

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-913

曲線座標系薄層ナビエ・ストークス混合型差分法による
遷音速翼型解析の試み

廣瀬直喜・松野謙一
小松浩司・藤田真人

1986年9月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

概 要	1
記 号	2
1. 序 論	2
2. 基礎方程式	4
2.1 基礎方程式	4
2.2 基礎方程式の無次元化	4
2.3 基礎方程式の曲線座標変換	5
2.4 薄層近似ナビエ・ストークス方程式	6
3. 差 分 法	7
3.1 時間分割差分法について	7
3.2 ξ 方向差分演算子 L_ξ MacCormak 法	8
3.3 η 方向差分演算子 L_η 予測子修正子型 Crank-Nicolson 法	8
3.4 壁上境界条件	9
4. 流れ場への適用	10
4.1 初期条件	10
4.2 安定条件	10
4.3 収束判定条件	11
4.4 超音速層流平板まわりの流れ	11
4.5 遷音速層流円弧翼型まわりの流れ	12
5. 結果と考察	14
5.1 超音速層流平板まわりの流れ場解析	14
5.2 遷音速層流円弧翼型まわりの流れ場解析	16
6. ま と め	37
参考文献	38
補遺 I 時間分割法における精度について	39
補遺 II C_G の要素	40

曲線座標系薄層ナビエ・ストークス混合型差分法による 遷音速翼型解析の試み*

廣瀬直喜** 松野謙一**

小松浩司*** 藤田真人***

A Curvilinear Coordinate Thin-Layer Navier-Stokes Hybrid Scheme for Transonic Airfoil Analysis

Naoki Hirose, Ken-ichi Matsuno, Koji Komatsu
and Makoto Fujita

Abstract

A new procedure of hybrid finite difference scheme for the two-dimensional thin-layer Navier-Stokes equations in a body-fitted curvilinear coordinates is proposed. The present procedure utilizes a time and space splitting scheme which is a hybrid scheme composed of explicit and implicit schemes. MacCormack's explicit predictor-corrector scheme is applied to the flow direction. The predictor-corrector type Crank-Nicolson scheme originally developed for the boundary layer equations by Matsuno is extended to the Navier-Stokes equations and applied to the direction normal to the body surface and the boundary layer.

Some numerical computations were made for a supersonic laminar boundary layer problem on a semi-infinite flat plate and for a parabolic arc airfoil problem in transonic flow. Comparison of the results with the other numerical code, NSFOIL, shows favorable agreements although some improvement in computational efficiency still remains.

概 要

遷音速翼型解析のため、二次元 Navier-Stokes 方程式(N-S 式)に対して薄層近似を行ない、時間分割差分法による解法を示した。本研究は高精度陰的スキームを時間分割差分法に適用し、高精度高効率な遷音速翼型解析法の開発を試みるものである。

遷音速粘性流で十分に妥当性のある薄層近似 N-S 式に対して、流れに沿う ξ 方向には陽的二次精度 MacCormack 法を用いて、プログラムの効率化を考慮し、境界層を横切る η 方向の差分演算子には予測子・修正子型 Crank-Nicolson 法を適用した。本法の確認のため、超音速層流平板境界層に適用し、解法の妥当性、粘性、圧縮性の効果を確認し、レイノルズ数、 $R_e=10^4$

* 昭和61年 7 月22日 受付

** 空気力学第二部

*** 研修生, 日本大学

まで良好な結果を得た。ついで遷音速翼型解析として、円弧翼の層流解析に適用を試み、マッハ数, $M_{\infty}=0.6\sim 0.85$, $R_e=10^3$ で結果を IAF 法による航技研汎用プログラム NSFOIL の結果と比較し, 良好な一致を得た。その結果, 本法を用いた遷音速翼型解析法開発の可能性が確認された。

記 号

A	: 座標変換ヤコビ行列, (2-17) 式	u, v	: x, y 方向速度成分
A_{jk}	: 三項方程式の係数行列, (3-11) 式	X_w, Y_w	: 翼型座標
a	: 音速	x, y	: カルテシアン座標
B_{jk}	: 三項方程式の係数行列, (3-11) 式	α_{jk}	: 三項方程式の係数行列, (3-12) 式
C	: 代表長さ, または翼弦長	β_{jk}	: 三項方程式の係数行列, (3-12) 式
C_f	: 表面摩擦抗力係数	γ_{jk}	: 三項方程式の係数行列, (3-12) 式
C_G	: \hat{G} の \hat{Q} に対するヤコビ行列, (3-9) 式	γ	: 比熱比
C_{jk}	: 三項方程式の係数行列, (3-11) 式	Δt	: 時間刻み巾
C_p	: 表面圧力係数	$\Delta\xi, \Delta\eta$: ξ, η 方向差分刻み巾
c_ξ, c_η	: 人工粘性係数, (3-5), (3-6) 式	δ	: 翼厚翼弦長比
D_{jk}	: 三項方程式の係数行列, (3-11) 式	δ_{jk}	: 三項方程式の係数行列, (3-12) 式
E	: 輸送項ベクトル x 成分, (2-10) 式	ε	: 内部エネルギー
e	: 全エネルギー	η	: 曲線座標
F	: 輸送項ベクトル y 成分, (2-10) 式	θ	: Sutherland 公式の定数, (2-14) 式
G	: (3-1) 式参照	λ	: 体積粘性係数
I	: 単位行列	μ	: 粘性係数
J	: 座標変換ヤコビアン	ξ	: 曲線座標
k	: 熱伝導係数	ρ	: 密度
L	: 差分演算子, または平板長さ	$\tau_{xx}, \tau_{xy}, \text{etc}$: 粘性応力テンソル成分
L_ξ, L_η	: ξ, η 方向差分演算子	添字	
M	: マッハ数	j, k	: ξ, η 方向格子番号
p	: 圧力	∞	: 一様流
P_r	: Prandtl 数	肩添字	
Q	: 未知量ベクトル, (2-10) 式	n	: 時間ステップ番号
R	: 粘性応力項ベクトル x 成分, (2-10) 式	—	: MacCormack 法予測子での量
R_a	: 一様流音速にもとづくレイノルズ数	^	: ヤコビアン J で正規化した (ξ, η) 座標系での量, (2-24) 式
R_e	: レイノルズ数	•	: 無次元量
R_{LE}	: 翼の前縁半径		
R_4	: R の第 4 行成分		
S	: 粘性応力項ベクトル y 成分, (2-10) 式		
S_4	: S の第 4 行成分		
T	: 温度		
t	: 時間		
U, V	: ξ, η 方向反変速度成分		

1. 序 論

衝撃波, 境界層を含む遷音速翼型まわりの流れを差分法により数値解析するためには, Navier-Stokes 方程式 (N-S 式) を解かなければならない。従来は N-S 式を解くのに計算時間, コストの面で問題があったが, 今日では高速大型計算機や解法の進

歩により十分可能なものとなっている。高いレイノルズ数を含む翼型解析の問題点は境界層、伴流を十分な精度で解析するために、格子巾を非常に小さくする必要があるため、数値解法として、従来の陽解法を採用すると、Couraut-Friedrichs-Lewy (CFL) の安定条件を満たすには、時間刻み Δt が小さくなり過ぎて、計算効率の点で好ましくなかった事である。そこで、CFL 条件による制限を受けずに Δt を比較的大きくとれるように、Beam と Warming は Implicit Approximate Factorization (IAF) 法という陰解法を考案した¹⁾。これはカルテシアン座標系での定式化であるため、通常の翼型まわりの流れの数値解析には不適当である。そこで、Steger は翼型まわりの非直交曲線座標系 (ξ, η) で表わした薄層近似を含む N-S 式について IAF 法を適用し、効率的な高レイノルズ数遷音速翼型解析法を提案した²⁾。

IAF 法が、二つの座標軸 ξ, η のそれぞれの方向に因子分割した、完全に陰的な差分スキームであるのに対し、MacCormack は、彼の陽的 MacCormack 法³⁾ を時間分割差分法で、1 次元差分演算子に分割し、さらに、N-S 式の非粘性項と粘性項を分離し、時間制約の厳しい粘性項部分に対しては、Crank-Nicolson 法、非粘性項の評価には特性曲線法を用いる混合差分法⁴⁾を示した。MacCormack は、その後、新 MacCormack⁵⁾ という、陽的ステップと半陰的ステップよりなる解法も提案している。このように、多次元で、対流項、粘性項などの性質の異なる多くの項より成る方程式を差分化するには、分ステップ (Fractional Step) 法⁶⁾ と一般に呼ばれる方法が安定条件のゆるやかさ、アルゴリズムの簡単化の点から適していると考えられる。

本研究では、このような分ステップ化の概念にもとづき、物体適合の非直交曲線座標系 (ξ, η) で、遷音速粘性流で十分妥当性のあると考えられる薄層近似 N-S 式に対して、時間分割差分法を適用し、分割された方程式系に対し、IAF 法より時間方向に高精度な陽的スキームと陰的スキームを混合して用いることにより、高精度高能率な遷音速翼型解析法の開発を試みるものである。ここで、流れに沿う ξ 方向には陽的二次精度 MacCormack 法を用いて計算時間の効率化を考慮する。 ξ 方向は η 方向に較べ、

物理量の変化は小さく、格子間隔を粗くとることができるので、CFL 条件の制約は支障とならない。粘性層を横切る η 方向の差分スキームには、著者の一人である松野が境界層方程式に対して開発した、効率的な陰的解法である二次精度予測子修正子型の Crank-Nicolson (PCCN) 法を N-S 式に拡張適用することを試みる^{7, 8)}。放物型である境界層方程式のための PCCN 法が、境界層の外の非粘性領域 (衝撃波を含む) まで、一様に適用される N-S 式に対しても有効であるか否かを確認すること、さらに、全く性質の異なる MacCormack 法と PCCN 法に分割することが妥当であるかを調べることも本研究の目的のひとつである。

本論文では、はじめに差分法について記した後、本法の有効性確認のために行なった数値計算の結果について述べる。流れ場への適用の第一例としては、前縁からの衝撃波を含む、超音速層流平板問題を扱う。マッハ数、 $M_\infty = 2.0$ 、レイノルズ数、 $R_e = 10^2, 10^3, 10^4$ について計算を行なった。結果は、衝撃波境界層をとらえ、基本的な衝撃波、境界層の物理的性質と一致し、境界層方程式を解いた結果と比較しても良好であった。次に、遷音速翼型解析を目的として、その基本的形態として、円弧翼を対象とし、層流、遷音速の解析を試みた。層流としたのは、スキームの有効性確認の目的には、それで十分であること、また、乱流モデルを導入した高レイノルズ数では、 η 方向格子巾をきわめて小さくする必要から、計算時間を要するので、初期の目的では避けることとしたためである。解の検証のため、他の解法や実験データとの比較の必要があるが、この種の解法は少なく、まして、入手可能なものはほとんどない。そこで、ここでは、著者の一人らが開発し、実験結果とも良好な一致が報告されている、IAF 法を用いた N-S 式による翼型解析法汎用コード NSFOIL^{9, 10)} で同様の解析を行なった。ただし、NSFOIL は C 形格子系を用いるため、鋭い前縁をもつ円弧翼の前縁近くの解析が困難であるから、0.5% 翼弦長の前縁半径をもつように翼形状を修正してある。両者の解法により、レイノルズ数、 $R_e = 10^3$ 、マッハ数、 $M_\infty = 0.6, 0.7, 0.8, 0.85$ について解析し、圧力、密度、マッハ数等の等高線図、圧力分布、摩擦抗力係

数分布について比較を行ない、良好な一致を得た。
これらの結果から本法が薄層近似N-S式に有効な方法であることが確認された。

2. 基礎方程式

2.1 基礎方程式

基礎方程式としては、二次元圧縮性Navier-Stokes方程式を用いる。カルテシアン座標で書くと、

○連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2-1)$$

○x方向運動量の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} \\ = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \end{aligned} \quad (2-2)$$

○y方向運動量の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} \\ = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{aligned} \quad (2-3)$$

○エネルギー式

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial u(e+p)}{\partial x} \\ + \frac{\partial v(e+p)}{\partial y} = \frac{\partial R_4}{\partial x} + \frac{\partial S_4}{\partial y} \end{aligned} \quad (2-4)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{yy} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \\ R_4 &= u \tau_{xx} + v \tau_{yx} + k \frac{\partial T}{\partial x} = u \tau_{xx} + v \tau_{yx} \\ &\quad + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)} \frac{\partial a^2}{\partial x} \\ S_4 &= u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + k \frac{\partial T}{\partial y} = u \tau_{xy} + v \tau_{yy} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)} \frac{\partial a^2}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

$$a^2 = \gamma(\gamma-1) \left[\frac{e}{\rho} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (2-6)$$

また完全ガスの状態方程式は次式で示される。

$$p = (\gamma-1)\rho e = (\gamma-1) \left[e - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \right] \quad (2-7)$$

粘性係数 μ についてはSutherlandの公式により評価する。

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1+\theta}{\frac{T}{T_\infty} + \theta} \right] \quad (2-8)$$

また、体積粘性係数 λ についてはStokesの仮定より

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2-9)$$

とする。

次に、(2-1)~(2-4)式を差分構成しやすいようにベクトル形式で書き直すと、

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \quad (2-10)$$

ただし、

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ R_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ S_4 \end{bmatrix}$$

(2-10)式および(2-7)式を支配方程式として、未知数 $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, e)^T$ について解く。

2.2 基礎方程式の無次元化

支配方程式を以下の代表量によって無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x/C, \quad \dot{y} = y/C, \quad \dot{u} = u/a_\infty, \quad \dot{v} = v/a_\infty \\ \dot{\rho} &= \rho/\rho_\infty, \quad \dot{e} = e/\rho_\infty a_\infty^2, \quad \dot{t} = a_\infty t/C, \quad \dot{\epsilon} = \epsilon/a_\infty^2 \\ \dot{\mu} &= \mu/\mu_\infty, \quad \dot{p} = p/\rho_\infty a_\infty^2, \quad \dot{\tau} = \tau/(\mu_\infty a_\infty/C) \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

(2-10)式は以下のように無次元される。以下簡化のため、無次元量の記号 \cdot を省略すると、

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{R_a} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \right) \quad (2-12)$$

ただし,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u(e+p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ R_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ S_4 \end{bmatrix},$$

となる。ここで R_a は一様流音速 a_∞ を代表速度としたレイノルズ数であり、一様流速度 u_∞ にもとづく通常のレイノルズ数 R_e との関係は以下となる。

$$R_a = \frac{\rho_\infty a_\infty C}{\mu_\infty}, \quad R_e = M_\infty R_a \quad (2-13)$$

また、完全ガスの状態方程式(2-7)式は、無次元化しても同じ形となる。さらに、Sutherlandの公式は、

$$\mu = T^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1+\theta}{T+\theta} \right), \quad (2-14)$$

$T_\infty = 273.15^\circ\text{K}$ を基準とすると、 $\theta = 0.3991$ 。

2.2 基礎方程式の曲線座標変換

カルテシアン座標系は通常の翼型まわりの流れの数値解析には不适当である。そこで、任意の非直交物体適合座標系 (ξ, η) に対応して数値解析できるように座標変換を用いると、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

ξ, η 方向微分は連鎖定理より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

よって、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi & 0 \\ x_\eta & y_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi & 0 \\ x_\eta & y_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{として、} \mathbf{A} \text{ の逆行列 } \mathbf{A}^{-1} \text{ は、}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)} \begin{pmatrix} y_\eta - y_\xi & 0 \\ -x_\eta & x_\xi & 0 \\ 0 & 0 & (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

(2-18) 式において、 $J = 1/(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)$ とおいて、(2-17) 式に左から \mathbf{A}^{-1} をかけると

$$J \begin{pmatrix} y_\eta - y_\xi & 0 \\ -x_\eta & x_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1/J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

ゆえに展開して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= J \left(y_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= J \left(-x_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} + x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad (2-20)$$

これより、メトリックスとヤコビアン J の関係は、 ξ, η に(2-20)式を作用させて、

$$\begin{aligned} \xi_x &= J y_\eta, & \xi_y &= -J x_\eta \\ \eta_x &= -J y_\xi, & \eta_y &= J x_\xi \end{aligned} \quad (2-21)$$

これを用いて、変換ヤコビアン J を表わすと

$$J = \frac{1}{(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)} = \frac{J^2}{\eta_y \xi_x - \xi_y \eta_x}$$

よって、

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (2-22)$$

(2-20)~(2-22)式を用いて支配方程式(2-10)式を座標変換すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{Q}}{J} \right) \\ \frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} \mathbf{E} \right) \\ \frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_y}{J} \mathbf{F} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_y}{J} \mathbf{F} \right) \\ \frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} \mathbf{R} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} \mathbf{R} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_y}{J} \mathbf{S} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_y}{J} \mathbf{S} \right) \right\} \quad (2-23)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Q}} &= \frac{1}{J} \mathbf{Q}, \quad \widehat{\mathbf{E}} = \frac{1}{J} (\xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F}), \quad \widehat{\mathbf{F}} = \frac{1}{J} (\eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F}) \\ \widehat{\mathbf{R}} &= \frac{1}{J} (\xi_x \mathbf{R} + \xi_y \mathbf{S}), \quad \widehat{\mathbf{S}} = \frac{1}{J} (\eta_x \mathbf{R} + \eta_y \mathbf{S}) \end{aligned} \quad (2-24)$$

とおくと, 支配方程式は以下のように, カルテシア
ン座標系と同じ形で表わすことが出来る。

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} = \mathbf{R}_a^{-1} \left\{ \frac{\partial \widehat{\mathbf{R}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{\mathbf{S}}}{\partial \eta} \right\}, \quad (2-25)$$

これは完全N-S式である。

反変速度を以下のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v \\ V &= \eta_x u + \eta_y v \end{aligned} \right\}, \quad (2-26)$$

これを導入して, (2-24)式より,

$$\widehat{\mathbf{E}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (e+p) U \end{bmatrix}, \quad (2-27)$$

$$\widehat{\mathbf{F}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (e+p) V \end{bmatrix}, \quad (2-28)$$

$$\widehat{\mathbf{R}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} \\ \xi_x R_4 + \xi_y S_4 \end{bmatrix}, \quad (2-29)$$

$$\widehat{\mathbf{S}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy} \\ \eta_x R_4 + \eta_y S_4 \end{bmatrix}, \quad (2-30)$$

さらに, 応力テンソルの成分は,

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta \\ u_y &= \xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta \\ v_x &= \xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta \\ v_y &= \xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta \end{aligned} \right\}, \quad (2-31)$$

であるから,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu) u_x + \lambda v_y \\ &= \frac{4}{3} \mu (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) - \frac{2}{3} \mu (\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu (u_y + v_x) \\ &= \mu (\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta) + \mu (\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta) \\ \tau_{yy} &= (\lambda + 2\mu) v_y + \lambda u_x \\ &= \frac{4}{3} \mu (\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta) - \frac{2}{3} \mu (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) \end{aligned} \right\} \quad (2-32)$$

すなわち, (2-25)式に以上のすべての項を含むものを曲線座標系完全N-S式と呼ぶ。

2.4 薄層近似Navier - Stokes方程式

境界層内においては物体に沿う ξ 方向の粘性応力項に較べて層を横切る η 方向の粘性応力項は十分に大きい。そこで次の様な近似を行なう。

各運動量方程式において, 物体に沿う ξ 方向の成分をもつ粘性項だけを無視し, 方程式はそのまま残しておく。エネルギー方程式についても同様にする。このような仮定のもとに得た方程式を薄層近似 (thin-layer approximation) N-S式と呼び, Steger が用いている²⁾。

この近似の特徴および利点を境界層方程式ないし, N-S式と対比させて掲げると,

- (1) 境界層方程式では物体表面に垂直方向の運動量方程式を省略するが, 一方, 薄層近似N-S式はこの方向の運動方程式が存在するため, 剝離に特異性がない。
- (2) 境界層の外側ではN-S式はEuler方程式に漸近するため, 薄層近似N-S式は非粘性領域でも成立する。

ゆえに境界層内及びその外部領域が一度に解ける。

上述の近似に従って, (2-25)式右辺, 粘性項のうち, $\partial \widehat{\mathbf{R}} / \partial \xi$ 及び, $\partial \widehat{\mathbf{S}} / \partial \eta$ の中の ξ 微分項を省略する。

(2-30)式より

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{S}}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{J} (\eta_x \mathbf{R} + \eta_y \mathbf{S}) \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} \\ \eta_x \tau_{yx} + \eta_y \tau_{yy} \\ \eta_x R_4 + \eta_y S_4 \end{bmatrix} \right\},$$

この式の右辺を(2-4), (2-32)式を使って展開し, (2-9)式のStokesの仮定を考慮し, ξ 方向微分を省略すると以下ようになる。

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2)u_\eta + \frac{\mu}{3}\eta_x(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta) \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2)v_\eta + \frac{\mu}{3}\eta_y(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta) \\ -\mu P_r^{-1}(\gamma-1)^{-1}(\eta_x^2 + \eta_y^2)\partial_\eta a^2 \\ + \frac{1}{2}\mu(\eta_x^2 + \eta_y^2)(u^2 + v^2)_\eta \\ + \frac{1}{6}\mu\{\eta_x^2(u^2)_\eta + \eta_y^2(v^2)_\eta + 2\eta_x\eta_y(uv)_\eta\} \end{bmatrix}$$

ゆえに薄層近似N-S式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = R_a^{-1} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} \quad (2-33)$$

ただし,

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (e+p)U \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (e+p)V \end{bmatrix},$$

$$\hat{S} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 u_\eta + \alpha_2 v_\eta \\ \alpha_2 u_\eta + \alpha_3 v_\eta \\ u(\alpha_1 u_\eta + \alpha_2 v_\eta) + v(\alpha_2 u_\eta + \alpha_3 v_\eta) \\ + \alpha_4 \{e/\rho - (u^2 + v^2)/2\}_\eta \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \mu \left(\frac{4}{3} \eta_x^2 + \eta_y^2 \right), \quad \alpha_2 = \mu \left(\frac{1}{3} \eta_x \eta_y \right)$$

$$\alpha_3 = \mu \left(\eta_x^2 + \frac{4}{3} \eta_y^2 \right), \quad \alpha_4 = \frac{\mu \gamma}{P_r} (\eta_x^2 + \eta_y^2)$$

3. 差分法

3.1 時間分割差分法について

(2-33)式に対して時間依存差分法を適用する。時間依存差分法は, 適当な初期条件のもとに, 時間(t)方向に解を求めていく方法であり, $t \rightarrow \infty$ とした時, 定常解に収束するならば, これを解として得る漸近解法である。また, 通常, この方法は差分方程式の

簡易化のため空間分割された方程式の差分演算子の組み合わせにより解かれる。

まず, (2-33)式を以下のように変形する。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (3-1)$$

$$\text{ただし,} \quad \hat{G} = \hat{F} - \frac{1}{R_a} \hat{S}$$

次に上式を以下のように空間分割し, それぞれに対する差分演算子を L_ξ , L_η とする。

$$L_\xi : \quad \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} = 0 \quad (3-2)$$

$$L_\eta : \quad \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (3-3)$$

(3-1)式に対して, 時間方向に二次精度となる差分演算子の組み合わせは Δt を時間刻み巾として, 以下のようになる(補遺I参照)。

$$\hat{Q}(t+\Delta t) = L_\xi \left(\frac{1}{2} \Delta t \right) L_\eta (\Delta t) L_\xi \left(\frac{1}{2} \Delta t \right) \hat{Q}(t) \quad (3-4)$$

ここで(3-2), (3-3)式は, それぞれ微分方程式の型が双曲型, 放物型と異なる。それぞれの式に対して異なる差分演算子を用いることは, 性質の異なる解を能率よく解いてゆくためには適していると言えよう。このように空間分割された方程式に対して異なる差分演算子を用いることを混合差分法(Hybrid Scheme)と呼ぶ。

