

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-943

圧縮流中で振動するプロペラの揚力面理論

市川輝雄

1987年8月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

圧縮流中で振動するプロペラの揚力面理論*

市川輝雄**

Lifting-Surface Theory of Oscillating Propellers in Compressible Flow

Teruo ICHIKAWA

ABSTRACT

In this paper, linear simultaneous integral equations are derived for computing aerodynamic loadings of oscillating propellers in a compressible flow. It is shown that the integral over the boundary surface at infinity in Green's formula vanishes by virtue of conditions at infinity which must be satisfied by the acceleration potential and the fundamental solution of the adjoint governing-equation. A study is also made on the "Mach cone" in supersonic sections regarded as a characteristic surface belonging to the steady-case governing differential equation. This makes it possible to distinguish subsonic and supersonic trailing edges.

記号

a_∞ : 静止空気中の音速
 B : 式 (7. 17)
 h : $= U/\Omega$
 $H(T)$: 式 (7. 25a)
 M : U/a_∞ , 前進速度の Mach 数
 n_{Bm}, \bar{n}_{Bm} : プロペラ翼面の \mathbf{n}_H 方向の変位およびその複素振幅
 \mathbf{n}_H : 基準螺旋面の法線単位ベクトル
 N : プロペラ翼の枚数
 p, p_∞ : 圧力および静止空気の圧力
 p_1 : $p - p_\infty$
 r, θ : プロペラに固定した円柱座標, 式 (2. 11)
 s_ν, s_τ : 式 (7. 25b)

S_{Hm} : プロペラ翼面の基準螺旋面上への射影
 t : 時間
 T : 式 (7. 25), (7. 31)
 U : プロペラの前進速度
 w_m : 運動学的吹上げの複素振幅, 式 (7. 5)
 x, y, z : プロペラに固定した直交座標
 β : $= \sqrt{1 - M^2}$
 r_1, r_2 : 式 (7. 19), (7. 20)
 θ_m : $= 2m\pi/N$
 μ : $= r/h$
 ν : $= \omega/\Omega = h\omega/U$, 無次元振動数
 ξ : $= x/h$
 ρ, ρ_∞ : 密度および静止空気の密度
 ρ_1 : $\rho - \rho_\infty$
 σ, τ : 螺旋座標, 式 (3. 6)
 σ_{Bm} : 基準螺旋面からのプロペラ翼の変位による座標 σ の変化, 式 (3. 10)
 Φ, ϕ : じょう乱速度ポテンシャルおよびその複素振幅

* 昭和162年4月15日受付
** 機体第一部

- Ψ, ϕ : 加速度ポテンシャルおよびその複素振幅
 ϕ_s : 随伴方程式の基本特異解, 式 (5. 15)
 $4\phi_l$: プロペラ翼上下面の加速度ポテンシャルの差, 式 (7. 9)
 ω : 円振動数
 Ω : プロペラの回転角速度

1. ま え が き

近年各国で開発あるいは研究が進められている高速プロペラは, その動作条件や形状が従来のプロペラとは著しく相異しているから, いろいろな問題についての詳細な検討が要求される。空力弾性問題もその一つであって, これにはプロペラ翼の曲げ振りフラッタ, プロペラ・ナセル系のワール・フラッタ, 一様でない流れ中で動作するとき生じる振動荷重などが含まれるであろう。本論文ではこれらの問題の解析に必要な調和振動するプロペラに作用する空気力学的荷重を, 線形理論の範囲内で算定するための揚力面理論の定式化を行う。もちろんこれを定常プロペラの場合に適用して, 性能計算などを行うこともできるであろう。

直進翼の揚力面理論は, 翼の上下面の圧力差を未知関数とする積分方程式¹⁾の形に導くのが一般であって, プロペラの場合もこの手法を踏襲することができる。読者は本論文での定式化がかなり念入りなものであるという印象を持たれるかも知れない。たとえばプロペラに固定した動座標系に関する運動方程式および連続の方程式などから出発して加速度ポテンシャルの支配方程式を導くこと, あるいは加速度ポテンシャルの満たすべき無限遠の条件や, Green の公式の無限遠境界上の積分をおろそかにしないことなどである。また螺旋速度(前進速度と円周速度の合速度)が超音速となる範囲での Mach 円錐についての考察を行う。このような丁寧な取扱いは, それだけ理解を深め, 誤りをおかす危険を減少させるのに役立つから無駄ではない。ただし積分方程式の核の特異性を分離することは本論文には含まれない。

線形理論である揚力面理論は, 螺旋速度が音速に近い範囲では精度の低下を免れないと思われる。しかしながら振動するプロペラの理論では, 遷音速に

おける線形理論の破綻が緩和されるであろうと期待される理由が二重に存在する。第一に振動する翼は定常翼に比べて条件がよく, 第二に螺旋速度が半径方向に変化するプロペラは直進翼よりも条件がよいであろう。実際, 翼の厚さが十分薄く, 無次元振動数が十分の大きさであれば, 音速付近の一様流中で振動する直進翼に対して線形理論が適用できることが知られている²⁾。また, ダクト内で回転する定常翼列に対する揚力面理論によって, 螺旋速度が音速となる断面においても有限な解が得られている³⁾。これらの事実が上述の期待を裏付ける根拠であるが, 本理論の適用範囲はもちろん数値計算を行った結果によって判定されなければならない。

本論文の主題に関連した二つのすぐれた先駆的研究がわが国でなされている。一つは近藤博士による圧縮流中の定常プロペラの理論⁴⁾, もう一つは花岡博士による非圧縮流中の非定常プロペラの揚力面理論⁵⁾である。試行錯誤の末, 著者が最終的に採用した手法は, これらの先達のそれと一見まったく異なっているが, なおかつ多くのものをそれらに負っている。なお比較的最近, Hanson はプロペラの騒音の理論の応用としての, 圧縮流中の振動プロペラの揚力面理論⁶⁾を発表し, それを用いて定常プロペラの場合の計算⁷⁾をした。また Runyan ほか⁸⁾は核を陽な形に表さない積分方程式を用いて, ヘリコプタ・ロータの計算を行っている。

