

ISSN 0389-4010
UDC 517.544:536.21:
621.438-226

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-932

渦のある翼間流れの数値シミュレーション

西村英明

1987年5月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

1. 緒 言	1
2. 渦の配置と定式化	2
2.1 四方を壁に囲まれた領域内の流れ	2
2.2 上下壁に囲まれたチャンネル内の流れ	4
2.3 上下壁間の半無限領域内の流れ	6
3. 応用計算	9
3.1 四方を壁に囲まれた領域内の流れ	9
3.2 上下壁に囲まれたチャンネル内の流れ	10
3.3 上下壁間の半無限領域内の流れ	11
4. 結 び	12
参考文献	13
付録 Weierstrass の楕円関数	14

渦のある翼間流れの数値シミュレーション*

西村 英明**

Flow Patterns Induced by Vortices

Hideaki NISHIMURA

ABSTRACT

When located in a confined region, vortices form a flow field in the region of mutual interference. The obtained flow field is very useful in the analysis of the secondary flow in a cascade. In this report three flow patterns are calculated by using the elliptic functions and hyperbolic functions.

The flows are in;

- 1) a parallelogram bounded by four boundaries,
- 2) a channel restricted by upper and lower boundaries,
- 3) a half region confined by upper, lower and left boundaries.

The method of vortex distribution in a calculation plane and the calculated results are also shown. A few comments on the characteristics of the elliptic functions are presented in the appendix. It is concluded that this method is effective in analysing the secondary flows with vortices in a cascade.

1. 緒 言

ガスタービンの高性能化に伴い翼間流れの損失のメカニズムの追求と設計への利用のため詳細な内部流の研究が要求されている。とりわけ、近年になって流れの複雑な現象の解明のため最新技術を駆使し多くの新しい実験計測の成果が得られている¹⁾。しかしながら、この複雑な現象を理論的に記述することはほとんど不可能に近いし、また、その必要もない。むしろ、現象の本質を把握するためにいかに適正なモデルを作り出すかが重要な研究対象となる。たとえば、動翼の翼先端間隙などにより、いわゆる二次的に発生した渦の翼列内の流れに対する影響に関しては、局所的にみれば二次元のポテンシャル渦によ

るモデルによって実用上かなり有効な結果が得られることが報告されている。なかでもこのモデルに改良を加えれば計算によって翼列からの二次流れによって生ずる流出角分布の偏りに関してかなり実状に近い値を得ることができ、翼列性能を見積る上で非常に役に立つ²⁾³⁾。このモデルによる計算を行ったのは、B. Lakshminarayana が最初であろう。B. Lakshminarayana はこのモデルによって

イ) 流出角の偏りの見積りを行い、全圧損失(stagnation pressure deficiency)などから最適翼端間隙(tip clearance)

を示した。

また、本方法は、レイノルズ数が非常に大きい場合の流れを対象としたものとも考えることができ、その場合、乱流流れとかなり似た流れの様子を示す。したがって、

ロ) モデル化が適当に行われれば二次流れの発達

* 昭和62年4月18日受付

** 原動機部

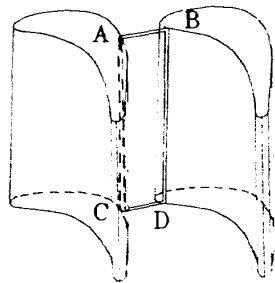
過程をかなり詳しく表現でき、渦相互の干渉はかなり良く現実の高レイノルズ数の場合の流れに一致する。

ことが予想されるが、これに関しては目下研究が進行中である⁴⁾。しかしながらこの方法は、非粘性流体を対象としているため渦の発生、消滅は表現できないのが最大の欠点である。

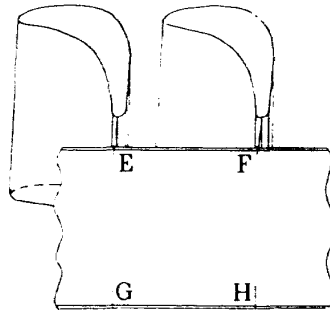
これまでの報告では、ただ一個の二次元渦が翼間に存在する場合のみが取り扱われてきた。本報告では、翼間のみならず、翼列の下流や一部が翼間に含まれるような領域に任意の数の渦が存在する場合も含めて従来の方法をより発展させる形で研究を進めた。したがって、馬蹄形渦(horseshoe vortex)なども対象にして計算を行うことができる。

モデルとして、任意の数の二次元渦が

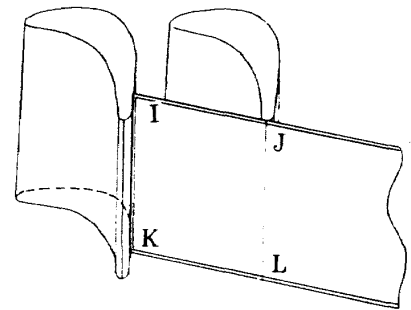
- i) 四方を壁に囲まれた領域内
- ii) 上下壁に囲まれたチャンネル内
- iii) 上下壁間の半無限領域内



i) 四方を壁に囲まれた領域



ii) 上下壁にはさまれたチャンネル領域



iii) 上下壁の間の半無限領域

図1 基本計算対象領域

2.1 四方を壁に囲まれた領域内の流れ(図2の二重枠の内部, A, B, C, Dは図1のA, B, C, Dに対応する)

四方を壁によって囲まれた領域内に渦がいくつか存在する場合に、その領域内の流れ場を求めるのに、いわゆる二重周期関数であるWeierstrassの楕円関数を利用する方法を考える。これは、翼間領域に渦が存在する場合の流れ場に相当する。

図2に示すようにCに原点をとり一つの基本周期平行四辺形内の

の三種類の限定された二次元領域内に存在している場合を考え、そのときに、渦によって誘起される流れの場を求めることを目的とする。

まず、2. 渦の配置と定式化、において基礎式の導出と方法の概念を示す計算結果を示し、3. 応用計算では渦の中心点の軌跡を描き二次流れの変化の様子をシミュレートする、そのための計算方法、および計算結果を報告する。なお、本報告では実験データとの対比は行っていない。

2. 渦の配置と定式化

渦の配置は渦の存在する計算対象領域の形状を決定するものである。渦のまわりの流れはすべて渦糸による複素速度ポテンシャルによって表わされ、これらの渦糸が制限された領域内で互いに干渉しあいながら流れの場を決定するものとする⁵⁾。基本計算対象領域を図1に示す。

点 (z_1, z_2, \dots, z_n) に強さ $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$ の渦
 点 $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)$ に強さ $(-\kappa_1, -\kappa_2, \dots, -\kappa_n)$ の渦
 点 $(-\bar{z}_1, -\bar{z}_2, \dots, -\bar{z}_n)$ に強さ $(-\kappa_1, -\kappa_2, \dots, -\kappa_n)$ の渦

点 $(-z_1, -z_2, \dots, -z_n)$ に強さ $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$ の渦を配置する。計算で求める流れは、図中の二重枠内の状態である。

ただし、

$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, \dots, z_n = x_n + iy_n$ とする。以下において、複素変数の上の $-$ は、共役

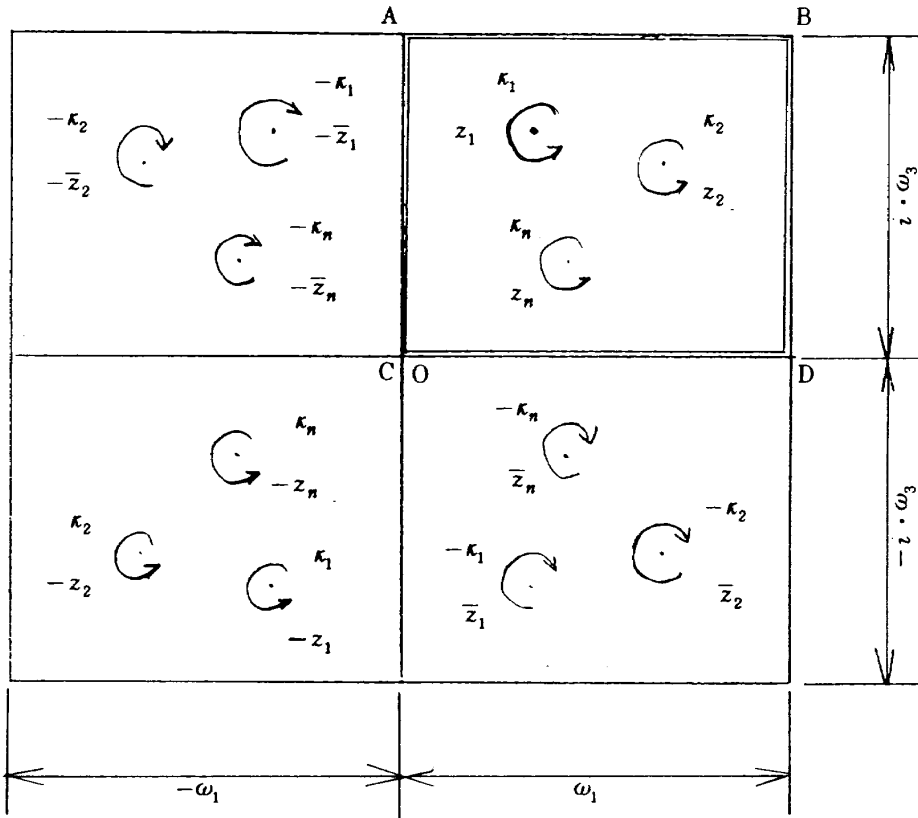


図2 基本周期平行四辺形（四方を壁に囲まれた領域）

複素変数を意味する。

このとき、複素速度ポテンシャル $f(z)$ は基本周期平行四辺形内で

$$\sum_{k=1}^n \frac{\kappa_k}{2\pi i} \log \frac{(z-z_k)(z+z_k)}{(z-\bar{z}_k)(z+\bar{z}_k)} \quad (1.1)$$

と同じ特異性をもつ二重周期関数で与えられ、次に示す σ 関数を使った楕円関数の対数で表示される。

(付録4. 参照)

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\kappa_k}{2\pi i} \log A_k \frac{\sigma(z-z_k)\sigma(z+z_k)}{\sigma(z-\bar{z}_k)\sigma(z+\bar{z}_k)} \quad (1.2)$$

ただし、 A_k は定数とする。

(1.2) 式を z について導関数を求めると、(付録の(3.1) 式を参照)

$$\begin{aligned} \frac{df(z)}{dz} &= \sum_{k=1}^n \frac{\kappa_k}{2\pi i} [\zeta(z-z_k) + \zeta(z+z_k) \\ &\quad - \zeta(z-\bar{z}_k) - \zeta(z+\bar{z}_k)] = u(x, y) \\ &\quad - i v(x, y) \end{aligned} \quad (1.3)$$