さて, ここでは, ξ 方向差分演算子 L_ξ には, Mac-Cormackの陽的差分法³⁾を用いることにした。陽的差分法では, 時刻 t の値から Δt 後の値を直接計算してゆく方法であるから, プログラム化が容易で, 計算時間が少ない利点がある一方, よく知られるように, Δt の大きさについて, 空間格子幅で制限されるCFL安定条件による制約をうける。しかし, L_ξ については, ξ 方向が流れに沿う方向であり, 物理量の変動は, 境界層を横切る η 方向に較べて少ないので, 相対的にメッシュ巾を大きくとる事が出来るので, 多くの場合, CFL条件はそれほど大きな制約とはならない。また, ξ 方向格子巾の前縁付近の大きさと遠方場での大きさの差は, 例えば, 局所時間刻み巾法(Local Time Step Method)によって解決可能である。

次に、 η 方向差分演算子 L_η には、松野が境界層方程式に対する高能率解法として提案し、かつ実証した予測子・修正子型 Crank-Nicolson 陰的差分法 (PCCN法) を適用する。⁷⁾ よく知られる通り、陰的差分法は多元連立方程式を解く必要があり、1 ステップ当りの計算時間は大きくなる。しかし、粘性層に対する格子網の形状から必然的に ξ 方向より厳しくなる CFL 条件の制約からは解放され、大きな時間刻み巾をとることが可能である。また、PCCN法は N-S 式への適用については、未検討であった。本論文では、境界層の外につながる非粘性領域 (衝撃波を含む) まで、PCCN法が一様に適用できるか否かを確認するとともに、全く性質の異なる Mac Cormack 法と組合せることが妥当であるかを調べることも目的のひとつとした。

最後に、(3-2), (3-3) 式を差分化するには、人工粘性項を右辺に付加する必要がある。これは差分近似に伴う打ち切り誤差による不用な数値振動を抑えるとともに、衝撃波を滑らかに形成させるために使われる。ここでは、陽的な形の 4 階 4 次の人工粘性項を用いることにした。人工粘性項の加わった形での、分割された微分方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} = c_\xi \frac{\Delta \xi^4}{J} \frac{\partial^4 (J \hat{Q})}{\partial \xi^4} \quad (3-5)$$

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = c_\eta \frac{\Delta \eta^4}{J} \frac{\partial^4 (J \hat{Q})}{\partial \eta^4} \quad (3-6)$$

ただし、 c_ξ , c_η は $O(1)$ の人工粘性係数。

3.2 ξ 方向差分演算子 L_ξ MacCormack 法

L_ξ としては、前述の理由より陽的 MacCormack 法を採用する。MacCormack 法は図 1 に示した格子系において既知量である時間ステップ n 列 (○印)

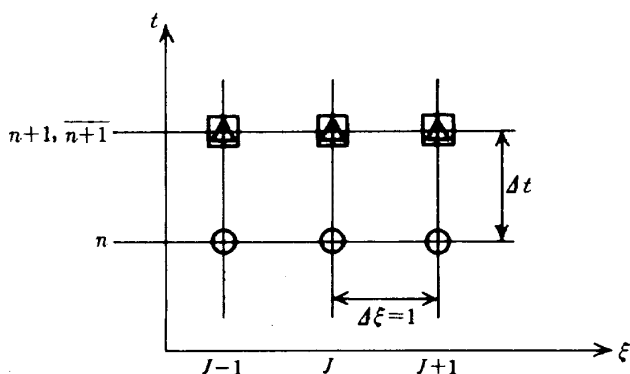


図 1 L_ξ 格子系

の値より先づ Δt だけ進める中間的な値を予測子により、 $\overline{n+1}$ 列 (△印) の値として求め、次に修正子により、 $\overline{n+1}$ 列の値を用い、二次精度、すなわち、打ち切り誤差が時間、空間格子巾の二次のオーダーで求められる方法である。

(3-5) 式に対する差分式を示す。

予測子

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{jk}^{n+1} = & \hat{Q}_{jk}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\hat{E}_{j+1,k}^n - \hat{E}_{jk}^n) \\ & + c_\xi \frac{\Delta t}{J_{jk}} (J_{j-2k} \hat{Q}_{j-2k}^n - 4 J_{j-1k} \hat{Q}_{j-1k}^n + 6 J_{jk} \hat{Q}_{jk}^n \\ & - 4 J_{j+1k} \hat{Q}_{j+1k}^n + J_{j+2k} \hat{Q}_{j+2k}^n) \end{aligned} \quad (3-7)$$

修正子

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{jk}^{n+1} = & \frac{1}{2} \{ \hat{Q}_{jk}^n + \hat{Q}_{jk}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\hat{E}_{jk}^{n+1} - \hat{E}_{j-1k}^{n+1}) \} \\ & + \frac{1}{2} c_\xi \frac{\Delta t}{J_{jk}} (J_{j-2k} \bar{Q}_{j-2k}^{n+1} - 4 J_{j-1k} \bar{Q}_{j-1k}^{n+1} \\ & + 6 J_{jk} \bar{Q}_{jk}^{n+1} - 4 J_{j+1k} \bar{Q}_{j+1k}^{n+1} + J_{j+2k} \bar{Q}_{j+2k}^{n+1}) \end{aligned} \quad (3-8)$$

ここで空間方向における微係数の差分近似は予測子では前進差分、修正子では後退差分により構成される。また、人工粘性項は 4 階の差分を 5 点で表わしているため、境界の隣りの点を計算するとき、(3-7), (3-8) 式の人工粘性項の格子番号は評価できない。そこで、 j 点で評価する時、 $(j-1)$ 点が境界であるとする、人工粘性項は、次の形で評価する。予測子で、

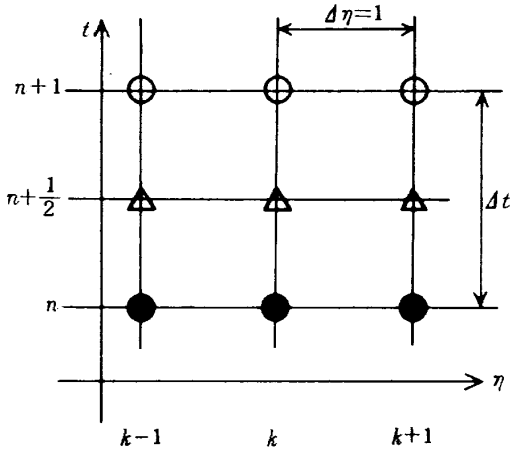
$$\begin{aligned} c_\xi \frac{\Delta t}{J_{jk}} \{ & J_{j-1k} \hat{Q}_{j-1k}^n - 4 J_{jk} \hat{Q}_{jk}^n + 6 J_{j+1k} \hat{Q}_{j+1k}^n \\ & - 4 J_{j+2k} \hat{Q}_{j+2k}^n + J_{j+3k} \hat{Q}_{j+3k}^n \} \end{aligned}$$

修正子も同様。すなわち、 $\Delta \xi$ だけずらせて評価することとした。また、下流側境界の場合は、 j 点の評価の時、 $(j-1)$ 点の人工粘性項を使うこととなる。

3.3 η 方向差分演算子 L_η 予測子修正子型 Crank-Nicolson 法

ここでは L_η に境界層方程式において松野が高能率高精度解法として示した予測子修正子型 Crank-Nicolson 法を応用した差分法を構成する。

(3-6) 式を次のように表わすことができる。


 図2 L_η 格子系

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial C_G \hat{Q}}{\partial \eta} = c_\eta \frac{\Delta \eta^4}{J} \frac{\partial^4 (J \hat{Q})}{\partial \eta^4} \quad (3-9)$$

ただし,

$$C_G = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{Q}} - \frac{1}{R_a} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{Q}}$$

C_G の詳細は補遺IIを参照のこと。

この差分法は予測子, 修正子の二段階で演算が完結し, 図2に示した格子系において, 予測子では既知列 n (●印) より Δt だけ進んだ $(n+1)$ 列の未知量 (○印) を求める中間の値として, $\Delta t/2$ だけ進んだ $(n+1/2)$ 列 (△印) の値を $(n+1/2, j)$ で評価される1次精度後退差分によって差分近似をとる。陰的差分法であるため, $(n+1/2)$ 列の値はすべて未知量となる。空間方向の微係数は二次精度中心差分で近似する。修正子については, 予測子同様 $(n+1/2, j)$ ですべての差分近似は評価されるが, 時間方向にも中心差分を用いる。

(3-9)式を差分式であらわすと,

予測子

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{Q}_{jk}^{n+1/2} - \hat{Q}_{jk}^n}{\frac{1}{2} \Delta t} + \left[\frac{C_{Gjk+1}^n \hat{Q}_{jk+1}^{n+1/2} - C_{Gjk-1}^n \hat{Q}_{jk-1}^{n+1/2}}{2 \Delta \eta} \right] \\ &= c_{\eta 1} \frac{1}{J_{jk}} \left\{ J_{jk-2} \hat{Q}_{jk-2}^n - 4 J_{jk-1} \hat{Q}_{jk-1}^n \right. \\ & \quad \left. + 6 J_{jk} \hat{Q}_{jk}^n - 4 J_{jk+1} \hat{Q}_{jk+1}^n + J_{jk+2} \hat{Q}_{jk+2}^n \right\} \end{aligned} \quad (3-10)$$

以上を整理すると, 以下の三項方程式を得る。

$$A_{jk}^n \hat{Q}_{jk-1}^{n+1/2} + B_{jk}^n \hat{Q}_{jk}^{n+1/2} + C_{jk}^n \hat{Q}_{jk+1}^{n+1/2} = D_{jk}^n \quad (3-11)$$

ただし,

$$A_{jk}^n = -\frac{\Delta t}{2 \Delta \eta} C_{Gjk-1}^n, \quad B_{jk}^n = 2I, \quad C_{jk}^n = \frac{\Delta t}{2 \Delta \eta} C_{Gjk+1}^n$$

$$\begin{aligned} D_{jk}^n = & 2 \hat{Q}_{jk}^n + \left\{ c_\eta \frac{1}{J_{jk}} (J_{jk-2} \hat{Q}_{jk-2}^n - 4 J_{jk-1} \hat{Q}_{jk-1}^n \right. \\ & \left. + 6 J_{jk} \hat{Q}_{jk}^n - 4 J_{jk+1} \hat{Q}_{jk+1}^n + J_{jk+2} \hat{Q}_{jk+2}^n) \right\} \end{aligned}$$

I : 単位行列

修正子

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{Q}_{jk}^{n+1} - \hat{Q}_{jk}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\frac{C_{Gjk+1}^{n+1/2} \hat{Q}_{jk+1}^{n+1} - C_{Gjk-1}^{n+1/2} \hat{Q}_{jk-1}^{n+1}}{2 \Delta \eta} \right. \\ & \quad \left. + \frac{C_{Gjk+1}^{n+1/2} \hat{Q}_{jk+1}^n - C_{Gjk-1}^{n+1/2} \hat{Q}_{jk-1}^n}{2 \Delta \eta} \right] \\ &= c_{\eta 2} \frac{1}{J_{jk}} \left\{ J_{jk-2} \hat{Q}_{jk-2}^n - 4 J_{jk-1} \hat{Q}_{jk-1}^n + 6 J_{jk} \hat{Q}_{jk}^n \right. \\ & \quad \left. - 4 J_{jk+1} \hat{Q}_{jk+1}^n + J_{jk+2} \hat{Q}_{jk+2}^n \right\} \end{aligned} \quad (3-12)$$

同様に整理して,

$$a_{jk}^{n+1/2} \hat{Q}_{jk-1}^{n+1} + \beta_{jk}^{n+1/2} \hat{Q}_{jk}^{n+1} + \gamma_{jk}^{n+1/2} \hat{Q}_{jk+1}^{n+1} = \delta_{jk}^n \quad (3-13)$$

ただし,

$$a_{jk}^{n+1/2} = -\frac{\Delta t}{4 \Delta \eta} C_{Gjk-1}^{n+1/2}, \quad \beta_{jk}^{n+1/2} = I,$$

$$\gamma_{jk}^{n+1/2} = \frac{\Delta t}{4 \Delta \eta} C_{Gjk+1}^{n+1/2}$$

$$\delta_{jk}^n = \hat{Q}_{jk}^n - \frac{\Delta t}{4 \Delta \eta} (C_{Gjk+1}^{n+1/2} \hat{Q}_{jk+1}^n - C_{Gjk-1}^{n+1/2} \hat{Q}_{jk-1}^n)$$

+人工粘性項

境界に隣り合う点での人工粘性項の評価は L_ξ に同じ。予測子, 修正子を通じて係数はいずれも既知の 4×4 行列となり, 線形ブロック三項方程式を解くアルゴリズムになる。これはガウスの消去法により解くことができる。

3.4 壁上境界条件

本法において壁上の境界値の与え方は次のように行なう。時間ステップ n の時の境界値を用いて, L_η の予測子で $(n+1/2)$ ステップの内点を求める。次に計算された $(n+1/2)$ ステップの内点から, $(n+1/2)$ ステップの境界値を差分方程式を満たすように計算する。さらに $(n+1/2)$ ステップの境界値より $(n+1)$ ステップの内点を修正子により計算し, その内点から, $(n+1)$ ステップの境界値を $(n+$

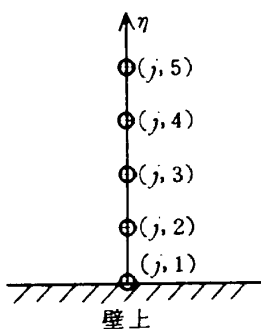


図3 境界近傍格子

1/2) ステップの時と同様にして計算する。

境界が図3のような格子系であるとする。求めるのは、壁上の ρ と e である ($\rho u \equiv \rho v \equiv 0$)。(3-9) 式に対し、片側二次精度差分を用いて、予測子を作ると、

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{Q}_{j1}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{Q}_{j1}^n}{\frac{1}{2} \Delta t} + \frac{1}{2\Delta\eta} \left\{ -3C_{Gj1}^n \hat{Q}_{j1}^{n+\frac{1}{2}} + 4C_{Gj2}^n \hat{Q}_{j2}^{n+\frac{1}{2}} - C_{Gj3}^n \hat{Q}_{j3}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \\ &= c_{\eta 1} \frac{1}{J_{j1}} \left\{ J_{j1} \hat{Q}_{j1}^n - 4J_{j2} \hat{Q}_{j2}^n + 6J_{j3} \hat{Q}_{j3}^n - 4J_{j4} \hat{Q}_{j4}^n + J_{j5} \hat{Q}_{j5}^n \right\} \end{aligned} \quad (3-14)$$

上式は展開して、必要な ρ と e だけの式とすると、

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{14} \\ B_{41} & B_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{j1}^{n+\frac{1}{2}} \\ \hat{e}_{j1}^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A1 \\ A4 \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

の形となる。 $A1, A4, B11, B14, B41, B44$ は全て既知であるから、

$$\begin{pmatrix} \hat{\rho}_{j1}^{n+\frac{1}{2}} \\ \hat{e}_{j1}^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{B11 \times B44 - B14 \times B41} \begin{pmatrix} B44 & -B14 \\ -B41 & B11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A1 \\ A4 \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

より、求める ρ, e の境界値が与えられる。

修正子についても同様である。 $\partial T / \partial \eta = 0$ の境界条件は $C_{Gj,1}^n$ に含まれる。

4. 流れ場への適用

4.1 初期条件

初期条件は壁を除き、一様流状態を与える Impulsive Start とする。壁上では、 $u \equiv v \equiv 0$ とし、 ρ, e については一様流を与える。

$$\text{一様流: } \hat{Q}_{\infty} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho_{\infty} \\ \rho_{\infty} u_{\infty} \\ \rho_{\infty} v_{\infty} \\ e_{\infty} \end{bmatrix}$$

ただし、 $\rho_{\infty} = 1.0, u_{\infty} = M_{\infty}, v_{\infty} = 0,$

$$e_{\infty} = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{1}{2} M_{\infty}^2$$

4.2 安定条件

MacCormack 法は陽的解法であるため、CFL 条件により、時間刻み巾 Δt の大きさに制約をうける。 L_t で取りうる最大時間刻み巾 Δt_{\max} を求め、これを、 L_t, L_r 双方の時間刻み巾 Δt を決める基準とする。すなわち、

$$\Delta t_{\max} \leq \frac{\Delta \xi}{\text{Max}_{\substack{j=1, JMAX \\ k=1, KMAX}} \left\{ |\xi_x u + \xi_y v| + (\xi_x^2 + \xi_y^2)^{\frac{1}{2}} a \right\}_{jk}} \quad (4-1)$$

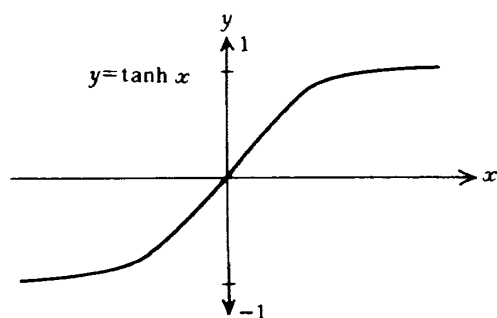
さらに、実際の計算に用いる時間刻み巾 Δt は、壁境界でのスタート時の不連続性による非線形不安定を抑えるために、 Δt_{\max} に、 $0 \leq \text{CFL} \leq 1$ なる係数 CFL をかけたものを用いて、時間の進みを緩和する。CFL の値は、コード 'NSFOIL' に用いて効果のあった、 \tanh 関数の形で、適当なステップ数で、下限値 CFL1 から上限値 CFL2 までなめらかに変化するように与える。特に注意されるのは、上限値に近づける時にも、なめらかに変化させる必要のあることである(図4.5)。

$$\text{CDT} = \frac{1}{2} \left[\tanh \left\{ 5 \log 2 \left(\frac{n}{360} - 1 \right) \right\} + 1 \right]$$

$$\text{CDT} = \text{Min}(\text{CDT}, 1.0)$$

$$\text{CFL} = (\text{CFL2} - \text{CFL1}) \cdot \text{CDT}$$

$$\Delta t = \text{CFL} \cdot \Delta t_{\max} \quad (4-2)$$

図4 $y = \tanh x$

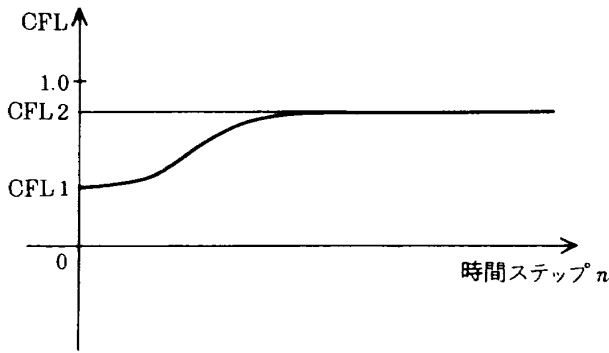


図5 CFLの変化

4.3 収束判定条件

収束の判定は、 \hat{Q}_{jk} の各成分の変動をみて行なう。各格子点での残差の最大値 Δq_{jk} の二乗平均誤差が収束判定値 Δq_{conv} 以下となった場合、収束と判定する。

$$\Delta q_{jk} = \max \{ \Delta \rho_{jk}, \Delta (\rho u)_{jk}, \Delta (\rho v)_{jk}, \Delta e_{jk} \}$$

$$\Delta q_{\text{conv}} \geq \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{\text{JMAX}} \sum_{k=1}^{\text{KMAX}} (\Delta q_{jk})^2}{(\text{JMAX}-1)(\text{KMAX}-1)}} \quad (4-3)$$

ただし、

$$\Delta \rho_{jk} = |\rho_{jk}^{n+1} - \rho_{jk}^n|, \text{ etc.}$$

4.4 超音速層流平板まわりの流れ

4.4.1 物理領域の設定

物理領域を図6に示す。ここでY方向の最大値は、衝撃波が下流側流出境界に来るように、レイノルズ数によって変化させる。平板の基準長さ L は1.0とし、流れは図の左から右へ向う。また、 ξ 、 η 座標線はカルテシアン座標の x 、 y 座標の方向と一致し

ている。

4.4.2 格子系の形成

図7に格子の略図を示す。 ξ 方向は等間隔とし、 η 方向は壁上を最小巾とし、格子番号KFIまで指数関数的に間隔をとってゆく。KFIよりKMAXまでは等間隔とする。その間隔をDYCとすると、 $k=1$ から $k=KFI$ までの格子間隔 $DY(k)$ は、

$$DY(k) = \text{DYC} \times \left(\frac{\Delta y_{\min}}{\text{DYC}} \right)^{\frac{\text{KFI}-k}{\text{KFI}-1}} \quad (4-4)$$

で与えた。

4.4.3 境界条件

境界条件は図8に示す。前方の境界は一様流状態とし、上方の境界は η 方向1次外挿とした。下流境界も流出境界であり、 ξ 方向1次外挿とした。壁上は $u, v=0, \partial T / \partial \eta = 0, L_\eta$ の計算のあと、壁上のCrank-Nicolson法によって、 ρ と e は与えられる。 $\partial T / \partial \eta = 0$ は C_G に含まれる。

平板前方の x 軸は、板厚0として、 $\partial T / \partial \eta = 0, v=0$ とし、 L_η の計算後 η 方向に0次外挿で与える。

4.4.4 演算子による計算範囲

L_ξ, L_η の計算範囲は次のようになる。

$$\begin{aligned} L_\xi : \quad & j = 2 \sim \text{JMAX}-1 \\ & k = 1 \sim \text{KMAX}-1 \end{aligned}$$

(注) $k=1$ での L_ξ は壁上であり、計算しても物理量の変化は、人工粘性項による ρ, e の拡散をのぞいて、ない。

$$\begin{aligned} L_\eta : \quad & j = 2 \sim \text{JMAX}-1 \\ & k = 2 \sim \text{KMAX}-1 \end{aligned}$$

