

NAL TR-917

ISSN 0389-4010

UDC 539.4.012:

629.7.02:

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-917

積層円筒圧力容器の最適設計

福 永 久 雄

1986年10月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

積層円筒圧力容器の最適設計*

福 永 久 雄 **

Optimum Design of Laminated Cylindrical Pressure Vessels

By

Hisao Fukunaga

Abstract

This paper treats the optimum design of filament-wound cylindrical pressure vessels under stiffness and strength constraints. Stiffness constraints are specified as strain conditions both in the axial and circumferential directions. Tsai-Wu failure criterion is used for determining a first-ply-failure strength. The stiffness and strength characteristics of the laminate are discussed based upon the concept of lamination parameters. For small values of allowable axial and circumferential strains, the strain (or stiffness) condition is critical, while for large values of allowable strains the strength condition is critical. The optimal laminate configurations are determined for the various kinds of strain and strength constraints.

1. 序

炭素繊維を用いたフィラメント・ワインディング (FW) 圧力容器は、固体ロケットモータケースのように軽量化を要求される分野の圧力容器として用いられてきた^{1)~3)}。最近、米国では、シャトルブースタのような大型の圧力容器に炭素繊維による FW 圧力容器を適用する研究が進められている⁴⁾⁵⁾。比較的小さな FW 圧力容器では、破壊荷重がクリチカルな設計条件となるのに対し、大型の圧力容器では破壊荷重を高めるだけでなく剛性に関する種々の要求を満足することが必要となる。

FW 材のような積層材の剛性特性を考えるには、積層パラメータの概念を用いるのが便利であり⁶⁾⁷⁾、積層パラメータを設計変数として用いて積層板の座

屈⁸⁾、振動⁹⁾、積層円筒殻の座屈¹⁰⁾¹¹⁾等の最適化研究が行なわれてきた。また、炭素繊維 / エポキシ樹脂から成る積層材の強度最適化の研究¹²⁾も行なわれている。

本報告では FW 積層円筒圧力容器について、変形及び強度制約条件下での最小重量設計問題を取り扱う。変形制約条件としては、円筒の軸方向・周方向変形が指定された許容値より小さいという条件で与える。また、積層材の強度基準としては一般によく用いられる Tsai-Wu 則を採用する。積層パラメータの概念を用いて、FW 積層円筒圧力容器の剛性・強度特性を明らかにするとともに、種々の変形・強度制約条件のもとで最小重量を与える積層構成を簡便に求める手法を示す。

2. 積層円筒圧力容器の剛性・強度特性

2.1 古典積層理論と積層パラメータ

固体ロケットモータケースにおけるように、図 1 に示す内圧 p 、推力 T を受ける積層円筒殻を考える。

* 昭和61年8月7日受付

** 機体一部

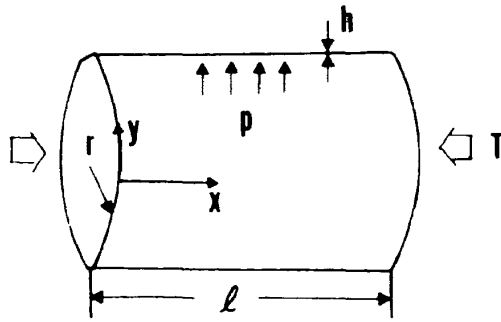


図1 積層円筒圧力容器

ここで、推力 T は固体推進の燃焼あるいは打上げ時の加速度による力である。端末に働く曲げモーメントを無視して円筒中央部の膜応力状態での積層材の剛性・強度特性を調べる。そのとき、合応力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{p r}{2} - \frac{T}{2 \pi r} \\ N_y &= p r \\ N_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 r は円筒半径であり、図1に示すように円筒の板厚、軸長をそれぞれ h 、 l とする。積層材は中央面に関して x 軸に関して $+\theta$ 層と $-\theta$ 層の板厚が等しい対称バランスト積層材であるとする。このような対称バランスト積層材の合力～歪関係式は次のようになることが知られている。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

剪断力 $N_{xy} = 0$ より剪断歪 $\gamma_{xy} = 0$ となる。(2)式の面内剛性 A_{ij} を積層パラメータ ξ_i と剛性に関する不変量 U_i で表示する。

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{22} \\ A_{66} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 1 & 0 \\ 1 & -\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= [Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) + Q_{22}] / 4 \\ U_2 &= [Q_{11} - Q_{22}] / 2 \\ U_3 &= [Q_{11} - 2(Q_{12} + 2Q_{66}) + Q_{22}] / 4 \\ U_4 &= [Q_{11} + 2(Q_{12} - 2Q_{66}) + Q_{22}] / 4 \\ U_5 &= [Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22}] / 4 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

であり、剛性に関する不変量 U_i は材料が指定されれば決定される材料定数である¹⁴⁾。また、積層パラメータは次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &\equiv \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta(z) dz = \int_0^1 \cos 2\theta(u) du \\ \xi_2 &\equiv \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \cos^2 2\theta(z) dz = \int_0^1 \cos^2 2\theta(u) du \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\theta(u)$ は板厚方向 u における繊維配向角の分布を表わす関数である。(3)式より、面内剛性 A_{ij} は2個の積層パラメータによって決定されることがわかる。

積層パラメータ ξ_1 、 ξ_2 の間には次の関係が成り立つ⁶⁾¹³⁾。

$$-1 \leq \xi_1 \leq 1, \quad \xi_1^2 \leq \xi_2 \leq 1 \quad (6)$$

次に、(6)式の関係を満たすある指定された積層パラメータ $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ に対応する積層構成決定法を示す。いま、積層材は対称バランストであると仮定している。一般的に n 種類の繊維配向角から成る対称バランスト積層材として $\{(\pm\theta_1)_{h_1} / (\pm\theta_2)_{h_2} / \dots / (\pm\theta_n)_{h_n}\}_s$ 材を考える。ここで、 h_i は $(\pm\theta_i)$ 層の板厚で $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ と基準化しておく。このとき、(5)式より次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n h_i \begin{Bmatrix} \cos 2\theta_i \\ \cos^2 2\theta_i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

図2に(7)式の関係を示す。点 P の座標は $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ であり、 A_i は $(\cos 2\theta_i, \cos^2 2\theta_i)$ の座標を有し $\pm\theta_i$ 層を示す。点 P は、 $\pm\theta_i$ 層を示す点 A_i の座標の線形結合で表わされ、重みが板厚 h_i となっている。 $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ が与えられたとき対応する積層構成は(7)式より求まる。まず、2種類の繊維配向角を有する $(n=2) \{(\pm\theta_A)_{h_A} / (\pm\theta_B)_{h_B}\}_s$ 積層

