

ISSN 0389-4010
UDC 533.69.01
533.662.2

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-937

亜音速流中で振動する翼およびプロペラの理論
における無限遠の条件

市川輝雄

1987年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

亜音速流中で振動する翼およびプロペラの理論 における無限遠の条件*

市川 輝雄**

Conditions at Infinity for Theories of Oscillating Wings and Propellers in Subsonic Flow

Teruo ICHIKAWA

ABSTRACT

Conditions at infinity that should be satisfied by the acceleration potential of the flow field around oscillating wings or propellers in a uniform subsonic flow are given in simple forms. It is shown that the value of the integral on the boundary surface at infinity in Green's formula becomes zero by virtue of these conditions, if, in addition, reasonable conditions at infinity are assigned for the fundamental solution of the adjoint equation of the governing differential equation.

記号	
a	音速
i, j, k	x, y, z 軸方向の単位ベクトル
M	$= U/a$
n	Greenの公式における境界上の内向き法線単位ベクトル
r, θ, ϕ	x, y, z 座標に固定した扁球座標, 式(20)
$\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$	$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 座標に固定した球座標, 式(19)
r'	式(39)
R	式(2)
U	翼あるいはプロペラの前進速度
x, y, z, t	翼あるいはプロペラに固定した座標および時間, 式(17)あるいは(53)
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$	X, Y, Z, T から Lorentz 変換によって導かれる座標および時間, 式(15)
X, Y, Z, T	静止座標および時間
β	$= \sqrt{1 - M^2}$
ψ	Ψ の複素振幅

Ψ	加速度ポテンシャル
ω	円振動数
Ω	プロペラの回転角速度

1. ま え が き

亜音速流中で調和振動する任意平面形の薄翼に作用する揚力の分布を線形理論によって求める問題は、局所揚力と翼面上の吹上げとを関係付ける積分方程式に帰着させて解かれるのが一般である。これは Kuessner¹⁾、近藤²⁾が行ったように、静止座標系から Lorentz 変換によって得られる翼固定の仮想的な動座標系を用いて導くこともできるが、物理空間の座標系を用いても導くことが可能であり、かつ理解が容易である。

本論文では、物理空間の翼あるいはプロペラ固定の座標系において、加速度ポテンシャルが満足すべき無限遠の条件を明確な形で与える。さらに支配方程式の随伴方程式の基本特異解に対する無限遠の条件と、Greenの公式の無限遠境界上の積分との関係を明らかにする。これらの事柄は直進翼の場合でも従来まったくおろそかにされて来た。プロペラの理

* 昭和62年4月15日受付

** 機体第一部

論のように新たに定式化を行う場合³⁾に、これらを明らかにしておくことは重要なことである。本論文の主目的はプロペラの場合にあるが、まず準備として直進翼の場合を考察し、しかる後これをプロペラの場合に拡張する。

2. 無限遠の条件

空間に固定した座標系における座標および時間を X, Y, Z, T 、加速度ポテンシャルを Ψ 、音速を a とすると、 Ψ の支配方程式は波動方程式

$$\Delta_{XYZ} \Psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} = 0 \quad (1)$$

である。ここで Δ_{XYZ} は X, Y, Z 座標に関する Laplace 演算子を表す。 Ψ が、原点からの距離

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (2)$$

のみの関数であると考えたときの、式(1)の球対称な解の一般形は容易に見出される。そのような解の調和振動的なものは、 ω を円振動数、 A 、 B を定数として

$$\Psi = A \frac{e^{i\omega(T-R/a)}}{R} + B \frac{e^{i\omega(T+R/a)}}{R} \quad (3)$$

である。式(3)の第1項は、位相 $\omega(T-R/a)$ が一定である球面が、速度 a で外向きに伝播する“放射波”を表す。第2項は第1項と逆向きに伝播する“収束波”を表す。波源が有界な領域内のみが存在する外部境界値問題では収束波は除外されるから、以下では放射波のみを考える。すなわち

$$\Psi = A \frac{e^{i\omega(T-R/a)}}{R} \quad (4)$$

の形の解のみを考える。この解は原点を特異点とする。したがって集中した波源が原点にあるときの解である。

式(4)の Ψ は

$$\Psi = \psi e^{i\omega T} \quad (5)$$

と書くと、複素振幅 ψ は、 $R \rightarrow \infty$ のとき

$$R\psi : \text{有界} \quad (6)$$

$$R \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{i\omega}{a} \psi \right) \rightarrow 0 \quad (7)$$