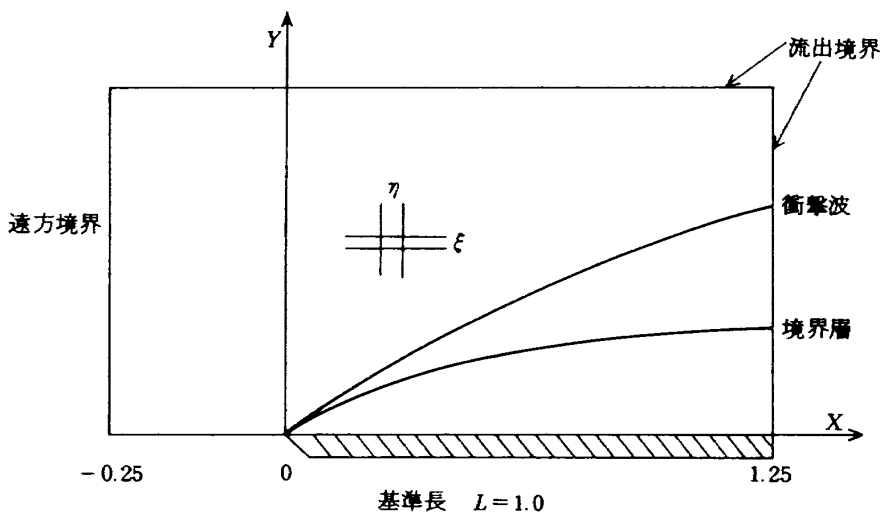


図6 平板問題物理領域

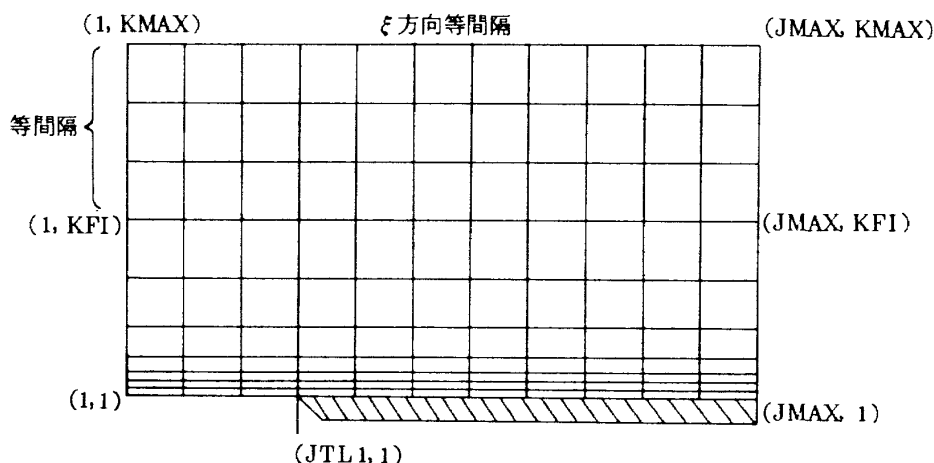


図7 格子配置

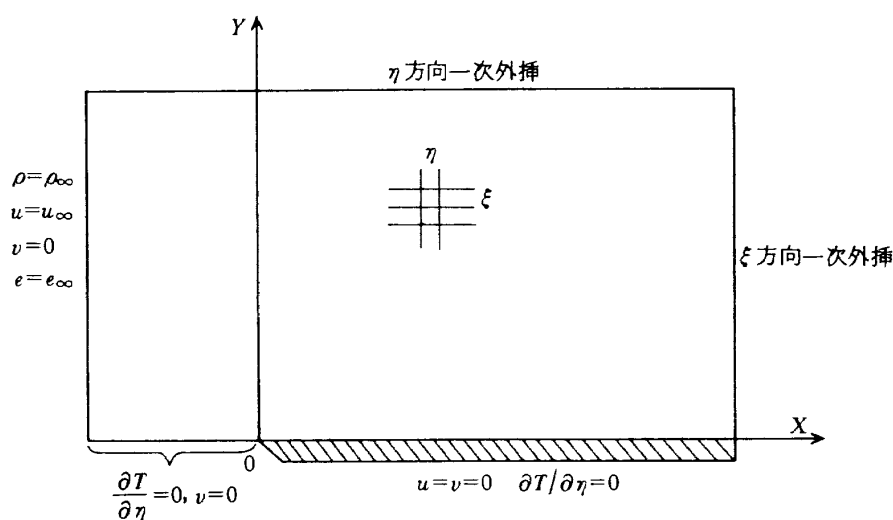


図8 境界条件

4.4.4 計算条件

一様流の条件として次の場合を行なった。

マッハ数 $M_\infty = 2.0$

レイノルズ数 $R_e = 10^2, 10^3, 10^4$

計算領域，格子数等は次の通り。

$x = -0.25 \sim +1.25$, $JMAX = 31$, $\Delta x = 0.05$

R_e	YMAX	KMAX	Δy_{min}
10^2	1.7034	27	0.01
10^3	1.2043	31	0.005
10^4	1.11520	35	0.001

4.5 遷音速層流円弧翼型まわりの流れ

次に遷音速翼型解析として，まず，Deiwertら¹¹⁻¹⁵⁾

により数値計算と実験との比較も報告されている円弧翼問題を扱う。円弧翼は座標変換も，H-型格子の使用で容易に薄層近似NS式用の格子を作ること

が可能であり，本法の適用確認の目的には，簡単で都合がよい。また，解析結果の比較検証のため，IAF法を用いた，汎用コード「NSFOIL」を使って同様の解析を行なう。なお，本論文では，解法の確認が目的であるから，乱流境界層の場合は今後の発展に譲ることとして，層流の場合のみを扱った。

4.5.1 物理領域の設定

NSFOILと本法(PCCNS, Predictor-Corrector type Crank-Nicolson for Navier-Stokes Equations, と略す)のための物理領域を図9に示す。PCCNSによる解析は迎角 0° として，翼型の上面のみを解くようにしてある。翼型は最大翼厚弦長比 $\delta = 0.12$ の放物円弧翼であり，

$$Y_w = \frac{1}{2} \delta \cdot 4 X_w (1 - X_w), \quad X_w = 0 \sim 1. \quad (4-5)$$

計算領域は図中に記してある。NSFOILに較らべ

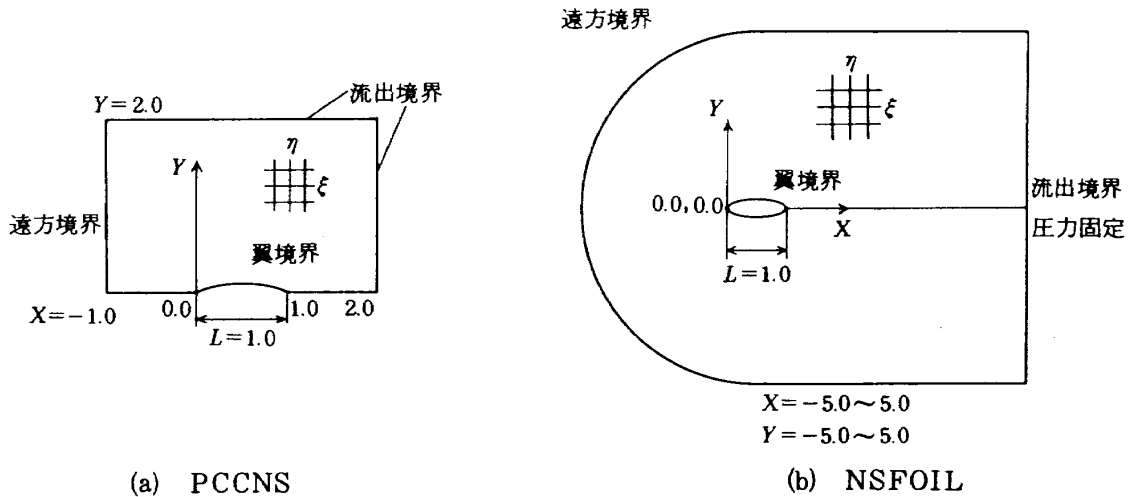


図9 円弧翼問題物理領域

本法での計算領域が狭いのは、計算時間の短縮のためであり、衝撃波、境界層を捕えるという目的に限り、許される範囲で狭くとしたものである。定量的な解析を高 R_e 数、高マッハ数で行なうためには、より広い領域が望まれることは、NSFOILでの指摘¹⁰⁾にあるように、言うまでもない。

4.5.2 格子系の形成

図10に本法の格子を示す。 ξ 方向は翼上において格子が前縁と後縁に集中するように以下の式で x 座標を与える。翼上は40分割とする。

$$x_j = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{JJ-1}{40} \pi \right) \right\},$$

$$JJ = j - (JTL1 - 1) \quad (4-6)$$

$$j = JTL1 \sim JTL2.$$

翼前後の伴流上はそれぞれ翼前縁、後縁の Δx を最小巾として、指数函数的に格子巾を拡大してゆく。 η 方向にも同様に、最小格子巾 $\Delta y_{\min} = 0.001$ とし

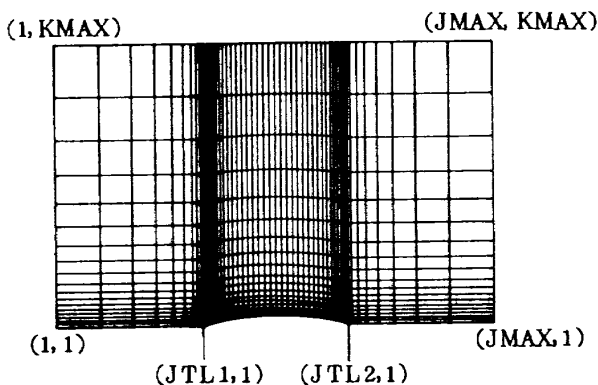


図10 PCCNS 格子配置

て、指数函数的に格子巾を拡大してゆく。 ξ 方向に翼上40分割、伴流上は前後とも10分割、 η 方向には30分割とした。

一方、NSFOILのためには、AFMESHコード¹⁶⁾でC-型格子を作る(図11)。鋭い前縁をもつ円弧翼では、前縁をまわるC格子の形成が困難であるため、翼全体の圧力分布に影響の出ない程度の小さな前縁半径を付けた修正円弧翼を作り、それに対する格子網を形成する。図11(b)は、前縁半径 $R_{LE} = 0.005$ としたときの前縁付近のAFMESHによる格子網である。翼座標は、この前縁部から、0.05翼弦位置まで、滑らかに修正してある。この影響については5章で議論する。なお、高レイノルズ数解析をするため、 $\Delta y_{\min} = 0.0001$ 、格子数 125×45 とした。

4.5.3 境界条件

本法での境界条件を図12に示す。

上流境界($j=1$) 一様流

上方境界($k=KMAX$) η 方向1次外挿

下流境界($j=JMAX$) ξ 方向1次外挿

翼上及びwake上($K-1$) 平板問題に同じ

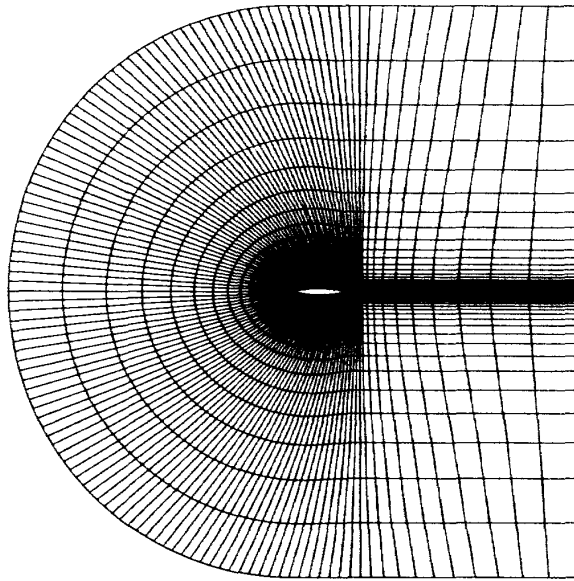
4.5.4 演算子による計算範囲

平板問題に同じ。

4.5.5 計算条件

下記に示す条件での計算を行なう。

$$\begin{array}{l} \text{PCCNSによる解析} \\ \text{層流解析} \\ \text{4ケース} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R_e = 10^3 \\ M_\infty = 0.6, 0.7, 0.8, 0.85 \end{array} \right.$$



(a) 全体図

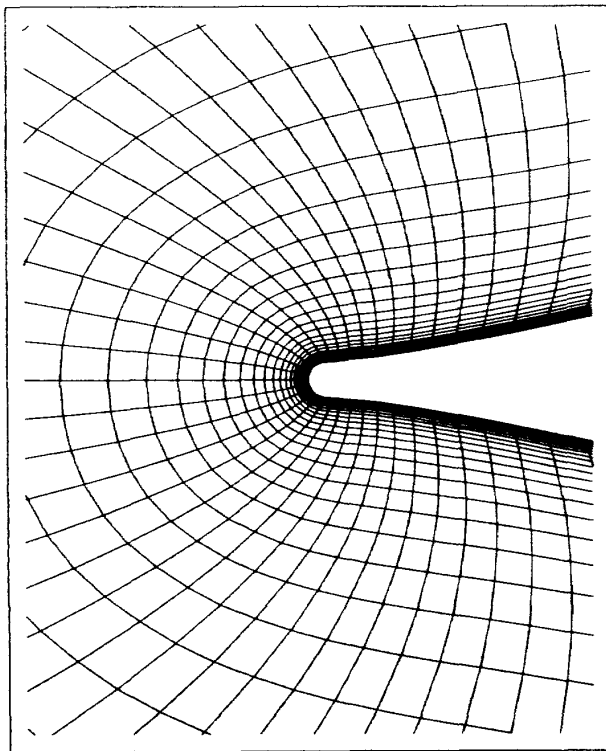
(b) 前縁拡大図, $R_{LE}=0.005$

図 11 NSFOIL 格子配置

NSFOILによる解析
層流解析
4ケース

$$\begin{cases} R_e = 10^3 \\ M_\infty = 0.6, 0.7, 0.8, 0.85 \end{cases}$$

高レイノルズ数乱流解析
2ケース

$$\begin{cases} R_e = 10^6 \\ M_\infty = 0.6, 0.85 \end{cases}$$

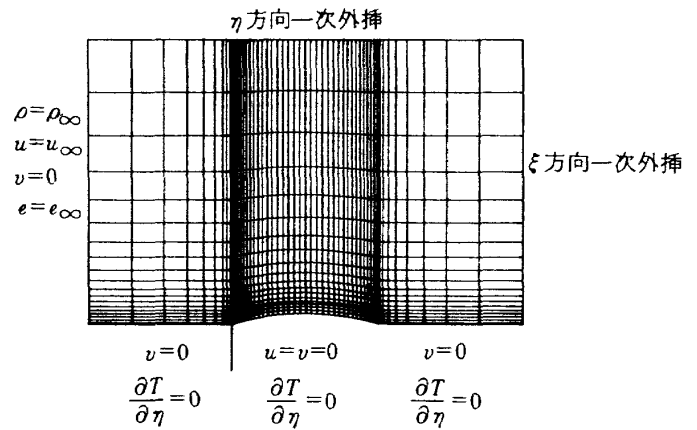


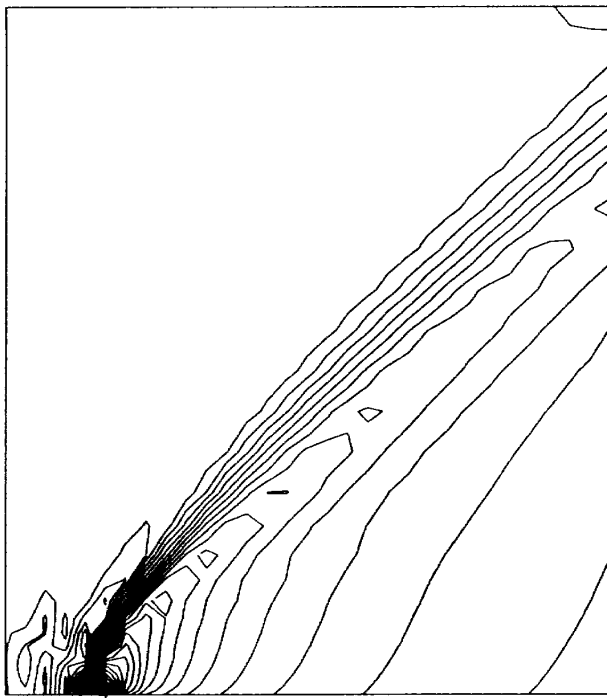
図 12 境界条件

5. 結果と考察

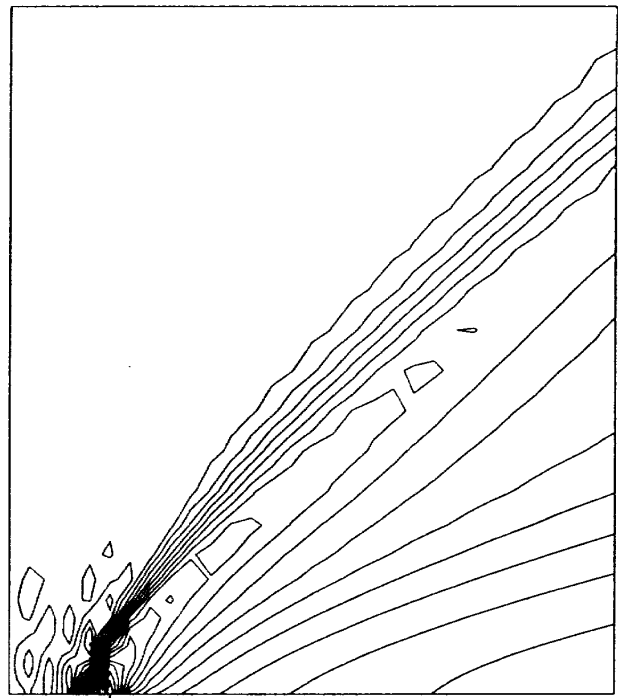
5.1 超音速層流平板まわりの流れ場解析

超音速層流平板まわりの流れ場の解析の結果を図13~15に、それぞれレイノルズ数, $R_e=10^2, 10^3, 10^4$ の場合の圧力, 密度, マッハ数分布の等高線図として示す。 $R_e=10^2$ の時は厚い境界層が形成されるため、前縁部に強い垂直衝撃波が発生しているのが捕えられている。下流に向かって衝撃波角が、マッハ波角 30° に較べて大きすぎるのは、この境界層による排除効果のためである。また、前縁衝撃波より前方の一様流部分に流れ場の乱れが認められるのは、強い衝撃波による数値振動のためである。レイノルズ数を高め、 $R_e=10^3$ とすると、図14に示すとおり、境界層は薄くなり、衝撃波の傾きもマッハ波角の 30° に近づき、その強さも弱まる。前縁前方での数値振動も減少が認められる。さらに高い $R_e=10^4$ では(図15) 衝撃波角はほぼ 30° となり、境界層も非常に薄くなり、衝撃波も弱くなっていることが示される。

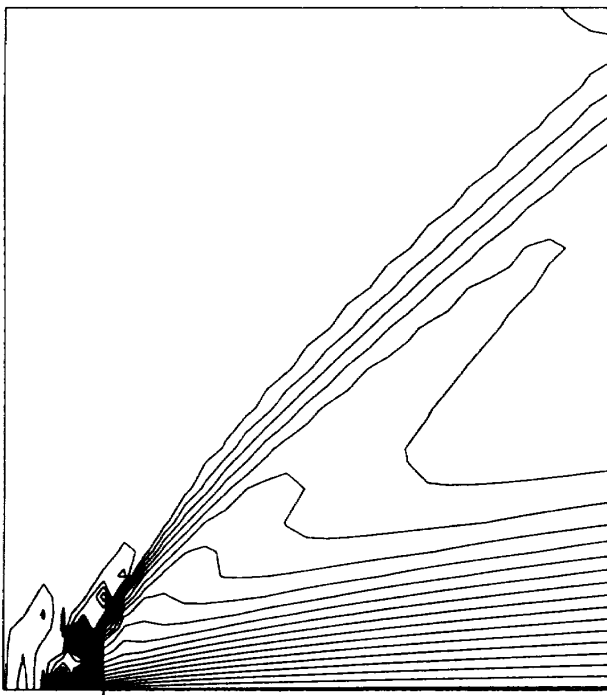
図16に各 R_e 数での表面圧力分布を示す。 $R_e=10^2$ では衝撃波が強く、その前後で解がオーバーシュート、アンダーシュートを起こしているが、 $R_e=10^3, 10^4$ では衝撃波強さが弱いため、数値振動は抑えられている。なお、これらの衝撃波は前後で Rankine-Hugoniot 関係を満たしていることは確認された。つぎに、図17に $x=1$ における平板に垂直方向の速度分布を、図18に平板上の摩擦抗力係数 C_f の x 方向分布を、それぞれ、 R_e 数ごとに示す。 $R_e=10^2$,



(a) 圧力分布

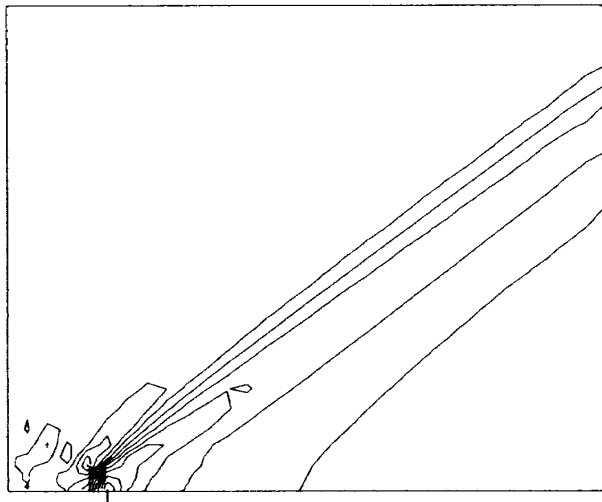


(b) 密度分布

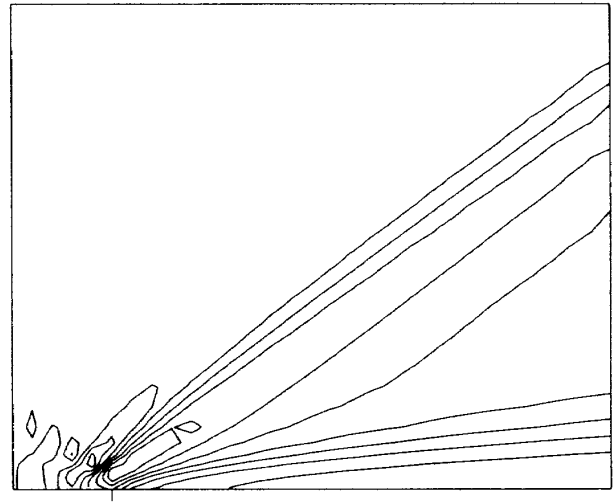


(c) マッハ数分布

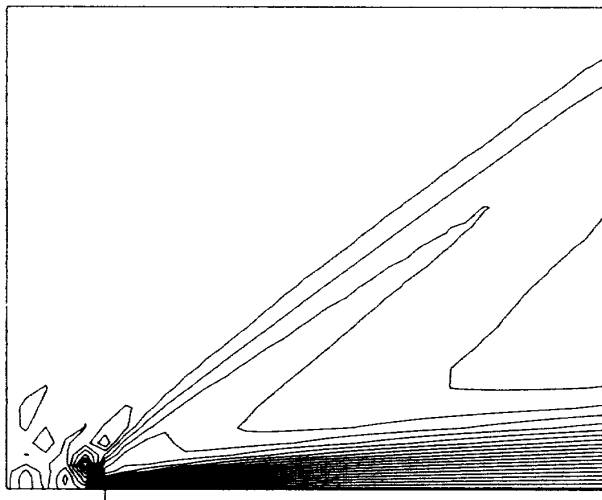
図 13 平板問題流れ場等高線図, $M_\infty=2$, $R_e=10^2$



(a) 圧力分布



(b) 密度分布



(c) マッハ数分布

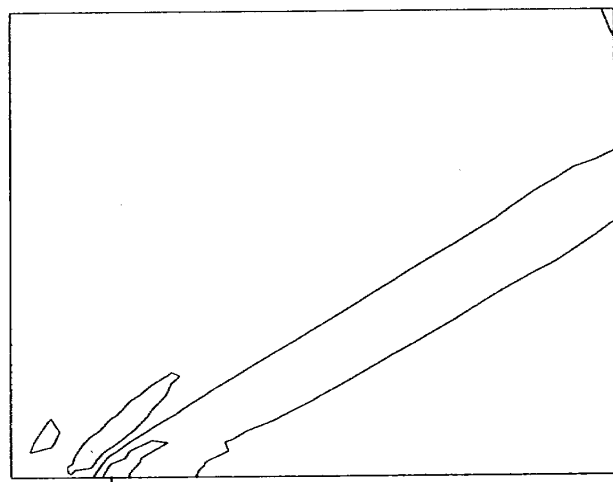
図 14 平板問題流れ場等高線図, $M_\infty=2$, $Re=10^3$

10^3 では、速度分布に衝撃波による速度変化が捕えられていることがわかる。衝撃波捕獲法の結果として、衝撃波は 3 格子巾程度の拡がりをもっている。平板境界層解析の結果は、衝撃波を含まない圧縮性境界層についての Liepman,¹⁷⁾ Van Driest¹⁸⁾らの結果と比較して、定量的にも合うことが確認された。

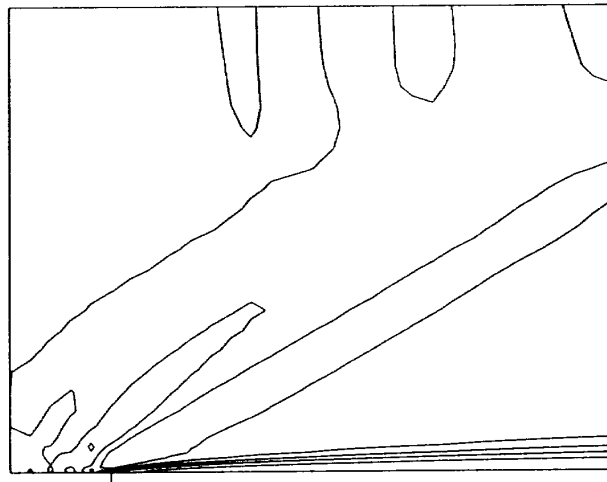
5.2 遷音速層流円弧翼型まわりの流れ場解析

遷音速層流円弧翼型まわりの流れの解析の結果を図 19～22 に、本法 (PCCNS) によるものを、図 23～26 には NSFOIL によるものを、それぞれ、一様流マッハ数, $M_\infty=0.6, 0.7, 0.8, 0.85$ での圧力,