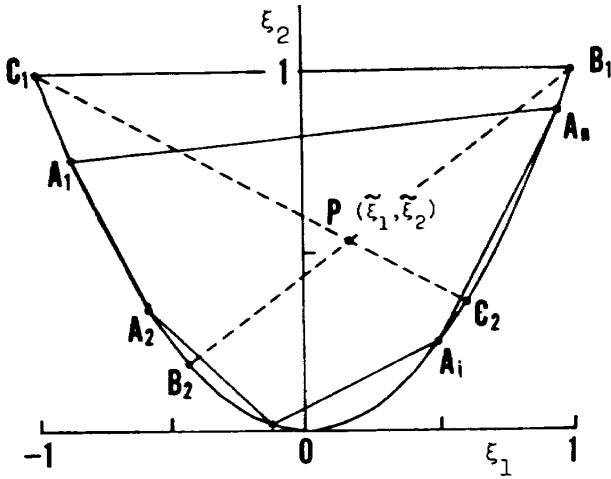


図2 積層パラメータと積層構成の関係

材を考える。図3(a)に示すように、点Aを $\xi_2 = \xi_1^2$ の放物線上に適当に選ぶと、残りの層は直線APと放物線との交点Bによって与えられる。点A(ξ_A, ξ_A^2)、点B(ξ_B, ξ_B^2)に対応する繊維配向角および板厚は次式で示される。

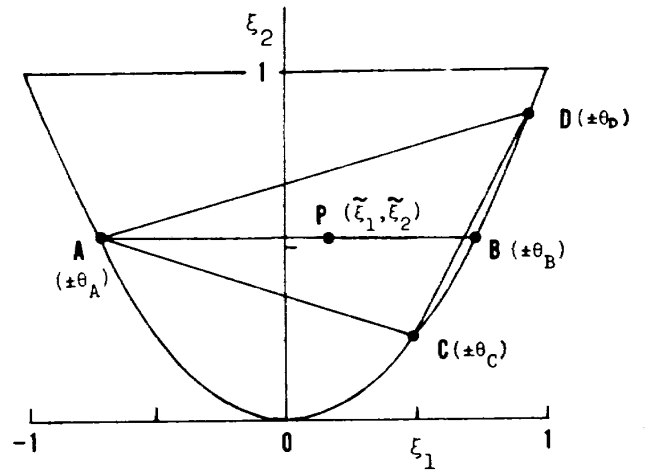
$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{2} \cos^{-1} \xi_A, \quad \theta_B = \frac{1}{2} \cos^{-1} \xi_B \\ h_A &= \frac{\xi_B - \tilde{\xi}_1}{\xi_B - \xi_A}, \quad h_B = 1 - h_A \\ \xi_B &= \frac{\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1 \xi_A}{\tilde{\xi}_1 - \xi_A} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

繊維配向角の種類が $n=3$ である $\{(\pm\theta_A)_{h_A} / (\pm\theta_C)_{h_C} / (\pm\theta_D)_{h_D}\}_s$ 材では、図3(a)に示すように、点A、C、Dを放物線 $\xi_2 = \xi_1^2$ 上に適当に選ぶことにより、繊維配向角および板厚が次式に示すように決定される。

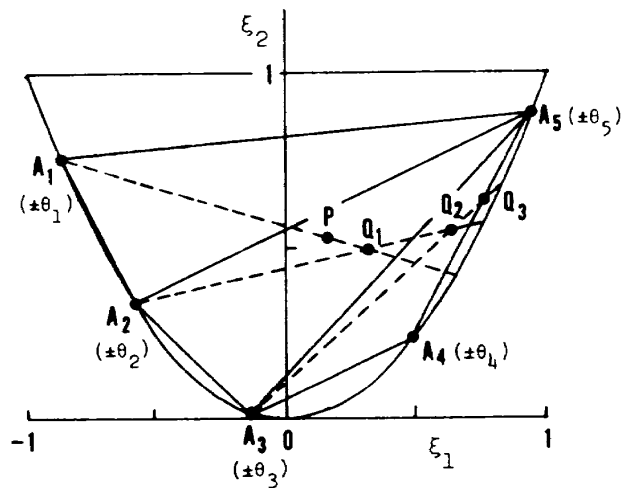
$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{2} \cos^{-1} \xi_A, \quad \theta_C = \frac{1}{2} \cos^{-1} \xi_C \\ \theta_D &= \frac{1}{2} \cos^{-1} \xi_D \\ \begin{Bmatrix} h_A \\ h_C \\ h_D \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos 2\theta_A & \cos 2\theta_C & \cos 2\theta_D \\ \cos^2 2\theta_A & \cos^2 2\theta_C & \cos^2 2\theta_D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(9)式に示す h_A, h_C, h_D が正であるために、点Pは三角形ACDの内部になければならない。

繊維配向角の種類 n が4以上のときは、繊維配向



(a) $n=2, 3$



(b) $n > 3$ のとき

図3 積層パラメータ $P(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ に対応する積層構成決定法

角を指定したとしても、各層の板厚は一義的に決定されず無数の解がある。ここでは、図式解法による各層の板厚決定法を示す。まず、図3(b)に示すように、各層の板厚 $h_i > 0$ である条件より、点Pを囲む n 多角形の頂点 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ を $\xi_2 = \xi_1^2$ の放物線上に適当に選ぶ。これより A_i 点に対応する各層の繊維配向角が指定されたことになる。次に、直線 A_1P 上に $A_1Q_1 > A_1P$ となる点 Q_1 を定める。この結果、 θ_1 層の板厚および残りの層の板厚が次式によって決まる。

$$h_1 = \frac{Q_1 P}{A_1 Q_1}, \quad \sum_{i=2}^n h_i = \frac{A_1 P}{A_1 Q_1} \quad (10)$$

(10)式において、 $h_1 > 0$ の条件より点 Q_1 は $A_1 Q_1 >$

A_1P を満足しなければならない。また、 $h_i > 0$ ($i=2, 3, \dots, n$) であるためには、点 Q_1 は $(n-1)$ 角形 $A_2A_3 \dots A_n$ の内部になければならない。同様にして、点 Q_2 を直線 A_2Q_1 上に選ぶ。このとき、 Q_2 は $A_2Q_2 > A_2Q_1$ を満たし、 $(n-2)$ 角形 $A_3A_4 \dots A_n$ の内部に選ぶ。 θ_2 層の板厚および残りの層の板厚は次式で決定される。

$$h_2 = \frac{Q_2Q_1}{A_2Q_2} \frac{A_1P}{A_1Q_1}, \quad \sum_{i=3}^n h_i = \frac{A_2Q_1}{A_2Q_2} \frac{A_1P}{A_1Q_1} \quad (11)$$