の関係を満たす。式(7)は Sommerfeld の放射条件⁴⁾である。

式(6)、(7)は波源が原点に集中した球対称な解に対

して導かれたが、もっと一般の解に対してもこれらが成立することを示すことができる。非同次な波動方程式

$$\Delta_{XYZ} \Psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} = m(X, Y, Z, T) \quad (8)$$

の解で、初期条件

$$\Psi \Big|_{T=0} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial T} \Big|_{T=0} = 0 \quad (9)$$

を満足するものは、遅延ポテンシャル⁵⁾

$$\begin{aligned} \Psi(X, Y, Z, T) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{R^* \leq aT} \frac{m(X', Y', Z', T - R^*/a)}{R^*} \\ &\quad \times dX' dY' dZ' \end{aligned} \quad (10)$$

で与えられる。ここで

$$R^* = \sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2} \quad (11)$$

である。調和振動的な波源

$$m(X, Y, Z, T) = m_0(X, Y, Z) e^{i\omega T} \quad (12)$$

の場合、 m_0 は有界な領域 D の外では 0 であって、点 (X', Y', Z') は D 内にあるとすると、 aT が R^* の最大値より大きくなるような T に対して Ψ は調和振動的になって

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{e^{i\omega T}}{4\pi} \iiint_D m_0(X', Y', Z') \\ &\quad \times \frac{e^{-i\omega R^*/a}}{R^*} dX' dY' dZ' \end{aligned} \quad (13)$$

で与えられる⁵⁾。 D 内の点 (X', Y', Z') に対する R^* は、 $R \rightarrow \infty$ のとき $R^* \rightarrow R$ であるから、このとき式(13)は

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow -\frac{e^{i\omega(T-R/a)}}{4\pi R} \\ &\quad \times \iiint_D m_0(X', Y', Z') dX' dY' dZ' \end{aligned} \quad (14)$$

となって、複素振幅 ψ は式(6)、(7)を満足する。したがって式(6)、(7)は、波源が有界な領域内に静止しているとき、加速度ポテンシャルの複素振幅が満たすべき無限遠の条件である。

では、調和振動する翼が座標系 X, Y, Z に対して一定の垂音速速度で移動する場合はどうであろうか。この場合は、波源は翼面上のみであって、翼と共に静止空気に対して移動している。考えている静止点

における Ψ のいろいろな時間における値は、この時間に対応して波源のいろいろな位置における影響を受けるから、影響をおよぼす波源の位置は有界な領域内に留まらない。したがって式(6), (7)は成立しないと考えるべきであろう。しかしながら波源と共に動く座標系であって、 Ψ を支配する方程式が式(1)と同じ形になるように座標と時間を選ぶことができれば、この座標と時間に関して式(6), (7)と同じ形の条件が成立するであろう。実際これは Lorentz 変換によって可能である。翼は負の X 軸方向に一定の亜音速速度 U で前進しているとし、 X, Y, Z, T から Lorentz 変換

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{X + UT}{\beta} \\ \bar{y} &= Y \\ \bar{z} &= Z \\ \bar{t} &= \frac{T + MX/a}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

によって座標 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ と時間 \bar{t} を定義する。ここで $M = U/a$, $\beta = \sqrt{1 - M^2}$ である。この座標と時間に関する Ψ の支配方程式は、Laplace 演算子を $\Delta_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}$ で表して、式(1)と同じ形の

$$\Delta_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \Psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{t}^2} = 0 \quad (16)$$

があって、かつ波源はこの座標系に関して有界な領域内に静止している。すなわち $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ に関しては、調和振動する翼まわりの流れの加速度ポテンシャルの複素振幅に対する無限遠の条件は、式(6), (7)とまったく同じ形になる。

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ は仮想的な空間の座標および時間であるから、これらを用いているいろいろな解析を行うことは必ずしも便利でない。翼に固定した、物理空間の座標と時間を x, y, z, t とすると、 X, Y, Z, T との関係は Galilei 変換

$$\left. \begin{aligned} X &= x - Ut \\ Y &= y \\ Z &= z \\ T &= t \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