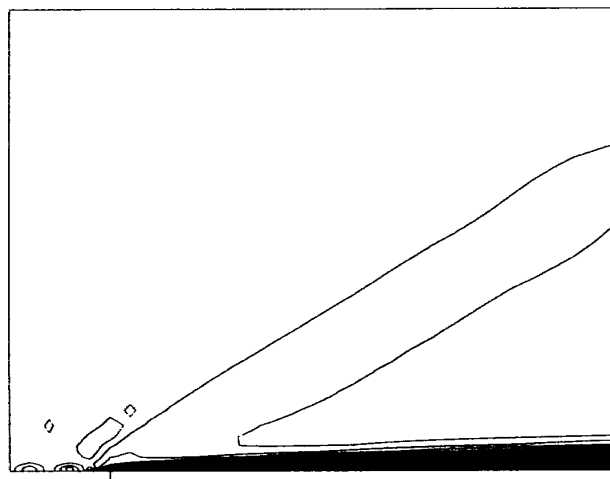
密度, マッハ数分布として示す。両者を比較すると、本法では、上流側の一様流境界が翼に近いので、マッハ数が高いほど翼前方の流れに不自然な歪みが現われている。また、 $M_\infty=0.85$ の時は翼後縁近くの上流、境界層の外側に弱い衝撃波の発生が認められる。一方、NSFOIL の結果は、計算領域が、ここで本法との比較のために同一寸法で示した図上の領域より、ずっと広いものであり、そのため、翼前方の歪みは見られない。なお、等高線の間隔は両者で同一にとってある。翼近くの等高線の分布模様、境界層、伴流の形成状況は、両者の間で著しい差はな



(a) 圧力分布



(b) 密度分布



(c) マッハ数分布

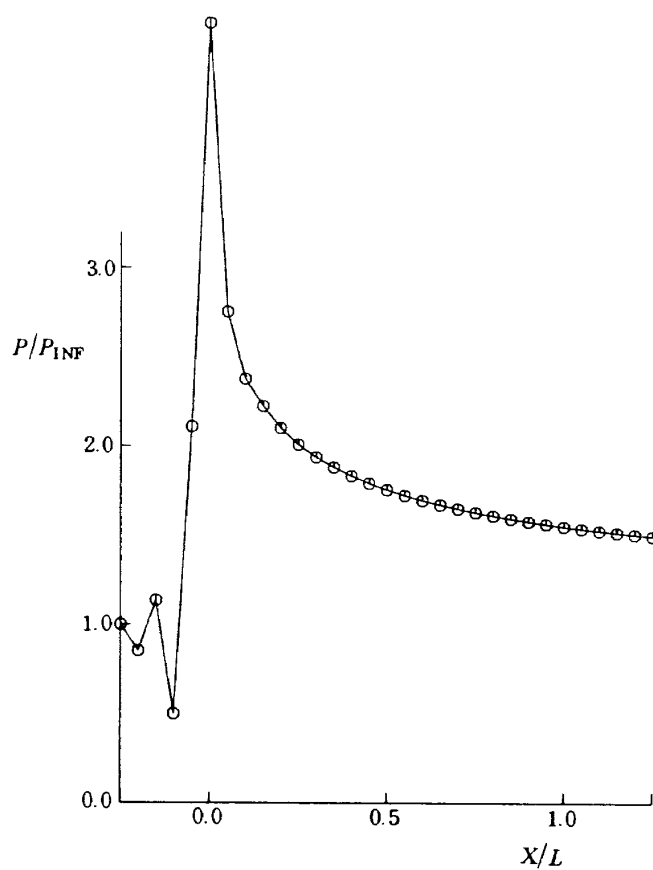
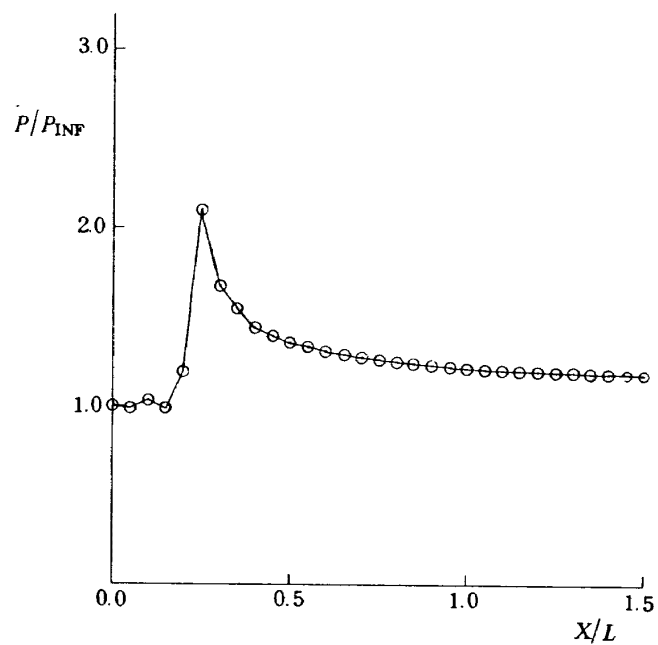
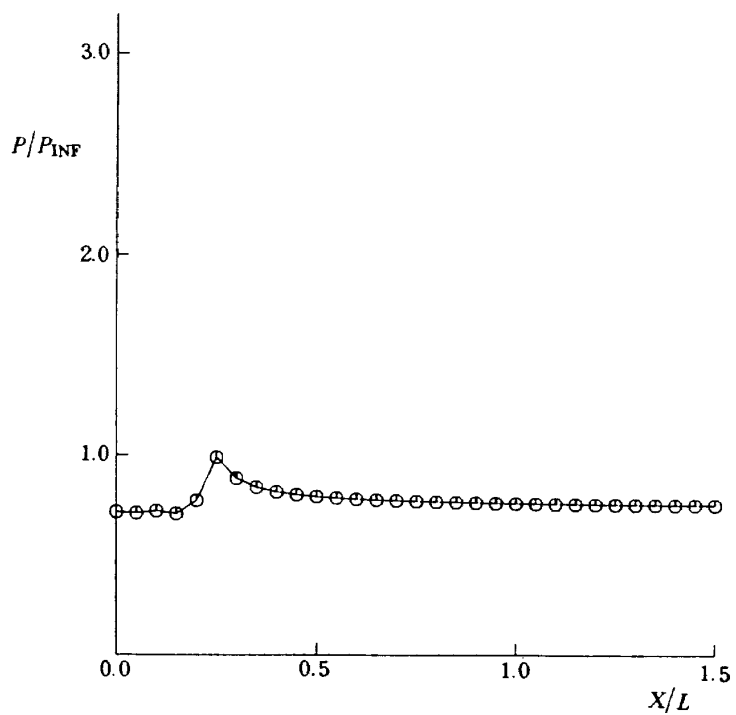
 図 15 平板問題流れ場等高線図, $M_\infty=2$, $R_e=10^4$

い。ただし, $M_\infty=0.85$ の場合, NSFOIL では衝撃波は認めがたい。計算領域や境界条件設定の違いによるものと考えられる。

次に, 翼上表面圧力分布 C_p についての比較を図 27 に, 摩擦抗力係数 C_f についての比較を図 28 に示す。翼形状の異なる前縁部分については分布は一致しないものの, それより下流部では比較的良好な一致を示している。また, C_f 分布から両者とも, $M_\infty=0.8$, 0.85 では後縁剥離を起こしていることがわかる。図 29 には, 本法によって求めた, 中心 y 軸上 (淀み点流線-翼上-伴流) の圧力分布を示す。翼上には衝

撃波が現われていない。また淀み点はかなり良く検出されている。上流側の圧力分布には, 前述の理由から歪みが現われている。図 30 には, 本法による, $M_\infty=0.85$ の時の圧力等高線の 2 つの断面 A-A ($y=0.4$), B-B ($y=0$) に沿う圧力分布を示す。境界層外に位置する A-A 断面では $x=1$ 付近に衝撃波が捕えられている。

なお, 前縁半径の有無や大きさが圧力分布に及ぼす影響をみるために, 前縁半径 $R_{LE}=0$ の本法で用いた翼型と, NSFOIL 用に修正した $R_{LE}=0.005$ の翼型との比較を事前に行なった。そのためには,

(a) $Re = 10^2$ (b) $Re = 10^3$ (c) $Re = 10^4$ 図 16 平板問題表面圧力分布, $M_\infty = 2$

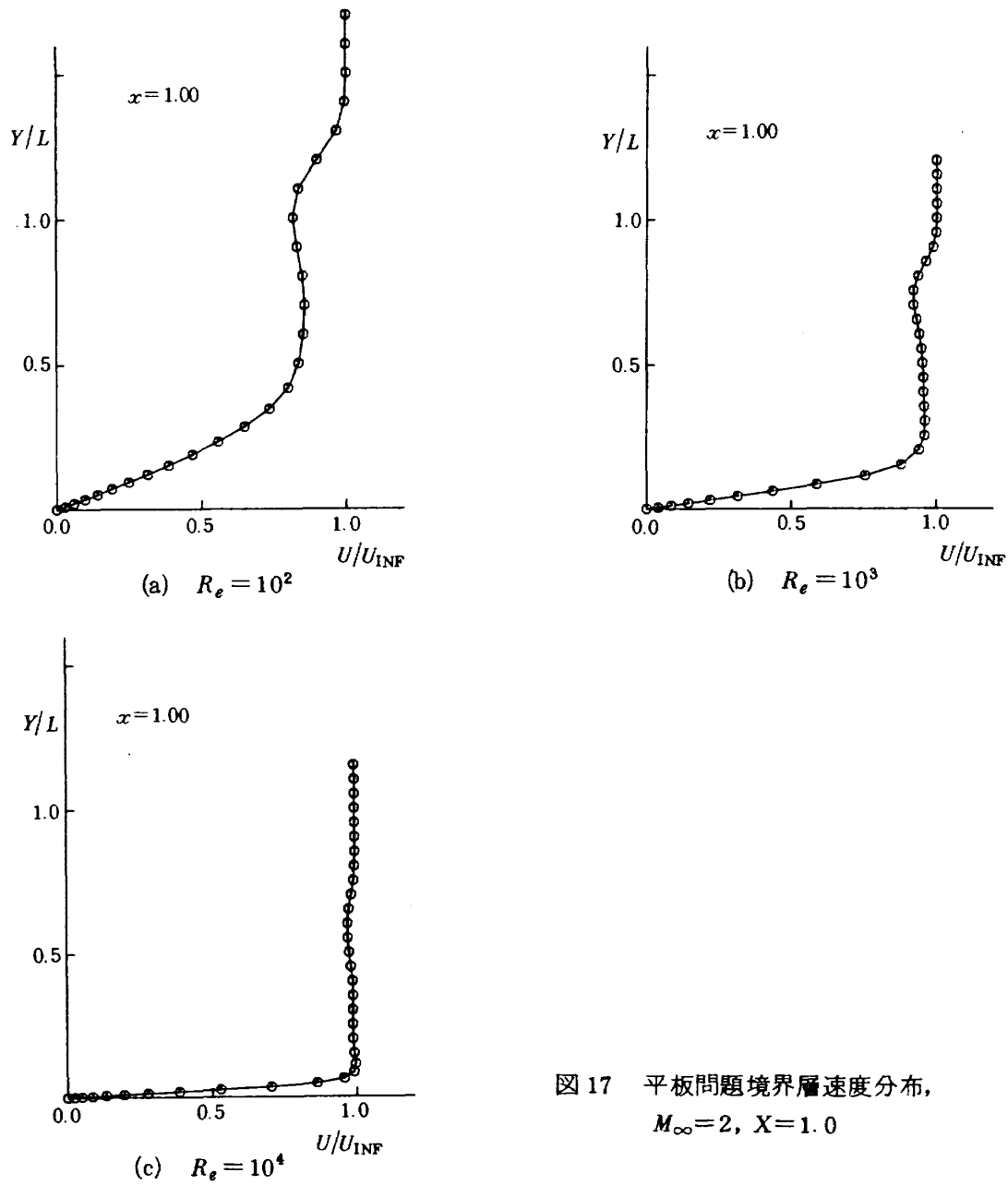


図 17 平板問題境界層速度分布,
 $M_\infty=2, X=1.0$

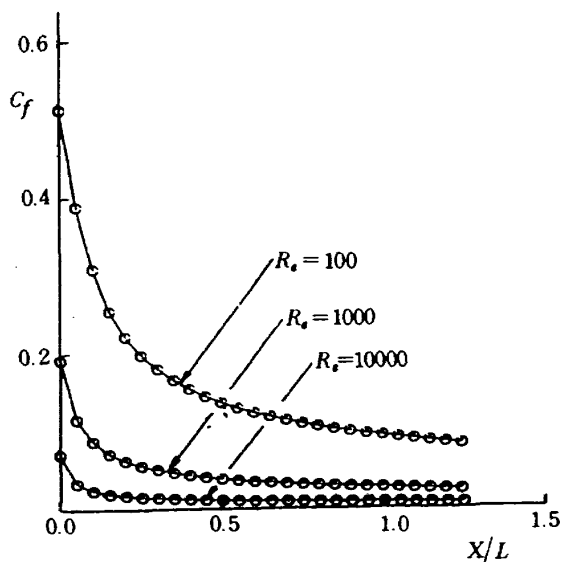
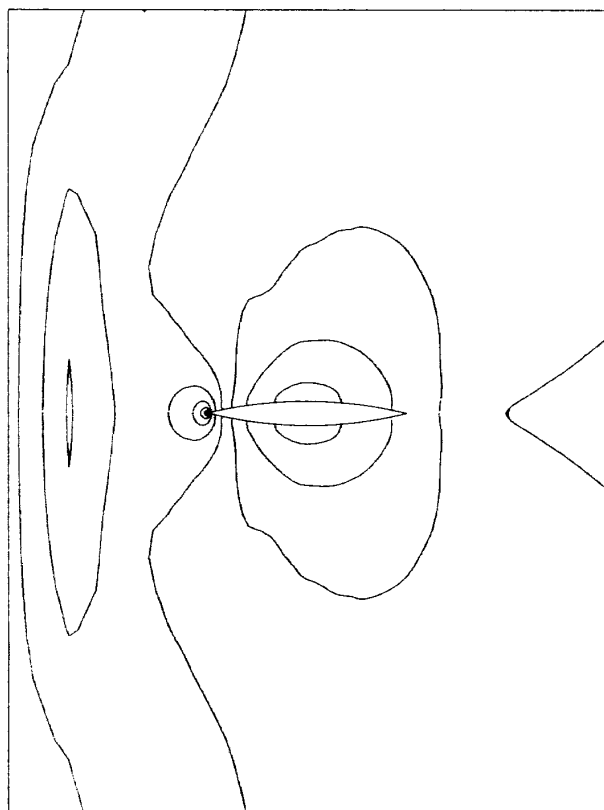
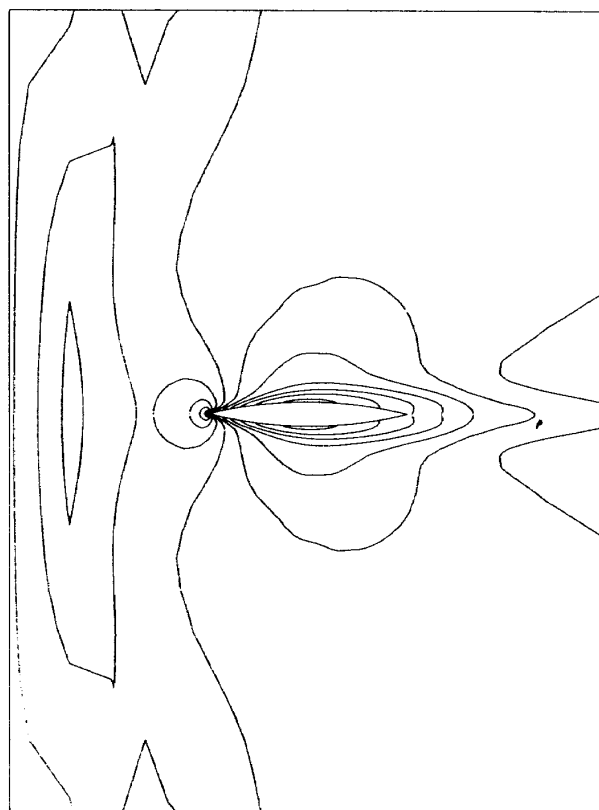


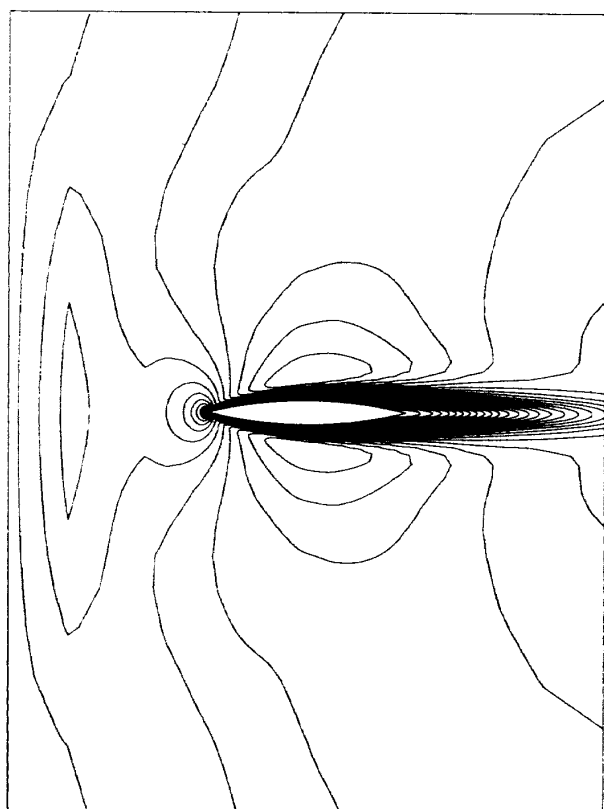
図 18 平板問題表面摩擦抗力係数分布,
 $M_\infty=2, R_e=10^2 \sim 10^4$



(a) 圧力分布

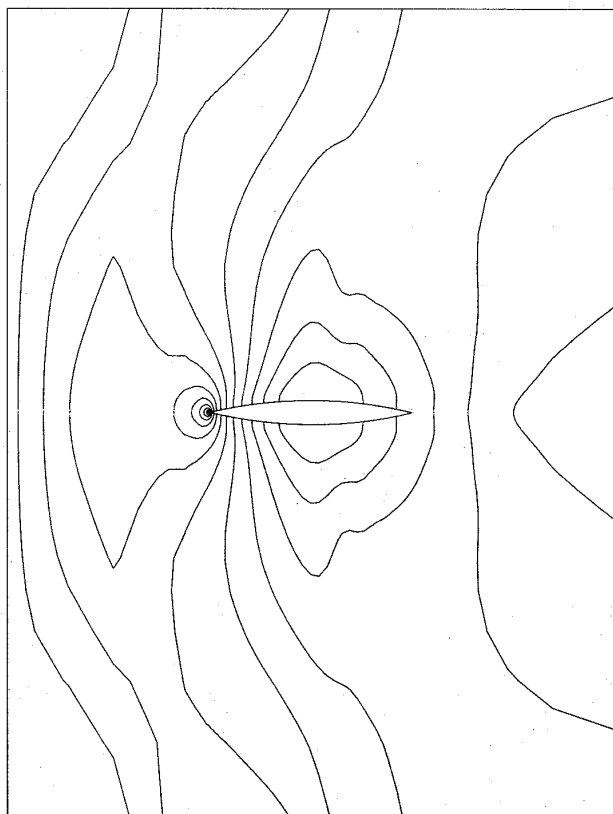


(b) 密度分布

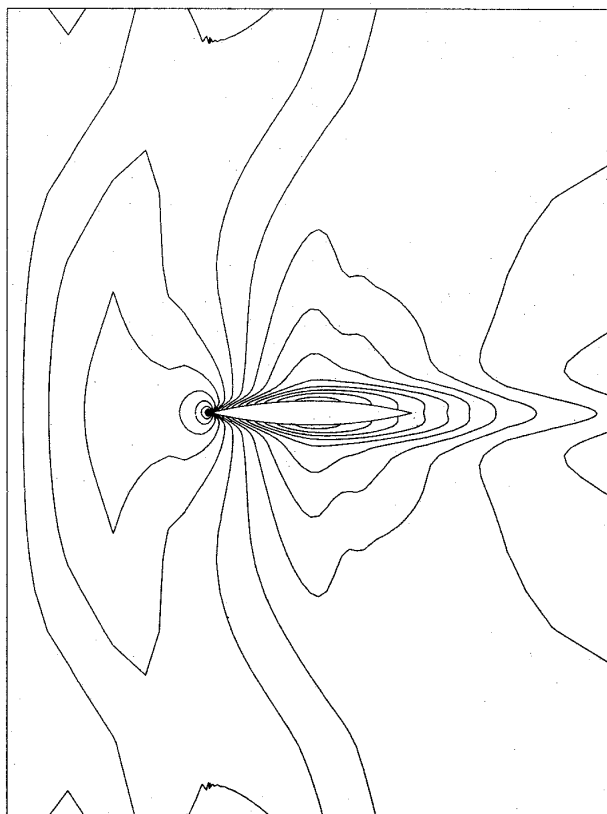


(c) マッハ数分布

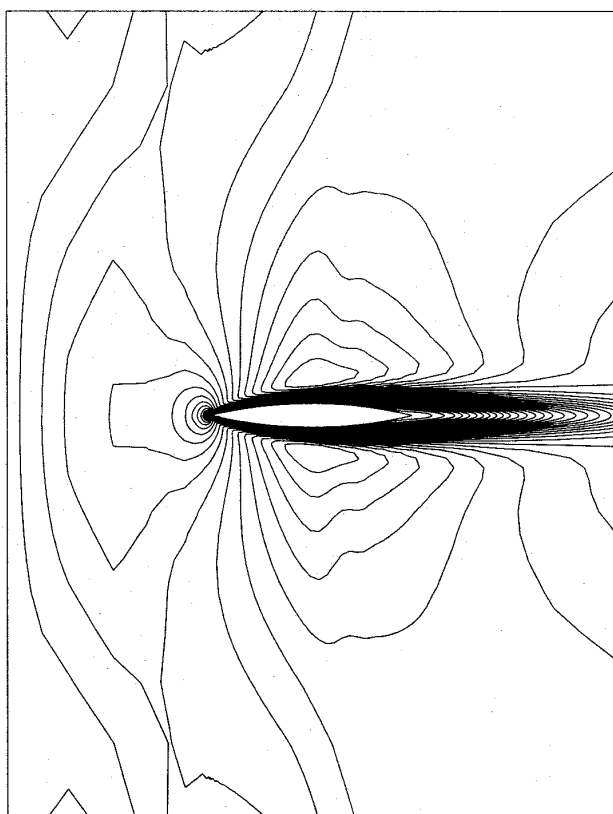
図 19 円弧翼問題流れ場等高線図, PCCNS, $M_\infty=0.6$, $R_e=10^3$