同様にして、図 3(b) に示す 5 種類の繊維配向角 ($n=5$) の場合の残りの層の板厚は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} h_3 &= \frac{Q_3Q_2}{A_3Q_2} \frac{A_2Q_1}{A_2Q_2} \frac{A_1P}{A_1Q_1} \\ h_4 &= \frac{A_5Q_3}{A_4A_5} \frac{A_3Q_2}{A_3Q_3} \frac{A_2Q_1}{A_2Q_2} \frac{A_1P}{A_1Q_1} \\ h_5 &= \frac{A_4Q_3}{A_4A_5} \frac{A_3Q_2}{A_3Q_3} \frac{A_2Q_1}{A_2Q_2} \frac{A_1P}{A_1Q_1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで、最後に選ぶ Q_i 点である Q_3 は直線 A_4A_5 上になければならない。このような図式解法により $n \geq 4$ のときの繊維配向角および板厚が決定される。

以上の方法は、各層の板厚が連続的な値をとり得る場合に、あらかじめ繊維配向角を指定してその板厚を決定する方法である。一方、有限の層数の場合には、各層の板厚が離散的な値となるため、積層パラメータの許容領域は(6)式に示される領域より狭くなり、繊維配向角および板厚の決定法も上記の場合と異なる。二種類の繊維配向角の場合には、三木¹³⁾により積層パラメータの許容領域、繊維配向角の決定法が示されている。即ち、 $\pm\theta_A$ 層の層数 $2N_A$ 、 $\pm\theta_B$ 層の層数 $2N_B$ であるような対称バランスト積層材 $\{(\pm\theta_A)_{N_A}/(\pm\theta_B)_{N_B}\}_s$ の場合には(8)式より、

$$h_A = \frac{\xi_B - \tilde{\xi}_1}{\xi_B - \xi_A} = \frac{N_A}{N_A + N_B} \quad (13)$$

の関係が得られ、 ξ_A, ξ_B が次のように求まる。

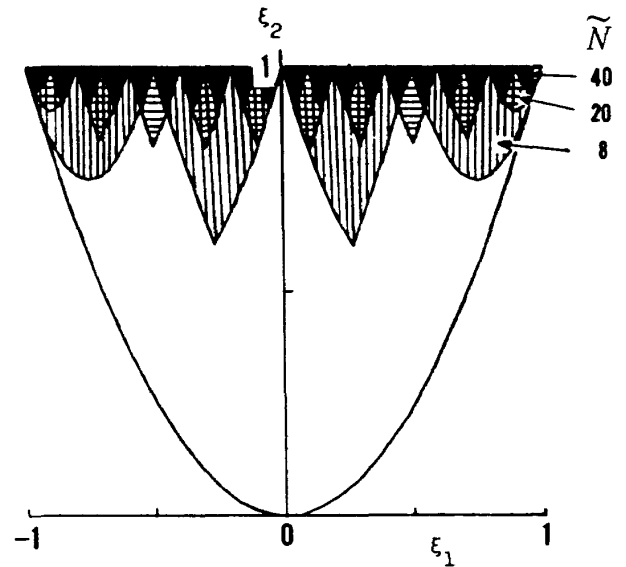


図 4 積層パラメータの許容領域 (斜線部は非許容領域)

$$\begin{aligned} (\xi_A, \xi_B) &= \left(\tilde{\xi}_1 \pm \sqrt{\frac{N_B}{N_A} (\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1^2)}, \right. \\ &\quad \left. \tilde{\xi}_1 \mp \sqrt{\frac{N_A}{N_B} (\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1^2)} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

(複合同順)

ξ_A, ξ_B が(14)式で決定されれば、 θ_A, θ_B は次式によって求まる。

$$\theta_A = \frac{1}{2} \cos^{-1} \xi_A, \quad \theta_B = \frac{1}{2} \cos^{-1} \xi_B \quad (15)$$

(15)式の繊維配向角が存在するためには、 $-1 \leq \xi_A \leq 1$ 、および $-1 \leq \xi_B \leq 1$ でなければならない。そのため、 $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ の許容領域は(6)式で示される領域より狭くなる。全層数 $\tilde{N} = 2(N_A + N_B)$ が 8, 20, 40 の場合について、(14)式のうち少なくとも 1 つの解が存在するための $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ の許容領域を文献 13 に基づいて計算すれば図 4 に示すようになる。

有限の層数で繊維配向角が 3 種類以上の場合の積層構成の求め方を次に示す。まず、新たな変数 λ_i を導入して各層の ξ_i を(14)式と類似の次式で表わす。

$$\xi_i = \tilde{\xi}_1 + \lambda_i \sqrt{\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1^2} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

ここで、 (ξ_i, ξ_i^2) に対応する繊維配向角は次式で与えられる。

表1 炭素繊維 / エポキシ樹脂複合材の材料定数

$E_L = 142 \text{ GPa}, E_T = 10.8 \text{ GPa}, G_{LT} = 5.49 \text{ GPa}, \nu_L = 0.3$
$F_L = 1.568, F_L' = 1.341, F_T = 0.057, F_T' = 0.212, F_{LT} = 0.08 \text{ (GPa)}$

$$\theta_i = \frac{1}{2} \cos^{-1} \xi_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

$\pm \theta_i$ 層の板厚を h_i とすると, λ_i, h_i に関して次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^n h_i \lambda_i = 0, \sum_{i=1}^n h_i \lambda_i^2 = 1, \sum_{i=1}^n h_i = 1 \quad (18)$$

このようにして, (18)式の λ_i に関する方程式では積層パラメータ ($\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$) が消去されている。 $n=2$ の2種類の繊維配向角の場合には, (18)式から(14)式が誘導される。いま, $n \geq 3$ の場合に全プライ数を $2N$ とし, 各層が1プライから成っているとすると, $h_i = 1/N$ となり(18)式は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 = N \quad (19)$$

よって, 有限の層数の場合には, (19)式の関係を満たす λ_i を適当に選ばばよいことになる。そのとき, ξ_i に関する $-1 \leq \xi_i \leq 1$ の条件より, λ_i は次の条件式を満足しなければならない。

$$\frac{-1 - \tilde{\xi}_1}{\sqrt{\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1^2}} \leq \lambda_i \leq \frac{1 - \tilde{\xi}_1}{\sqrt{\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1^2}} \quad (20)$$

例として, $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = (0, 1/2)$ の面内等方性を有する積層構成を求める。片側プライ数 $N=2$ のときには, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ より, $\xi_1 = \sqrt{2}, \xi_2 = -\sqrt{2}$ となり(20)式の関係も満足する。このときの積層構成は $[(\pm 22.5^\circ)/(\pm 67.5^\circ)]_s$ となる。また, 片側プライ数 $N=3$ のとき, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, (-1 + \sqrt{3})/2, (-1 - \sqrt{3})/2)$ は(19)(20)式を満足する1つの解であり, そのときの積層構成は, $[(\pm 22.5^\circ)/(\pm 37.5^\circ)/(\pm 82.5^\circ)]_s$ となる。 $N \geq 3$ のときには(19)(20)式を満足する解は一意ではなく無数に存在することになる。