2. 基礎の諸方程式

図1のように, プロペラに固定した直交座標系 $0-xyz$ を考えて, プロペラは負の x 軸の方向に一定の亜音速速度 U で前進し, 前進方向に向かって時計方向に一定角速度 Ω で回転するものとする。

動座標系に関する流体の運動方程式と連続の方程式は Lamb の著書⁹⁾に書かれている。ここでは Reissner¹⁰⁾に従ってベクトル記法を用いることにする。 x 軸方向の単位ベクトルを i とすると, 動座標系 $0-xyz$ の速度と角速度のベクトルはそれぞれ $-Ui$ および $-\Omega i$ である。空気粒子の, 動座標系に相対的な速度および位置ベクトルをそれぞれ u_r および r とし, 静止座標系に対する速度を u で表すと

$$u_r = Ui + \Omega i \times r + u \quad (2.1)$$

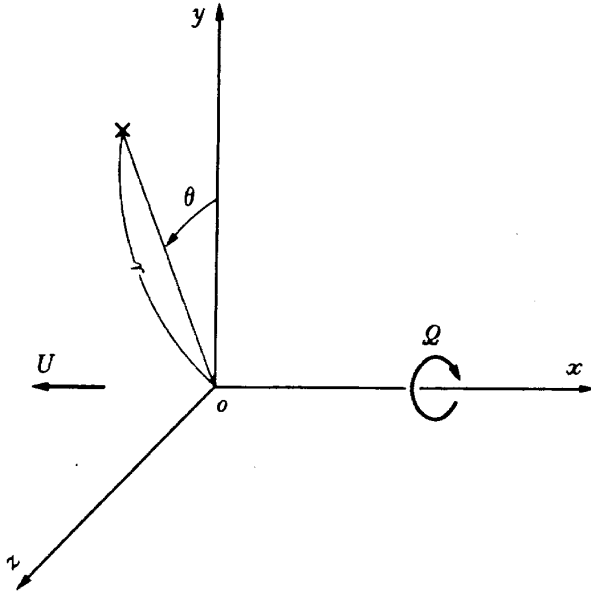


図1 プロペラ固定の座標系

である。ここではプロペラが存在しなければ空気は静止座標系に対して静止している、すなわち突風など外的な原因による流れはないと考える。したがって \mathbf{u} はプロペラによって誘導される速度を表す。 \mathbf{u}_r の中では \mathbf{u} はじょう乱速度になっている。圧力を P 、密度を ρ 、時間を t で表すと、運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}_r \cdot \text{grad}) \mathbf{u} - Q \mathbf{i} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P \quad (2.2)$$

連続の方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}_r) = 0 \quad (2.3)$$

と書かれる。また等エントロピーを仮定すると

$$\frac{P}{P_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma \quad (2.4)$$

が成立する。ここで P_∞ と ρ_∞ は静止状態にある空気の圧力と密度、 γ は比熱の比である。

以下では \mathbf{u} 、 $P_1 = P - P_\infty$ 、 $\rho_1 = \rho - \rho_\infty$ を微小な量と考えて、式(2.2)~(2.4)を線形化した方程式を用いる。線形化された運動方程式と連続の方程式は

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - Q \mathbf{i} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_\infty} \text{grad} P_1 \quad (2.5)$$

$$\frac{D\rho_1}{Dt} + \rho_\infty \text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

となる。ここで

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} - Qz \frac{\partial}{\partial y} + Qy \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.7)$$

である。式(2.4)は、静止空気中の音速 $a_\infty = (\gamma P_\infty / \rho_\infty)^{1/2}$ を用いて

$$\rho_1 = \frac{1}{a_\infty^2} P_1 \quad (2.8)$$

のように線形化される。

式(2.5)の両辺に回転の演算を施すと

$$\begin{aligned} \text{curl} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \frac{D \text{curl} \mathbf{u}}{Dt} \\ &+ Q \{ \mathbf{i} \text{div} \mathbf{u} - \text{grad}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{u}) \} \\ \text{curl}(\mathbf{i} \times \mathbf{u}) &= \mathbf{i} \text{div} \mathbf{u} - (\mathbf{i} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \times \text{curl} \mathbf{u} &= \text{grad}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{i} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{D \text{curl} \mathbf{u}}{Dt} - Q \mathbf{i} \times \text{curl} \mathbf{u} = 0 \quad (2.9)$$

を得る。式(2.9)の両辺と $2 \text{curl} \mathbf{u}$ とのスカラー積を作ると

$$\frac{D(\text{curl} \mathbf{u})^2}{Dt} = 0 \quad (2.10)$$

となる。 $(\text{curl} \mathbf{u})^2$ は渦度の大きさの2乗である。式(2.10)の意味するところを考えるには、座標系を

$$\left. \begin{aligned} y &= r \cos \theta \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

によって円柱座標系に変換すると便利である(図1)。そうすると式(2.7)は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.12)$$

と書かれる。したがって $f(x, r, \theta)$ を任意の関数として

$$(\text{curl} \mathbf{u})^2 = f(x - Ut, r, \theta - Qt) \quad (2.13)$$

は式(2.10)の解を表す。式(2.13)によれば、渦度の大きさは

$$\left. \begin{aligned} x - Ut &= \text{一定} \\ r &= \text{一定} \\ \theta - Qt &= \text{一定} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

の条件の下で保存される。式(2.14)から t を消去すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{U} - \frac{\theta}{Q} &= \text{一定} \\ r &= \text{一定} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

となって、これは螺旋を表すことがわかる。すなわち渦度は式(2.15)の螺旋に沿って、大きさを変えることなく下流に流される。

上述のようにプロペラ以外の外的な原因による流れはないと考えているから、渦度の大きさが保存される事実によって、到るところ渦なしでなければならない。ただしプロペラ翼後縁においては、上下面の接線速度の差によって渦度が作られ、これが上述の螺旋に沿って流されて後流の不連続面を形成するから、この速度の不連続面を除外する。不連続面を除く到るところで渦なしであるから、そこではじょう乱速度ポテンシャル ϕ が存在して