ここで、 $z_k, \bar{z}_k, -\bar{z}_k, -z_k$ についての定義式と ζ 関数の加法定理を使って実数部分と虚数部分に分解す

る(付録(2.10) 式, (2.7) 式, (2.9) 式, (1.14) 式と(1.15) 式, (1.16)' 式, (1.17)' 式を参照)と速度の x 成分と y 成分が得られる。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^n \frac{\kappa_k}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\bar{\wp}'(y-y_k)}{\wp(x-x_k) + \bar{\wp}(y-y_k)} \right. \\ &\quad - \frac{\bar{\wp}'(y+y_k)}{\wp(x+x_k) + \bar{\wp}(y+y_k)} \\ &\quad + \frac{\bar{\wp}'(y+y_k)}{\wp(x-x_k) + \bar{\wp}(y+y_k)} \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\wp}'(y-y_k)}{\wp(x+x_k) + \bar{\wp}(y-y_k)} \right\} \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \sum_{k=1}^n \frac{\kappa_k}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{\wp'(x-x_k)}{\wp(x-x_k) + \bar{\wp}(y-y_k)} \right. \\ &\quad + \frac{\wp'(x+x_k)}{\wp(x+x_k) + \bar{\wp}(y+y_k)} \\ &\quad - \frac{\wp'(x-x_k)}{\wp(x-x_k) + \bar{\wp}(y+y_k)} \\ &\quad \left. - \frac{\wp'(x+x_k)}{\wp(x+x_k) + \bar{\wp}(y-y_k)} \right\} \quad (1.5) \end{aligned}$$

ここに

$$\bar{f}(y) = f\left(y \middle| \frac{\omega_3}{i}, i\omega_1\right)$$

$$\bar{f}'(y) = f'\left(y \middle| \frac{\omega_3}{i}, i\omega_1\right)$$

を意味する。

渦が 1 個存在する場合の計算結果の一例を図 3 に示す。ただし、渦中心点近傍では、速度が大きすぎるためベクトルの表示は省略している。

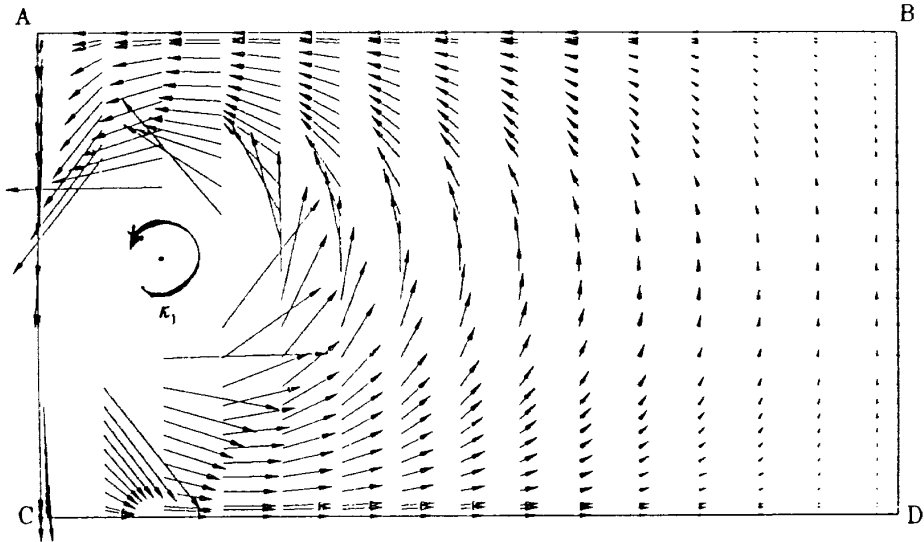


図 3 四方を壁に囲まれた領域内の渦による流れ

2.2 上下壁に囲まれたチャンネル内の流れ (図 4 の二重枠の内部, E, F, G, H は図 1 の E, F, G, H に対応する)

上下壁によってはさまれたチャンネル内にいくつかの渦が、水平方向 (x 軸方向) に周期的に配列さ

れていると考えられる場合に、基本周期平行四辺形として一つの矩形領域を考えることによって、このチャンネル内の流れの場を計算によって求めることができる。この場合も、いわゆる二重周期関数である Weierstrass の楕円関数を利用することができる。

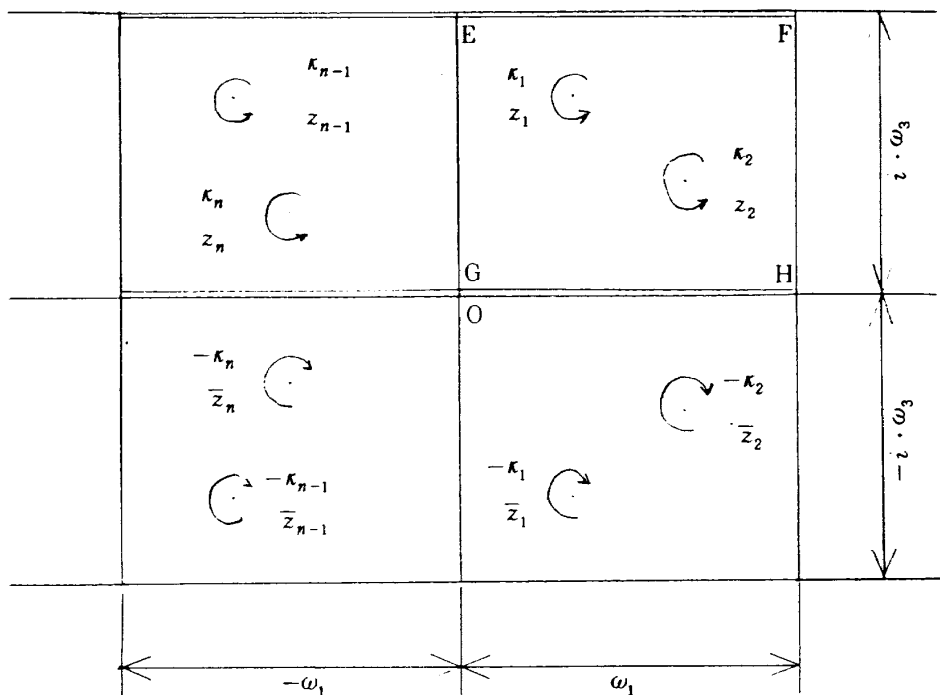


図 4 基本周期平行四辺形 (上下壁にはさまれたチャンネル領域)

これは、翼列の後流領域における流れの場に相当する。

図4に示すようにGに原点をとり、一つの基本周期平行四辺形内の

点 (z_1, z_2, \dots, z_n) に強さ $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$ の渦

点 (z_1, z_2, \dots, z_n) に強さ $(-\kappa_1, -\kappa_2, \dots, -\kappa_n)$ の渦を配列する。

このとき、複素速度ポテンシャル $f(z)$ は基本周期平行四辺形内で

$$\sum_{k=1}^n \frac{\kappa_k}{2\pi i} \log \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k} \quad (2.1)$$

と同じ特異性をもつ二重周期関数で与えられ、次に示す σ 関数を使った楕円関数の対数で表示される。

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\kappa_k}{2\pi i} \log B_k \frac{\sigma(z - z_k)}{\sigma(z - \bar{z}_k)} \quad (2.2)$$

ただし、 B_k は定数とする。

(2.2)式を z について導関数を求めると

$$\begin{aligned} \frac{df(z)}{dz} &= \sum_{k=1}^n \frac{\kappa_k}{2\pi i} [\zeta(z - z_k) - \zeta(z - \bar{z}_k)] \\ &= u(x, y) - i v(x, y) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで、まえと同様に、 z_k, \bar{z}_k についての定義式と ζ 関数の加法定理を使って実数部分と虚数部分に分解すると速度の x 成分と y 成分が得られる。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^n \frac{\kappa_k}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{-\bar{\wp}'(y - y_k)}{\wp(x - x_k) + \bar{\wp}(y - y_k)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\bar{\wp}'(y + y_k)}{\wp(x - x_k) + \bar{\wp}(y + y_k)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \zeta(y - y_k) + \zeta(y + y_k) \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \sum_{k=1}^n \frac{\kappa_k}{2\pi} \frac{\wp'(x - x_k)}{2} \times \\ &\quad \left[\frac{1}{\wp(x - x_k) + \bar{\wp}(y - y_k)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\wp(x - x_k) + \bar{\wp}(y + y_k)} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

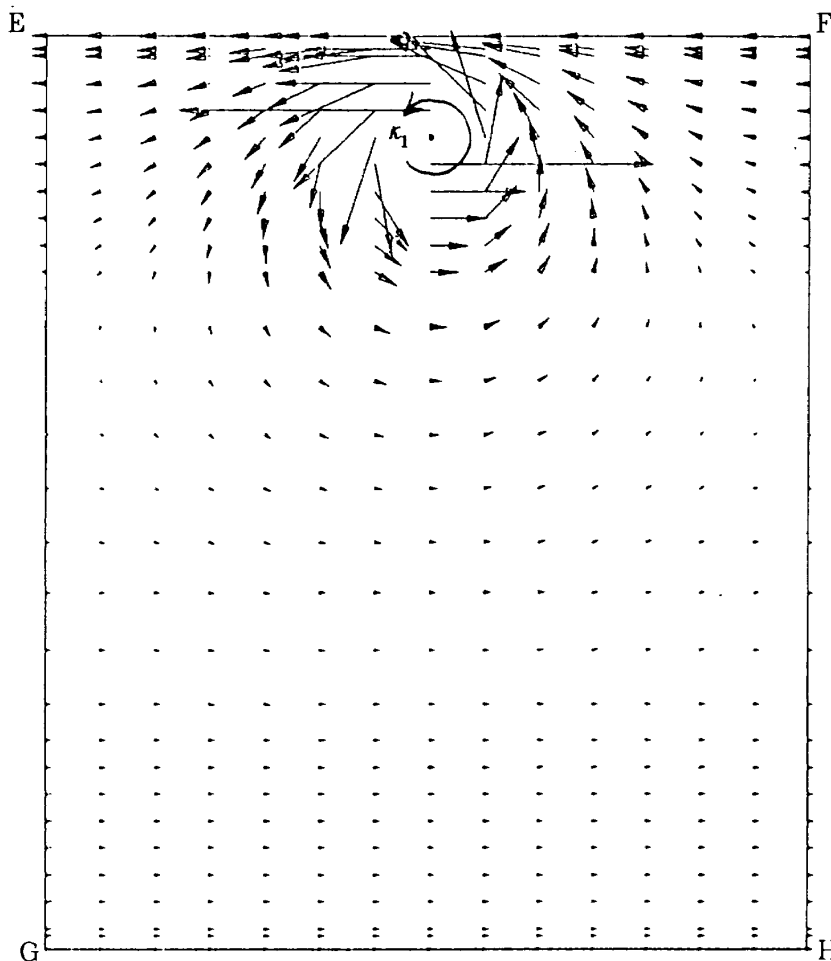


図5 チャンネル内の渦による流れ

を得る。ただし

$$\bar{\zeta}(y) = \zeta\left(y \middle| \frac{\omega_3}{i}, i\omega_1\right)$$

を意味する。

(2.4)式において、 ζ 関数の値は、 $y \pm y_k = 0.0$ の近傍では数値誤差が非常に大きくなり、その影響は流れ全体に及び、渦の形状にも歪みが生ずる。これは、渦による流れの場において、連続の式を満たすように修正を施すことによってかなり改良することができる。計算結果を図5に示す。

