 PC(5)=-0.1
1220 PC(6)=2.9
1230 REM The length of vector is multiplied by 0.15 to match the space. ¥¥¥
1240 PC(7)=0.15
1250 CALL VCTPLOT(X(,),Y(,),U(,),V(,),PC())
1260 XAXIS 1,0,0
1270 YAXIS 1,0,0
1280 PAUSE
1290 CLEAR #0
1300 PDELETE "ATAN.IB/0"
1310 PDELETE "DXDY.IB/0"
1320 PDELETE "VCTPLOT.IB/0"
1330 END
```

```
10000 SUB DXDY(ALP,CB,PBU,PBL,JM,DX(),DY())
10010 OPTION BASE 1
10020 REM Setting of complex number "t", formula (16). ***
10030 AP=ALP/PI
10040 DPB=(PBU-PBL)/(JM-1)
10050 FOR J=1 TO JM
10060 PB=PBL+DPB*(J-1)
10070 SPC=SIN(PI*(1-CB)/2)
10080 CPC=COS(PI*(1-CB)/2)
10090 EPP=EXP(-PI*PB/2)
10100 TR=EPP*CPC
10110 TI=EPP*SPC
10120 REM Calculation of omega function for complex number of t. ***
10130 REM Formula (5-a,b) and (6-a,b). ***
10140 REM SQR(t^2-1) ***
10150 A1=TR*TR-TI*TI-1
10160 A2=2*TR*TI
10170 AA=SQR(SQR(A1*A1+A2*A2))
10180 CALL ATAN(A1,A2,ANS)
10190 AF=ANS/2
10200 AR=AA*COS(AF)
10210 AI=AA*SIN(AF)
10220 REM LOG(t+SQR(t^2-1)) ***
10230 B1=TR+AR
10240 B2=TI+AI
10250 BR=LOG(SQR(B1*B1+B2*B2))
10260 CALL ATAN(B1,B2,ANS)
10270 BI=ANS
10280 IF TI<>0 THEN 10360
10290 IF TR>=-1 THEN 10330
10300 OMR=-2*AP*BR
10310 OMI=-2*AP*BI+3*ALP
10320 GOTO 10420
10330 OMR=2*AP*BR
10340 OMI=2*AP*BI-ALP
10350 GOTO 10420
10360 IF TR>=0 THEN 10400
10370 OMR=-2*AP*BR
10380 OMI=-2*AP*BI-ALP
10390 GOTO 10420
10400 OMR=2*AP*BR
10410 OMI=2*AP*BI-ALP
10420 REM Calculation of DX()=dx/dphi, DY()=dy/dphi, formula (15). ***
10430 EO=EXP(OMR)
10440 DX(J)=EO*COS(OMI)
10450 DY(J)=EO*SIN(OMI)
10460 NEXT J
10470 SUBEXIT
10480 SUBEND
```



```
10000 SUB VCTPLOT(X(,),Y(,),U(,),V(,),PC())
10010 REM ***** VCTPLOT *****
10020 REM (X,Y) is starting point. ***
10030 REM (X+U*DT,Y+V*DT) is end point. ***
10040 OPTION BASE 1
10050 IM=PC(1)
10060 JM=PC(2)
10070 XL=PC(3)
10080 XH=PC(4)
10090 YL=PC(5)
10100 YH=PC(6)
10110 DTX=PC(7)
10120 DTY=DTX*(YH-YL)*719/((XH-XL)*479)
10130 BOUNDS 0,719,0,479
10140 WINDOW XL,XH,YL,YH
10150 FOR I=1 TO IM
10160   FOR J=1 TO JM
10170     PLOT X(I,J),Y(I,J);X(I,J)+U(I,J)*DTX,Y(I,J)+V(I,J)*DTY
10180   NEXT J
10190 NEXT I
10200 PAUSE
10210 SUBEXIT
10220 SUBEND
```

```
10000 SUB ATAN(X,Y,ANS)
10010 REM ***** ATAN *****
10020 REM 1985,9,27
10030 REM ANS takes value between -PI and PI corresponding to X,Y.
10040 IF X<0 AND Y=0 THEN 10070
10050 ANS=ATN(Y/X)-((1-SGN(X))*SGN(Y)*SGN(X)*PI/2
10060 GOTO 10080
10070 ANS=PI
10080 SUBEXIT
10090 SUBEND
```

---

## 航空宇宙技術研究所報告 904号

昭和61年4月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川 2 - 27 - 12

---