(a) 圧力分布

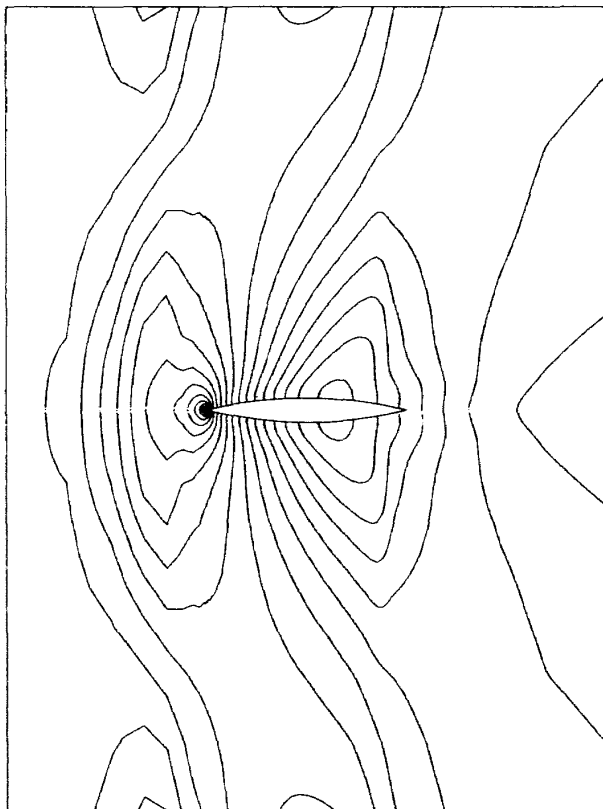


(b) 密度分布

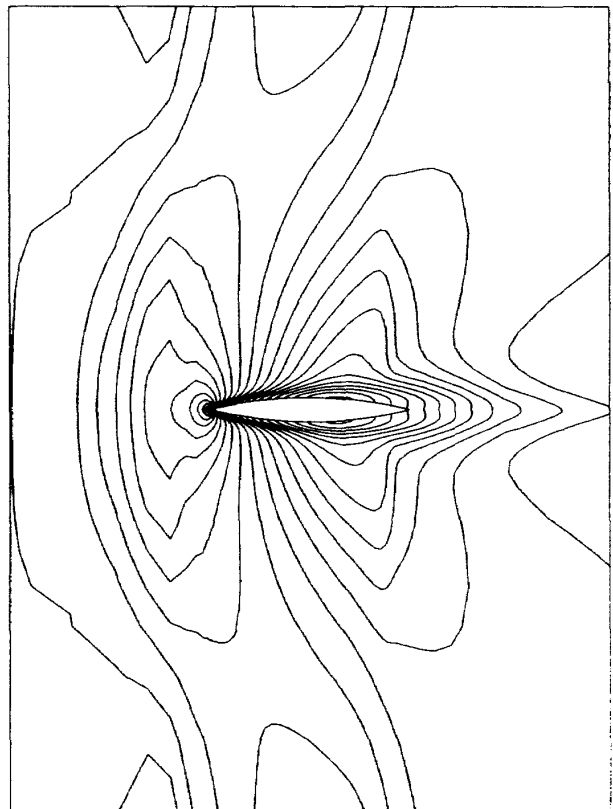


(c) マッハ数分布

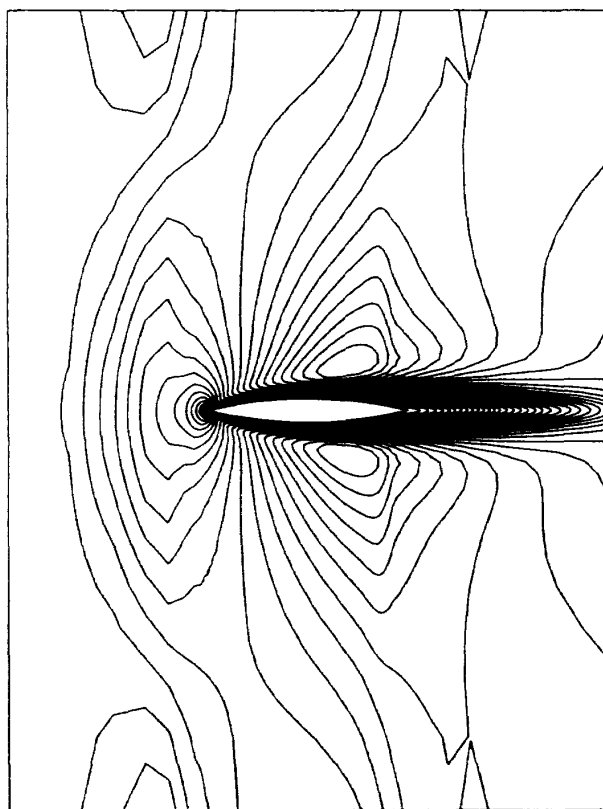
図 20 円弧翼問題流れ場等高線図, PCCNS, $M_\infty=0.7$, $R_\theta=10^3$



(a) 圧力分布

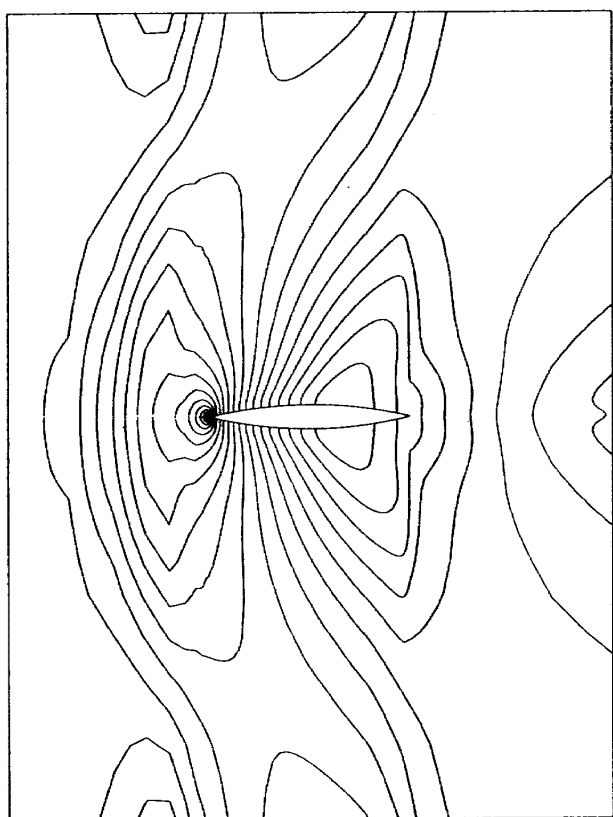


(b) 密度分布

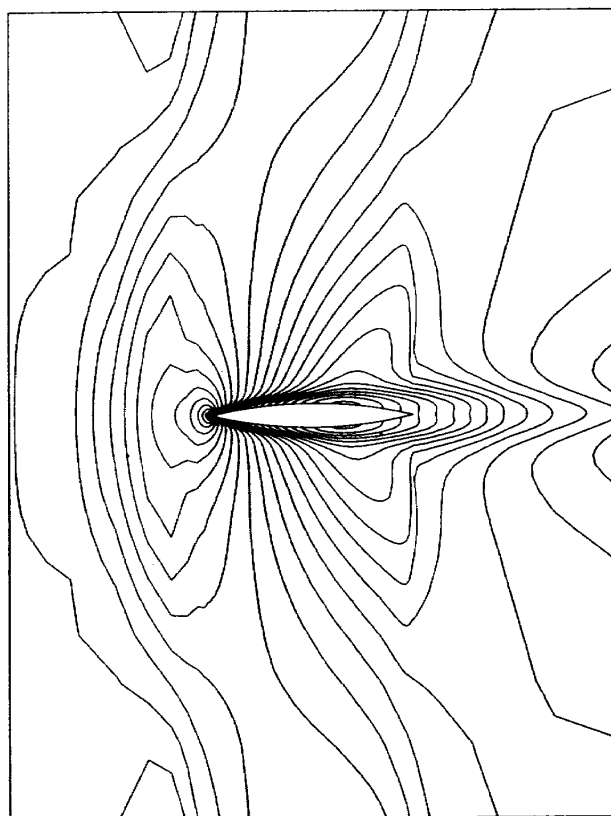


(c) マッハ数分布

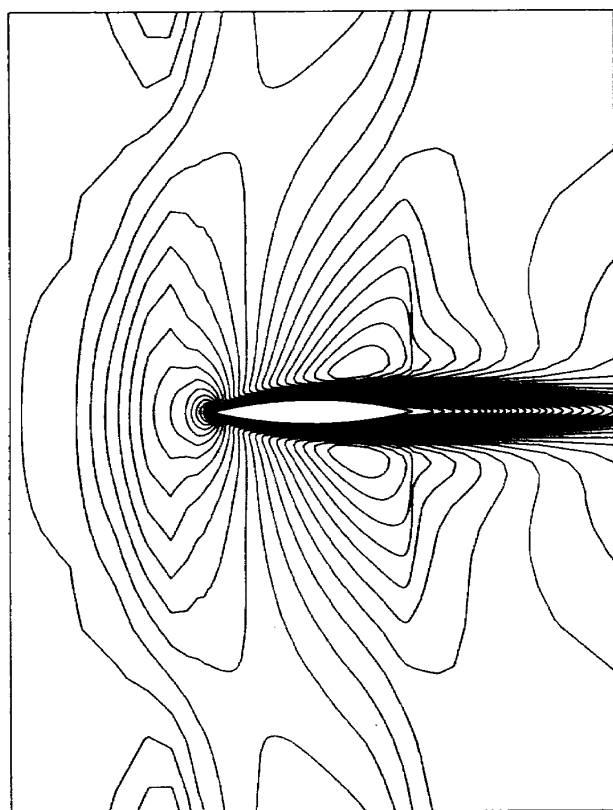
図 21 円弧翼問題流れ場等高線図, PCCNS, $M_\infty=0.8$, $R_\theta=10^3$



(a) 圧力分布

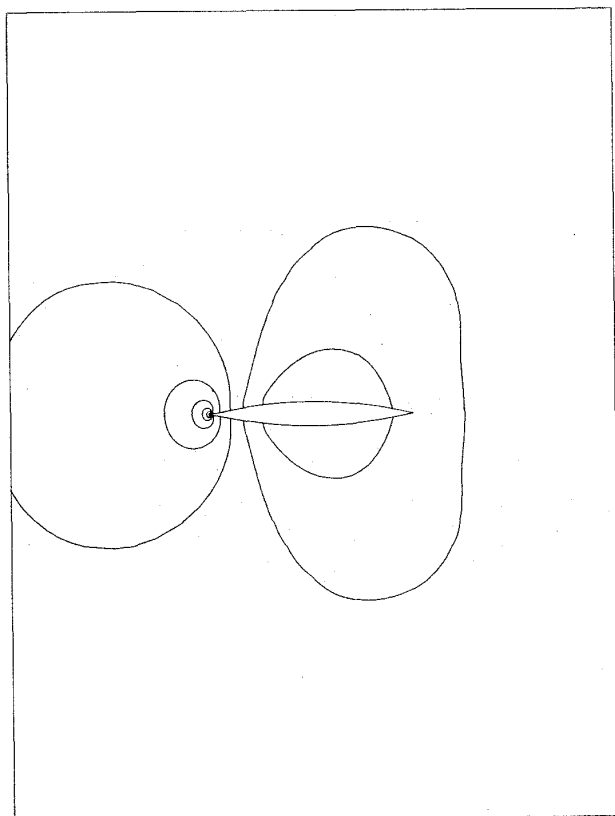


(b) 密度分布

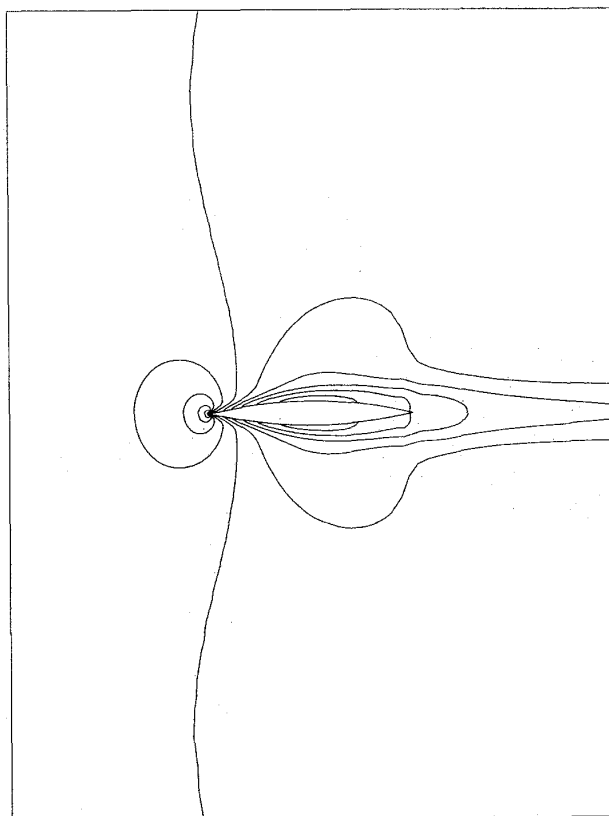


(c) マッハ数分布

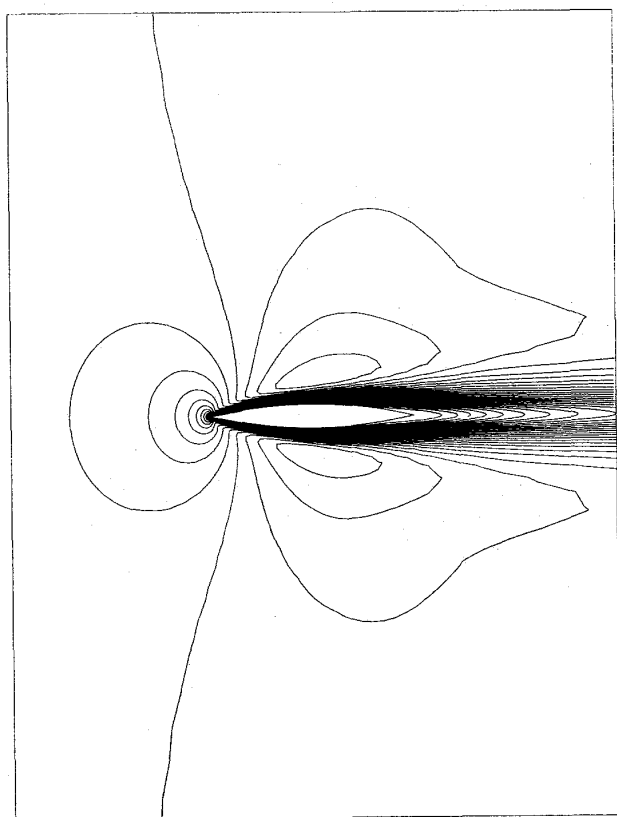
図 22 円弧翼問題流れ場等高線図, PCCNS, $M_\infty=0.85$, $R_e=10^3$



(a) 圧力分布

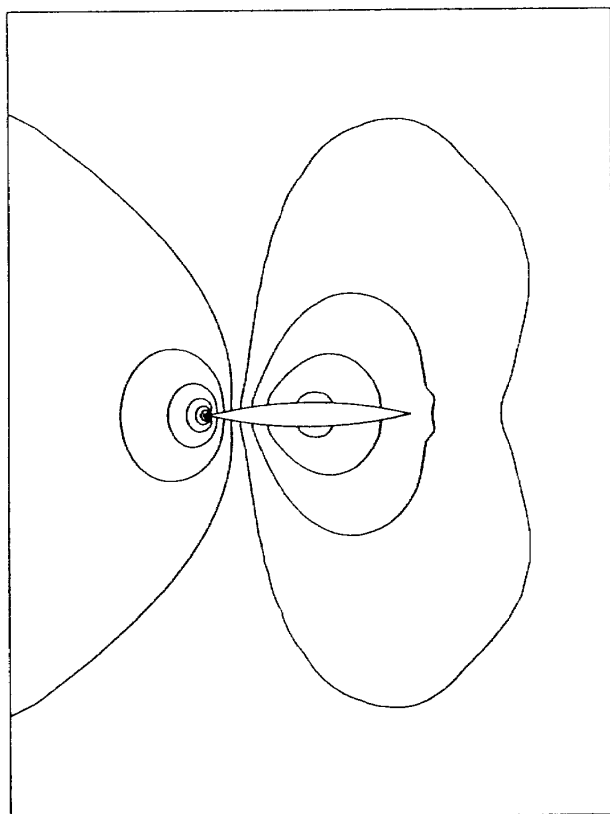


(b) 密度分布

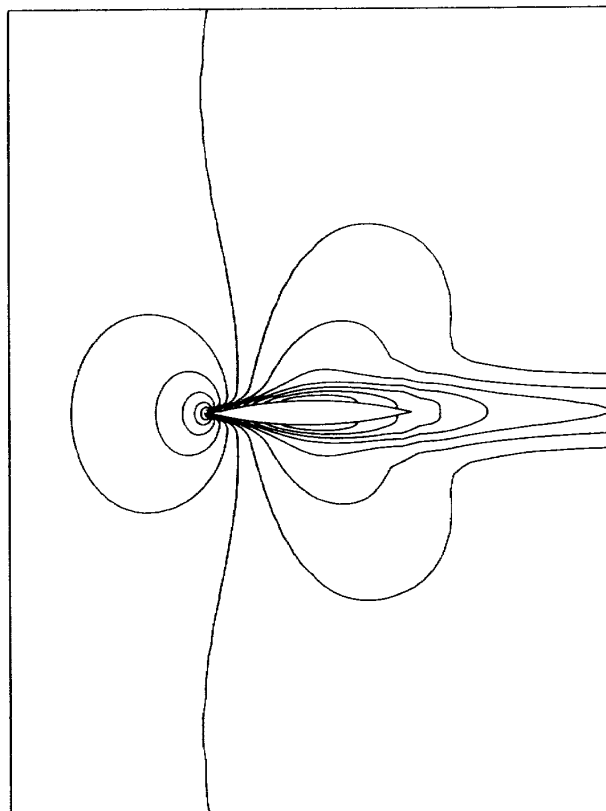


(c) マッハ数分布

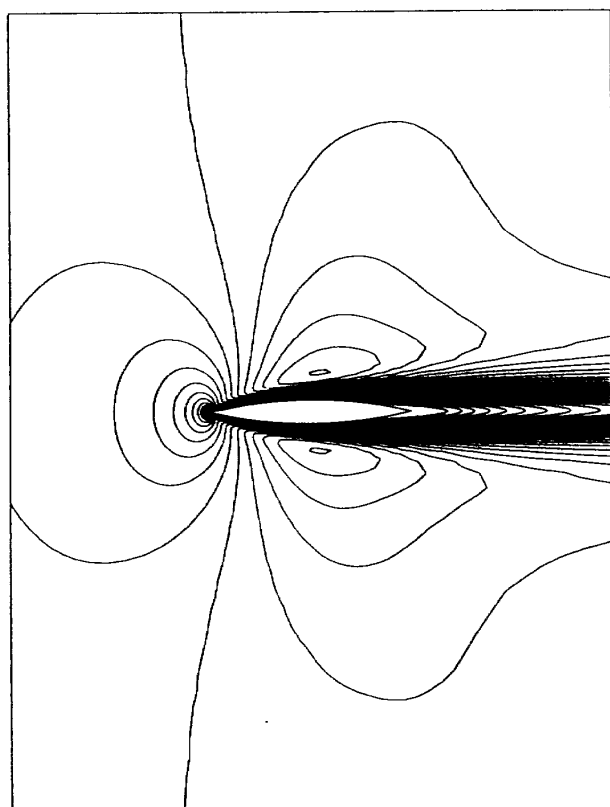
図 23 円弧翼問題流れ場等高線図, NSFOIL, $M_\infty = 0.6$, $R_e = 10^3$



(a) 圧力分布

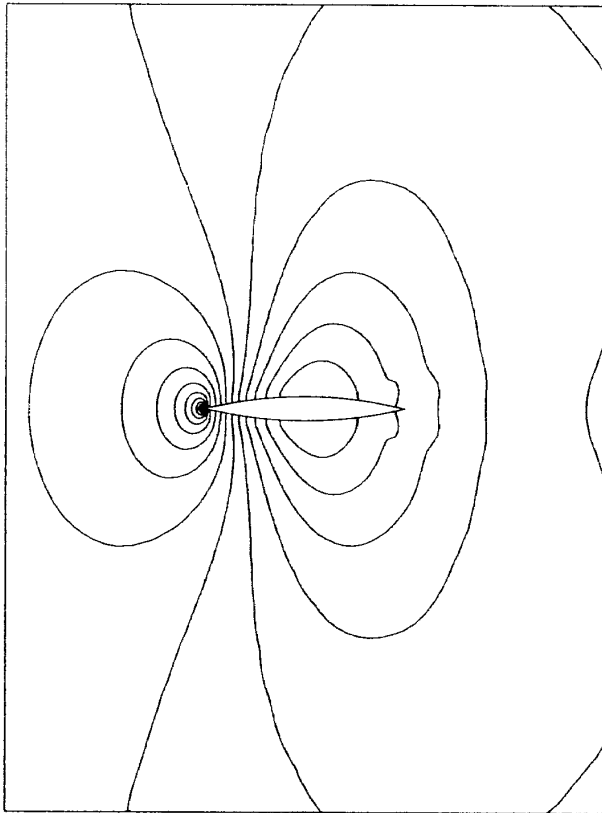


(b) 密度分布

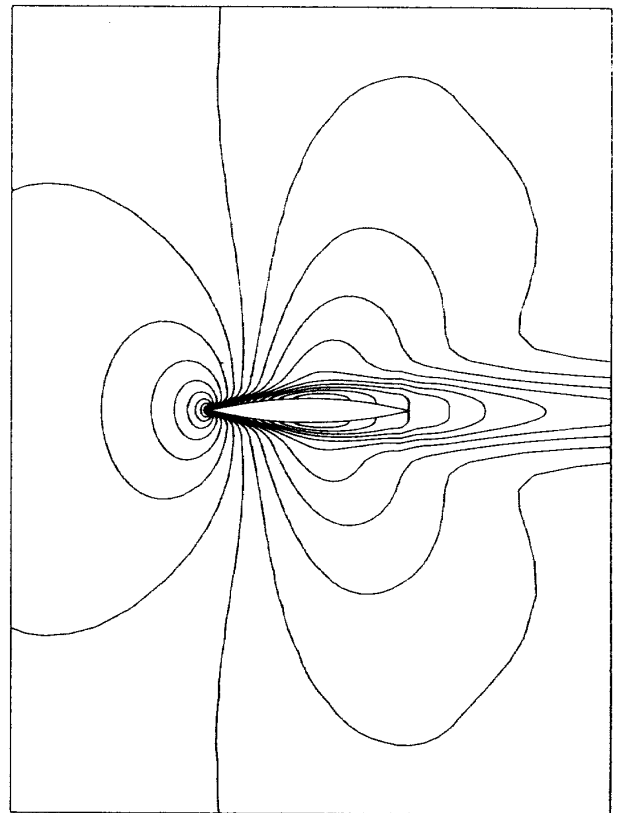


(c) マッハ数分布

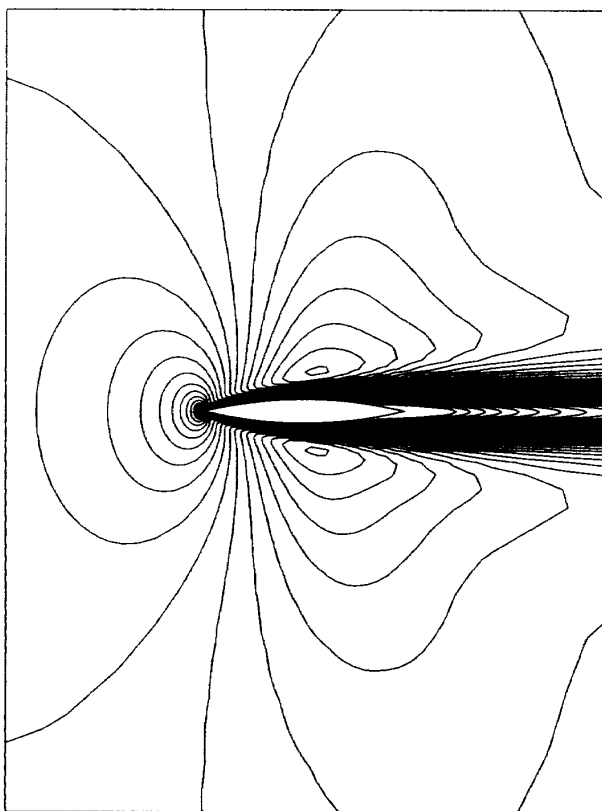
図 24 円弧翼問題流れ場等高線図, NSFOIL, $M_\infty=0.7$, $R_\theta=10^3$