であって、この座標と時間に関する Ψ の支配方程式は、Laplace 演算子を Δ として

$$\Delta \Psi - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi = 0 \quad (18)$$

である。 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ から球座標 $\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$ を

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \bar{r} \cos \bar{\theta} \\ \bar{y} &= \bar{r} \sin \bar{\theta} \cos \bar{\phi} \\ \bar{z} &= \bar{r} \sin \bar{\theta} \sin \bar{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

によって定義し、 x, y, z から扁球座標 r, θ, ϕ を

$$\left. \begin{aligned} x &= \beta r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \cos \phi \\ z &= r \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

によって定義すると、 r, θ, ϕ, t と $\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}, \bar{t}$ の関係は、式(15), (17), (19), (20)によって

$$\left. \begin{aligned} r &= \bar{r} \\ \theta &= \bar{\theta} \\ \phi &= \bar{\phi} \\ t &= \frac{1}{\beta} \left(\bar{t} - \frac{M}{a} \bar{r} \cos \bar{\theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

とすることができる。

上の考察によって、 $\bar{r} \rightarrow \infty$ のとき、 Ψ に対して式(6), (7)に対応する条件

$$\bar{r} \Psi : \text{有界} \quad (22)$$

$$\bar{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{t}} \right) \rightarrow 0 \quad (23)$$

が満たされなければならない。

$$\Psi = \bar{\psi} e^{i\bar{\omega}\bar{t}} = \psi e^{i\omega t} \quad (24)$$

と書くと、式(21)によって

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \beta \bar{\omega} \\ \psi &= \bar{\psi} e^{i \frac{\omega M}{a \beta} r \cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

の関係がある。式(23)は、 r, θ, ϕ, t に関しては

$$r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1 - M \cos \theta}{a \beta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \rightarrow 0 \quad (26)$$

となる。式(24)~(26)と式(21)によって、 $r \rightarrow \infty$ のとき

$$r \psi : \text{有界} \quad (27)$$

$$r \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1 - M \cos \theta}{a \beta} (i \omega \psi) \right\} \rightarrow 0 \quad (28)$$

の関係が満たされねばならないことがわかる。式(27), (28)は翼に固定した、物理空間の座標と時間に関して、加速度ポテンシャルの複素振幅が満たすべき無限遠の条件である。

3. Green の公式

複素振幅 ψ に対して、式(18)の左辺は

$$L(\psi) \equiv \Delta\psi - \frac{1}{a^2} \left(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi \quad (29)$$

と書ける。式(29)の随伴偏微分式は

$$M(\tilde{\psi}) \equiv \Delta\tilde{\psi} - \frac{1}{a^2} \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{\psi} \quad (30)$$

の形である。 $\tilde{\psi}L(\psi) - \psi M(\tilde{\psi})$ を考えると、これはあるベクトルの発散に帰着する。すなわち

$$F(\psi, \tilde{\psi}) = \tilde{\psi} \left(\frac{i\omega}{U} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \psi \left(\frac{i\omega}{U} \tilde{\psi} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right) \quad (31)$$

とおき、 x 方向の単位ベクトルを \mathbf{i} とすると

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F\mathbf{i} &= \frac{\partial F}{\partial x} \\ &= \tilde{\psi} \left(\frac{i\omega}{U} + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi - \psi \left(\frac{i\omega}{U} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{\psi} \end{aligned} \quad (32)$$

となるから

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}L(\psi) - \psi M(\tilde{\psi}) \\ = \operatorname{div} (\tilde{\psi} \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \tilde{\psi} - M^2 F\mathbf{i}) \end{aligned} \quad (33)$$

である。ただし右辺の M は U/a である。

図1のように、内側境界面 S_1 と外側境界面 S_0 とに囲まれた体積範囲 V を考える。式(33)を V 全体にわたって積分して、Gauss の定理を適用すると、Green の公式

$$\begin{aligned} \iiint_V \{ \tilde{\psi}L(\psi) - \psi M(\tilde{\psi}) \} dV \\ = - \left\{ \iint_{S_1} + \iint_{S_0} \left(\tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} \right. \right. \\ \left. \left. - M^2 F\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \right) dS \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