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi \quad (2.16)$$

と書ける。式(2.16)を式(2.5)の運動方程式に代入すると

$$\text{grad} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \frac{p_1}{\rho_\infty} \right) = 0 \quad (2.17)$$

が得られる。したがって、上式の括弧内は座標に無関係、すなわち時間のみの関数でなければならないが、この関数が零となるように ϕ を定義することができる。そうすると

$$\frac{D\phi}{Dt} + \frac{p_1}{\rho_\infty} = 0 \quad (2.18)$$

である。

加速度ポテンシャル ψ を

$$\psi = -\frac{p_1}{\rho_\infty} \quad (2.19)$$

によって定義する。式(2.5)によって $\text{grad } \psi$ は空気粒子の加速度を与える。速度の不連続面以外においては、式(2.18)によって

$$\psi = \frac{D\phi}{Dt} \quad (2.20)$$

の関係がある。式(2.5)に式(2.19)を代入し、両辺に発散の演算を施すと

$$\text{div} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{D \text{div } \mathbf{u}}{Dt} - \Omega \mathbf{i} \cdot \text{curl } \mathbf{u}$$

$$\text{div} (\mathbf{i} \times \mathbf{u}) = -\mathbf{i} \cdot \text{curl } \mathbf{u}$$

であるから

$$\frac{D \text{div } \mathbf{u}}{Dt} = \nabla^2 \psi \quad (2.21)$$

となる。ここで ∇^2 はLaplace演算子を表す。いっ

ぽう式(2.6)に式(2.8)を代入し、式(2.19)を用いると

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{a_\infty^2} \frac{D\psi}{Dt} \quad (2.22)$$

を得る。最後の二式から、 ψ を支配する方程式

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{D^2 \psi}{Dt^2} = 0 \quad (2.23)$$

が得られる。

ある場合には、静止座標系における支配方程式が必要になることがある。静止直交座標を X, Y, Z 、静止円柱座標を X, R, θ とし、両者の関係を

$$\left. \begin{aligned} Y &= R \cos \theta \\ Z &= R \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

とする。 X, R, θ と x, r, θ の関係は

$$\left. \begin{aligned} X &= x - Ut \\ R &= r \\ \theta &= \theta - \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

と書くことができる。 ψ の支配方程式(2.23)は、 X, Y, Z 座標では波動方程式

$$\left. \begin{aligned} \nabla_s^2 \psi - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla_s^2 &= \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

となる。

3. 境界条件

厚さのないプロペラ翼を考える。翼の枚数を N とし、翼面の方程式を

$$F_m(x, r, \theta, t) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, N-1) \quad (3.1)$$

とすると、流れが翼面に接する条件は

$$\frac{\partial F_m}{\partial t} + \mathbf{u}_r \cdot \text{grad } F_m = 0 \quad (3.2)$$

で与えられる。¹⁰⁾式(2.1)を用いると、式(3.2)は

$$\frac{DF_m}{Dt} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } F_m = 0 \quad (3.3)$$

と書くことができる。いま、 θ_m を翼ごとに定まった定数として、

$$f_m(x, r, \theta) \equiv \theta - \frac{\Omega}{U} x - \theta_m = 0 \quad (3.4)$$

で表される螺旋面を考えると、式(2.12)を参照し

て

$$\frac{Df_m}{Dt} = 0 \tag{3.5}$$

であることがわかるから、流れがこの曲面に接するとき

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad} f_m = 0$$

である。すなわち翼面が式(3.4)の曲面上にあるとき、翼面に垂直な方向のじょう乱速度を生じない。一般には θ_m が座標 r の関数であってもこの事は成立するが、本論文では θ_m を定数に選ぶことにする。式(3.4)で表される螺旋面は、式(2.15)の第1式の右辺の定数を適当に選んだときの螺旋を r の方向に動かすことによって得られる曲面であって、これを各翼に対応する基準螺旋面と呼ぶことにする。基準螺旋面からの翼面の変位は小さいと考える。

ここで近藤⁴⁾、花岡⁵⁾の用いた螺旋座標 σ, τ を導入する。これは $U/\Omega = h$ として

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \theta - \frac{x}{h} \\ \tau &= \theta + \frac{x}{h} \end{aligned} \right\} \tag{3.6}$$

と定義される。図2に示すように、 $\sigma = \text{一定}$ の曲面と、 $\tau = \text{一定}$ の曲面はそれぞれ互に交わる螺旋面を表す。これらの螺旋面に沿っては、 θ が 2π だけ増加するとき x は $2\pi h$ だけ増加もしくは減少する。すなわち $2\pi h$ はこれらの螺旋面のピッチである。 $\sigma = \text{一定}$ の曲面と $\tau = \text{一定}$ の曲面が交わってできる曲線は、 $\theta = \text{一定}$ の半平面と $x = \text{一定}$ の平面の交線、すなわち x 軸に垂直な半直線である。 $\sigma = \text{一定}$ の曲面上の点は座標 r と τ によって定められる。この曲面上では θ が増加するとき x も増加し、このとき τ も増加する。式(2.12)は螺旋座標では

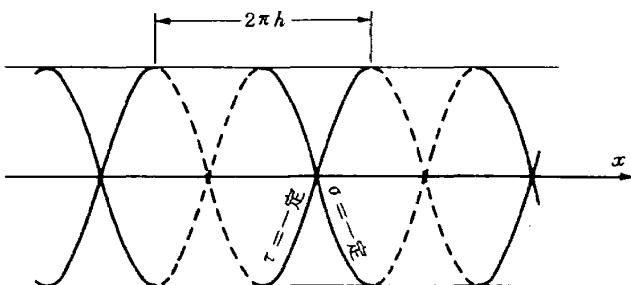


図2 二種類の螺旋面と $r = \text{一定}$ の円柱面の交線としての螺旋

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + 2\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} \tag{3.7}$$