2.2 積層円筒圧力容器の剛性特性

本節では, 積層円筒圧力容器の積層構成と剛性特

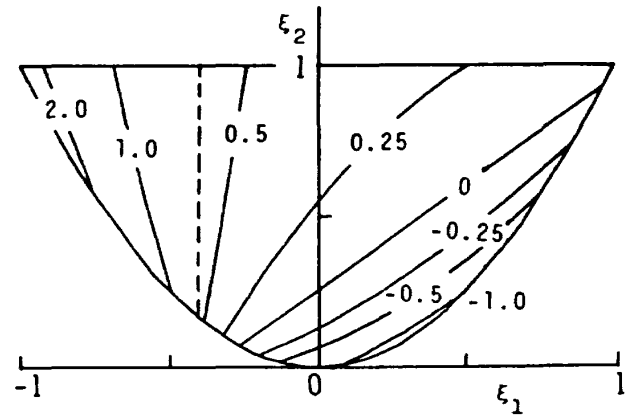
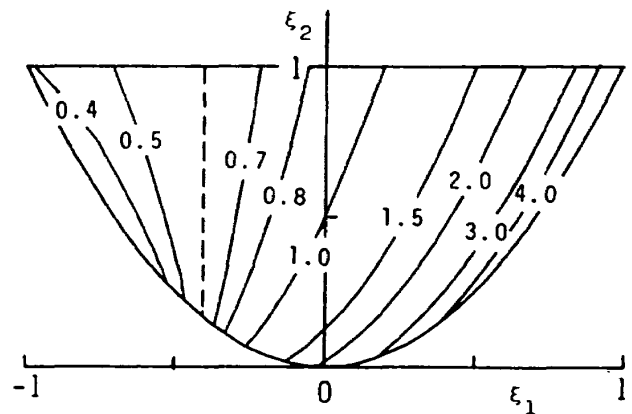
(a) 軸方向歪 ϵ_x^* (b) 周方向歪 ϵ_y^*

図5 積層パラメータ座標上での歪分布

性の関係を調べる。荷重として, (1)式において推力 $T=0$ で内圧のみが働く場合を考える。このとき,

$$N_x = p r / 2, N_y = p r, N_{xy} = 0 \quad (21)$$

である。数値計算例として, 表1に示す炭素繊維 / エポキシ樹脂の材料定数 (トレカ P 3060 対応) を用いる。

積層円筒圧力容器において, 内圧 p , 半径 r , 板厚 h が指定されたとき, 軸方向歪 ϵ_x , 周方向歪 ϵ_y は積層パラメータ (ξ_1, ξ_2) によって決定される。図5は, 積層パラメータ座標 $\xi_1 - \xi_2$ 上の歪分布を示す。ここで, 図5(a)(b)の軸方向歪 $\epsilon_x^* \equiv \epsilon_x / \tilde{\epsilon}_y$, 周方向歪 $\epsilon_y^* \equiv \epsilon_y / \tilde{\epsilon}_y$ は, $(\xi_1, \xi_2) = (0, 1/2)$

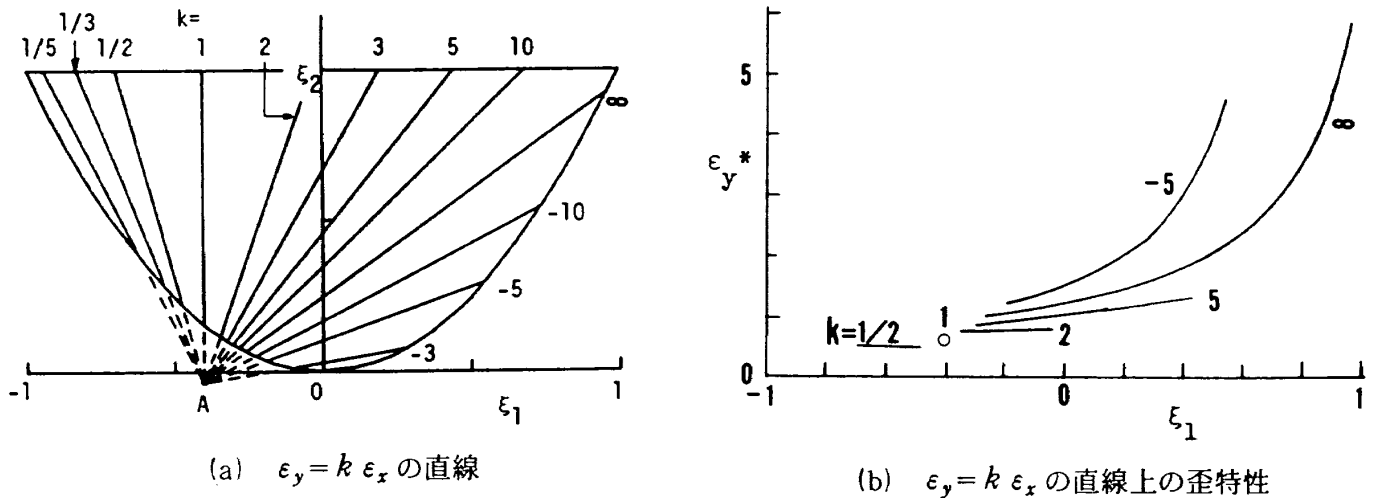


図6 $\epsilon_y = k \epsilon_x$ の直線と直線上の歪特性

の面内等方性材の周方向歪 $\tilde{\epsilon}_y$ によって基準化されている。(2)(3)(2)式より $\tilde{\epsilon}_y$ は次式で示される。

$$\tilde{\epsilon}_y = \frac{p r}{4 h} \frac{(4 U_1 + 3 U_3 - 2 U_4)}{(U_1 + U_4)(U_1 + U_3 - U_4)} \quad (2)$$

図5の破線は $\epsilon_x = \epsilon_y$ である積層パラメータを示し、後述の同時破損積層構成(各層が同時に破損する積層構成)に対応する。同時破損積層構成の $\xi_1 = \xi_1^*$ は(2)式より求まり、また、歪は(2)(3)(2)式と ξ_1^* の値より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1^* &= -\frac{1}{3} \frac{U_1 + U_4}{U_2} = -0.405 \\ \epsilon_x = \epsilon_y &= \frac{3 p r}{4 h} \frac{1}{U_1 + U_4} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