が得られる。ここで \mathbf{n} は V の内部に向かう境界面の単位法線ベクトル、 $\partial/\partial n$ は \mathbf{n} の方向の微分を表す。 ψ 、 $\tilde{\psi}$ として、 V 内の点 (x, y, z) 、 (x_1, y_1, z_1) に対して

$$L(\psi) = 0 \quad (35)$$

$$M(\tilde{\psi}) = \delta(x-x_1) \delta(y-y_1) \delta(z-z_1) \quad (36)$$

となる解を採用する。ここで $\delta(x-x_1)$ 等はデルタ関数を表す。さらに S_1 は xy 平面内にあるとすると、

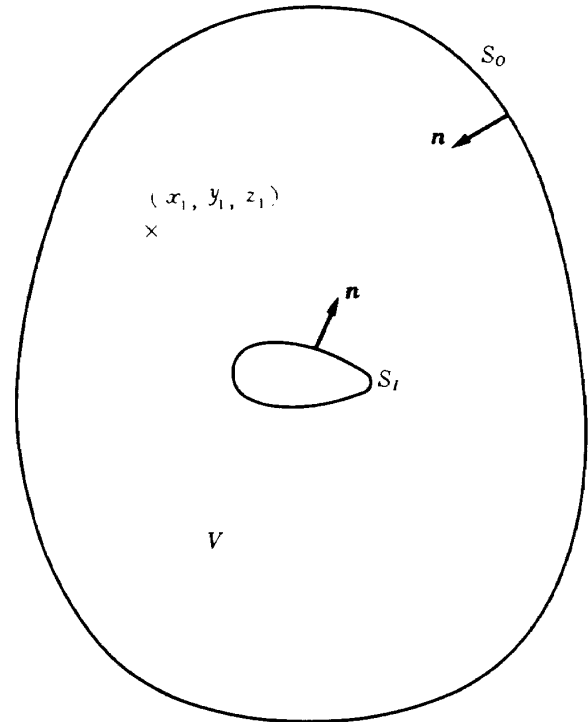


図1 体積範囲

式(34)は

$$\begin{aligned} \psi(x_1, y_1, z_1) &= \iint_{S_1} \left(\tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} \right) dS \\ &+ \iint_{S_0} \left(\tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} - M^2 F\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \right) dS \end{aligned} \quad (37)$$

となる。本論文での関心事は、 S_0 が無限に遠ざかるときのその上の積分の値であるから、 S_1 上の積分についてはこれ以上立入らない。

S_0 として、式(20)の扁球座標の r = 一定の曲面を採用する。これは扁平回転楕円面である。 S_0 上では

$$\mathbf{n} = \frac{-\operatorname{grad} r}{|\operatorname{grad} r|} = - \frac{(x/\beta^2) \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}}{r'} \quad (38)$$

ここで \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} は x 、 y 、 z 軸方向の単位ベクトルで、また

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{x^2/\beta^4 + y^2 + z^2} \\ &= \frac{r}{\beta} \sqrt{\cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (39)$$

である。式(38)によって

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = - \frac{1}{r'} \left(\frac{x}{\beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (40)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = - \frac{x/\beta^2}{r'} \quad (41)$$

また式(20)から

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (42)$$

であるから

$$\begin{aligned} & \tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} - M^2 F \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \\ &= \tilde{\psi} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial n} + M^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{i\omega}{U} \psi \right) \frac{x/\beta^2}{r'} \right\} \\ & - \psi \left\{ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} + M^2 \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - \frac{i\omega}{U} \tilde{\psi} \right) \frac{x/\beta^2}{r'} \right\} \\ &= -\frac{r}{r'} \left[\tilde{\psi} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{M \cos \theta}{a\beta} (i\omega \psi) \right\} \right. \\ & \left. - \psi \left\{ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + \frac{M \cos \theta}{a\beta} (i\omega \tilde{\psi}) \right\} \right] \quad (43) \end{aligned}$$

となる。

つぎに S_0 上の面積要素 dS を求める。 S_0 上で $\theta =$ 一定の曲線は、 $x =$ 一定の平面と S_0 との交線である円であって、その曲線要素を ds_ϕ とすると

$$ds_\phi = r \sin \theta d\phi \quad (44)$$

である。また $\phi =$ 一定の曲線は、 x 軸を通る平面と S_0 との交線である楕円であって、その曲線要素を ds_θ とすると

$$\begin{aligned} ds_\theta &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2} d\theta \\ &= r \sqrt{\beta^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \beta r' d\theta \quad (45) \end{aligned}$$