(a) 圧力分布

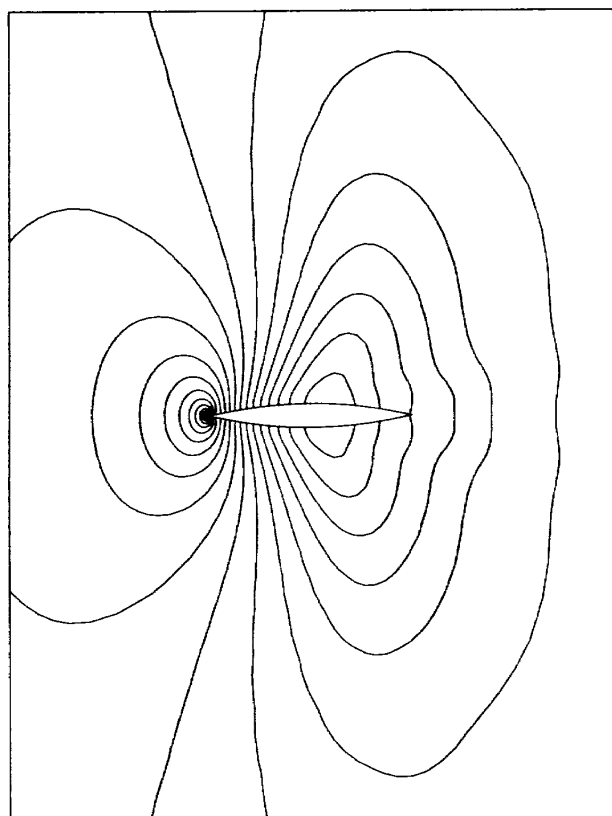


(b) 密度分布

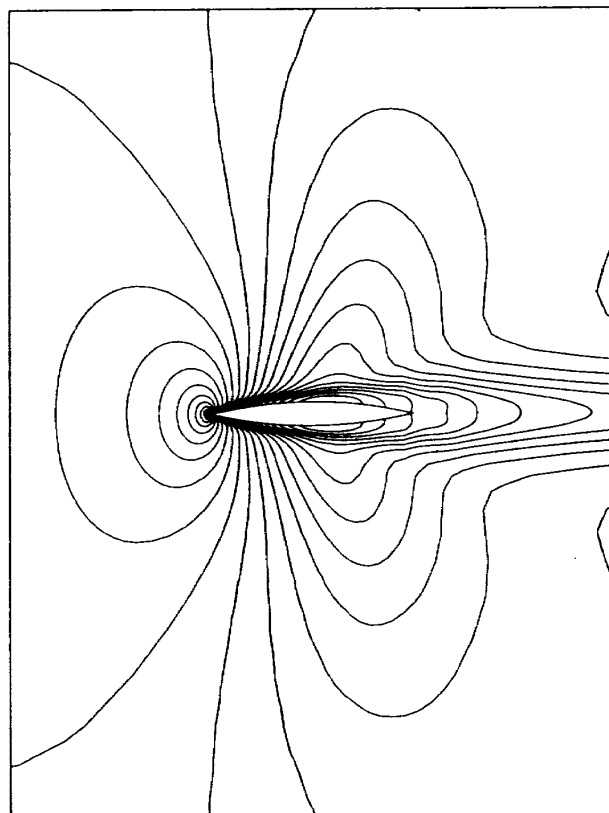


(c) マッハ数分布

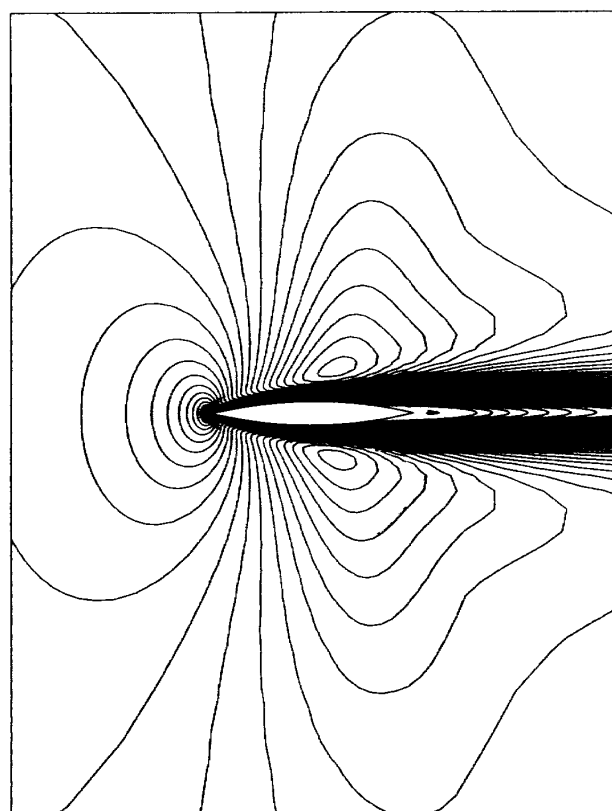
図 25 円弧翼問題流れ場等高線図, NSFOIL, $M_\infty=0.8$, $R_\theta=10^3$



(a) 圧力分布



(b) 密度分布



(c) マッハ数分布

図 26 円弧翼問題流れ場等高線図, NSFOIL, $M_\infty = 0.85$, $R_\theta = 10^3$

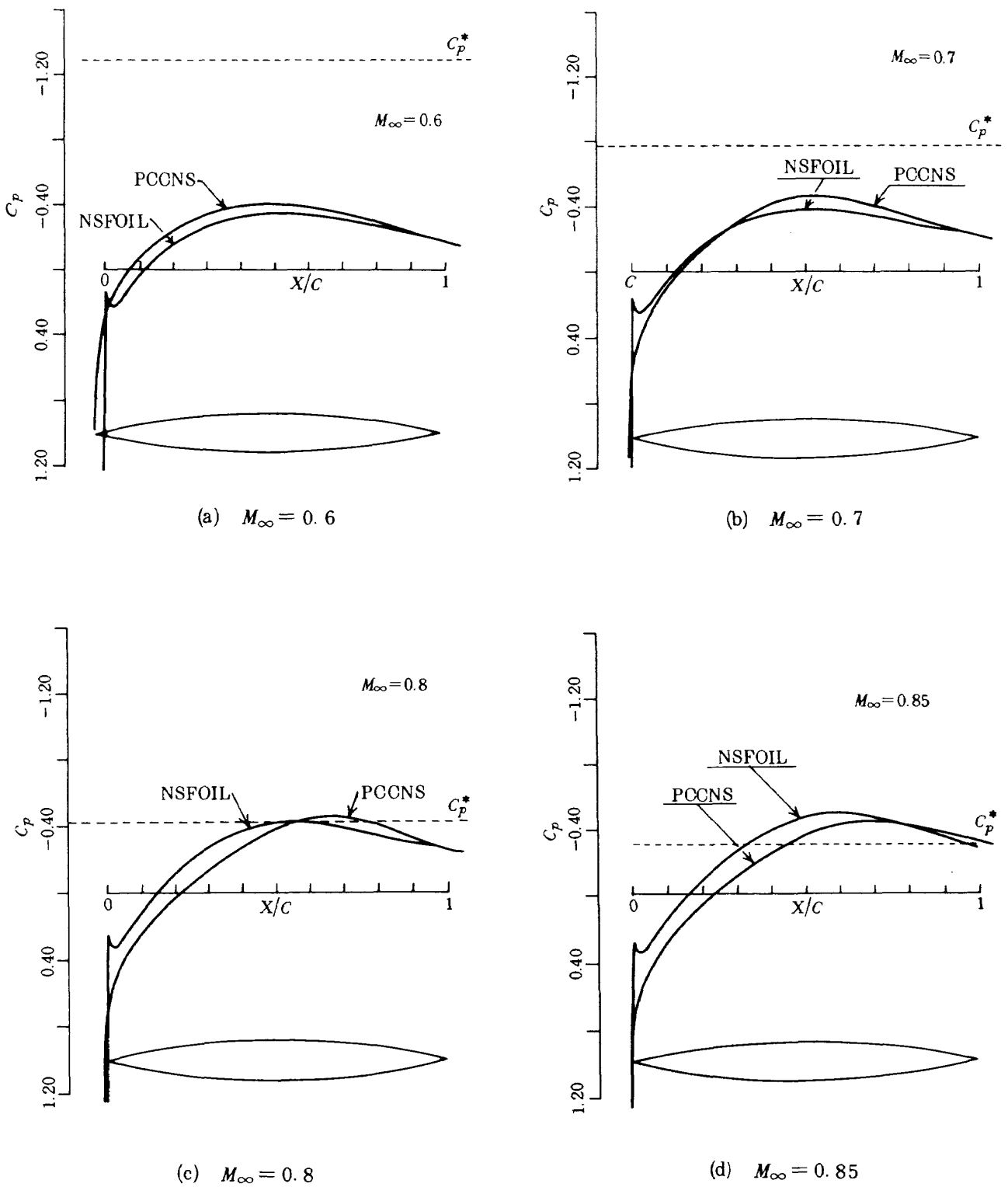
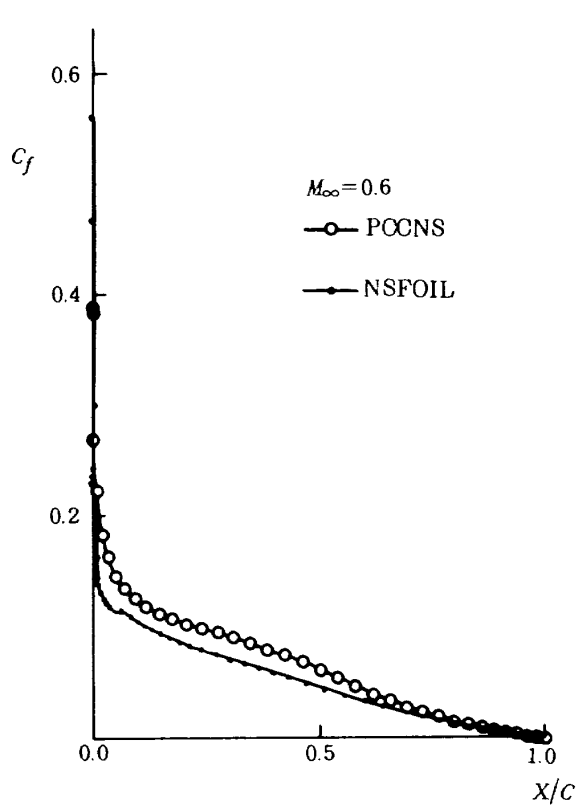
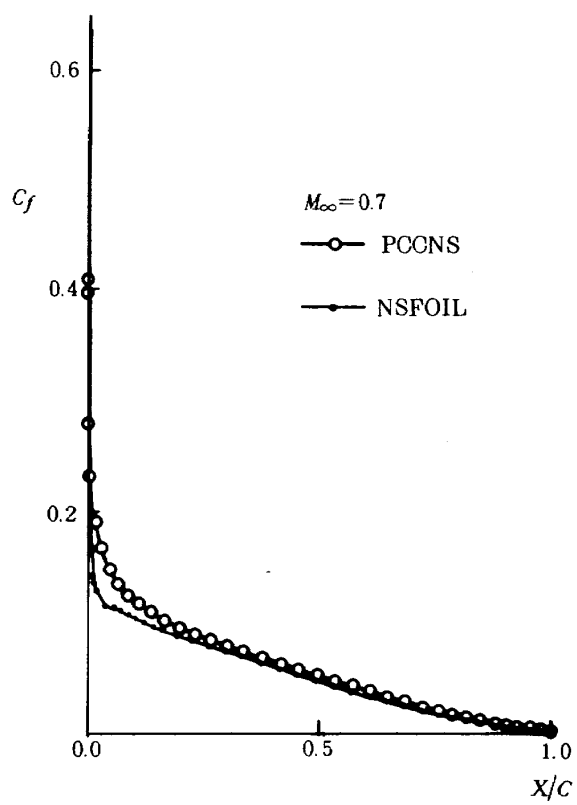


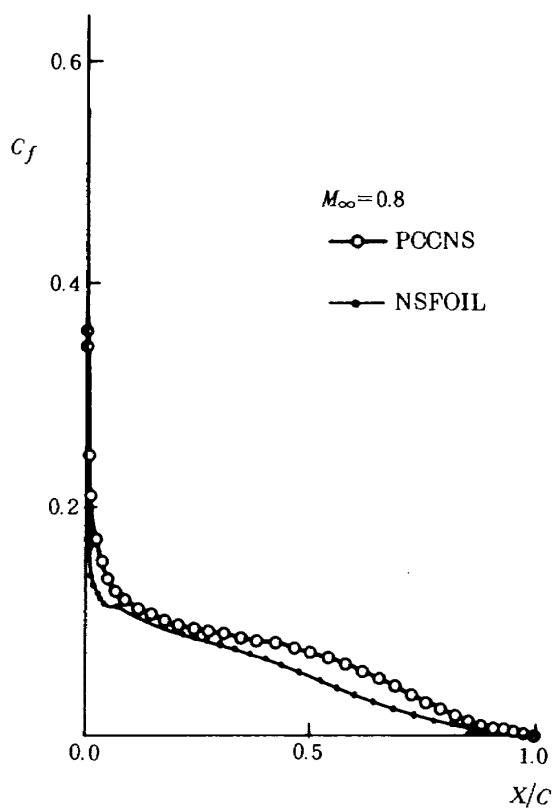
図 27 表面圧力分布 C_p の比較, $Re = 10^3$



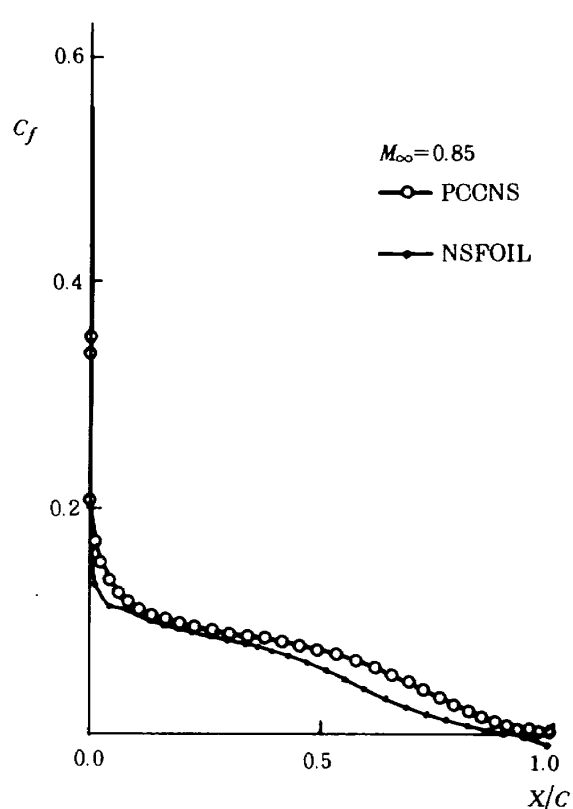
(a) $M_{\infty} = 0.6$



(b) $M_{\infty} = 0.7$



(c) $M_{\infty} = 0.8$



(d) $M_{\infty} = 0.85$

図 28 表面摩擦抗力係数 C_f の比較, $R_e = 10^3$

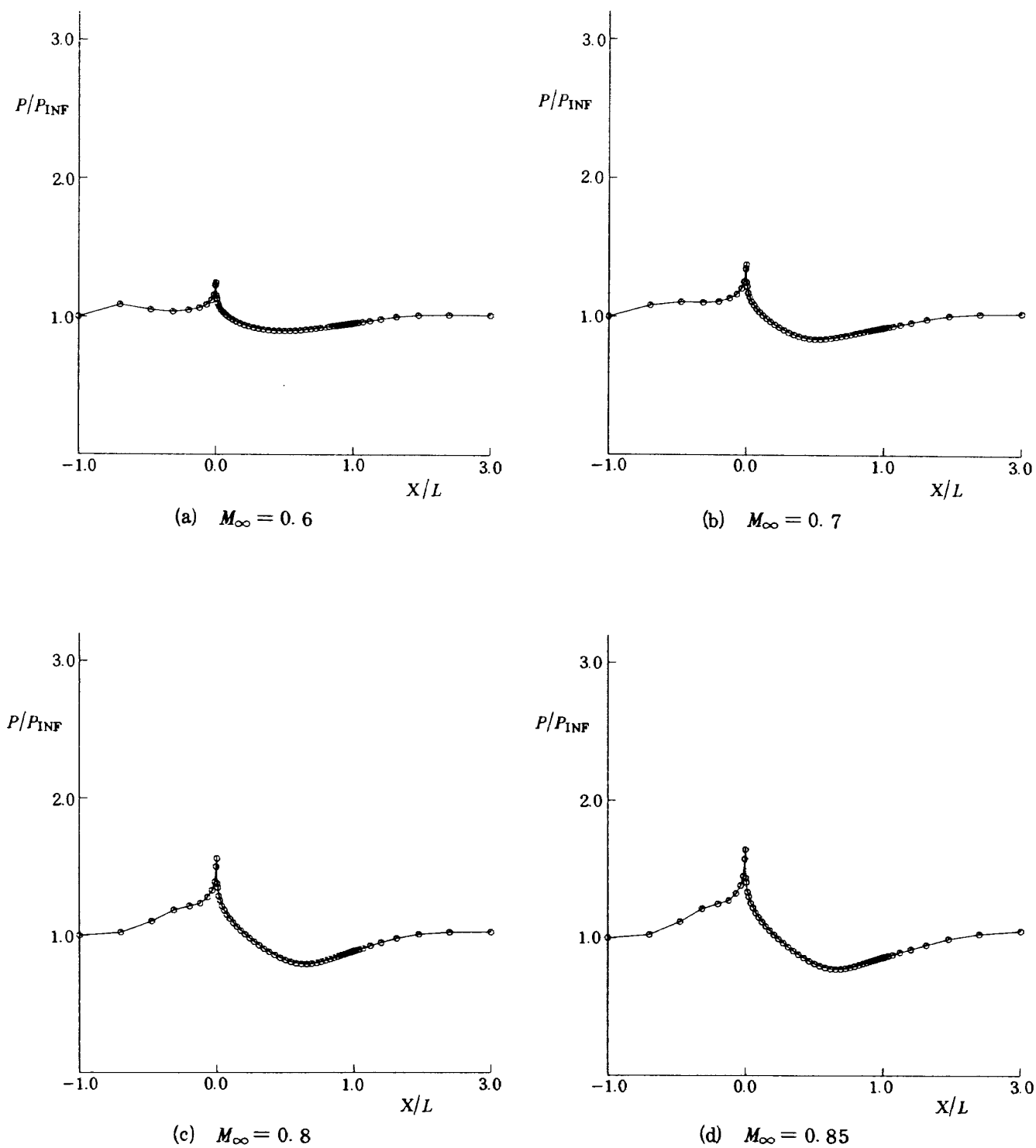
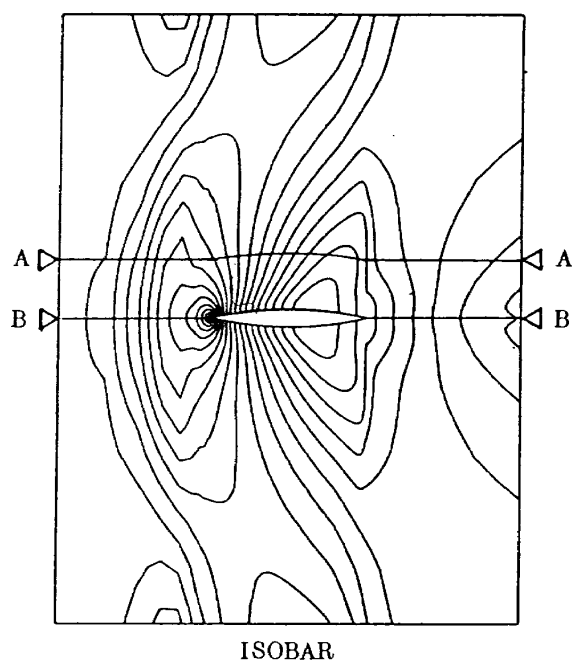
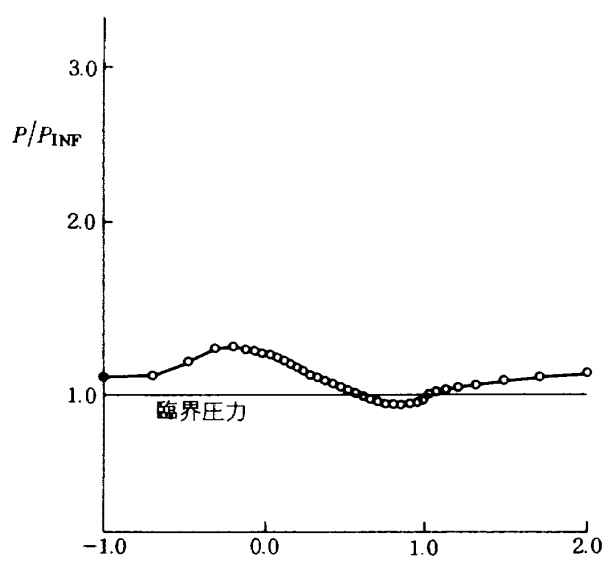