となる。

螺旋座標を用いると、基準螺旋面の方程式(3.4)は

$$f_m \equiv \sigma - \theta_m = 0 \tag{3.8}$$

と書かれる。定数 θ_m は

$$\theta_m = \frac{2m\pi}{N} \tag{3.9}$$

とする。基準螺旋面からの翼の微小な変位が x 方向と θ 方向のそれと与えられていると考えて、それらをそれぞれ $x_{Bm}(r, \tau, t)$ および $r\theta_{Bm}(r, \tau, t)$ と書く。これらの変位による座標 σ の変化を $\sigma_{Bm}(r, \tau, t)$ と書くと、式(3.6)によって

$$\sigma_{Bm}(r, \tau, t) = \theta_{Bm}(r, \tau, t) - \frac{1}{h} x_{Bm}(r, \tau, t) \tag{3.10}$$

である。式(3.8)と σ_{Bm} を用いると、翼面の方程式は

$$F_m \equiv f_m - \sigma_{Bm} = 0 \tag{3.11}$$

と書くことができる。式(3.11)を式(3.3)に代入する。式(2.7)によって、 $\mathbf{u} \cdot \text{grad} \sigma_{Bm}$ は $D\sigma_{Bm}/Dt$ に比べて小さいからこれを省略し、式(3.5)を用いると

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad} f_m = \frac{D\sigma_{Bm}}{Dt} \tag{3.12}$$

を得る。式(3.12)は近似的に、翼面の基準螺旋面への射影上で満足させることができる。 $\text{grad} f_m$ は基準螺旋面の法線方向のベクトルで、式(3.8)によって $\text{grad} \sigma$ に等しく、したがって m に無関係である。基準螺旋面の法線方向の単位ベクトルで、ある向きのものを

$$\mathbf{n}_H = \frac{\text{grad} f_m}{|\text{grad} f_m|} \tag{3.13}$$

と定義する。式(3.4)から、 θ 方向の単位ベクトルを \mathbf{k}_θ と書いて

$$\text{grad} f_m = -\frac{1}{h} \mathbf{i} + \frac{1}{r} \mathbf{k}_\theta \tag{3.14}$$

$$|\text{grad} f_m| = \frac{1}{h\tau} \sqrt{h^2 + r^2} \tag{3.15}$$

が得られる。式(3.13)の両辺と \mathbf{n}_H とのスカラー積

を作ると

$$|\text{grad } f_m| = \mathbf{n}_H \cdot \text{grad } \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial n_H} \quad (3.16)$$

であることがわかる。ここで $\partial/\partial n_H$ は \mathbf{n}_H の方向の微分を意味する。式 (3.12) の両辺を $|\text{grad } f_m|$ で割る。左辺は式 (2.16) を用いると $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_H = \partial \Phi / \partial n_H$ となる。右辺は、式 (3.12), (3.15) を参照して、微分と除法の順序を交換することができる。

$$n_{Bm}(\tau, \tau, t) = \frac{\sigma_{Bm}}{\partial \sigma / \partial n_H} \quad (3.17)$$

と書くと、これは翼面の \mathbf{n}_H 方向の変位を表している。けっきょく式 (3.12) は

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n_H} \right|_{\sigma=\theta_m} = \frac{D n_{Bm}}{Dt} \quad (3.18)$$

となる。式 (3.18) はじょう乱速度ポテンシャル Φ が、翼面の基準螺旋面への射影上で満足すべき境界条件を与える。

式 (3.17) で定義される n_{Bm} は、式 (3.10), (3.15), (3.16) を用いると

$$n_{Bm} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} (\tau \theta_{Bm}) - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} x_{Bm} \quad (3.19)$$

の形に書くことができる。ここで

$$\mu = \frac{r}{h} \quad (3.20)$$

である。式 (3.13) ~ (3.15) から

$$\mathbf{n}_H = -\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \mathbf{k}_\theta \quad (3.21)$$

が得られる。上式から、式 (3.19) の右辺の $\tau \theta_{Bm}$ と x_{Bm} の係数がそれぞれ $\mathbf{n}_H \cdot \mathbf{k}_\theta$ および $\mathbf{n}_H \cdot \mathbf{i}$ に等しいことがわかる。これは n_{Bm} が翼面の \mathbf{n}_H 方向の変位であることをいっそう明らかに示している。 \mathbf{n}_H 方向の微分は、式 (3.21) によって円柱座標で計算して、螺旋座標に変換すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_H} &= \mathbf{n}_H \cdot \text{grad} \\ &= \frac{1}{h\sqrt{1+\mu^2}} \left\{ \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} \right. \\ &\quad \left. - \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \pi} \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。式 (3.21) によって、 \mathbf{n}_H は x が減少し、 θ

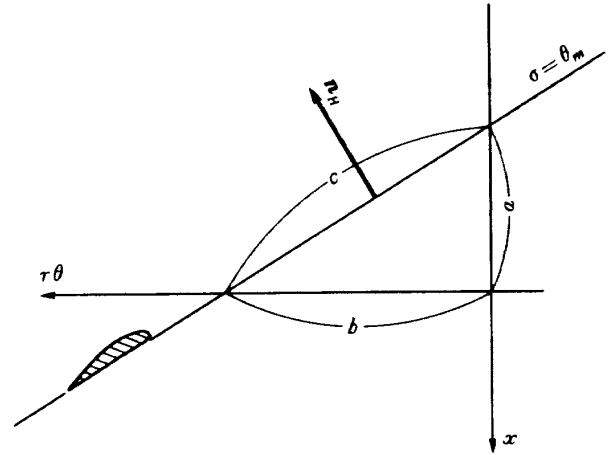


図3 r —一定の円柱面を展開した平面における基準螺旋面とプロペラ翼。 $\theta=2\pi$ のとき $a=2\pi h$, $b=2\pi r=2\pi h\mu$, $c=2\pi h\sqrt{1+\mu^2}$

が増加する方向に向いていることがわかる。すなわち \mathbf{n}_H はプロペラ翼の背側に対応する側に立っている (図3)。

翼面における境界条件のほか、無限遠の条件がある。この条件は従来、直進翼の場合でもおろそかにされて来たので、これを別の論文¹¹⁾において考察した。その結果を5節において用いる。またプロペラ翼の後縁における条件については次節に述べる。