2.3 上下壁間の半無限領域内の流れ (図6の二重枠の内部, I, J, K, Lは図1のI, J, K, Lに対応する)

この場合、Kに原点をとり渦を、 x 軸方向に関しては、渦の回転方向、位置をとともに中心線(座標原点を中心とする y 軸)に関して対称的に配置する。 y 軸方向に関しては、帯状の基本周期領域が無限に繰り返して配置される。したがって、これまでのように二重周期関数である楕円関数を利用することはできない。これは、渦の存在する領域の一部が翼間に存在し、残りが翼間出口により後方にある場合の流れ場に相当する。

計算対象となる渦の配列は、図6に示すように、 y 軸方向には基本周期としては、

$$-i\omega_3 < y < i\omega_3$$

で、 x 軸方向には周期は存在せず、

$$-\nu \cdot X_\omega < x < \nu \cdot X_\omega, \text{ ただし } \nu = 1, 2, \dots,$$

とする。

ここで、 $\pm\nu$ は図6中の $(\pm\nu)$ 系列を意味する。渦の配列は必ず正と負の符号のついた系列が対で出現する。この場合基本周期平行四辺形は存在しない。

$(+\nu)$ 系列の速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f_k^{(+\nu)}(z) &= \frac{\kappa_k^{(+\nu)}}{2\pi i} \left[\log(z - z_k^{(+\nu)}) \right. \\ &+ \sum_{n=1} \log(z - (z_k^{(+\nu)} \pm i \cdot 2n\omega_3)) \\ &- \{ \log(z - \bar{z}_k^{(+\nu)}) + \sum_{n=1} \log(z - (\bar{z}_k^{(+\nu)} \\ &\pm i \cdot 2n\omega_3)) \} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$(-\nu)$ 系列の速度ポテンシャルは、

$$\begin{aligned} f_k^{(-\nu)}(z) &= \frac{-\kappa_k^{(-\nu)}}{2\pi i} \left[\log(z + \bar{z}_k^{(-\nu)}) \right. \\ &+ \sum_{n=1} \log(z + (z_k^{(-\nu)} \pm i \cdot 2n\omega_3)) \\ &- \{ \log(z + z_k^{(-\nu)}) + \sum_{n=1} \log(z + (z_k^{(-\nu)} \\ &\pm i \cdot 2n\omega_3)) \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

すなわち、複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=1} \frac{\kappa_k^{(+\nu)}}{2\pi i} \left\{ \log \prod_{n=-\infty}^{\infty} (z - z_k^{(+\nu)} + i \cdot 2n\omega_3) \right. \\ &- \log \prod_{n=-\infty}^{\infty} (z - \bar{z}_k^{(+\nu)} + i \cdot 2n\omega_3) \\ &- \log \prod_{n=-\infty}^{\infty} (z + \bar{z}_k^{(-\nu)} + i \cdot 2n\omega_3) \\ &\left. + \log \prod_{n=-\infty}^{\infty} (z + z_k^{(-\nu)} + i \cdot 2n\omega_3) \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

ただし、 k を基本領域内の点とするとき、

$$\begin{aligned} z_k^{(+\nu)} &= x_k^{(+\nu)} + i \cdot y_k^{(+\nu)}, \\ z_k^{(-\nu)} &= x_k^{(-\nu)} + i \cdot y_k^{(-\nu)} \end{aligned}$$

とし、また

$$|\kappa_k^{(+\nu)}| = |\kappa_k^{(-\nu)}|$$

とする。

x 方向、 y 方向の速度成分は、途中のやや面倒な計算を行った結果をまとめて記すと以下のように表わすことができる。

$$X_k^{(+\nu)} = \frac{x - x_k^{(+\nu)}}{\frac{\omega_3}{\pi}}, \quad Y_k^{(+\nu)} = \frac{y - y_k^{(+\nu)}}{\frac{\omega_3}{\pi}}$$

$$X_l^{(+\nu)} = \frac{x - x_l^{(+\nu)}}{\frac{\omega_3}{\pi}} \equiv X_k^{(+\nu)}, \quad Y_l^{(+\nu)} = \frac{y + y_k^{(+\nu)}}{\frac{\omega_3}{\pi}}$$

$$X_k^{(-\nu)} = \frac{x + x_k^{(-\nu)}}{\frac{\omega_3}{\pi}}, \quad Y_k^{(-\nu)} = \frac{y - y_k^{(+\nu)}}{\frac{\omega_3}{\pi}} \equiv Y_k^{(+\nu)}$$

$$X_l^{(-\nu)} = \frac{x + x_l^{(+\nu)}}{\frac{\omega_3}{\pi}} \equiv X_k^{(-\nu)},$$

$$Y_l^{(-\nu)} = \frac{y + y_l^{(+\nu)}}{\frac{\omega_3}{\pi}} = Y_l^{(+\nu)}$$

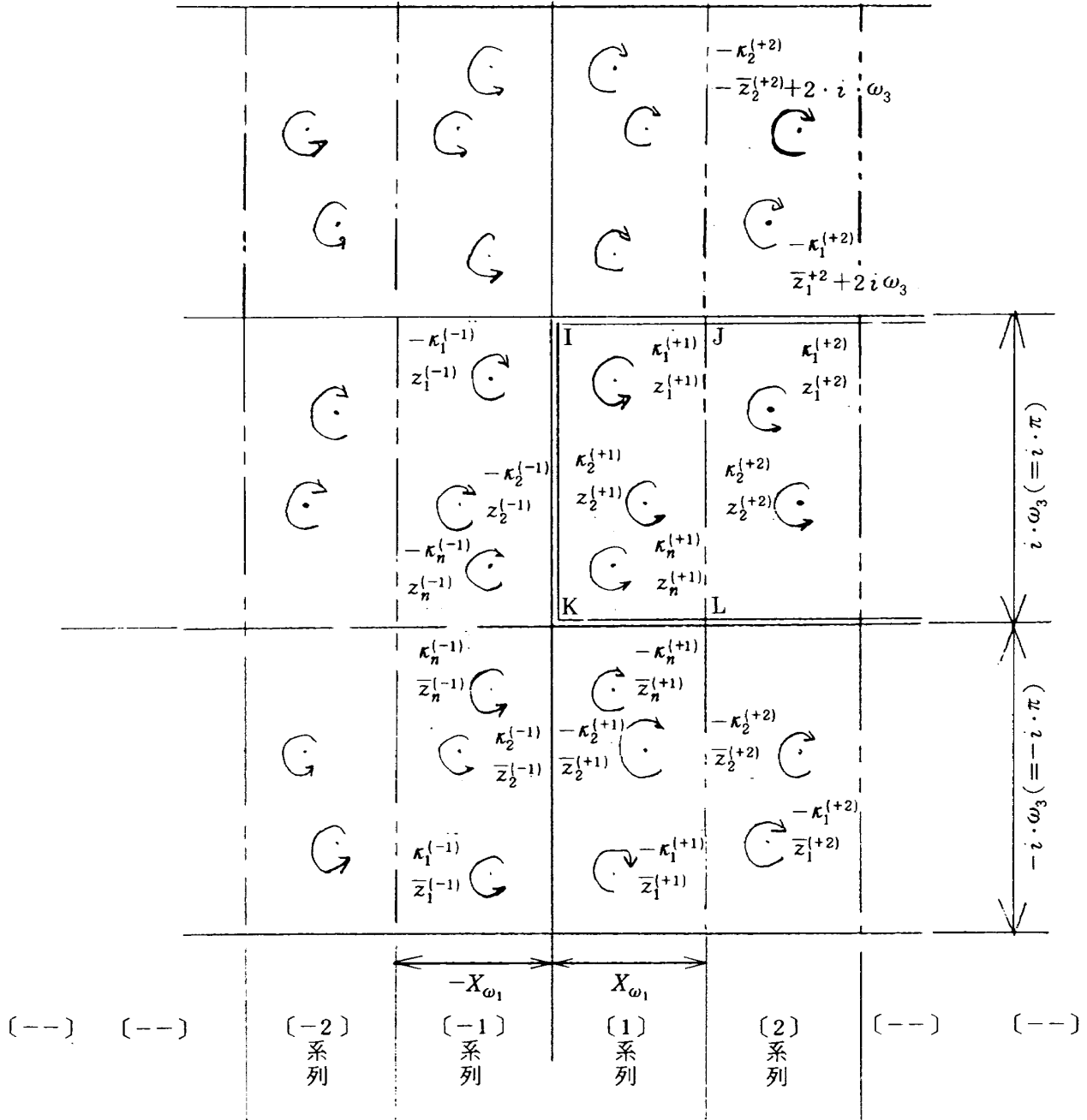


図6 一方向に周期的な渦の配置 (上下壁の間の半無限領域)

さらに

$$I_k^{(+\nu)} = \frac{\sin Y_k^{(+\nu)}}{\cos hX_k^{(+\nu)} - \cos Y_k^{(+\nu)}}$$

$$R_k^{(+\nu)} = \frac{\sin hX_k^{(+\nu)}}{\cos hX_k^{(+\nu)} - \cos Y_k^{(+\nu)}}$$

$$I_l^{(+\nu)} = \frac{\sin Y_l^{(+\nu)}}{\cos hX_l^{(+\nu)} - \cos Y_l^{(+\nu)}}$$

$$R_l^{(+\nu)} = \frac{\sin hX_l^{(+\nu)}}{\cos hX_l^{(+\nu)} - \cos Y_l^{(+\nu)}}$$

$$I_k^{(-\nu)} = \frac{\sin Y_k^{(-\nu)}}{\cos hX_k^{(-\nu)} - \cos Y_k^{(-\nu)}}$$

$$R_k^{(-\nu)} = \frac{\sin hX_k^{(-\nu)}}{\cos hX_k^{(-\nu)} - \cos Y_k^{(-\nu)}}$$

$$I_l^{(-\nu)} = \frac{\sin Y_l^{(-\nu)}}{\cos hX_l^{(-\nu)} - \cos Y_l^{(-\nu)}}$$

$$R_l^{(-\nu)} = \frac{\sin hX_l^{(-\nu)}}{\cos hX_l^{(-\nu)} - \cos Y_l^{(-\nu)}}$$