である。両曲線は直交するから

$$dS = ds_\phi ds_\theta = \beta r r' \sin \theta d\theta d\phi \quad (46)$$

となる。

式(43), (46)によって、式(37)の S_0 上の積分は

$$\begin{aligned} I_{S_0} &\equiv \iint_{S_0} \left(\tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} - M^2 F \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \right) dS \\ &= -\beta r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left[\tilde{\psi} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1-M \cos \theta}{a\beta} (i\omega \psi) \right\} - \psi \left\{ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1+M \cos \theta}{a\beta} (i\omega \tilde{\psi}) \right\} \right] \sin \theta d\theta \quad (47) \end{aligned}$$

となる。ただし式(43)の角括弧内の第1項に $(i\omega/a\beta) \times \psi \tilde{\psi}$ を加え、第2項からこれを減じてある。式(47)

において、 ψ は式(27), (28)の無限遠の条件を満足しなければならない。 $\tilde{\psi}$ については、 $r \rightarrow \infty$ のとき

$$r\tilde{\psi} : \text{有界} \quad (48)$$

$$r \left\{ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + \frac{1+M \cos \theta}{a\beta} (i\omega \tilde{\psi}) \right\} \rightarrow 0 \quad (49)$$

であることを要求することにしよう。これは可能である。それをつぎのように示すことができる。まず式(27), (28)は x, y, z 座標系において有界な領域内に波源が分布もしくは集中して存在する場合の条件である。つぎに演算子 $M(\cdot)$ は、 $L(\cdot)$ における U を $-U$ と置き換えて得られる。したがって式(36)を満足する $\tilde{\psi}$ を、向きを逆にした一様流の中に波源が点 (x_1, y_1, z_1) に集中して存在する場合の加速度ポテンシャルの複素振幅とみなすことができる。式(49)は式(28)における M を $-M$ と置き換えて得られるから、点 (x_1, y_1, z_1) が有界な領域内にあるとき、式(48), (49)の条件を満足する $\tilde{\psi}$ が存在する。式(27), (28), (48), (49)を用いると、 $r \rightarrow \infty$ のとき

$$I_{S_0} \rightarrow 0 \quad (50)$$

となる。このとき式(37)は

$$\psi(x_1, y_1, z_1) = \iint_{S_1} \left(\tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} \right) dS \quad (51)$$

となる。

最後に、式(51)で与えられる $\psi(x_1, y_1, z_1)$ が、点 (x_1, y_1, z_1) が無限に遠ざかるとき式(27), (28)の形の条件を満たすことを示すことが残っている。式(36)において $x - x_1 = \xi$, $y - y_1 = \eta$, $z - z_1 = \zeta$ とおくと、左辺の x, y, z による微分をそのまま ξ, η, ζ による微分に置き換えることができるから、 $\tilde{\psi}$ は ξ, η, ζ の関数である。したがって $\tilde{\psi}$ を x_1, y_1, z_1 の関数とみなすと、Laplace 演算子を $A_{(1)}$ と書いて、式(36)は

$$\begin{aligned} & A_{(1)} \psi - \frac{1}{a^2} \left(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \tilde{\psi} \\ &= \delta(x_1 - x) \delta(y_1 - y) \delta(z_1 - z) \quad (52) \end{aligned}$$

となり、この式の左辺は式(29)と同じ形である。式(48), (49)に関連して行った議論によって、点 (x_1, y_1, z_1) が有界な領域内にあるとき、 x, y, z の関数としての $\tilde{\psi}$ が式(48), (49)の無限遠の条件を満たすならば、逆に点 (x, y, z) が有界な領域内にあるとき、 $x_1, y_1,$

z_1 の関数としての $\bar{\psi}$ は式(27), (28)の形の無限遠の条件を満足することがわかる。式(51)の右辺の $\bar{\psi}$ と $\partial\bar{\psi}/\partial n (= \pm \partial\bar{\psi}/\partial z)$ に対してこの条件が満たされるから左辺に対してもそうである。