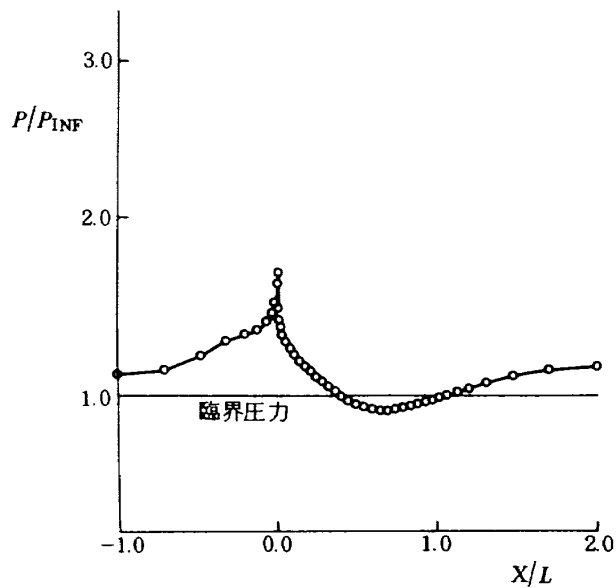
図 29 中心 Y 軸上圧力分布, PCCNS, $R_e = 10^3$



(a) 圧力等高線図



(b) A-A線上分布



(c) B-B線上分布

図 30 ξ 軸方向圧力分布の比較, PCCNS, $R_e = 10^3$, $M_\infty = 0.85$

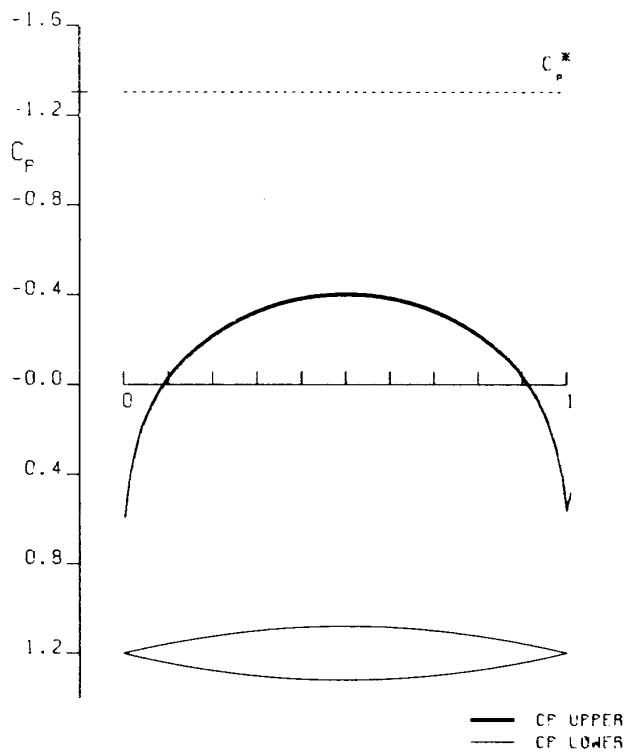
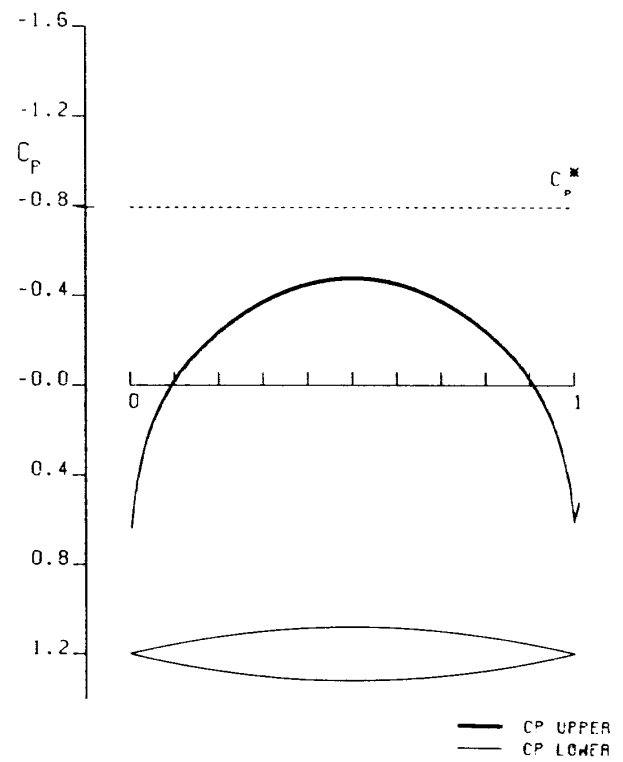
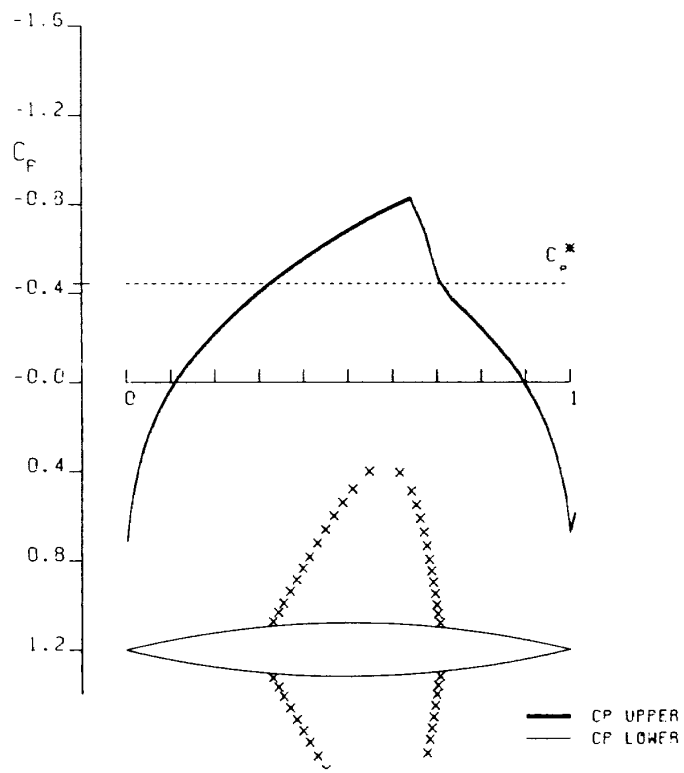
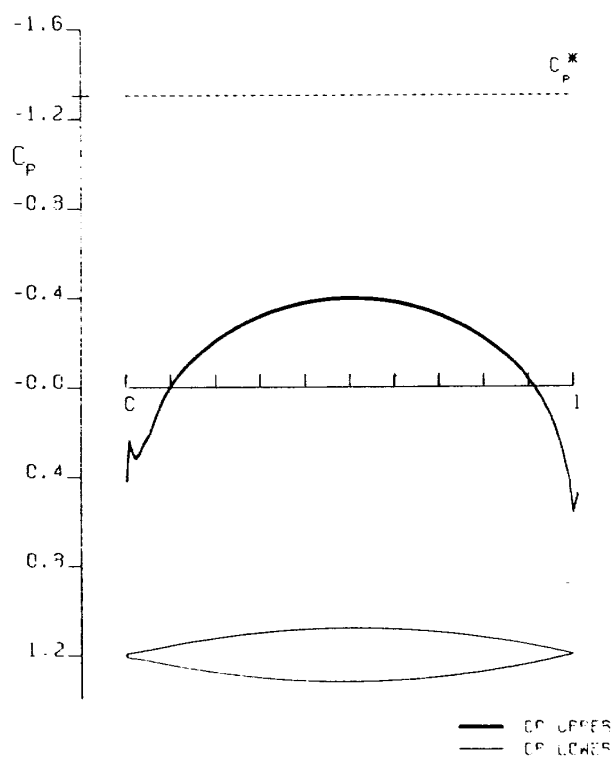
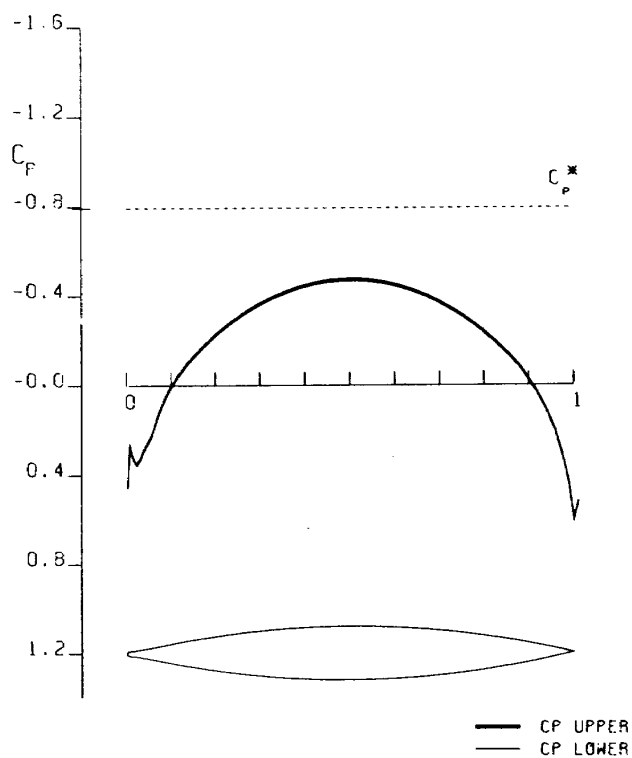
(a) $M_\infty = 0.6$ (b) $M_\infty = 0.7$ (c) $M_\infty = 0.8$

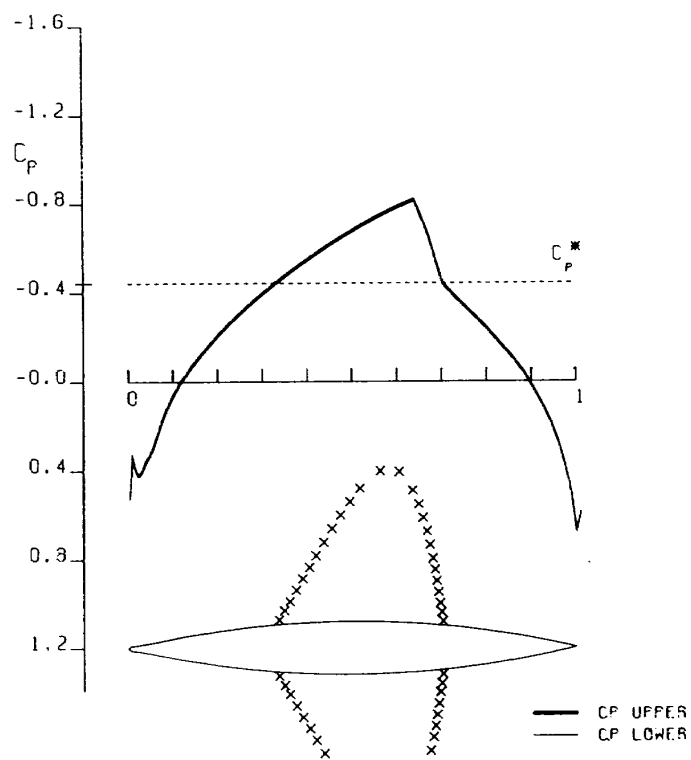
図 31 鋭い円弧翼の表面圧力分布, TSFOIL



(a) $M_\infty = 0.6$

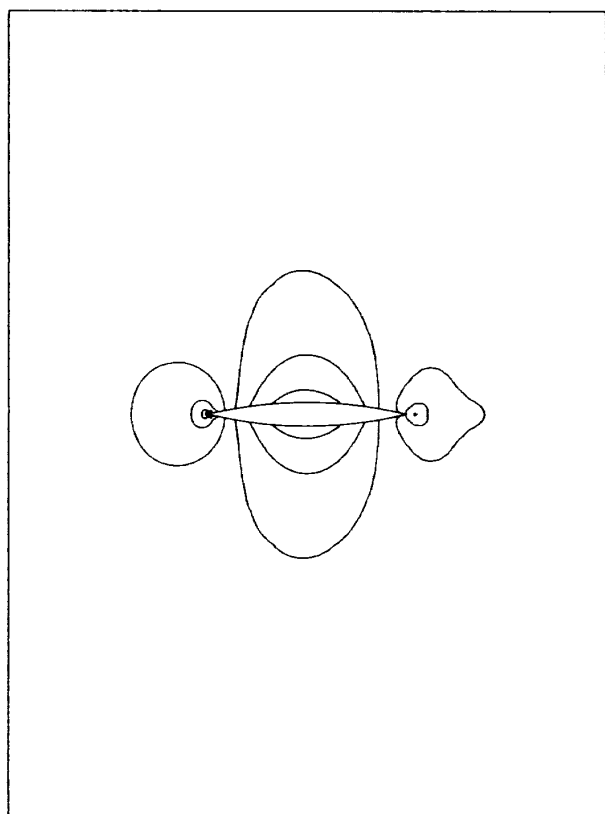


(b) $M_\infty = 0.7$

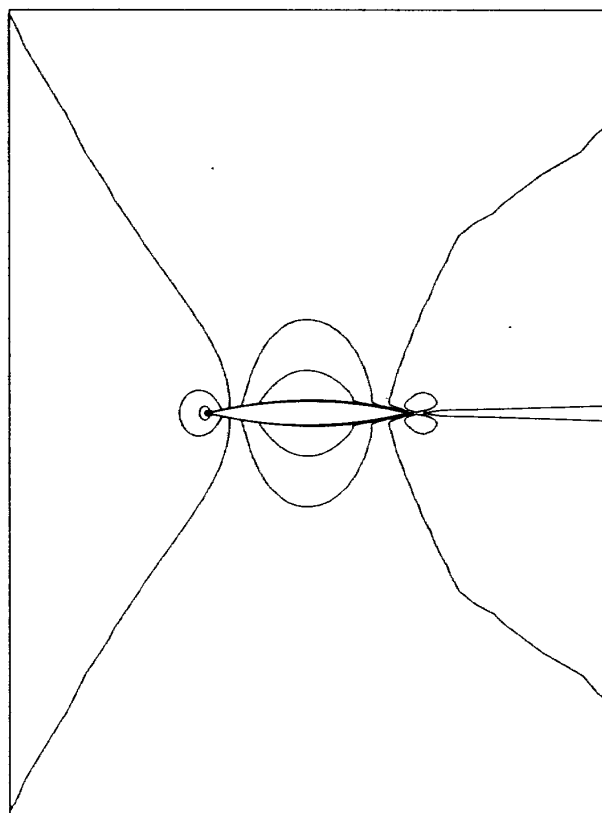


(c) $M_\infty = 0.8$

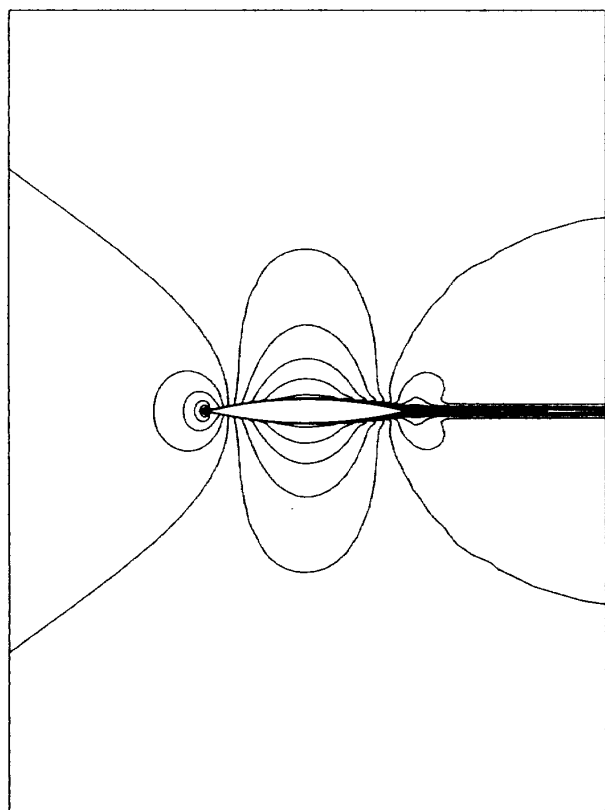
図 32 鈍い円弧翼の表面圧力分布, TSFOIL



(a) 圧力分布

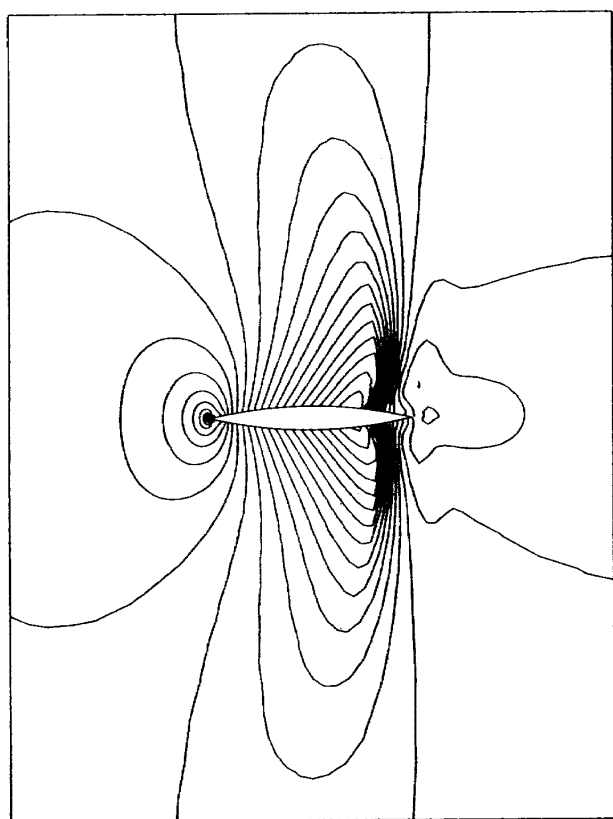


(b) 密度分布

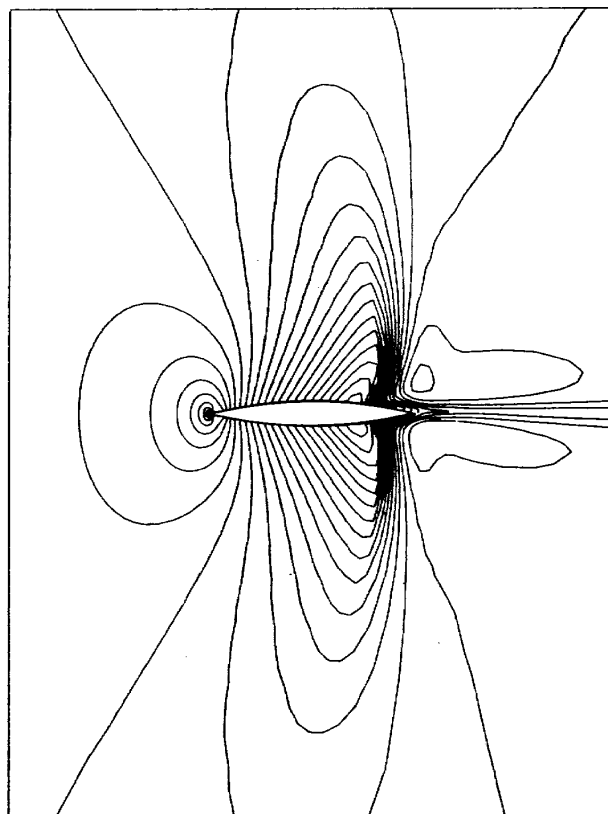


(c) マッハ数分布

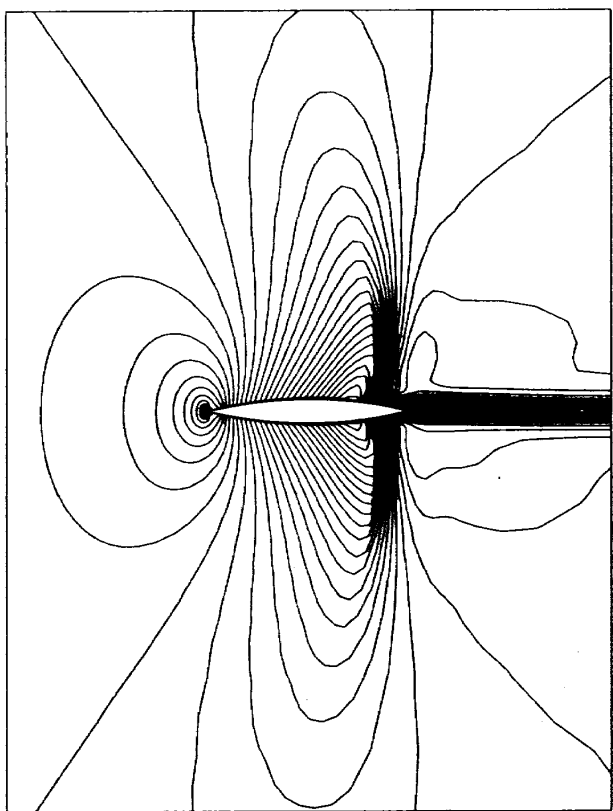
図 33 高 R_e 数解析での流れ場等高線図, NSFOIL, $M_\infty = 0.6$, $R_e = 10^6$



(a) 圧力分布



(b) 密度分布



(c) マッハ数分布

図 34 高 R_e 数解析での流れ場等高線図, NSFOIL, $M_\infty=0.85$, $R_e=10^6$

NSFOIL 自体で解析を行なうのは非効率であり、より簡便な方法として、遷音速微小擾乱近似解析法 TSFOIL¹⁹⁾ が選ばれた。TSFOIL による解析結果を図 31, 32 に、 $M_\infty = 0.6, 0.7, 0.8$ の場合について示す。図 31 に示すのは鋭い円弧翼の場合、図 32 のは鈍い場合である。両者の間で、20% 翼弦長位置以後は良好な一致を示し、衝撃波の発生位置も一致した。前縁半径を変えた幾つかの解析の比較から、ここに示す $R_{LE} = 0.005$ が適当と判断された。TSFOIL の圧力分布は、遷音速相似パラメータのとり方によって変わるなど、定量的な比較には必ずしもならないので、ここでの結果は、PCCNS, NSFOIL による解析との比較には用いず、参考にとどめた。また、河合ら²⁰⁾の完全ポテンシャルコード PNCCP は、翼をかこむ O-型格子を用いているため、円弧翼の解析には適さない。このため、比較には用いなかった。このように、たんに翼型の解析であっても、何種類かのレベルの異なる、あるいは同じ汎用コードが利用できることは、新しい方法の開発研究にとっ

て、その正しさの確認のためにきわめて便利であった。

最後に、PCCNS では乱流解析まで手をつけなかったが、今後の発展の参考のため、NSFOIL では、高レイノルズ数 $R_e = 10^6$ で、層流-乱流遷移モデル (Baldwin-Lomax モデル²¹⁾) を用いて解析を行なってみた。図 33 に $M_\infty = 0.6$ の場合、図 34 に $M_\infty = 0.85$ の場合の圧力、密度、マッハ数分布を示す。 $M_\infty = 0.85$ では強い衝撃波が上下面に発生し、しかも、上下面ではその位置が僅かに異なっていることが確認される。これは図 35 に示す表面圧力分布からも明らかである。図 36 には C_f 分布を示すが、 $M_\infty = 0.6$ では、50% 翼弦長位置から乱流へ遷移しているのに対し、 $M_\infty = 0.85$ では衝撃波位置から乱流遷移し、また同時に剝離を起している。また、前縁の直後では、鈍い前縁を通りすぎた後の再圧縮が著しく、層流剝離胞がいずれの場合も形成されている。衝撃波剝離と、それによる非定常振動は、バフエットとして知られている現象である。遷音速バフエットを NSFOIL