図5(a)より、軸方向歪 ϵ_x^* は ξ_1 の増加と共に減少していくことがわかる。また、 (ξ_1, ξ_2) の変動と共に、正から負の値迄変化する。一方、周方向歪 ϵ_y^* は、図5(b)に示されるように、常に正であり、 ξ_1 の増加と共に増大する。

(2)(3)(2)式より、 $\epsilon_y = k \epsilon_x$ の関係を満足する積層パラメータは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} 2 U_1 - U_4 + 2 \xi_1 U_2 + 3 \xi_2 U_3 \\ = k (U_1 - 2 U_4 - \xi_1 U_2 + 3 \xi_2 U_3) \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式の関係は、図6(a)に示すように、積層パラメータ座標上で直線を示す。この直線は、 k の値に拘らず次式に示される点Aを通る。

$$\left(-\frac{U_1 + U_4}{3 U_2}, \frac{5 U_4 - 4 U_1}{9 U_3} \right) = (-0.405, -0.033) \quad \dots\dots\dots (5)$$

k の正值に対して、 $\epsilon_y = k \epsilon_x$ の直線の右側では $\epsilon_y > k \epsilon_x$ であり、左側では $\epsilon_y < k \epsilon_x$ の関係がある。また、直線 $\epsilon_y = k \epsilon_x$ 上では、図6(b)に示すように、積層パラメータ (ξ_1, ξ_2) が点Aに近づくにつれて ϵ_y^* は減少していくことがわかる。このことから、歪を小さくするためには、点Aに近い積層構成を選ばばよいことになる。

2.3 積層円筒圧力容器の強度特性

表1に示す炭素繊維/エポキシ樹脂複合材について破壊基準としてTsai-Wu則を用いる。内圧荷重のみが働くときには、剪断歪 $\tau_{xy} = 0$ となり、歪で表示したTsai-Wu則は次のようになる¹⁴⁾。

$$\begin{aligned} (G_{11} - 2 G_{12} + G_{22} - 4 G_{66}) q^2 \cos^2 2 \theta \\ + 2 [(G_{11} - G_{22}) p + (G_1 - G_2)] q \cos 2 \theta \\ + (G_{11} + 2 G_{12} + G_{22}) p^2 + 4 G_{66} q^2 \\ + (G_1 + G_2) p - 1 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 θ は x 軸(円筒軸方向)と繊維方向のなす角である。また、

$$p = (\epsilon_x + \epsilon_y) / 2, \quad q = (\epsilon_x - \epsilon_y) / 2 \quad (7)$$

(6)式の G_{ij} 、 G_i はTsai-Wu則の F_{ij} 、 F_i および弾性定数 Q_{ij} によって次式で与えられる。

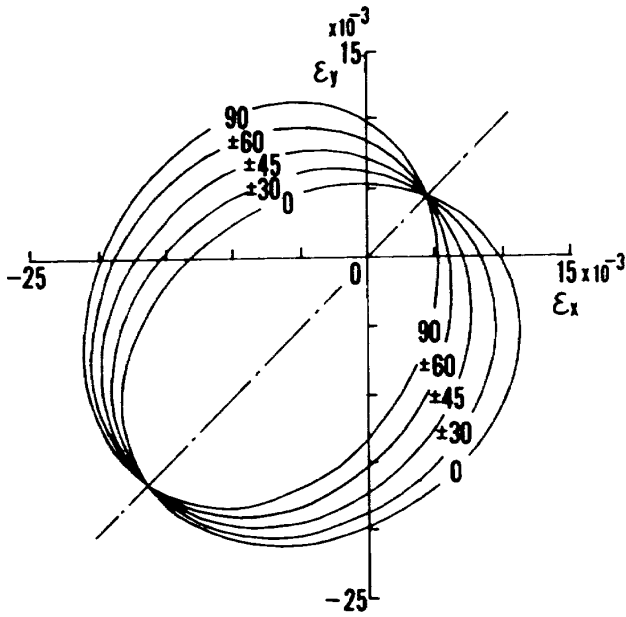


図7 表1に示す炭素繊維/エポキシ樹脂複合材の破損歪曲線 ($F_{12}^* = -1/2$)

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= F_{11} Q_{11}^2 + 2 F_{12} Q_{11} Q_{12} + F_{22} Q_{12}^2 \\ G_{22} &= F_{11} Q_{12}^2 + 2 F_{12} Q_{12} Q_{22} + F_{22} Q_{22}^2 \\ G_{12} &= F_{11} Q_{11} Q_{12} + F_{12} (Q_{11} Q_{22} + Q_{12}^2) \\ &\quad + F_{22} Q_{12} Q_{22} \\ G_{66} &= F_{66} Q_{66}^2 \\ G_1 &= F_1 Q_{11} + F_2 Q_{12}, \quad G_2 = F_1 Q_{12} + F_2 Q_{22} \end{aligned} \right\} \text{㉞}$$

Tsai-Wu 則の F_{12} は適当な二軸試験によって決定することができるが、 $F_{12}^* = F_{12} / \sqrt{F_{11} F_{22}} = -1/2$ が用いられることも多い。図7に、 $F_{12}^* = -1/2$ の場合について、㉞式によって与えられる破損歪曲線を θ をパラメータにして示す。図7から、 $q > 0$ ($\epsilon_x > \epsilon_y$) のときには繊維配向角 θ が 90° から 0° 迄減少するにつれて破損歪は増大し、 $q < 0$ ($\epsilon_x < \epsilon_y$) のときには θ が減少するにつれて破損歪は減少することがわかる。また、 $q = 0$ ($\epsilon_x = \epsilon_y$) のときには、破損歪は繊維配向角 θ とは無関係に一定となる。破損歪に関するこの単調な特性から、炭素繊維/エポキシ樹脂複合材に関する独特の破損特性が導かれる。

まず、積層パラメータ ($\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$) を有する積層材においては、外荷重 q のもとで歪 (ϵ_x, ϵ_y) は一義的に決定される。図2に示す n 層から成る積層材を考えると、 $\epsilon_x > \epsilon_y$ のときには最大の繊維配向角を有する $\pm \theta_1$ 層が最弱層となり、 $\epsilon_x < \epsilon_y$ のときには