4. プロペラの場合

プロペラは負の X 軸方向に一定の超音速速度 U で前進し、 X 軸のまわりに背後から見て時計方向に一定角速度 Ω で回転しているとする。本節ではプロペラに固定した座標および時間を x, y, z, t とすると、 X, Y, Z, T との関係は、図 2 を参照して

$$\left. \begin{aligned} X &= x - Ut \\ Y &= y \cos \Omega t + z \sin \Omega t \\ Z &= -y \sin \Omega t + z \cos \Omega t \\ T &= t \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

である。 Ψ の支配方程式は、 X, Y, Z, T に関しては式(1), x, y, z, t に関しては、Laplace 演算子を Δ で表して

$$\Delta \Psi - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} - \Omega z \frac{\partial}{\partial y} + \Omega y \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \Psi = 0 \quad (54)$$

となる。

前進速度 U を用いて、 X, Y, Z, T から式(15)の Lorentz 変換によって定義される座標および時間を

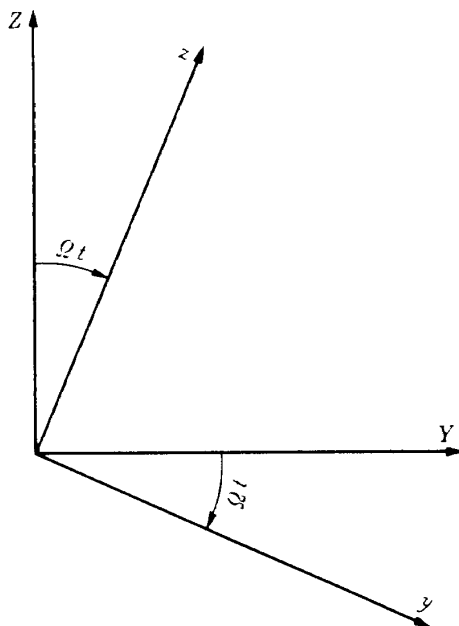


図 2 座標の回転

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ とすると、 Ψ の支配方程式はやはり式(16)である。プロペラの場合が直進翼の場合と異なるのは、波源がこの座標系に関して有界な領域内で回転運動することである。この場合にも式(22), (23)の無限遠の条件が成立することを示してみよう。円振動数 $\bar{\omega}$ で調和振動し、 \bar{x} 軸のまわりに角速度 $\bar{\Omega}$ で回転する波源分布は

$$m(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}, \bar{t}) = e^{i\bar{\omega}\bar{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\bar{r}, \bar{\theta}) \times e^{in(\bar{\phi} - \bar{\omega}\bar{t})} \quad (55)$$

の形に書くことができる。 m は $\bar{r} > \bar{r}_1$ のとき 0 であるとする、この波源分布による加速度ポテンシャルは式(13)によって、 \bar{t} が十分大きいとき

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}, \bar{t}) &= -\frac{e^{i\bar{\omega}\bar{t}}}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\bar{r}_1} (\bar{r}')^2 d\bar{r}' \int_0^\pi a_n(\bar{r}', \bar{\theta}') \\ &\times \sin \bar{\theta}' d\bar{\theta}' \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n\bar{\theta} - \bar{\omega})\bar{r}'/a} e^{in(\bar{\phi} - \bar{\omega}\bar{t})}}{\bar{r}^*} d\bar{\phi}' \end{aligned} \quad (56)$$

与えられる。ここで \bar{r}^* は点 $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$ と点 $(\bar{r}', \bar{\theta}', \bar{\phi}')$ の間の距離である。 $\bar{r}' < \bar{r}_1$ である \bar{r}' に対しては、 $\bar{r} \rightarrow \infty$ のとき $\bar{r}^* \rightarrow \bar{r}$ となるから、式(56)の $\bar{\phi}'$ に関する積分は $n=0$ の場合を除いて 0 となって

$$\begin{aligned} \Psi \rightarrow -\frac{e^{i\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{r}/a)}}{2\bar{r}} \int_0^{\bar{r}_1} (\bar{r}')^2 d\bar{r}' \\ \times \int_0^\pi a_0(\bar{r}', \bar{\theta}') \sin \bar{\theta}' d\bar{\theta}' \end{aligned} \quad (57)$$