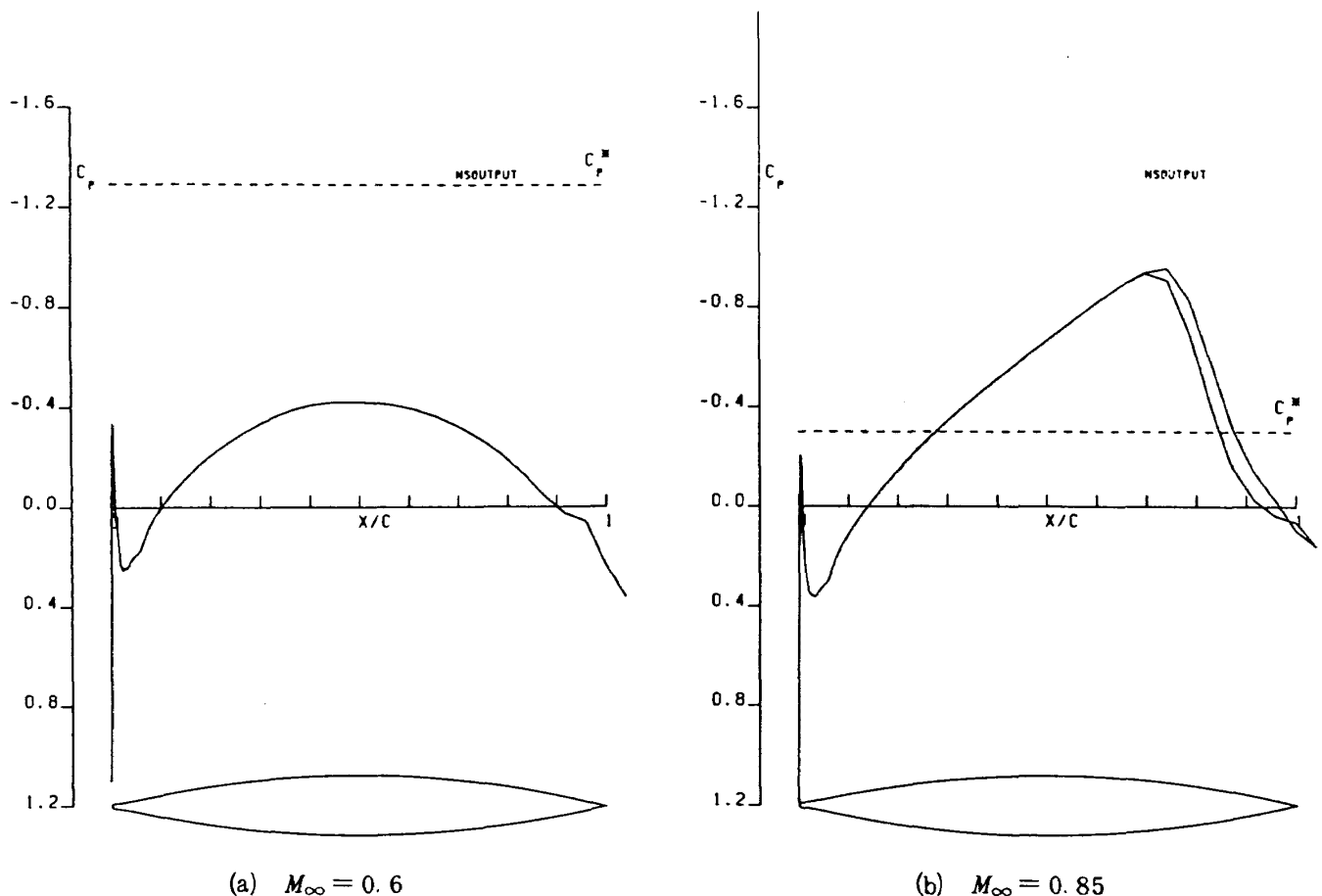
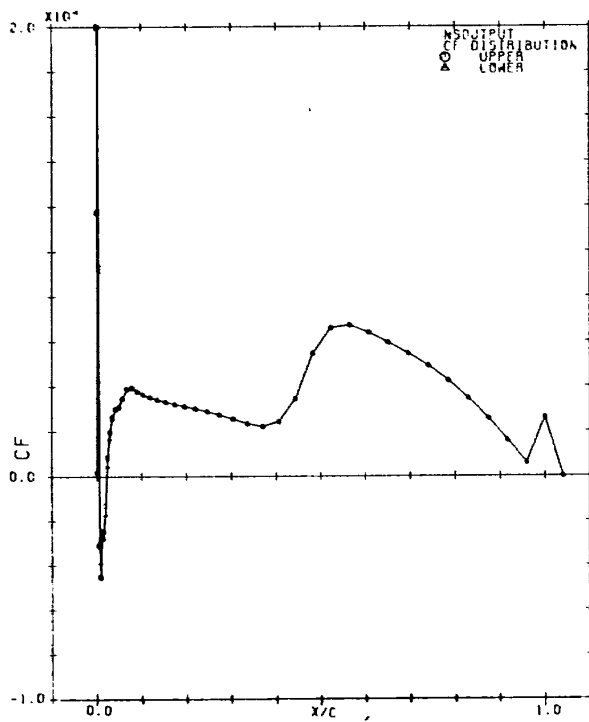
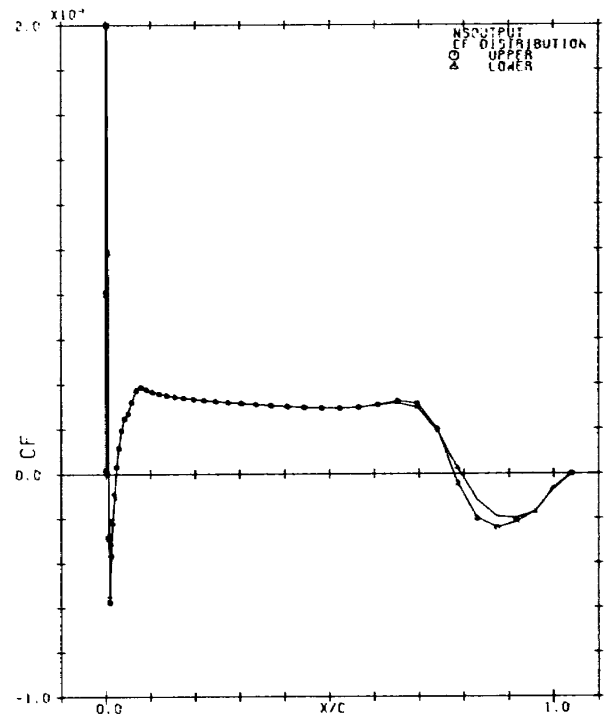


図 35 表面圧力分布, NSFOIL, $R_e = 10^6$



(a) $M_\infty = 0.6$



(b) $M_\infty = 0.85$

図 36 表面摩擦抗力係数分布, NSFOIL, $R_e = 10^6$

で捕えることが可能なことは既に報告してある²²⁾が、円弧翼のパフェットについても、実験と数値解析両者からの詳しい解析がMc Devitt¹⁴⁾やLevy^{13),15)}によって行なわれている。今回の結果はそれを再確認するものであると考えられる。

計算時間について最後に記す。 $M_\infty=0.6$ の時の本法, NSFOIL の 1 格子点 1 時間ステップ当りの計算時間は次のようであった。

PCCNS	0.312 msec / step mesh
NSFOIL	0.183 msec / step mesh

さらに, PCCNS の計算時間の演算子による内訳は,

$L_\xi (\Delta t/2)$	0.024 msec
$L_{\eta p} (\Delta t)$	0.132
$L_{\eta c} (\Delta t)$	0.132
$L_\xi (\Delta t/2)$	0.024

である。この結果から、陽的差分演算子 L_ξ は目的通り、計算時間短縮に役立っていると言えるが、陰的差分演算子 L_η は二次精度を維持するため、二段階差分としたために、結果的にはNSFOILより計算効率が悪いものとなった。また、本コードは研究コー

ドであって、ベクトル化やメモリの割り当て等の考慮は行なっていないのに対し、NSFOILは汎用コードとして十分な考慮を行なっていることも差がひろがった一因であり、コーディング技術による改善は考えられる(注. 汎用コンピュータでもベクトル化は高率化に強い効果を及ぼす)。また、 Δt の大きさについても、今回は十分に検討する機会がなかったため、たかだかCFL条件の2倍程度であった。この点は、二次精度法なので、一次精度のNSFOILほど大きな Δt は取れないものの、 Δt 増加法や局所時間間法等の工夫で、改良が期待される。ちなみに、本法による1ケース当りの計算時間は $M_\infty=0.6$ の場合、3600ステップ、36分(航技研FACOM M-380使用)であった。

6. まとめ

遷音速翼型解析のため、曲線座標系保存型薄層近似N-S式に対するひとつの混合型時間分割差分法を提案した。この方法は流れの方向 ξ 軸差分演算子には陽的MacCormack法を用いる一方、境界層に垂直な η 軸方向には、著者の一人松野が境界層方程式に対して提案した予測子・修正子型Crank-Nicolson

法をN-S式に拡張発展させて作用する方法である。

本論文では、提案したPCCNS法の解法を示すとともに、圧縮粘性流の問題に適用して、実際に本法が有効であることを示した。すなわち、第1に半無限平板をすぎる超音速圧縮性層流境界層の流れに適用し、 $Re=10^4$ まで良好な結果を得た。次に対称円弧翼をすぎる遷音速粘性流の流れに適用し、層流、 $Re=10^3$ で衝撃波を含む粘性流れの解析が可能なことを、IAF法による汎用コードNSFOILによる解析結果と比較して示した。これらの結果、混合型差分法がN-S式に対して有効であることは確認されたが、同時に幾つかの今後改良されなければならない問題点も明らかにされた。それらには、計算効率の向上、乱流モデルの導入による高レイノルズ数流れ解析、揚力のある場合への発展等である。

本研究は著者(廣瀬, 松野)がMacCormackの混合差分法の概念にヒントを得て研究を進めたものであり、プログラミングと実行の大部分は昭和54~56年度研修生藤田, 58~60年度小松が担当した。現時点では、混合型差分法の研究はいささか時機を失した観も否めないが、陰的差分法から、再び陽的差分法に研究の動向が移りつつある現在、燃焼や化学反応を含む流れの解析などには、参考になる部分もあるのではなかろうかと考え、今までの研究のまとめとして報告するものである。最後に、本研究について終始御指導頂いた、日本大学・河村龍馬教授に心より感謝致します。

参 考 文 献

- 1) Beam, R. & Warming, R.F. "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation-Law-Form," Jour. Computational Physics, 22, (1976) 87-110.
- 2) Steger, J.L. "Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries," AIAA Jour., 16, (1978), 679-686.
- 3) MacCormack, R.W., "Numerical Solution of the Interaction of A Shock Wave with a Laminar Boundary Layer", Proc. the Second Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Springer, (1971), 151-163.
- 4) MacCormack, R.W., "A Rapid Solver for Hyperbolic Systems of Equations," Proc. the Fifth Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Springer (1976), 307-317.
- 5) MacCormack, R.W., "A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow," AIAA Jour., 20, (1982), 1275-1281.
- 6) Yanenko, N.N., "THE METHOD OF FRACTIONAL STEPS" Springer, (1971).
- 7) 松野謙一: "境界層方程式に対する実二次精度, 予測子・修正子型クランク・ニコルソン差分スキームの構成", 航技研報告 TR-655, (1981).
- 8) 松野謙一・廣瀬直喜・藤田真人・河村龍馬: "境界層方程式に対する差分法の実精度について", 航技研報告 TR-646, (1981).
- 9) 河合伸坦・廣瀬直喜: "高レイノルズ数遷音速流翼型解析プログラムNSFOILの開発", 航技研報告 TR-816, (1984).
- 10) 廣瀬直喜・河合伸坦・小口慶子・小寺智一: "高レイノルズ数遷音速流翼型解析法の検証と実験との対応", 第2回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, 航技研特別資料 SP-3, (1984), 235-244.
- 11) Deiwert, G.S., "Numerical Simulation of High Reynolds Number Transonic Flows," AIAA Jour. 13 (1975), 1354-1359.
- 12) McDevitt, J.B., Levy, L.L., Jr and Deiwert, G.S., "Transonic Flow About a Thick Circular-Arc Airfoil," AIAA Jour. 14 (1976), 606-613.
- 13) Levy, L.L., Jr., "Experimental and Computational Steady and Unsteady Transonic Flows about a Thick Airfoil," AIAA Jour., 16 (1978), 564-572.
- 14) McDevitt, J.B., "Supercritical Flow About a Thick Circular-Arc Airfoil," NASA TM-78549 (1979).
- 15) Levy, L.L., Jr., "Predicted and Experimental Steady and Unsteady Transonic Flows About a Biconvex Airfoil," NASA TM-81262 (1981).

- 16) 廣瀬直喜・河合伸坦・伊沢隆男・菊池路子：
“遷音速翼型解析法のための格子形成コード
AFMESHの開発”，日本航空宇宙学会第13
期年会講演会講演集，(1982)，158-161.
- 17) Liepman, H. and Roshko, A., “ELEMENTS
OF GAS DYNAMICS,” John Wiley and Sons,
(1957).
- 18) Van Driest, E.R., “Investigation of Laminar
Boundary Layers in Compressible Fluids
Using the Crocco Method,” NACA Tech-
nical Note 2597 (1952).
- 19) 廣瀬直喜・伊沢隆男：“遷音速微小擾乱解析
コードTSFOILの変換について”，第18回
飛行機シンポジウム講演集，(1980)，80-83.
- 20) 河合伸坦・石黒登美子・神谷信彦：“二次元
翼まわり遷音速流数値計算の汎用プログラム”，
航技研資料 TM-357，(1978).
- 21) Baldwin, B. & Lomax, H., “Thin-Layer Ap-
proximation and Algebraic Model for Sepa-
rated Turbulent Flows,” AIAA Paper 78-
257, (1978).
- 22) Miyakawa, J., Hirose, N. and Kawai, N.,
“Comparison of Transonic Airfoil Character-
istics by Navier-Stokes Computation and by
Wind Tunnel Test at High Reynolds Num-
ber,” AIAA Paper 85-5025, (1985)

補遺 I 時間分割法における精度について

u をベクトルとして，保存則

$$u_t + E_x + F_y = 0 \quad (A-1)$$

を考える。 E ， F の u に対するヤコビ行列を，

$$A(u) = \frac{\partial E}{\partial u}, \quad B(u) = \frac{\partial F}{\partial u} \quad (A-2)$$

とすると，流体力学方程式を含めて，一般には， A
と B は可換 (commutable) ではない，すなわち，

$$AB \neq BA \quad (A-3)$$

(A-1) は (A-2) より次のように書ける。

$$u_t + A u_x + B u_y = 0 \quad (A-4)$$

(A-4) に対する非分割差分演算子 L を考えると，

$$u(t + \Delta t, x, y) = L u(t, x, y) \quad (A-5)$$

L が時間に関して二次精度であるというのは， Δt
 $\equiv k$ と表わしたとき，Taylor 展開により，次のよう
に表わされることを意味する。

$$L u = u + k u_t + \frac{k^2}{2} u_{tt} + O(k^3) \quad (A-6)$$

ここで， u_t ， u_{tt} は (A-4) を用いて空間微分で置き
換えることが出来るから，

$$\begin{aligned} u_t &= -(A u_x + B u_y) \\ u_{tt} &= (u_t)_t = -(A u_x + B u_y)_t \\ &= -(A u_{xt} + B u_{yt}) \\ &= -\{ -A(A u_x + B u_y)_x - B(A u_x + B u_y)_y \} \\ &= A^2 u_{xx} + (AB + BA) u_{xy} + B^2 u_{yy} \end{aligned}$$

を代入して，

$$\begin{aligned} L u &= u - (A u_x + B u_y) k + \{ A^2 u_{xx} + (AB + BA) u_{xy} \\ &\quad + B^2 u_{yy} \} \frac{k^2}{2} + O(k^3) \end{aligned} \quad (A-7)$$

となる。

一方，空間時間分割した二次精度差分演算子を，
 L_x ， L_y であらわすと，

L_x を作用させる方程式：

$$u_t + A u_x = 0 \quad (A-8)$$

より，

$$\begin{aligned} L_x u &= u + k u_t + \frac{k^2}{2} u_{tt} + O(k^3) \\ &= u - A u_x k + A^2 u_{xx} \frac{k^2}{2} + O(k^3) \end{aligned} \quad (A-9)$$

同様に，

$$L_y: u_t + B u_y = 0$$

$$L_y u = u - B u_y k + B^2 u_{yy} \frac{k^2}{2} + O(k^3) \quad (A-10)$$

L_x ， L_y は x ， y 方向に 1 次元的には二次精度であ
るが， L_x ， L_y を順次作用させた場合，一般には二次
精度にはならず，一次精度になってしまうことが，
実際に (A-9, 10) の積をつくることで明らかになる。
すなわち，たとえば， u に L_x を作用させ，次に L_y を
作用させた場合

$$\begin{aligned} L_y \cdot L_x u &= L_y (L_x u) \\ &= L_y (u - A u_x k + A^2 u_{xx} \frac{k^2}{2} + O(k^3)) \\ &= (u - A u_x k + A^2 u_{xx} \frac{k^2}{2}) \\ &\quad - B k (u - A u_x k + A^2 u_{xx} \frac{k^2}{2})_y \\ &\quad + B^2 \frac{k^2}{2} (u - A u_x k + A^2 u_{xx} \frac{k^2}{2})_{yy} + O(k^3) \\ &= u - (A u_x + B u_y) k \end{aligned}$$

$$+(A^2 u_{xx} + 2BAu_{xy} + B^2 u_{yy}) \frac{k^2}{2} + O(k^3) \quad (\text{A-11})$$

同様に、逆順の場合、

$$L_x L_y u = u - (Bu_y + Au_x)k + (B^2 u_{yy} + 2ABu_{yx} + A^2 u_{xx}) \frac{k^2}{2} + O(k^3) \quad (\text{A-12})$$

(A-3)より、 A 、 B が可換でない場合、(A-11)、(A-12)は(A-7)とは k の1次までしか一致しないことがわかる。したがって、分割差分演算子で二次精度をうるには、例えば、(A-11)、(A-12)の組合せから、(A-7)に等しい形を得るように、

$$S_1 = \frac{1}{2} \{L_x L_y + L_y L_x\} \quad (\text{A-13})$$

などとすればよい。 S_2 より演算量の少ない組合せとしては、次のようなものが考えられる。

$$S_2 = L_x \left(\frac{k}{2}\right) L_y(k) L_x \left(\frac{k}{2}\right) \quad (\text{A-14})$$

$$S_3 = L_x \left(\frac{k}{2}\right) L_y \left(\frac{k}{2}\right) L_y \left(\frac{k}{2}\right) L_x \left(\frac{k}{2}\right) \quad (\text{A-15})$$

ここで $\left(\frac{k}{2}\right)$ 、etcは k の値を $k/2$ とする意味である。これらが二次精度である証明は、同様の手順で容易に確認できる。また、一般に同一演算子の重合せは、

$$\{L_x(k)\}^n = L_x(nk) \quad (\text{A-16})$$

である。

3次元方程式の場合も同様な手順で二次精度演算子を構成することが出来る。また、低次のソース項等がある場合でも、ソース項を任意に分割して、上記の分割化が可能である。

これらの結果から、時間及び空間スケールの異なる座標方向ごとの分割や、特性速度の異なる項別の分割による差分演算子の簡易化が実現できる。また、この議論では演算子の陰、陽は問わなかったから、陰的差分演算子にも適用されることになる。

補遺 II C_G の要素

$$C_G = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{Q}} - \frac{1}{R_G} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{Q}} \quad (\text{A-17})$$

の非粘性項成分は、

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{Q}} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{A-18})$$

とすると、

$$G_{11} = G_{14} = 0, \quad G_{12} = \eta_x, \quad G_{13} = \eta_y$$

$$G_{21} = \left\{ \frac{1}{2}(\tau-3)u^2 + \frac{1}{2}(\tau-1)v^2 \right\} \eta_x - uv\eta_y$$

$$G_{22} = (3-\tau)u\eta_x + v\eta_y$$

$$G_{23} = (1-\tau)v\eta_x + u\eta_y$$

$$G_{24} = (\tau-1)\eta_x$$

$$G_{31} = -uv\eta_x + \left\{ \frac{1}{2}(\tau-1)u^2 + \frac{1}{2}(\tau-3)v^2 \right\} \eta_y$$

$$G_{32} = v\eta_x + (1-\tau)u\eta_y$$

$$G_{33} = u\eta_x + (3-\tau)v\eta_y$$

$$G_{34} = (\tau-1)\eta_y$$

$$G_{41} = \left\{ -\frac{\tau u e}{\rho} + (\tau-1)u(u^2+v^2) \right\} \eta_x$$

$$+ \left\{ -\frac{\tau v e}{\rho} + (\tau-1)v(u^2+v^2) \right\} \eta_y$$

$$G_{42} = \left\{ \frac{\tau e}{\rho} + \frac{1}{2}(1-\tau)(3u^2+v^2) \right\} \eta_x + (1-\tau)uv\eta_y$$

$$G_{43} = (1-\tau)uv\eta_x + \left\{ \frac{\tau e}{\rho} + \frac{1}{2}(1-\tau)(u^2+3v^2) \right\} \eta_y$$

$$G_{44} = \tau u\eta_x + \tau v\eta_y$$

(A-19)

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{Q}} = \begin{bmatrix} G_{V11} & G_{V12} & G_{V13} & G_{V14} \\ G_{V21} & G_{V22} & G_{V23} & G_{V24} \\ G_{V31} & G_{V32} & G_{V33} & G_{V34} \\ G_{V41} & G_{V42} & G_{V43} & G_{V44} \end{bmatrix} \quad (\text{A-20})$$

とすると、

$$G_{V11} = G_{V12} = G_{V13} = G_{V14} = 0$$

$$G_{V21} = \hat{\alpha}_1 \left(\frac{u}{\rho} \right) + \hat{\alpha}_2 \left(\frac{v}{\rho} \right),$$

$$G_{V22} = -\hat{\alpha}_1 \left(\frac{1}{\rho} \right),$$

$$G_{V23} = -\hat{\alpha}_2 \left(\frac{1}{\rho} \right),$$

$$G_{V24} = 0$$

$$G_{V31} = \hat{\alpha}_2 \left(\frac{u}{\rho} \right)_\eta + \hat{\alpha}_3 \left(\frac{v}{\rho} \right)_\eta$$

$$G_{V32} = -\hat{\alpha}_2 \left(\frac{1}{\rho} \right)_\eta$$

$$G_{V33} = -\hat{\alpha}_3 \left(\frac{1}{\rho} \right)_\eta$$

$$G_{V34} = 0$$

$$G_{V41} = -\hat{\alpha}_4 \left\{ -\frac{\hat{e}}{\hat{\rho}^2} + \frac{(u^2 + v^2)}{\hat{\rho}} \right\}_\eta + \hat{\alpha}_1 \left(\frac{u^2}{\hat{\rho}} \right)_\eta + 2\hat{\alpha}_2 \left(\frac{uv}{\hat{\rho}} \right)_\eta + \hat{\alpha}_3 \left(\frac{v^2}{\hat{\rho}} \right)_\eta$$

$$G_{V42} = -\hat{\alpha}_1 \left(\frac{u}{\hat{\rho}} \right)_\eta - \hat{\alpha}_2 \left(\frac{v}{\hat{\rho}} \right)_\eta + \hat{\alpha}_4 \left(\frac{u}{\hat{\rho}} \right)_\eta$$

$$G_{V43} = -\hat{\alpha}_2 \left(\frac{u}{\hat{\rho}} \right)_\eta - \hat{\alpha}_3 \left(\frac{v}{\hat{\rho}} \right)_\eta + \hat{\alpha}_4 \left(\frac{v}{\hat{\rho}} \right)_\eta$$

$$G_{V44} = -\hat{\alpha}_4 \left(\frac{1}{\hat{\rho}} \right)_\eta$$

ただし,

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\mu}{J} \left(\frac{4}{3} \eta_x^2 + \eta_y^2 \right), \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{\mu}{J} \left(\frac{1}{3} \eta_x \eta_y \right),$$

$$\hat{\alpha}_3 = \frac{\mu}{J} \left(\eta_x^2 + \frac{4}{3} \eta_y^2 \right), \quad \hat{\alpha}_4 = \frac{\mu \gamma}{J P_r} \left(\eta_x^2 + \eta_y^2 \right),$$

(A-21)

壁上 $u = v = 0$, $\partial T / \partial \eta = 0$ では,

$$G_{11} = G_{14} = 0, \quad G_{12} = \eta_x, \quad G_{13} = \eta_y$$

$$G_{21} = G_{22} = G_{23} = 0, \quad G_{24} = (\gamma - 1) \eta_x$$

$$G_{31} = G_{32} = G_{33} = 0, \quad G_{34} = (\gamma - 1) \eta_y$$

$$G_{41} = G_{44} = 0, \quad G_{42} = \frac{\gamma e}{\rho} \eta_x, \quad G_{43} = \frac{\gamma e}{\rho} \eta_y$$

(A-22)

断熱条件より $\hat{\alpha}_4$ のかかる項は 0 となるから,

$$\left. \begin{array}{l} G_{V11}, G_{V12}, G_{V13}, G_{V14} \\ G_{V21}, G_{V22}, G_{V23}, G_{V24} \\ G_{V31}, G_{V32}, G_{V33}, G_{V34} \end{array} \right\} \text{(A-21) と同じ,}$$

$$G_{V41} = \hat{\alpha}_1 \left(\frac{u^2}{\hat{\rho}} \right)_\eta + 2\hat{\alpha}_2 \left(\frac{uv}{\hat{\rho}} \right)_\eta + \hat{\alpha}_3 \left(\frac{v^2}{\hat{\rho}} \right)_\eta$$

$$G_{V42} = -\hat{\alpha}_1 \left(\frac{u}{\hat{\rho}} \right)_\eta - \hat{\alpha}_2 \left(\frac{v}{\hat{\rho}} \right)_\eta$$

$$G_{V43} = -\hat{\alpha}_2 \left(\frac{u}{\hat{\rho}} \right)_\eta - \hat{\alpha}_3 \left(\frac{v}{\hat{\rho}} \right)_\eta$$

$$G_{V44} = 0$$

(A-23)

航空宇宙技術研究所報告913号

昭和61年9月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7-44-1
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊞182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山5-6-17