最小の繊維配向角を有する $\pm \theta_n$ 層が最弱層となる。剛性特性を変えないで破損強度を増大させるためには、積層パラメータ ($\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$) を変えないで最弱層を順次取り除けばよい。即ち、 $\epsilon_x > \epsilon_y$ のときには最弱層の繊維配向角を減少させればよいし、 $\epsilon_x < \epsilon_y$ のときには最弱層の繊維配向角を増大させればよい。そのとき、積層パラメータ ($\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$) が変化しないためには、最弱層の繊維配向角の変動に限界があり、図2に示すように、 $\epsilon_x > \epsilon_y$ のときには、 $B_1 B_2$ で示される積層構成が最大強度を与える。また、 $\epsilon_x < \epsilon_y$ のときには、 $C_1 C_2$ で示される積層構成が最大強度を与える。 $B_1 B_2$ および $C_1 C_2$ に対応する積層構成は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} &B_1 B_2 ; \{ 0_{h_0} / (\pm \theta)_{h_\theta} \}_s \\ &\theta = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2}{1 - \tilde{\xi}_1} \\ &h_\theta = \frac{(1 - \tilde{\xi}_1)^2}{1 - 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}, \quad h_0 = 1 - h_\theta \end{aligned} \right\} \text{㉞}$$

$$\left. \begin{aligned} &C_1 C_2 ; \{ 90_{h_{90}} / (\pm \theta)_{h_\theta} \}_s \\ &\theta = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{1 + \tilde{\xi}_1} \\ &h_\theta = \frac{(1 + \tilde{\xi}_1)^2}{1 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}, \quad h_{90} = 1 - h_\theta \end{aligned} \right\} \text{㉟}$$

㉞式において $\epsilon_x = \epsilon_y$ ($q = 0$) のときには、繊維配向角 θ に拘らず破損歪は一定となる。そこで、 $\epsilon_x = \epsilon_y$ の関係を満たす積層構成を同時破損積層構成と呼ぶことにする。(2)(3)式より同時破損積層構成は、

$$\xi_1^* = \frac{U_1 + U_4}{U_2} \frac{N_x - N_y}{N_x + N_y},$$

ξ_2 は $\xi_1^* \leq \xi_2 \leq 1$ の任意の値 ㉟

によって与えられる。内圧荷重のみが働く場合には、㉞式より㉟式の ξ_1^* および歪値が得られる。㉟式の積層パラメータから積層構成を求めるには、2.1節で示した方法を用いることができる。たとえば、 $0^\circ, 90^\circ$ 層から成るクロスプライ積層 ($\xi_2 = 1$) では、

$$h_0 = (1 + \xi_1^*)/2, \quad h_{90} = (1 - \xi_1^*)/2 \quad \text{㉟}$$

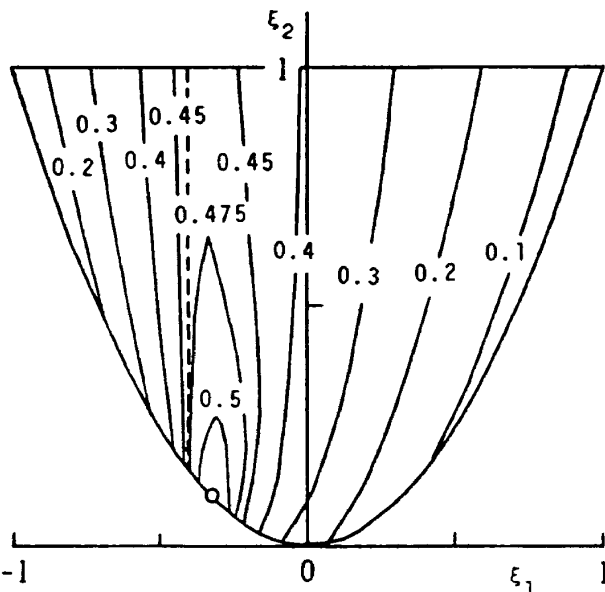


図8 積層パラメータ座標上での強度分布
 $\bar{\sigma}_y = N_y / h$ (GPa) ($F_{12}^* = -1/2$)

の板厚のとき同時破損積層構成となって、 0° 層と 90° 層とは同時に破損する。また、 $0/\pm 45/90$ 材では、

$$\begin{aligned} h_0 - h_{90} &= \xi_1^* \\ h_0 + h_{\pm 45} + h_{90} &= 1, \quad h_0 \geq 0, \quad h_{\pm 45} \geq 0, \quad h_{90} \geq 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (33)$$

を満足する板厚配分なら、各層が同時に破損する。この同時破損積層構成の強度は積層構成が変化しても同一となる。

次に、表1に示す炭素繊維 / エポキシ樹脂から成る積層円筒圧力容器の強度特性を調べる。2.2節で示した積層円筒圧力容器の剛性特性より、図5に示すように、 $\xi_1 \geq \xi_1^*$ では $\epsilon_x \leq \epsilon_y$ 、 $\xi_1 \leq \xi_1^*$ では $\epsilon_x \geq \epsilon_y$ の関係がある。このことから、ある積層パラメータ ($\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$) を有する積層構成に対し、 $\xi_1 \geq \xi_1^*$ では(30)式で示す $90/(\pm\theta)$ 材が最大強度を与え、 $\xi_1 \leq \xi_1^*$ では(29)式で示す $0/(\pm\theta)$ 材が最大強度を与えることになる。図8に、この積層構成に対応する強度を積層パラメータ座標上で示す。ここで、強度値は $\bar{\sigma}_y = N_y / h$ の周方向強度であり、Tsai-Wu 則の $F_{12}^* = -1/2$ を用いている。 $\xi_1 = \xi_1^*$ の同時破損積層構成の強度は $\bar{\sigma}_y = 0.473$ GPa であり、最大強度は $(\xi_1, \xi_2) = (-0.322, 0.104)$ の $\pm 54.4^\circ$ アングルプライ材の $\bar{\sigma}_y = 0.536$ GPa であ

る。

3. 積層円筒圧力容器の剛性・強度条件下での最小重量設計

シャトルブースタのような大型の積層円筒圧力容器では、強度に関する要求条件だけでなく変形に関する条件を満足しなければならない。ここでは、次式に示すように、半径方向変形および軸方向変形がある許容値より小さいという条件を考える。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{\Delta r}{r} \leq \frac{\Delta r_{\max}}{r} = \epsilon_y^0 \\ \epsilon_x &= \frac{\Delta l}{l} \leq \frac{\Delta l_{\max}}{l} = \epsilon_x^0 \end{aligned} \right\} (34)$$

シャトルブースタの例では、 Δr_{\max} は固体推進の許容変形条件より、 Δl_{\max} は打上げ時の加速度を抑える条件より規定され、 $\Delta r_{\max} = 0.58$ インチ、 $\Delta l_{\max} = 0.6$ インチとなっている⁴⁾⁵⁾。

(34)式の変形条件を満たすのに必要な板厚は(2X3X2)式より与えられ、また、強度条件を満たすのに必要な板厚は(29)式より求められる。

$$\begin{aligned} h_{\epsilon_x} &\geq c \epsilon_x^* p_{\max} r / \epsilon_x^0, \quad h_{\epsilon_y} \geq c \epsilon_y^* p_{\max} r / \epsilon_y^0 \\ h_{st} &\geq p_{\max} r / \bar{\sigma}_y \end{aligned} \quad (35)$$