である。したがって式(22), (23)の条件を満足する。

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ から式(19)によって球座標 $\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$ を定義し、 x, y, z から式(20)によって扁球座標 r, θ, ϕ を定義すると、 r, θ, ϕ, t と $\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}, \bar{t}$ の関係は、式(15), (53), (19), (20)によって

$$\left. \begin{aligned} r &= \bar{r} \\ \theta &= \bar{\theta} \\ \phi &= \bar{\phi} + \frac{\Omega}{\beta} \left(\bar{t} - \frac{M}{a} \bar{r} \cos \bar{\theta} \right) \\ t &= \frac{1}{\beta} \left(\bar{t} - \frac{M}{a} \bar{r} \cos \bar{\theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

とすることができる。 Ψ を式(24)のように書くと、や

はり式(25)の関係がある。式(23)を式(58)によって変換すると、 r, θ, ϕ, t に関しては

$$r \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1-M \cos \theta}{a\beta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right\} \rightarrow 0 \quad (59)$$

となる。式(24), (25), (58), (59)によって、 $r \rightarrow \infty$ のとき

$$r\psi : \text{有界} \quad (60)$$

$$r \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1-M \cos \theta}{a\beta} \left(i\omega\psi + \Omega \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right\} \rightarrow 0 \quad (61)$$

の関係が満たされなければならない。式(60), (61)はプロペラに固定した、物理空間の座標と時間に関して、加速度ポテンシャルの複素振幅が満たすべき無限遠の条件である。

つぎにGreenの公式に移る。複素振幅 ψ に対して、式(54)の左辺を

$$L(\psi) \equiv 4\psi - \frac{1}{a^2} \left(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x} - \Omega z \frac{\partial}{\partial y} + \Omega y \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \psi \quad (62)$$

と書く。式(62)の随伴偏微分式は

$$M(\tilde{\psi}) \equiv 4\tilde{\psi} - \frac{1}{a^2} \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x} + \Omega z \frac{\partial}{\partial y} - \Omega y \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \tilde{\psi} \quad (63)$$

の形である。 $L(\psi)$ と $M(\tilde{\psi})$ に対して

$$G(\psi, \tilde{\psi})$$

$$= \tilde{\psi} \left\{ \frac{i\omega}{U} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\Omega}{U} \left(z \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\}$$

$$+ \psi \left\{ \frac{i\omega}{U} \tilde{\psi} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + \frac{\Omega}{U} \left(z \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} - y \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \right) \right\} \quad (64)$$

を定義すると、直進翼の場合と同様にして、Greenの公式

$$\iiint_V \{ \tilde{\psi} L(\psi) - \psi M(\tilde{\psi}) \} dV$$

$$= - \left[\iint_{S_1} + \iint_{S_0} \left\{ \tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} - M^2 G \right. \right.$$

$$\left. \times \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{i} - \frac{\Omega}{U} z \mathbf{j} + \frac{\Omega}{U} y \mathbf{k} \right) \right\} dS \quad (65)$$

を得る。 $\psi, \tilde{\psi}$ として、 V 内の点 (x, y, z) , $(x_1,$

$y_1, z_1)$ に対する式(35), (36)の解を採用し、 V の内側境界面 S_1 は

$$\frac{\Omega}{U} x - \tan^{-1} \frac{z}{y} = \text{一定} \quad (66)$$

で表される螺旋面³⁾に沿っているとすると、式(65)は

$$\psi(x_1, y_1, z_1)$$

$$= \iint_{S_1} \left(\tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} \right) dS$$

$$+ \iint_{S_0} \left\{ \tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} - M^2 G \right.$$

$$\left. \times \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{i} - \frac{\Omega}{U} z \mathbf{j} + \frac{\Omega}{U} y \mathbf{k} \right) \right\} dS \quad (67)$$

となる。

V の外側境界面 S_0 として、 $r = \text{一定}$ の扁平回転楕円面を採用すると、 S_0 上で式(38)~(40), (42), (46)がそのまま成立する。また(38)によって

$$\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{i} - \frac{\Omega}{U} z \mathbf{j} + \frac{\Omega}{U} y \mathbf{k} \right) = - \frac{x}{\beta^2 r'} \quad (68)$$