4. Mach 円錐

本節では定常プロペラの場合を考える。この場合 Ψ の支配方程式 (2.23) は円柱座標を用いると

$$\begin{aligned} \beta^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - 2M^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \theta} + \left(\frac{1}{\mu^2} - M^2 \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \\ + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

と書くことができる。ここで

$$\xi = \frac{x}{h} \quad (4.2)$$

$$M = \frac{U}{a_\infty} \quad (4.3)$$

$$\beta^2 = 1 - M^2 \quad (4.4)$$

である。前進速度の Mach 数 M は 1 より小さい。

Davidson¹²⁾ は式 (4.1) と同等の偏微分方程式の型が、座標 $\mu=r/h$ の或る値 r_s/h を境にして、 $\mu < r_s/h$ ならば楕円型、 $\mu > r_s/h$ ならば双曲型になること、およびこの r_s は螺旋速度がちょうど音速にな

る半径を与える, すなわち $\sqrt{U^2 + (Qr_s)^2} = a_\infty$ であることを証明なしに指摘した。三つの独立変数に関する線形方程式 (4.1) は, 2階微分の項と同じ係数をもつ2次形式が定符号形式であるとき楕円型である。2次形式が不定符号であって, 主軸変換を行ったとき一つの項の係数の符号が他の二つの項の係数の符号と異なるならば双曲型である (文献 13, pp. 229-230)。式 (4.1) の場合は μ と他の変数との混合微分の項がないから, ξ と θ に関する微分の項のみに対応する2次形式

$$\begin{aligned} \beta^2 \xi_1^2 - 2M^2 \xi_1 \theta_1 + \left(\frac{1}{\mu^2} - M^2\right) \theta_1^2 \\ \equiv A \xi_1^2 + 2B \xi_1 \theta_1 + C \theta_1^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

を考えればよい。 μ に関する2階微分の項の係数が正であるから, 式 (4.5) が正の定符号であるとき, すなわち $B^2 - AC < 0$ 且つ $A > 0$ または $C > 0$ であるとき式 (4.1) は楕円型である。式 (4.5) が負の定符号であるかもしくは不定符号であるとき, すなわち $B^2 - AC < 0$ 且つ $A < 0$ または $C < 0$ であるかもしくは $B^2 - AC > 0$ であるとき式 (4.1) は双曲型である。 $A = \beta^2 > 0$ であるから式 (4.5) が負の定符号になることはない。したがって

$$B^2 - AC = M^2 - \frac{\beta^2}{\mu^2} \quad (4.6)$$

が負ならば楕円型, 正ならば双曲型である。

$$M^2 \mu^2 - \beta^2 = \frac{U^2 + (Qr)^2}{a_\infty^2} - 1 \quad (4.7)$$

であるから, 上の結果は Davidson の指摘を裏付けている。

式 (4.1) が双曲型であるときその特性曲面が存在する。特性曲面の方程式を, c を定数として

$$f(\xi, \mu, \theta) = c \quad (4.8)$$

と書くと, f は式 (4.1) の2階微分の項と同じ係数の1階非線形方程式

$$\begin{aligned} \beta^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 - 2M^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{\mu^2} - M^2\right) \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

を満足する (文献 13, p. 227)。

直進翼の場合からの類推によって, 特性曲面は "Mach 円錐" を表すであろう。この場合の Mach 円

錐は, 式 (2.15) の螺旋を軸とする曲がった円錐面になる筈である。物理的な考察によってこの事を確かめてみよう。現在の時刻を $t = 0$ とし, $x = 0$, $r = r_0$, $\theta = 0$ の位置に点音源があるとする。過去の時刻 $t = -t'$ ($t' > 0$) に発した音の波面である球面は, 時刻 $t = 0$ には中心が $x = Ut'$, $r = r_0$, $\theta = Qt'$ にあり, 半径は $a_\infty t'$ である。したがって球面の方程式は

$$\begin{aligned} (x - Ut')^2 + (r \cos \theta - r_0 \cos Qt')^2 \\ + (r \sin \theta - r_0 \sin Qt')^2 = a_\infty^2 t'^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

である。両辺を h^2 で割り, $Qt' = T$, $r_0/h = \mu_0$ と書くと

$$\begin{aligned} F(\xi, \mu, \theta, T) \\ \equiv (\xi - T)^2 + \mu^2 + \mu_0^2 - 2\mu\mu_0 \cos(\theta - T) \\ - \frac{T^2}{M^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

を得る。式 (4.11) と

$$\frac{\partial F}{\partial T} \equiv 2 \left\{ T - \xi + \mu\mu_0 \sin(\theta - T) - \frac{T}{M^2} \right\} = 0 \quad (4.12)$$

とから T を消去することができれば, 球面の族の包絡面としての Mach 円錐の方程式が得られる。しかし, ここでは実際に消去することは考えない。Mach 円錐の方程式を

$$g(\xi, \mu, \theta) = 0 \quad (4.13)$$

とする。式 (4.12) を T について解いた解を

$$T = G(\xi, \mu, \theta) \quad (4.14)$$

と書くと

$$g(\xi, \mu, \theta) = F(\xi, \mu, \theta, T) \Big|_{T=G} \quad (4.15)$$

としてよいから

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \Big|_{T=G} + \frac{\partial F}{\partial T} \Big|_{T=G} \cdot \frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \Big|_{T=G} \\ = 2(\xi - G) \end{aligned} \quad (4.16)$$

同様に

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta} \Big|_{T=G} = 2\mu\mu_0 \sin(\theta - G) \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{\partial F}{\partial \mu} \Big|_{T=G} = 2\mu - 2\mu_0 \cos(\theta - G) \quad (4.18)$$

が得られる。式 (4.16) ~ (4.18) から, 若干の計算を行うと

$$\begin{aligned} & \beta^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} \right)^2 - 2M^2 \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ & + \left(\frac{1}{\mu^2} - M^2 \right) \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \mu} \right)^2 \\ & = 4 \left\{ F \Big|_{\tau=G} + \frac{G^2}{M^2} - M^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial T} \Big|_{\tau=G} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{G}{M^2} \right)^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