とするとき, x 方向, y 方向の速度成分 $u(x, y)$,

$v(x, y)$ は

$$u(x, y) = \frac{-\kappa_k^{(+\nu)}}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2\omega_3} \left\{ \sum_{k=1}^n (I_k^{(+\nu)} - I_k^{(-\nu)}) - \sum_{l=1}^n (R_l^{(+\nu)} - R_l^{(-\nu)}) \right\} \quad (3.4)$$

で与えられる。

計算結果を図7に示す。

$$v(x, y) = \frac{\kappa_k^{(+\nu)}}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2\omega_3} \left\{ \sum_{k=1}^n (R_k^{(+\nu)} - R_k^{(-\nu)}) \right\}$$

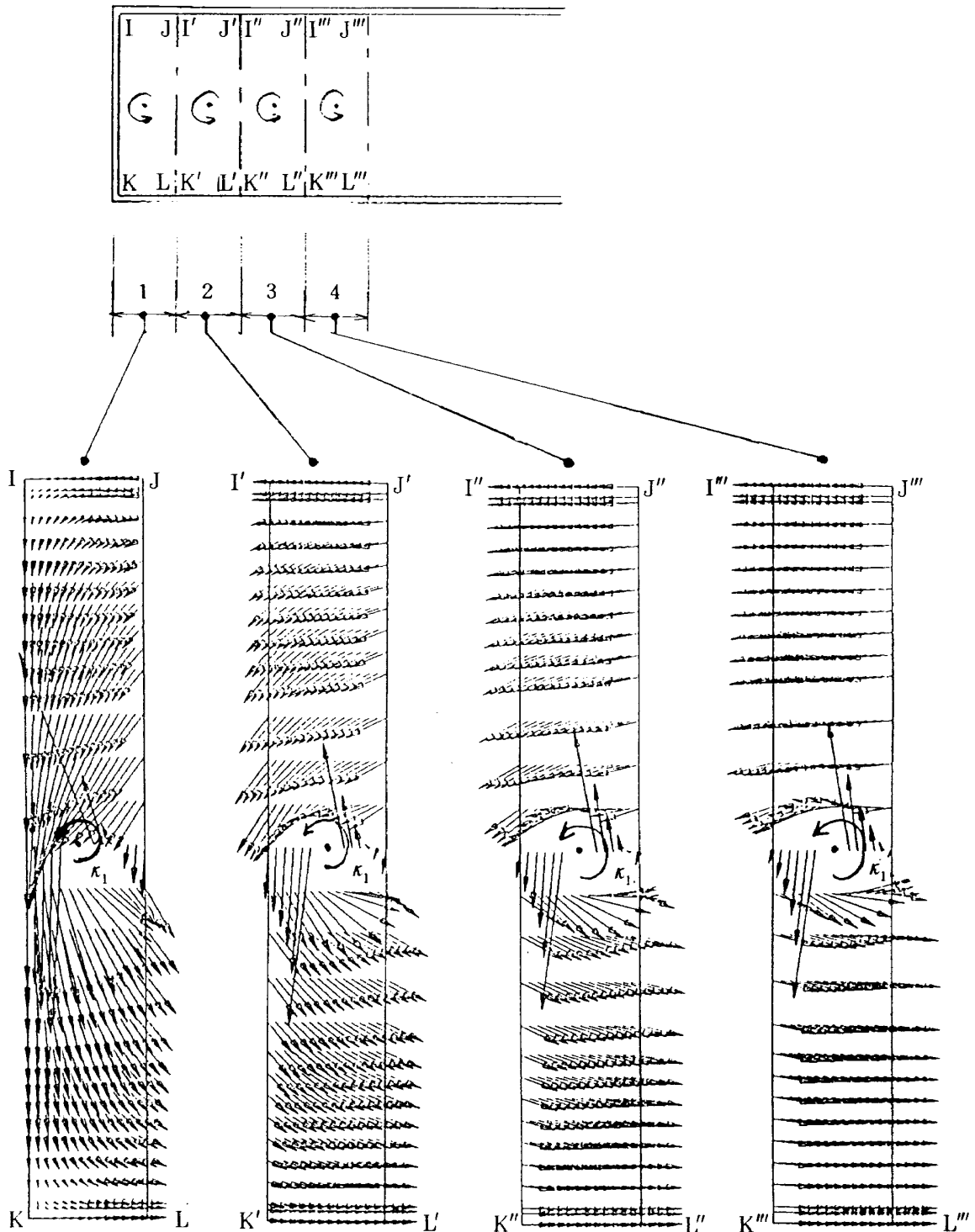


図7 半無限領域内の渦による流れ

3. 応用計算

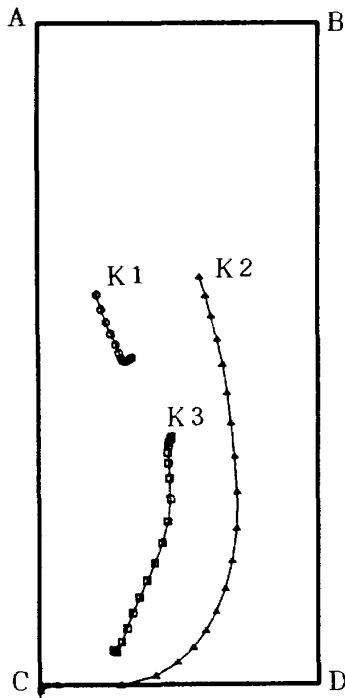
対象領域内に三つの渦が存在する場合について、渦相互の干渉により、それぞれの渦の中心がたどる軌跡を求めた。これは、渦が干渉しながら時間の経過とともに下流方向に流れていく様子を一つの領域内に表示したものと解釈できる。したがって軸方向の速度は現われていない。この計算方法を以下に述べる。

まず、領域内に存在するある一つの渦に注目する。その渦の中心点位置における他の二つの渦による速度ベクトルの和を求める。つぎに、ある短い時間を考えその間にその中心点が移動する距離を求めて渦の中心座標を新しく定める。この手続きをすべての渦について同時に行う。この作業を同じ時間間隔で必要なだけ繰り返す。また、すべての数値は無次元

化してあるものとする。なお、渦の回転方向は反時計回りを正方向とし、図8, 12, 16では渦名K1, K2, K3は渦の移動の始点の位置の近傍に記入した。

3.1 四方を壁に囲まれた領域内の流れ

図8に示すように四方を壁により制限された領域内に三つの渦K1, K2, K3が存在する。渦の強さは $\kappa_1 = -50.00$, $\kappa_2 = 35.75$, $\kappa_3 = -35.75$ で渦の中心点の移動時間間隔は $DT = 0.075$ である。K1渦は、最初K2渦の影響を強く受け、はじめ下方に移動するが、時間がたつとともにK2, K3渦がK1渦から遠く隔るためその影響は相殺されK1渦はほぼ停滞し、移動しなくなる。K2渦は同じ回転方向を有するK1, K3渦の合成により移動速度は一番大きく移動距離が最大になっている。K3渦はK2渦との接近により、相互に同程度ずつ影響しあいほぼ同一の軌跡をたどる。図9, 10, 11にそれぞれ渦の分布の初期状態, K2渦がつぶれてはいるが消滅はしていない中期状態, および最終状態の速度ベクトルを示す。



K1 = -50.000
 K2 = 35.750
 K3 = -35.750

K1 * DT = 3.75000
 K2 * DT = 2.68125
 K3 * DT = 2.68125

図8 四方を壁に囲まれた領域内の渦中心点の軌跡

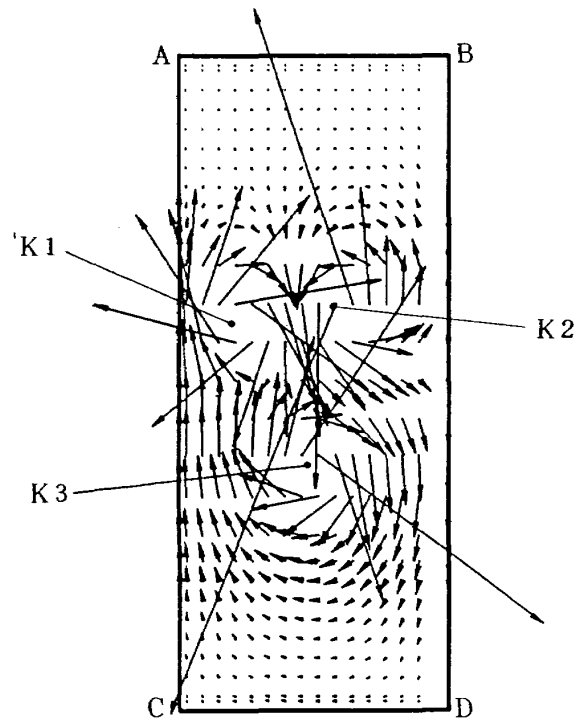


図9 四方を壁に囲まれた領域内の速度ベクトル（初期状態）

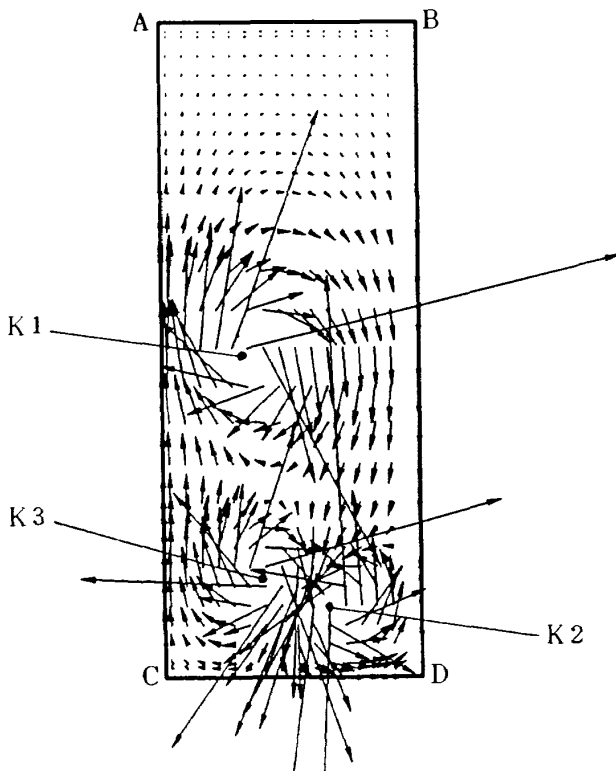


図 10 四方を壁に囲まれた領域内の速度ベクトル (中期状態)