ここで、 h_{ϵ_x} 、 h_{ϵ_y} 、 h_{st} はそれぞれ軸方向変形、周方向変形、強度条件を満足するのに必要な板厚である。(35)式で、 ϵ_x^* 、 ϵ_y^* は図5に示す基準化された歪、 $\bar{\sigma}_y$ は図8の強度であり、いずれも (ξ_1, ξ_2) の関数である。また、 c は次式に示す材料定数である。

$$c = \frac{1}{4} \frac{4U_1 + 3U_3 - 2U_4}{(U_1 + U_4)(U_1 + U_3 - U_4)} \quad (36)$$

(35)式の右辺の最大値を与える条件が最もクリチカルな条件を示す。(35)式で等号を用いることにすると、最小重量設計は h_{ϵ_x} 、 h_{ϵ_y} 、 h_{st} の最大値を最小とする (ξ_1, ξ_2) を求める問題となる。

まず最初に二つの極限状態を考える。一つは、許容歪 ϵ_x^0 、 ϵ_y^0 が十分大きく、強度条件のみがアクティブ(active)な条件になっている場合である。このときは、図8に示すように、 $\pm 54.4^\circ$ アングルプライ材が最適積層構成となる。

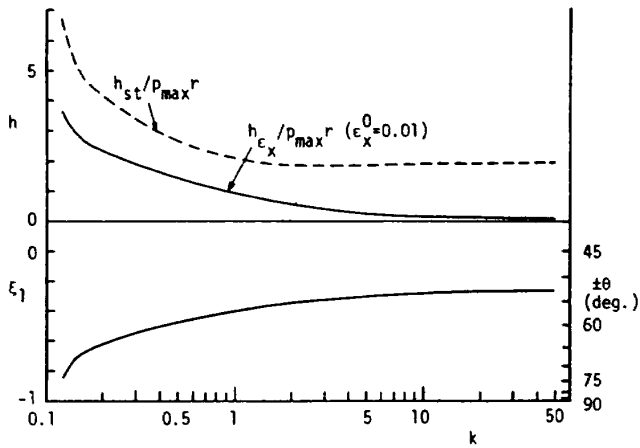


図9 変形制約条件に対する最適繊維配向角と板厚

二番目は、 $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0$ が十分小さく変形条件のみがアクティブな条件となる場合である。いま、許容歪条件の間を $\epsilon_y^0 = k \epsilon_x^0$ と記述する。図6(a)で、 $k = const.$ の直線上では $h_{\epsilon_x} = h_{\epsilon_y}$ の関係がある。 $k = const.$ の直線の右側では $h_{\epsilon_x} < h_{\epsilon_y}$ 、左側では $h_{\epsilon_x} > h_{\epsilon_y}$ となる。また、図6(b)より歪値 ϵ_x, ϵ_y は点Aに近づくにつれて小さくなる。このことから、 $\epsilon_y^0 = k \epsilon_x^0$ の変形条件に対する最適積層パラメータは、 $\epsilon_y = k \epsilon_x$ の直線と $\xi_2 = \xi_1^2$ の放物線の交点のうち点Aに近い方のアングルプライ材で与えられることがわかる。即ち、

$$\theta = \pm \frac{1}{2} \cos^{-1} \xi_1 \quad (7)$$

ここで、

$$\xi_1 = \frac{U_2(k+2) - \sqrt{U_2^2(k+2)^2 - 12U_3(k-1)\{k(U_1-2U_4) - (2U_1-U_4)\}}}{6U_3(k-1)} \quad (k \neq 1 \text{ のとき})$$

$$\xi_1 = -\frac{U_1+U_4}{3U_2} \quad (k = 1 \text{ のとき}) \quad (8)$$

(7)式に示す最適繊維配向角および(8)式に示す積層パラメータ ξ_1 を図9に示す。図9において、必要な板厚 $h_{\epsilon_x}/p_{max} r (= h_{\epsilon_y}/p_{max} r)$ は許容歪 $\epsilon_x^0 = 0.01$ に対する値である。また、比較のため強度条件を満足するのに必要な板厚 $h_{st}/p_{max} r$ も合せ示す。図9は変形条件のみがアクティブである場合の最適積層構成であるため、 $h_{st} > h_{\epsilon_x} (= h_{\epsilon_y})$ のときは使え

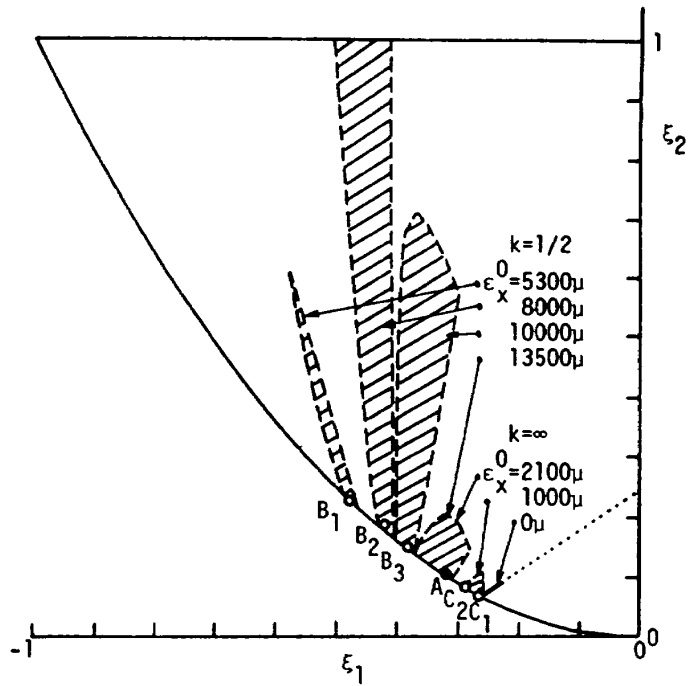


図10 $k = 1/2, \infty$ のときの積層パラメータ座標上での最適点

ない。たとえば、 $k = \epsilon_y^0/\epsilon_x^0 = 1/2$ で $\epsilon_x^0 = 0.01$ のときには $h_{st} > h_{\epsilon_x}$ となっているため、この条件下では最適積層構成は図9に示すアングルプライ材ではない。許容歪 ϵ_x^0 がより小さくなって $\epsilon_x^0 < 0.0053$ の場合に $h_{\epsilon_x} (= h_{\epsilon_y}) > h_{st}$ となり、最適積層構成は図9で与えられることになる。