となり、 g は式(4.9)を満足することがわかる。すなわち式(4.11), (4.12)で表されるMach円錐は式(4.1)の特性曲面である。

式(4.8)で与えられる特性曲面と基準螺旋面の交線を求めてみよう。交線に沿って測った長さを s として、交線をパラメタ表示

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(s) \\ \theta &= \theta(s) \\ \mu &= \mu(s) \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

で表すと、この曲線はその上の各点で両曲面に同時に接している。特性曲面に接する条件は明らかに

$$\frac{d\xi}{ds} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{d\theta}{ds} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{d\mu}{ds} \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \quad (4.20)$$

であって、この条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} &= \beta^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} - M^2 \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{d\theta}{ds} &= \left(\frac{1}{\mu^2} - M^2 \right) \frac{\partial f}{\partial \theta} - M^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{d\mu}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial \mu} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

のように定めれば満たされることがわかる。このとき式(4.20)の左辺は式(4.9)の左辺に帰着するからである。式(4.21)は式(4.1)に属する特性射線を与える(文献13, p.230)。式(4.20), (4.21)から $\partial f/\partial \xi$, $\partial f/\partial \theta$, $\partial f/\partial \mu$ を消去すると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu^2} - M^2 \right) \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 + 2M^2 \left(\frac{d\xi}{ds} \right) \left(\frac{d\theta}{ds} \right) \\ & + \beta^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \left(M^2 - \frac{\beta^2}{\mu^2} \right) \left(\frac{d\mu}{ds} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

が得られる。いっぽう基準螺旋面の方程式は、式(3.4)によって

$$\xi - \theta = c' \quad (\text{一定}) \quad (4.23)$$

と書けるから、式(4.19)の曲線が基準螺旋面に接しているとき

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \quad (4.24)$$

である。 s は式(4.19)の曲線に沿う長さであるから

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \\ & = h^2 \left\{ \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 + \mu^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds} \right)^2 \right\} = 1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

の関係がある。式(4.22), (4.24), (4.25)から

$$\frac{d\mu}{ds} = \pm \frac{1}{Mh\sqrt{1+\mu^2}} \quad (4.26)$$

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sqrt{M^2\mu^2 - \beta^2}}{Mh(1+\mu^2)} \quad (4.27)$$

を得る。ただし ξ と θ が増加するとき s が増加するように s を定義するものとする。

螺旋座標を用いると、基準螺旋面上の点は τ と μ によって定まる。式(3.6), (4.27)によって

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{2\sqrt{M^2\mu^2 - \beta^2}}{Mh(1+\mu^2)} \quad (4.28)$$

となる。式(4.26), (4.28)から

$$\frac{d\tau}{d\mu} = \pm \frac{2\sqrt{M^2\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad (4.29)$$

が得られる。式(4.29)を微分方程式とみなしたときの解は、Mach円錐と基準螺旋面の交線、すなわち基準螺旋面上の“Mach線”を与える。式(4.26)は

$$\frac{dr}{ds} = \pm \frac{a_\infty}{\sqrt{U^2 + (\Omega r)^2}} = \pm \sin \mu_c(\tau) \quad (4.30)$$

と書くことができる(図4)。すなわちMach線は r = 一定の円柱面と $\mu_c(\tau)$ なる角をなす。 $\mu_c(\tau)$ を半径 r の円柱面における“Mach角”と呼ぶことができよう。式(4.28), (4.30)を用いると、 $d\tau/d\mu$ はMach角によって

$$\frac{d\tau}{d\mu} = \pm 2M \cos \mu_c \quad (4.31)$$

のように表すこともできる。 $U^2 + (\Omega r)^2 = a_\infty^2$ のとき $\mu_c = \pi/2$ であるから、Mach線は $r = r_s$ の円柱面と直交する。以上によって基準螺旋面上のMach線