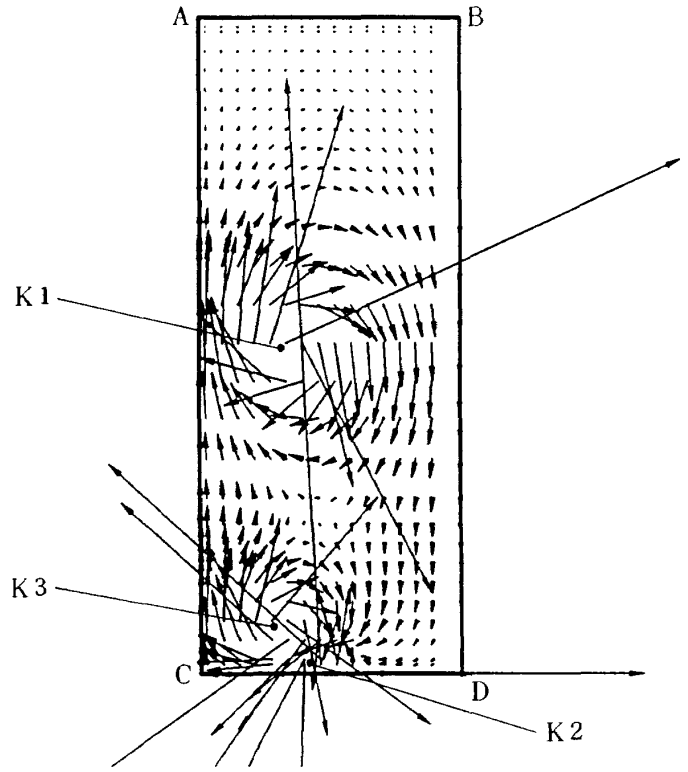
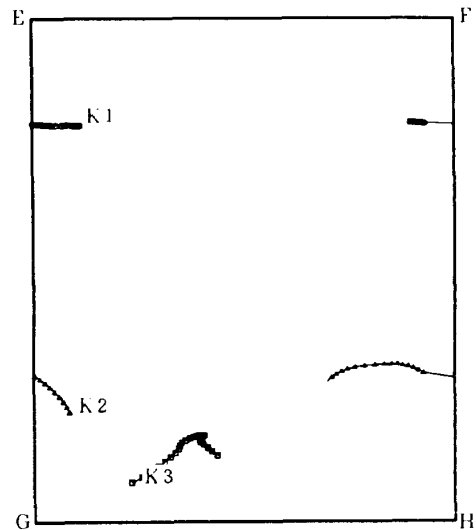


図 11 四方を壁に囲まれた領域内の速度ベクトル (最終状態)

3.2 上下壁に囲まれたチャンネル内の流れ

図 12 に三つの渦の中心点の軌跡を示す。この図は一つの基本周期平行四辺形を表わしたもので、同じ図形が左右方向に無限に繰り返される。渦の強さは $\kappa_1 = -50.50$, $\kappa_2 = 35.75$, $\kappa_3 = -35.75$, 渦中心の移動時間間隔は $DT = 0.100$ である。K2, K3 渦は互いに回転方向が逆であるが K2 渦の方が K1 渦に近いのでその影響力が強く出て、K1 渦は左方向に移動する。K2 渦は K3 渦よりも遠方に存在する K1 渦の影響をより強く受ける。それは K1 渦の強さが K3 渦にくらべてはるかに大きいからである。したがって、K2 渦は左方向に移動しこの領域より消え去るが同時に右方向から同じ大きさの渦度を持つ K2 が現われてくる。K3 は、K2 渦の影響を強く受け右方向へ移動し、やがて右辺から現われる K2 渦と強く干渉し合い突然その進行方向を変える。図 13 に初期状態の渦配置を示し、図 14 に K2 渦が右方向から再び現われた状態、図 15 は最終状態を示す。



- $K1 = -50.500$
- $K2 = 35.750$
- $K3 = -35.750$
- $K1 * DT = 5.05000$
- $K2 * DT = 3.57500$
- $K3 * DT = 3.57500$

図 12 チャンネル内の渦の中心点の軌跡

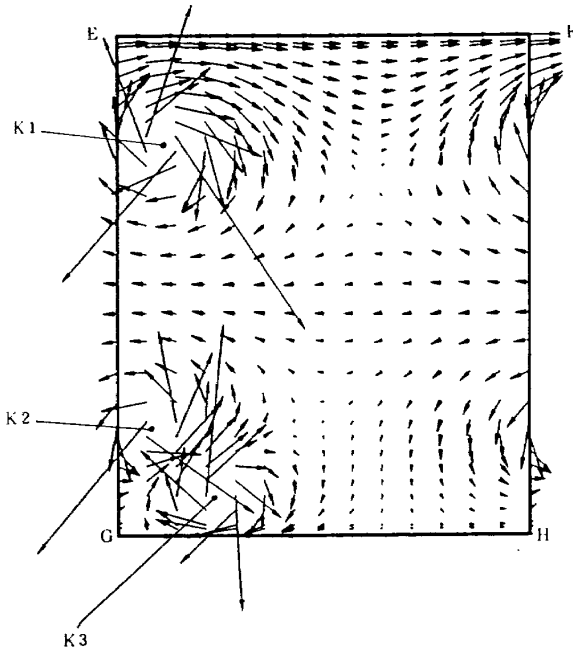


図13 チャンネル内の渦の速度ベクトル (初期状態)

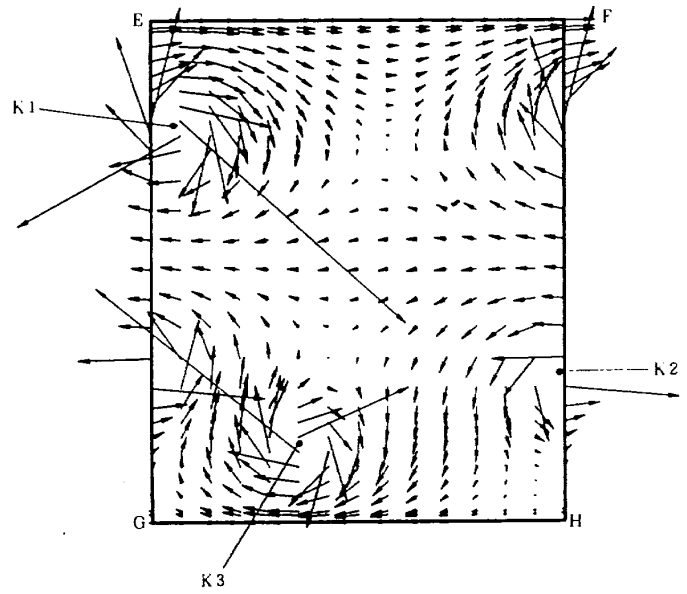


図14 チャンネル内の渦の速度ベクトル (中期状態)

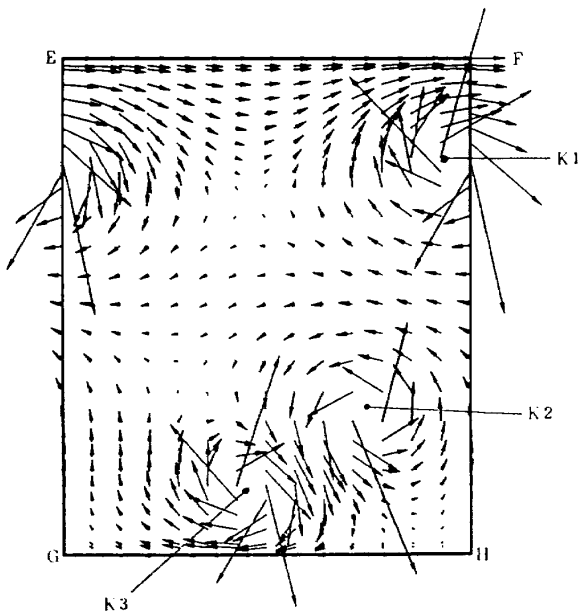


図15 チャンネル内の渦の速度ベクトル (最終状態)

3.3 上下壁間の半無限領域内の流れ

図16は、第一柵から第四柵までそれぞれの柵内に三つの渦K1, K2, K3が存在し、それらの渦の中心点の描く軌跡を示している。渦の強さは、K1渦はすべての柵において $\kappa_1 = -40.00$ である。K2渦は、第一柵では $\kappa_2 = 20.00$ であるが第二柵以後では前の柵の値の0.8倍ずつになっていて第四柵まで存在する。

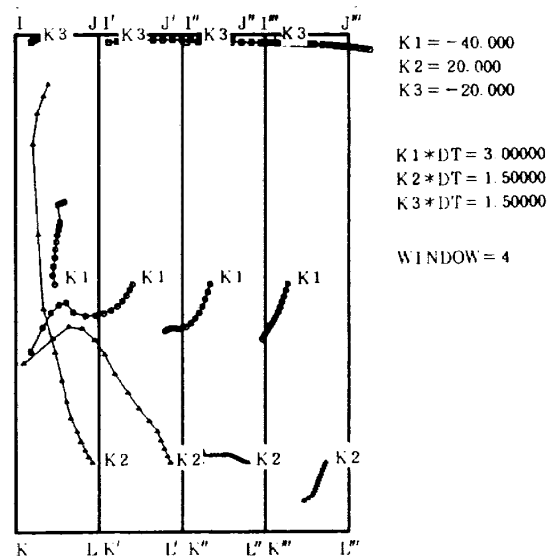


図16 半無限領域内の渦中心点の軌跡

K3渦は、第一柵では $\kappa_3 = -20.00$ であるが第二柵以後は前の柵の値の0.5倍ずつとなっており、同じく第四柵まで存在する。各渦はすべて同時に時間間隔 $DT = 0.075$ で移動させる。軌跡は時間の経過とともにかなり複雑な模様を描く。この場合、領域の周期性は考えないので渦が各々の柵から飛び出しても計算に異常は生じない。流れはK1渦の強さの和が最大になるので全体としては負の回転をする。しかし局所的には、各渦相互の干渉になり必ずしも負の回転をするとは限らない。特に、第一柵の左中