図10には、 $k = \epsilon_y^0/\epsilon_x^0 = 1/2$ および ∞ の場合について、許容歪 ϵ_x^0 の値により最適の積層パラメータがどのように変化するかを示す。また、最適の積層パラメータに対応する積層構成を表2に示す。表2の積層構成は $\xi_1 < \xi_1^*$ では(9)式、 $\xi_1 > \xi_1^*$ では(8)式より求められる。表2において、積層構成の下添字は板厚を示し、下線の付いた基準化された板厚 $h^* = h/p_{max} r (GP_a^{-1})$ が最もクリチカルな条件に対応している。

図10において、○印が最適な積層パラメータを示し、斜線領域は最適点における最小板厚より5%板厚増加のときの解の存在領域を示す。 $k = 1/2$ の場合には、許容値 ϵ_x^0 が0.0053より小さいときには変形条件のみがアクティブな条件となり、最適積層構成は(7)式に示すアングルプライ材(図10の B_1 点で $\pm 59.3^\circ$) で与えられる。 ϵ_x^0 が増加するにつれて最適点は B_2, B_3, A 点に移動する。表2に示すよ

表2 $k = 1/2, \infty$ のときの最適積層構成

$k = 1/2$						
ϵ_x^0	ξ_1	ξ_2	h_{st}^*	$h_{\epsilon_x}^*$	$h_{\epsilon_y}^*$	laminate (deg.)
0.0053	-0.480	0.230	2.689	2.710	2.710	± 59.3
0.0080	-0.421	0.189	2.214	1.298	2.214	$0_{0.01} / (\pm 57.7)_{0.99}$
0.0100	-0.384	0.151	2.011	0.800	2.011	$90_{0.01} / (\pm 56.1)_{0.99}$
0.0135	-0.322	0.104	1.865	0.288	1.856	± 54.4
$k = \infty$						
0.	-0.261	0.068	1.995	—	—	± 52.6
0.0010	-0.291	0.085	1.900	1.900	—	± 53.5
0.0021	-0.322	0.104	1.865	1.851	—	± 54.4

うに、 B_2, B_3 点では周方向変形条件と強度条件とがアクティブな条件となり、軸方向変形条件はパッシブな条件となっている。 $\epsilon_x^0 > 0.0135$ では、強度条件のみがアクティブな条件となり、点Aに対応する $\pm 54.4^\circ$ アングルプライ材が最適積層構成を与える。また、最小板厚より5%板厚増加のときの積層パラメータの存在領域は、 B_1, A 点回りにくらべ、 B_2, B_3 点回りで大きい。これは、 B_2, B_3 点が同時破損積層構成の $\xi_1 = \xi_1^*$ に近いことによってしている。つまり、同時破損積層構成を示す $\xi_1 = \xi_1^*$ では ξ_2 の変化によって歪、強度共変化せず一定であるため、この $\xi_1 = \xi_1^*$ の近くでは若干の板厚増加により解の存在領域が大きくなる。

$k = \infty$ の場合には、周方向変形に関する制約条件がなくなる。そこで、軸方向変形条件と強度条件とを考慮すればよいことになる。 $\epsilon_x^0 = 0$ のときには軸変形を零とする積層パラメータが規定され、最適な積層構成は(7)(8)式より $\pm 52.6^\circ$ アングルプライ材 (図10の C_1 点) となる。 $\epsilon_x^0 = 0.001$ のときには、軸方向変形条件と強度条件の両方がアクティブな条件となり、最適点は C_2 点に移動する。さらに許容歪 ϵ_x^0 が増加して $\epsilon_x^0 > 0.0021$ となると、強度条件のみがアクティブとなり最適点はA点となる。

4. 結 論

本報告では、積層パラメータの概念を用いて、炭

素繊維 / エポキシ樹脂から成る積層円筒圧力容器の最適設計の問題を考察した。得られた主要な結論を次に示す。

- 1) 許容歪値が小さいときは変形制約条件のみがアクティブな条件となり、最適積層構成は(7)式に示すアングルプライ材となる。
- 2) 許容歪値が大きいときは強度制約条件のみがアクティブな条件となり、最適積層構成は $\pm 54.4^\circ$ アングルプライ材となる。
- 3) 許容歪値が 1) の小さな値から 2) の大きい値迄変化するにつれて、最適積層構成は図10に示すように、変形制約条件によって与えられる解(7)式から強度制約条件によって与えられる $\pm 54.4^\circ$ アングルプライ材まで種々変化する。
- 4) 積層パラメータの概念を用いることにより、種々の変形・強度制約条件下で最小重量を与える積層構成が簡便に求められた。

参 考 文 献

- 1) 植村益次, 井山向史, 福永久雄, 生田義光, 守田政弘; CFRP ロケットモーターの開発研究, 東京大学宇宙航空研究所報告, 15巻4号(1979) p.821.
- 2) 福永久雄, 植村益次; FW 圧力容器の最適設計 (第1報)(第2報), 日本航空宇宙学会誌, 29巻331号(1981), p.432 & p.439.

- 3) Christensen, N. and Wolcott, E.; Development and Fabrication of a Graphite/Epoxy Motor Case for Air Launch Missile Applications," 29th National SAMPE Symposium (1984) p. 1335.
- 4) Verderaime, V. and Rheinfurth, M.; Identification and Management of Filament-Wound Case Stiffness Parameters, NASA TP 2117 (1983).
- 5) Verderaime, V.; Development of In Situ Stiffness Properties for Shuttle Booster Filament Wound Case, NASA TP 2377 (1984).
- 6) 福永久雄；積層板の圧縮座屈特性と最適化，日本航空宇宙学会誌，30巻343号（1982）p.482.
- 7) 三木光範；パーソナルコンピュータを用いた複合材料の積層構成決定法（その1：面内剛性を基準とする場合），強化プラスチック，27巻9号（1981）p.377.
- 8) Fukunaga, H. and Hirano, Y.; Stability Optimization of Laminated Composite Plates under In-Plane Loads, Proc. ICCM IV (1982) p. 565.
- 9) 福永久雄，平野陽一；積層板の振動特性と最適化，材料システム，3巻（1984）p.135.
- 10) Onoda, J.; Optimal Laminate Configurations of Cylindrical Shells for Axial Buckling, AIAA J., Vol. 23 (1985) p. 1093.
- 11) 福永久雄；直交異方性積層材の剛性特性と最適化（円筒殻への応用），日本複合材料学会誌，11巻1号（1985）p.27.
- 12) 福永久雄；面内荷重を受ける積層材の強度最適化，日本複合材料学会誌，12巻2号（1986）p.65.
- 13) 三木光範；剛性を基準とする複合材料積層板の材料設計と最適化，材料システム，3巻（1984）p.83.
- 14) Tsai, S.W. and Hahn, H.T.; Introduction to Composite Materials, Technomic Pub. Co., Westport. (1980).

航空宇宙技術研究所報告 917 号

昭和 61 年 10 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町 7-44-1
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社実業公報社
東京都千代田区九段南 4-2-12