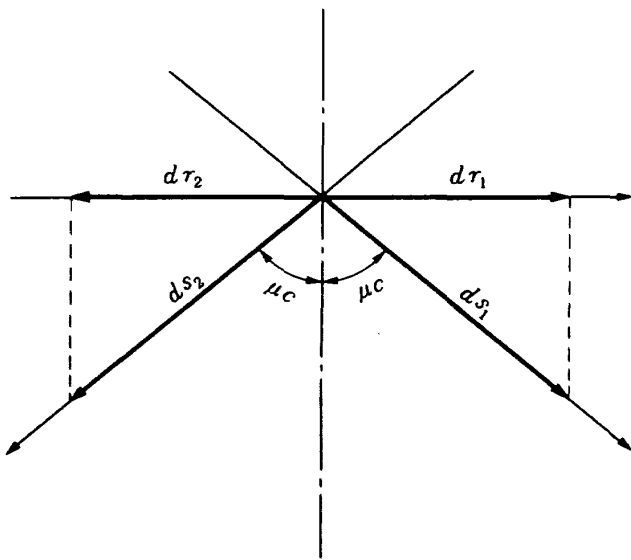


図4 Mach角

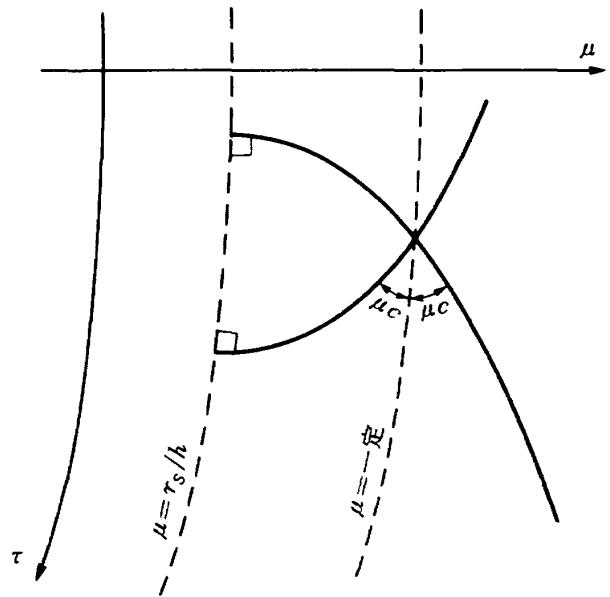


図5 基準螺旋面上のMach線

は図5のような模様になるであろう。

直進翼の場合から類推すると、ある点におけるじょう乱はその点を頂点とする後方Mach円錐の外部には伝わらないと思われる。しかしながら一方、プロペラの前進速度は亜音速であるから、じょう乱は全空間に伝播する筈である。この見掛け上の矛盾はつぎのように解消する。すなわちMach円錐は螺旋を軸としていて、軸に沿ってはθが2πだけ増加するときxは2πhだけ増加するが(図2)、 $U < a_\infty$ であるから円錐の-xの方向への広がりには2πhよりも大きい。したがってMach円錐はその頂点をそれ自身の裾の内部に包むことになり、やがて $r > r_s$ の範囲全体に広がる。このようにして、じょう乱が伝わらない場所に存在しない。しかしMach円錐の頂点に比較的近い範囲を考えると、円錐の内部の点にはじょう乱が直接伝播するのに反して、外部の点にはまわり道をして伝わることになるから、伝播の速さに差が存在するであろう。

ここでプロペラ翼後縁の条件について考えてみよう。 $r < r_s$ の範囲ではKuttaの条件を課すことに異論はない。 $r > r_s$ の範囲では、後縁のτ座標を $\tau_T(\mu)$ として、 $|d\tau_T/d\mu|$ が式(4.29)あるいは式(4.31)の値の絶対値より小さい場合と大きい場合を区別して考える必要がある。前者の場合を超音速後縁、後者の場合を亜音速後縁ということができよう。すなわち

$$\left| \frac{d\tau_T}{d\mu} \right| < \frac{2\sqrt{M^2\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{1+\mu^2}} = 2M \cos \mu_c$$

のとき超音速後縁、

$$\left| \frac{d\tau_T}{d\mu} \right| > \frac{2\sqrt{M^2\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{1+\mu^2}} = 2M \cos \mu_c$$

のとき亜音速後縁である。亜音速後縁では、やはりKuttaの条件を課するのが適当である。超音速後縁ではどうであろうか。直進翼の場合と異なって、じょう乱は到る所に伝わるから、上下面の状態が完全に独立であることはできないであろう。しかし、後縁において上下面の状態が直接相互に調節し合うことができない事情は直進翼におけると同じであろう。したがって、超音速後縁においてはKuttaの条件を課することはできないと思われる。

5. Greenの公式

以下ではプロペラ翼は円振動数ωで調和振動していると考えて

$$\Psi(x, r, \theta, t) = \phi(x, r, \theta) e^{i\omega t} \quad (5.1)$$

の形の解を求めることにする。これを式(2.23)に代入し、式(2.12)、(4.2)、(4.3)を用いると

$$\nabla^2 \phi - \frac{M^2}{h^2} \left(i\nu + \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \phi = 0 \quad (5.2)$$

を得る。ここで

$$\nu = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{h\omega}{U} \quad (5.3)$$

である。∇²φは式(4.2), (3.20)を用いて

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial\phi}{\partial\mu} \right) \tag{5.4}$$

と書くことができる

$$\left. \begin{aligned} \text{式(5.2)の左辺に } h^3\mu \text{ を掛けたものを} \\ L(\phi) = h\mu \{ h^2 \nabla^2\phi - M^2 L_1(\phi) \} \\ L_1(\phi) = \left(i\nu + \frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\theta} \right)^2 \phi \end{aligned} \right\} \tag{5.5}$$

と書く。L(φ)の随伴偏微分式(文献13, p.239)をM(ψ̃)と書くと

$$\left. \begin{aligned} M(\tilde{\psi}) = h\mu \{ h^2 \nabla^2 \tilde{\psi} - M^2 M_1(\tilde{\psi}) \} \\ M_1(\tilde{\psi}) = \left(i\nu - \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\theta} \right)^2 \tilde{\psi} \end{aligned} \right\} \tag{5.6}$$

である。L(φ)とM(ψ̃)とに対して

$$\tilde{\psi} L(\phi) - \phi M(\tilde{\psi}) = h^3 \mu \operatorname{div} \mathbf{P} \tag{5.7}$$

となるようなベクトルPが存在することを、つぎのようにして示すことができる。まず、よく知られているように

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \nabla^2\phi - \phi \nabla^2\tilde{\psi} \\ = \operatorname{div} (\tilde{\psi} \operatorname{grad}\phi - \phi \operatorname{grad}\tilde{\psi}) \end{aligned} \tag{5.8}$$

である。つぎに

$$\begin{aligned} F(\phi, \tilde{\psi}) = \tilde{\psi} \left(i\nu\phi + \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) \\ + \phi \left(i\nu\tilde{\psi} - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\xi} - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta} \right) \end{aligned} \tag{5.9}$$

とおくと

$$\tilde{\psi} L_1(\phi) - \phi M_1(\tilde{\psi}) = \frac{\partial F}{\partial\xi} + \frac{\partial F}{\partial\theta} \tag{5.10}$$

であることが容易に確かめられる。したがって、ベクトル

$$\mathbf{P}_1 = \frac{F(\phi, \tilde{\psi})}{h} (\mathbf{i} + \mu \mathbf{k}_\theta) \tag{5.11}$$

を定義すると

$$\tilde{\psi} L_1(\phi) - \phi M_1(\tilde{\psi}) = h^2 \operatorname{div} \mathbf{P}_1 \tag{5.12}$$

となる。式(5.5)~(5.8), (5.12)によって、式(5.7)を満足するベクトルPが存在して

$$\mathbf{P} = \tilde{\psi} \operatorname{grad}\phi - \phi \operatorname{grad}\tilde{\psi} - M^2 \mathbf{P}_1 \tag{5.13}$$