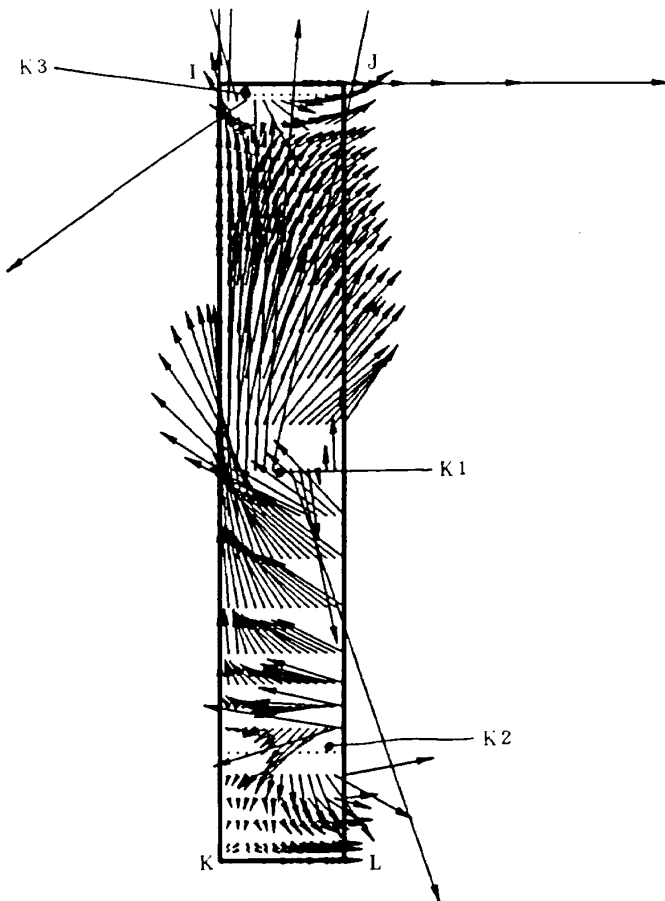


図 17 半無限領域内の速度ベクトル
(初期状態)

中央や下において第二枠のK1渦とK2渦が干渉し合い軌跡は全体の流れ方向には一致していない。図17, 18, 19は第一枠における渦の速度ベクトルを初期状態, また, 第二枠のK1渦が第一枠内に現われる中期状態, および最終状態を示した。

4. 結 び

Weirstrass の楕円関数を使い, 二次元の対象領域内に三つの二次元渦が存在する場合

- i) 四方を壁に囲まれた領域内の流れ
- ii) 上下壁に囲まれたチャンネル内の流れ
- iii) 上下壁間の半無限領域内の流れ

を計算した。

この結果, 本方法が三次元翼間流における二次流れによる渦干渉の現象を理解する一つ的手段として利用できることを示すことができた。

楕円関数は, 一般的には級数展開式により値を求める。楕円関数を使った種々の応用計算ではこの関数値を精度良く求めることが重要な事となる。現在

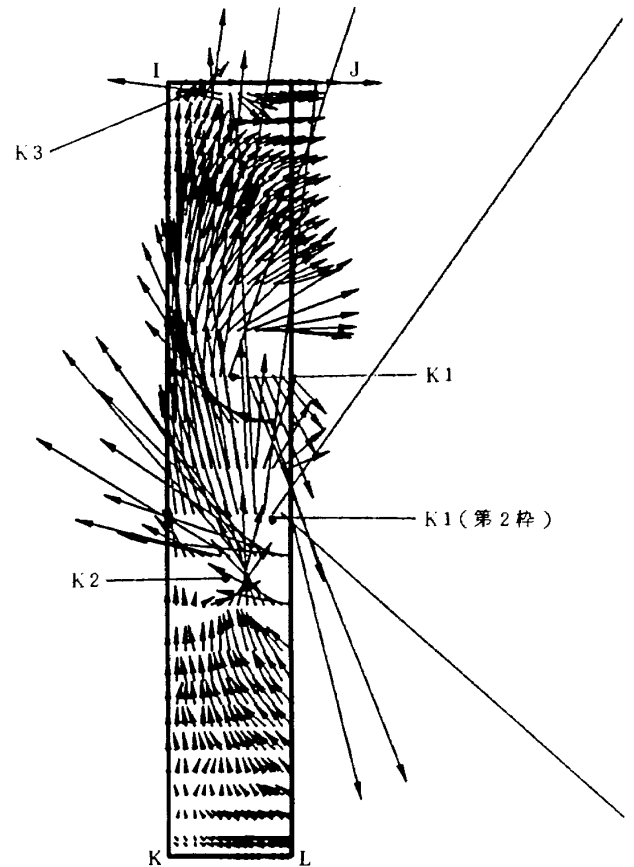


図 18 半無限領域内の速度ベクトル
(中期状態)

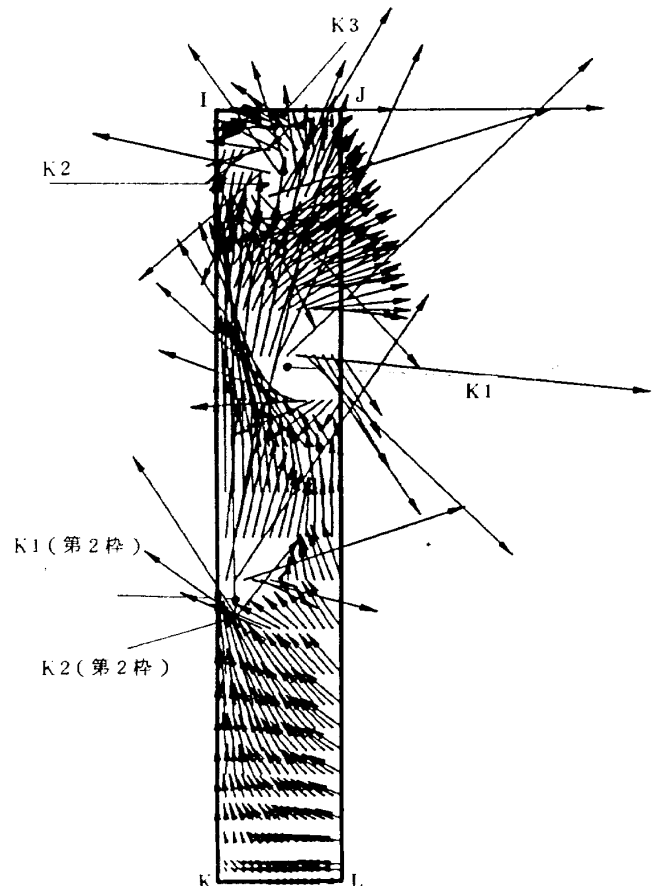


図 19 半無限領域内の速度ベクトル
(最終状態)

では、計算機の発達により多くの項を有する級数の和を求めることは容易ではあるが効率良く、精度の高い数値を得るために工夫をすることは必要であると思う。なお、本研究の遂行にあたっては、原動機部熱伝達研究室の山本孝正主任研究官から研究の内容について有益な助言を得たこと、また、ベクトル表示プログラムを借用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) A. Yamamoto and R. Yanagi; Production and Development of Secondary Flows and Losses within a Three-Dimensional Turbine Stator Cascade, 85-GT-217.
- 2) B. Lakshminarayana; Method of Predicting the Tip Clearance Effect in Axial Flow Turbomachinery, J. of Basic Engineering, Trans. ASME, Series D Vol. 92, No. 3, Sept. 1970, pp. 467-482.
- 3) 例えば
B. Lakshminarayana, N. Sitaram and J. Zhang; End-Wall and Profile Losses in a Low-Speed Axial Flow Compressor Rotor, 85-GT-174.
- 4) M. Inoue, M. Kuroumaru and M. Fukuhara; Behavior of Tip Leakage Flow behind an Axial Compressor Rotor, 85-GT-62.
- 5) S. Tomotika; On the Stability of Kármán Vortex Street in a Channel Flow of Finite Breadth 1, 航研報告(1929), 213(第48号)

付録 Weierstrass の楕円関数¹⁾²⁾³⁾⁴⁾1) \wp, \wp' 関数の性質とその数値計算法

\wp, \wp' 関数は、周期を $2\omega_1, 2\omega_3$ とするとき

$$\wp(z|\omega_1, \omega_3)$$

で表わす。 \wp 関数は、

- i) 第二位の楕円関数である、
- ii) 偶関数である。

このことは、定義式

$$\wp(z|\omega_1, \omega_3) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{(z - \Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \quad (1.1)$$

から明白である。ここに \sum' は、 $m=n=0$ の場合を除いた和の意味であり、

$$\Omega_{mn} = 2m \cdot \omega_1 + 2n \cdot \omega_3 \\ (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty)$$

である。

また、 $2\omega_1, 2\omega_3$ は一般には複素数で、それぞれ周期を表わし、

$$\text{Im}\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) > 0.0$$

とする。これは、添字は 1, 2, 3 と左回転方向を正として付けることを意味する。 Ω_{mn} は、 m, n について無限和をとるのであるから、 $\Omega_{mn} = -\Omega_{mn}$ が成立する。

また、 \wp 関数の導関数である \wp' 関数は

- i) 第三位の楕円関数である、
- ii) 奇関数

である。このことは、定義式

$$\wp'(z|\omega_1, \omega_3) = -2 \cdot \sum' \frac{1}{(z - \Omega_{mn})^3} \quad (1.2)$$

から明白である。

\wp 関数は z, ω_1, ω_3 について

- i) -2 次の同次関数

\wp' 関数は同じく

- i) -3 次の同次関数

である。それは

$$z \rightarrow \mu \cdot z \\ \omega_1 \rightarrow \mu \cdot \omega_1 \\ \omega_3 \rightarrow \mu \cdot \omega_3$$

とするとき、(1.1) 式から

$$\wp(\mu z|\mu\omega_1, \mu\omega_3) = \frac{1}{(\mu z)^2} \\ + \sum' \left\{ \frac{1}{(\mu z - \mu\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{(\mu \cdot \Omega_{mn})^2} \right\} \\ = \frac{1}{\mu^2} \cdot \wp(z|\omega_1, \omega_3) \quad (1.3)$$

また、(1.2) 式から

$$\wp'(\mu z|\mu\omega_1, \mu\omega_3) = -2 \cdot \sum' \frac{1}{(\mu z - \mu\Omega_{mn})^3} \\ = \frac{1}{\mu^3} \wp'(z|\omega_1, \omega_3) \quad (1.4)$$

によって証明できる。

ただし、

$$\Omega_{mn}(\mu\omega_1, \mu\omega_3) = \mu \cdot \Omega_{mn}(\omega_1, \omega_3)$$

を利用した。

1) \wp, \wp' 関数の数値計算法

\wp, \wp' 関数の級数展開式により、 \wp, \wp' 関数は

$$\wp(z|\omega_1, \omega_3) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots \quad (1.5)$$

$$\wp'(z|\omega_1, \omega_3) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2}{10} z + \frac{g_3}{7} z^3 + \dots \quad (1.6)$$