となる。式(40), (42), (68), (64), (20)によって、 S_0 上では

$$\tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} - M^2 G \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{i} - \frac{\Omega}{U} z \mathbf{j} + \frac{\Omega}{U} y \mathbf{k} \right)$$

$$= - \frac{r}{r'} \left[\tilde{\psi} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{M \cos \theta}{a\beta} \left(i\omega\psi + \Omega \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right\} \right.$$

$$\left. - \psi \left\{ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + \frac{M \cos \theta}{a\beta} \left(i\omega\tilde{\psi} - \Omega \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \quad (69)$$

である。この式の角括弧内の第1項に $(i\omega/a\beta)\psi\tilde{\psi}$ を加え、第2項からこれを減じ、式(69)を用いると、式(67)の S_0 上の積分は

$$I_{S_0} \equiv \iint_{S_0} \left\{ \tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} \right.$$

$$\left. - M^2 G \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{i} - \frac{\Omega}{U} z \mathbf{j} + \frac{\Omega}{U} y \mathbf{k} \right) \right\} dS$$

$$= - \beta r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left[\tilde{\psi} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1-M \cos \theta}{a\beta} \left(i\omega\psi + \Omega \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right\}$$

$$\left. - \psi \left\{ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + \frac{1+M \cos \theta}{a\beta} \left(i\omega\tilde{\psi} - \Omega \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} \right) \right\} \right]$$

$$-\frac{\Omega}{a\beta} \left(\tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} \right)] \sin \theta d\theta \quad (70)$$

となる。上式において、 ψ は式(60, 61)の無限遠の条件を満足しなければならない。 $\tilde{\psi}$ については、演算子 $M(\)$ が、 $L(\)$ における U と Ω をそれぞれ $-U$ と $-\Omega$ に置き換えて得られることから、 $r \rightarrow \infty$ のとき

$$r\tilde{\psi} : \text{有界} \quad (71)$$

$$r \left\{ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + \frac{1+M \cos \theta}{a\beta} \left(i\omega \tilde{\psi} - \Omega \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} \right) \right\} \rightarrow 0$$

(72)

であることを要求する。また式(70)の角括弧内の最後の項に関しては

$$\int_0^{2\pi} \left(\tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} \right) d\phi = 0 \quad (73)$$

である。式(60, 61, (71)~(73))によって、 $r \rightarrow \infty$ のとき

$$I_{S_0} \rightarrow 0 \quad (74)$$

となる。このとき式(67)の左辺の $\psi(x_1, y_1, z_1)$ は、点 (x_1, y_1, z_1) が無限に遠ざかるとき式(60, 61)の形の条件を満たすことを、直進翼の場合と同様にして容易に示すことができる。

5. む す び

亜音速流中で調和振動する翼あるいはプロペラのまわりの流れの加速度ポテンシャルが満足すべき無限遠の条件と、Greenの公式の無限遠境界上の積分について考察した。加速度ポテンシャルが満たすべき無限遠の条件を、翼あるいはプロペラに固定した扁球座標を用いて、簡単な形で与えた。Greenの公

式の無限遠境界として、扁平回転楕円面を採用し、支配方程式の随伴方程式の基本特異解に対して合理的な無限遠条件を課すと、無限遠境界上の積分が零となることを示した。さらにこのとき、Greenの公式で与えられる流れ場の加速度ポテンシャルが、実際に上記の無限遠条件を満足することを示した。これらの結果は、調和振動する翼あるいはプロペラに関する新しい定式化を誤りなく行うために役立つであろう。

引 用 文 献

- 1) Kuessner, H. G. : Allgemeine Tragflaechentheorie, Luftfahrtforschung, Vol.17, No. 11/12, 1940, pp.370-378.
- 2) 近藤一夫：翼およびプロペラの理論における圧縮性流体の小変歪問題について，九州帝国大学工学部彙報，第17巻，第4号，1942, pp. 195-226.
- 3) 市川輝雄：圧縮流中で振動するプロペラの揚力面理論，（航空宇宙技術研究所報告として刊行の予定）。
- 4) Sommerfeld, A. : Partial Differential Equations in Physics, Academic Press, 1949, pp.188-190.
- 5) コシリヤコフ，グリニエル，スミルノフ：物理・工学における偏微分方程式，上巻，岩波書店，1974, pp.107-110.

航空宇宙技術研究所報告 937号

昭和62年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社三興印刷
東京都新宿区信濃町12三河ビル