によって、 g_2, g_3 の有理式として表わされる。

ここに

$$g_2 = 60 \sum' \frac{1}{\Omega_{mn}^4} \quad (1.7)$$

$$g_3 = 140 \sum' \frac{1}{\Omega_{mn}^6} \quad (1.8)$$

である。

しかしながら、これらの直接展開式は計算誤差が大きくなりすぎる。通常は、 θ 関数を利用して計算する。この方法は収束が速く、しかも精度が高い。

$$\wp(z) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left\{ -4\eta_1\omega_1 + \frac{\pi^2}{\sin^2\left(\pi - \frac{z}{2\omega_1}\right)} \right. \\ \left. - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot q^{2n}}{1 - q^{2n}} \cos\left(\frac{n\pi}{\omega_1} z\right) \right\} \quad (1.9)$$

$$\wp'(z) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^3 \left\{ -\frac{2 \cos\left(\pi \frac{z}{2\omega_1}\right)}{\sin^3\left(\pi \frac{z}{2\omega_1}\right)} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin\left(\frac{n\pi}{\omega_1} z\right) \right\} \quad (1.10)$$

ただし

$$q = e^{\frac{\omega_3 \pi i}{\omega_1}}$$

である。

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1) = \frac{\pi^2}{\omega_1} \left(\frac{1}{12} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot q^{2n}}{1-q^{2n}} \right) \quad (1.11)$$

$$g_2 = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4 \left(\frac{1}{12} + 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot q^{2n}}{1-q^{2n}} \right) \quad (1.12)$$

$$(1.12)$$

$$g_3 = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot q^{2n}}{1-q^{2n}} \right) \quad (1.13)$$

□) \wp 関数が実変数と虚変数の場合 (ω_1 が実数, ω_3 が虚数の場合)

\wp と \wp' の同次の関係式 (1.3) および (1.4) を利用する。いま, $\mu = i$ (i ; 虚数単位) とおいて x を実数とする。

$$\wp(ix|i\omega_1, i\omega_3) = -\wp(x|\omega_1, \omega_3) \quad (1.14)$$

$$\wp'(ix|i\omega_1, i\omega_3) = i\wp'(x|\omega_1, \omega_3) \quad (1.15)$$

が成立する。

ところで, 虚変数 ix で二つの周期がそれぞれ $2\omega_1$, $2\omega_3$ の場合は

$$\begin{aligned} \wp(ix|\omega_1, \omega_3) &= \wp\left(ix|i(-i\omega_1), i\frac{\omega_3}{i}\right) \\ &= -\wp\left(x|-i\omega_1, \frac{\omega_3}{i}\right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

または $= -\wp\left(x|\frac{\omega_3}{i}, i\omega_1\right)$ (1.16)' である。

$$\begin{aligned} \wp'(ix|\omega_1, \omega_3) &= \wp'\left(ix|i(-i\omega_1), i\frac{\omega_3}{i}\right) \\ &= i\wp'\left(x|-i\omega_1, \frac{\omega_3}{i}\right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

または, $= i\wp'\left(x|\frac{\omega_3}{i}, i\omega_1\right)$ (1.17)' である。

ここで, (1.16) および (1.16)' ないしは (1.17), (1.17)' において

$$Im\left(\frac{\frac{\omega_3}{i}}{-i \cdot \omega_1}\right) = Im\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)$$

$$Im\left(\frac{i\omega_1}{\frac{\omega_3}{i}}\right) = Im\left(-\frac{\omega_1}{\omega_3}\right)$$

は, $Im\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)$ が正ならば, 正である。

これらの関係式から実変数のみの式を使って, 純虚数の \wp , \wp' 関数の値を求めることができる。そのときは g_2 関数はそのままであるが g_3 関数は

$$g_3 = 0.0 \quad (1.18)$$

となる。

最後に \wp 関数の加法定理を示す。

$$\wp(z+w) = \wp(z) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right\} \quad (1.19)$$

2) ζ 関数の性質とその数値計算法

いま, 習慣に従って複素変数 z , 擬似周期 $2\omega_1$, $2\omega_3$ とするとき, ζ 関数を $\zeta(z|\omega_1, \omega_3)$ で表わす。 ζ 関数は

i) 周期関数ではないけれども, その導関数は, 楕円関数である。すなわち

$$\frac{d\zeta(z|\omega_1, \omega_3)}{dz} = -\wp(z|\omega_1, \omega_3)$$

また,

ii) 奇関数

である。

複素変数 z , 周期 $2\omega_1$, $2\omega_3$ に関して

iii) -1 次の同次関数である。

証明は次のようにしてできる。

ζ 関数の一つの定義式として

$$\begin{aligned} \zeta(z|\omega_1, \omega_3) &= \frac{1}{z} + \sum' \left(\frac{1}{z - \varrho_{mn}} + \frac{1}{\varrho_{mn}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{\varrho_{mn}^3} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

を考える。 $\varrho_{mn} = -\varrho_{m,n}$ を考慮すると, 簡単に

$$\zeta(-z|\omega_1, \omega_3) = -\zeta(z|\omega_1, \omega_3) \quad (2.2)$$

なることがわかる。

同次性については、 $\zeta(z|\omega_1, \omega_3)$ において

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \mu z \\ \omega_1 &\rightarrow \mu\omega_1 \\ \omega_3 &\rightarrow \mu\omega_3 \end{aligned}$$

とすると、 $\Omega_{mn}(\mu\omega_1, \mu\omega_3) = \mu\Omega_{mn}(\omega_1, \omega_3)$ を考慮すると

$$\zeta(\mu z|\mu\omega_1, \mu\omega_3) = \frac{1}{\mu} \zeta(z|\omega_1, \omega_3) \quad (2.3)$$

を得る。

1) ζ 関数の数値計算法

ζ 関数は、 \wp 関数の積分であることから \wp 関数の級数展開式の積分によって求めることができる。すなわち

$$\begin{aligned} \zeta(z|\omega_1, \omega_3) &= \frac{1}{z} - \frac{g_2}{60} z^3 - \frac{g_3}{140} z^5 \\ &\quad - \frac{g_2^2}{8400} z^7 - \frac{g_2 \cdot g_3}{18480} z^9 - \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

しかしながら、これらの直接展開式も、 \wp 、 \wp' 関数と同様に計算誤差が大きすぎて実用に耐え得ない。ただし、これは展開式の項が9次の項までを考慮した場合である。通常は、 θ 関数を利用して計算する。この方法は非常に収束が速く、しかも精度が高い。

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{\eta_1 \cdot z}{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \cdot \frac{\theta_1'(\frac{z}{2\omega_1})}{\theta_1(\frac{z}{2\omega_1})} \\ &= \frac{\eta_1 \cdot z}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \cdot \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega_1}\right) \\ &\quad + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\omega_1} z\right) \end{aligned}$$

ただし、 $q = e^{\frac{\omega_3 \pi i}{\omega_1}}$ 、 $\theta_1(\frac{z}{2\omega_1})$ はデータ関数である。

ロ) ζ 関数の変数が実変数と虚変数の場合 (ω_1 が実数、 ω_3 が虚数の場合)

ζ の同次式の関係(2.3)を利用する。

いま、 $\mu = i$ (i ; 虚数単位) とおいて、 x を实数とすると

$$\zeta(ix|i\omega_1, i\omega_3) = -i\zeta(x|\omega_1, \omega_3) \quad (2.7)$$

が成立する。

ところで、虚変数 ix で二つの擬似周期がそれぞれ $2\omega_1, 2\omega_3$ の場合

$$\begin{aligned} \zeta(ix|\omega_1, \omega_3) &= \zeta\left(ix|i \cdot (-i\omega_1), i \cdot \frac{\omega_3}{i}\right) \\ &= -i\zeta\left(x|-i\omega_1, \frac{\omega_3}{i}\right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここで、 $Im\left(\frac{\omega_3}{i}/(-i\omega_1)\right) = Im\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)$ であるから正であるとする。

または

$$= -i\zeta\left(x|\frac{\omega_3}{i}, i\omega_1\right) \quad (2.9)$$

である。

ζ 関数の加法定理を示す。

$$\zeta(z+w) = \zeta(z) + \zeta(w) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \quad (2.10)$$

3) σ 関数

一つの定義式として、渦によるポテンシャル流れの計算に便利な関係式

$$\zeta(z|\omega_1, \omega_3) = \frac{d}{dz} \log \sigma(z|\omega_1, \omega_3) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \quad (3.1)$$

を利用する。

このとき、擬似周期を $2\omega_1, 2\omega_3$ とするとき

$$\sigma(z|\omega_1, \omega_3) = z \prod \left(1 - \frac{z}{\Omega_{mn}}\right) \cdot e^{\left(\frac{z}{\Omega_{mn}} + \frac{z^2}{2\Omega_{mn}^2}\right)} \quad (3.2)$$

である。ただし、 \prod は、 m, n が同時に零になる場合を乗積から除くことを意味する。

この関数は、有限な領域で正則な一価解析関数である。また、極は持たないで一価の零点を $z = \Omega_{mn}$ に持つ奇関数である。勿論、周期関数ではない。

$$\sigma(-z|\omega_1, \omega_3) = -\sigma(z|\omega_1, \omega_3) \quad (3.3)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma(z|\omega_1, \omega_3)}{z} = 1 \quad (3.4)$$

なる性質を有する。

4) 楕円関数の表示式

σ 関数の零点が明瞭であることから、零点の位数、極の位数が決まっている関数を作り出すことができる。例えば、基本周期平行四辺形内に、その位数だけ重複して記すとして、

点 a_1, a_2, \dots, a_n に極を持ち、

点 b_1, b_2, \dots, b_n に零点を持つ関数は、

$$\phi(z) = C a \cdot \frac{\prod_k \sigma(z - b_k)}{\prod_k \sigma(z - a_k)} \quad (4.1)$$

で表わされる。ただし $C a$ は定数とする。

ここで、 $\sum a_k = \sum b_k + \Omega$ が成立するものとする。ただし、 Ω は一つの周期とする。

そのとき

$$\phi(z + 2\omega_1) = \phi(z)$$

$$\phi(z + 2\omega_3) = \phi(z)$$

が成立するので $\phi(z)$ は楕円関数であることがわかる。また同じ点

(a_1, a_2, \dots, a_n) に極を持ち、

(b_1, b_2, \dots, b_n) に零点

を持つ別の関数 $\psi(z)$ が存在するとき、二つの関数の比 $\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$ は、Liouville の定理によりある定数に等しい。すなわち、

$$\phi(z) = C \cdot \psi(z)$$

の関係が成立する。

5) Weierstrass の楕円関数の計算の実際

楕円関数はその値を数値的に求めることが肝要である。現在では計算機の発達により極めて容易に多くの項を有する多項式の値を求めることができる。しかし、それでも精度の高い値を求めることはなかなか困難である。ここでは、 \wp, \wp', ζ 関数、および g_2, g_3 関数についてその収束過程と収束値を定義式の級数展開式から求めた場合と、 θ 関数を利用した無限級数展開式の和として求めた場合について比較する。ただし $\omega_1 = 1.0, \omega_3 = 3i$ とする。

イ)

\wp 関数の定義式の級数展開式 (1.5)

\wp' 関数の定義式の級数展開式 (1.6)

ζ 関数の定義式の級数展開式 (2.4)

ロ)

\wp 関数の θ 関数による無限級数展開式 (1.9)

\wp' 関数の θ 関数による無限級数展開式 (1.10)

ζ 関数の θ 関数による無限級数展開式 (2.5)

ハ)

g_2 関数の定義式の級数展開式 (1.7)

g_2 関数の θ 関数による無限級数展開式 (1.12)

ニ)

g_3 関数の定義式の級数展開式 (1.8)

g_3 関数の θ 関数による無限級数展開式 (1.13)

ただし、 g_2, g_3 は、(1.7), (1.8) 式では $m = n = -10$ から $+10$ までとした。

イ), ロ) の計算結果を図 A1, 図 A2 に示す。図 A2 においてプロットしたデータは、 θ 関数を 30 項までとったときの値である。図 A1 は、それぞれの関数の定義とはかなり異った性質を示しており矛盾していることによると思われる。両図を比較すると、 y が 1 以下では、 \wp, \wp', ζ ともに良く一致している。しかし y が 1 以上になると両者の相違は著しく大きくなる。したがって、もし、 y の値が 1 以下におさまるように変数域をとることができれば、どちらの式を使ってもほぼ同じような値を得ることができよう。そのためには、座標軸のとり方を変えるなどして $|\omega_3/\omega_1| < 1.0$ となるようにすれば良い。図に示した例では、 $|\omega_3/\omega_1| = 3$ であるが、 $|\omega_3/\omega_1| = 2$ の場合も同じ傾向を示した。なお、図 A2 の場合、 \wp, \wp', ζ の値は、 θ 関数の無限級数展開式の項数を 8 項までとると相対誤差を次式

$$\left| \frac{y - y_{30}}{y_{30}} \right|$$

で定義するとき 10^{-6} 以下になる。ただし、 y_{30} は、級数展開項を 30 項までとったときの各関数の値である。

ハ) と ニ) については、 g_2, g_3 ともに $m = n = -30 \sim +30$ にした場合と θ 関数を 30 項までとったときの値はほぼ一致する。定義式 (1.7), (1.8) 式では、 m, n を -10 から $+10$ 項までとると相対誤差は 10^{-5} 以下となる。 θ 関数を利用して計算した場合 (1.12),

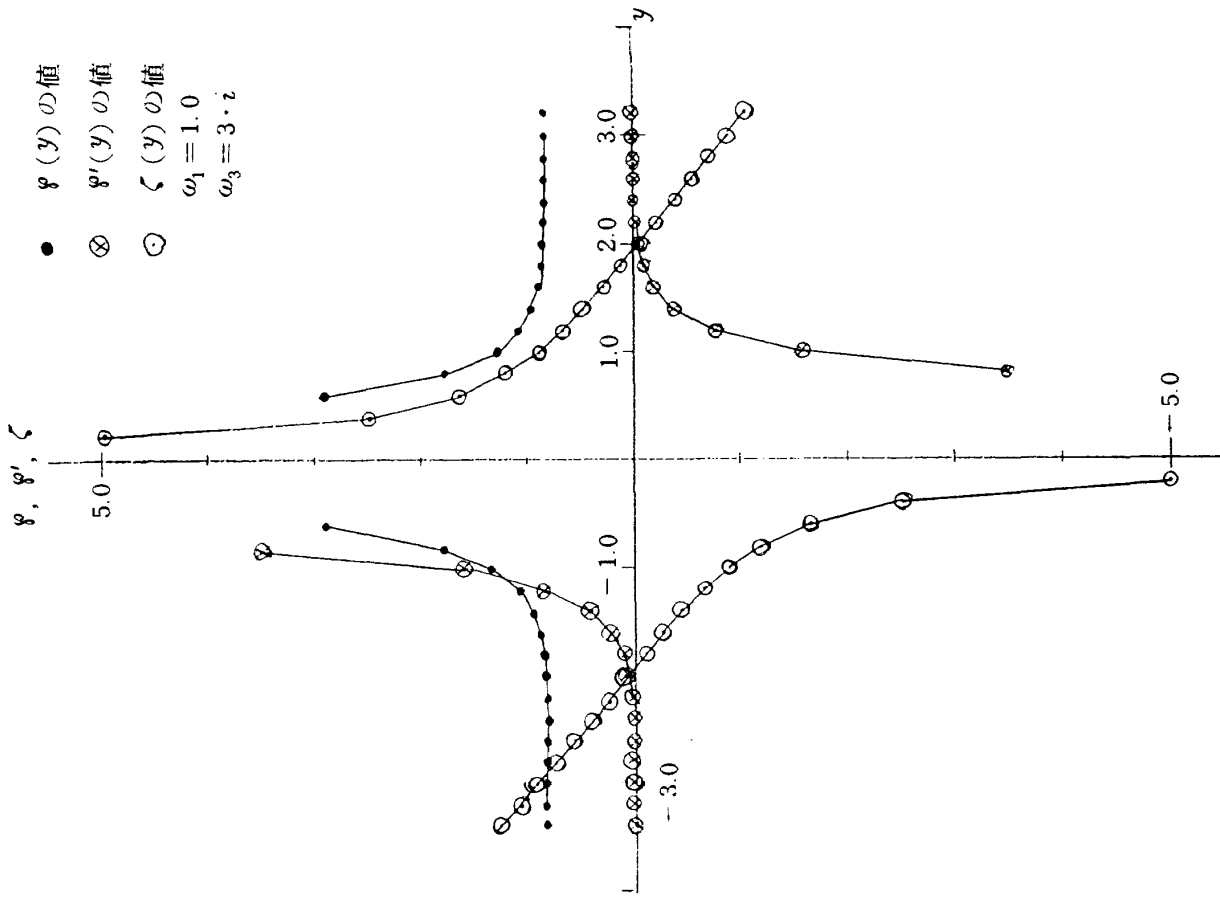


図 A2 Weierstrass の楕円関数
 (θ 関数表示式による)

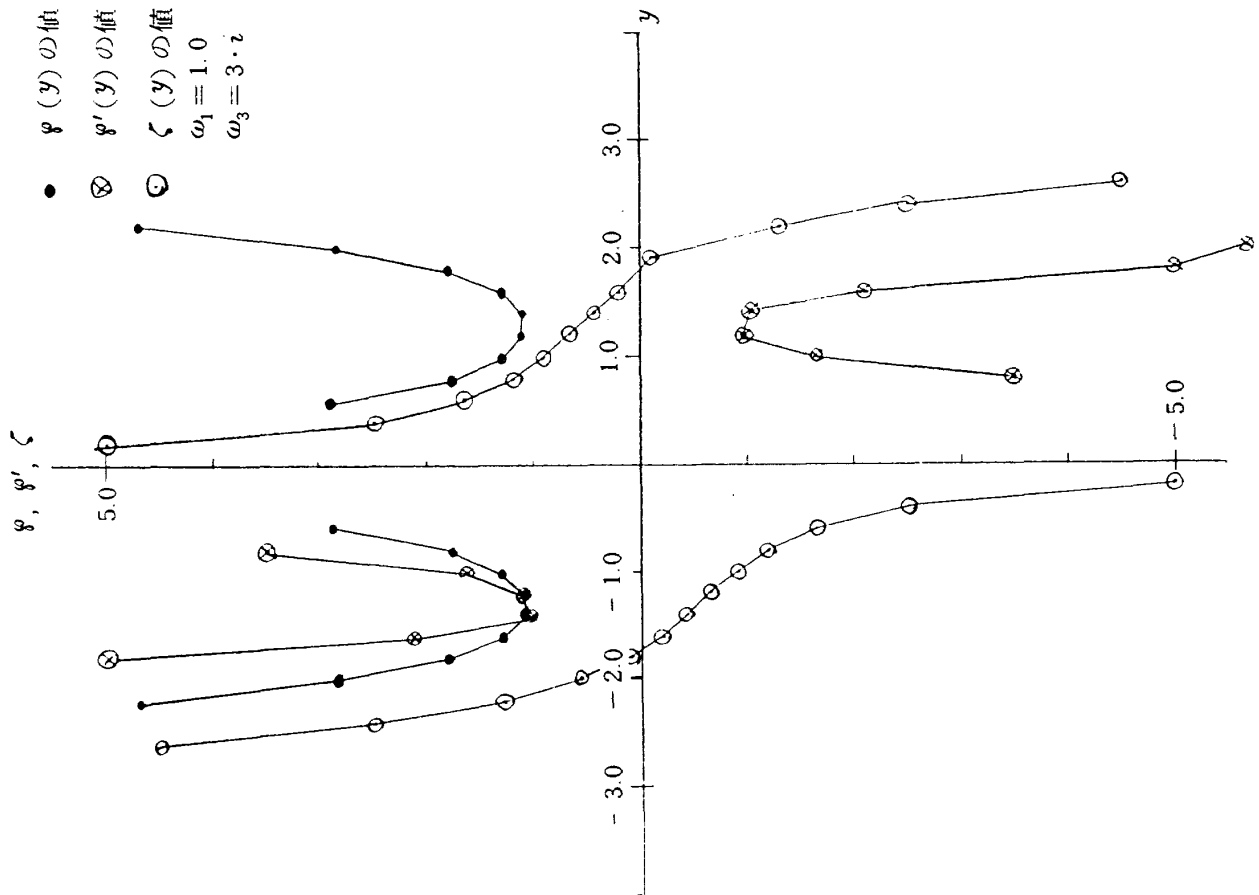


図 A1 Weierstrass の楕円関数
 (定義式の級数展開)

(1.13)式では、約10項で相対誤差は 10^{-6} 以下になる。

なお、本文中の各関数の値は、 θ 関数を30項までとり、 g_2, g_3 では10項まで利用した。

6. 参考文献

- 1) 竹内端三；函数論(下)，裳華房
- 2) 友近 晋；楕円函数論，河出書房
- 3) 戸田盛和；楕円関数論入門，日本評論社
- 4) A. Betz；Konforme Abbildung，Springer Verlag，1964

航空宇宙技術研究所報告 932号

昭和62年5月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川 2 - 27 - 12