であることがわかる。

図6のように、N枚のプロペラ翼面 S_{Bm} (m=0,

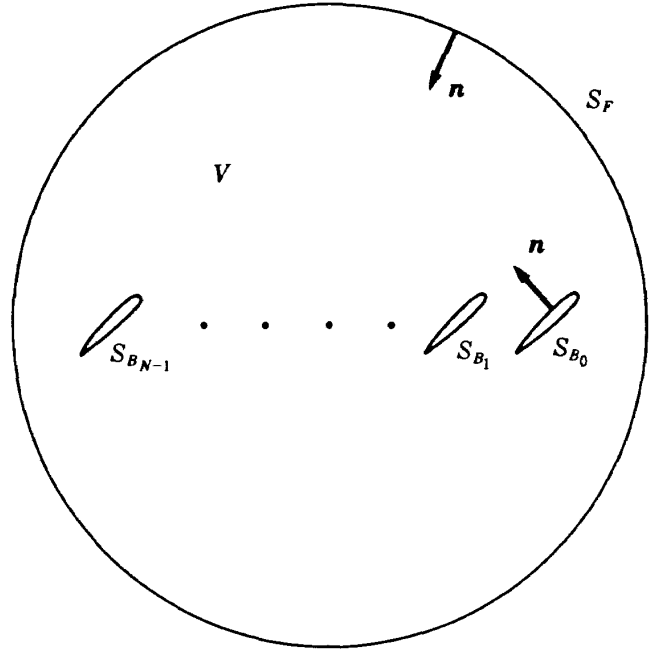


図6 空間の範囲V

1, ..., N-1)と、これらを囲み、翼面から遠く離れた曲面 S_Fとを境界面とする空間の範囲をVとする。Vの内部で式(5.7)をξ, μ, θについて積分して、Gaussの定理を適用すると、Greenの公式

$$\begin{aligned} \iiint_V \{ \tilde{\psi} L(\phi) - \phi M(\tilde{\psi}) \} d\xi d\mu d\theta \\ = \iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{P}) r dx dr d\theta \\ = - \sum_{m=0}^{N-1} \iint_{S_{Bm}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} dS - \iint_{S_F} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} dS \end{aligned} \tag{5.14}$$

が得られる(文献13, p.239)。ここでnは境界面における内向き法線方向の単位ベクトル、dSは面積要素を表す。

点(ξ, μ, θ)と(ξ₁, μ₁, θ₁)は共にVの内部にあるとし、関数φ_S(ξ, μ, θ; ξ₁, μ₁, θ₁)が、デルタ関数を右边にもつ非同次方程式

$$\begin{aligned} M(\phi_S) = \delta(\xi - \xi_1) \delta(\mu - \mu_1) \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_1 - 2n\pi) \end{aligned} \tag{5.15}$$

の解であるとする。ここで ∑_{n=-∞}[∞] δ(θ - θ₁ - 2nπ)は周期2πのδ関数列(文献14, p.188)である。式(5.15)の左辺がθに関して周期2πの周期関数であるから、右辺もそのようにおいたのである。φ_Sを

を随伴方程式 $M(\tilde{\phi}) = 0$ の基本特異解と呼ぶことにする。式 (5.14) において $\tilde{\phi} = \phi_s$ に選ぶ。 $L(\phi) = 0$ と式 (5.15) を式 (5.14) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} & \iiint_V \{ \phi_s L(\phi) - \phi M(\phi_s) \} d\xi d\mu d\theta \\ &= - \iiint_V \phi(\xi, \mu, \theta) \delta(\xi - \xi_1) \delta(\mu - \mu_1) \\ & \quad \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_1 - 2n\pi) d\xi d\mu d\theta \\ &= -\phi(\xi_1, \mu_1, \theta_1) \end{aligned} \quad (5.16)$$

となる。

式 (5.14) の右辺第 1 項の積分においては、境界条件におけると同様に、プロペラ翼面をその基準螺旋面上への射影で置き換えるのは線形理論として妥当な近似である。ただし S_{Bm} は翼の両面にわたっていることに注意する。基準螺旋面の法線単位ベクトル \mathbf{n}_H の立つ側を翼の上面、反対側を下面と呼び、それぞれ添字 U と L で区別することにする。 $\mathbf{n}_U \approx \mathbf{n}_H$, $\mathbf{n}_L \approx -\mathbf{n}_H$ であるから、 S_{Bm} の片面の基準螺旋面上への射影を S_{Hm} と書くと

$$\iint_{S_{Bm}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} dS \approx \iint_{S_{Hm}} \mathbf{n}_H \cdot (\mathbf{P}_U - \mathbf{P}_L) dS \quad (5.17)$$

となる。式 (3.21), (5.11) から、ただちに

$$\mathbf{n}_H \cdot \mathbf{P}_1 = 0 \quad (5.18)$$

であることがわかるから、式 (5.13) から

$$\begin{aligned} & \mathbf{n}_H \cdot (\mathbf{P}_U - \mathbf{P}_L) \Big|_{\tilde{\phi}=\phi_s} \\ &= \left(\phi_s \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}_H} \right)_U - \left(\phi_s \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}_H} \right)_L \\ & \quad - \left\{ \left(\phi \frac{\partial \phi_s}{\partial \mathbf{n}_H} \right)_U - \left(\phi \frac{\partial \phi_s}{\partial \mathbf{n}_H} \right)_L \right\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

を得る。点 (ξ_1, μ_1, θ_1) は当面、基準螺旋面から離れていると考えている。したがって

$$\left. \begin{aligned} & (\phi_s)_U = (\phi_s)_L \\ & \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial \mathbf{n}_H} \right)_U = \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial \mathbf{n}_H} \right)_L \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

が成立するであろう。また式 (2.20), (5.1) によつて

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}_H} = \left(\frac{D}{Dt} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}_H} \right) e^{-i\omega t}$$

であつて、式 (3.18) によつて

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}_H} \right)_U = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}_H} \right)_L$$

であるから

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}_H} \right)_U = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}_H} \right)_L \quad (5.21)$$

が成立する。以上によつて式 (5.14) の右辺第 1 項の積分は

$$\begin{aligned} & \iint_{S_{Bm}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \Big|_{\tilde{\phi}=\phi_s} dS \\ & \approx - \iint_{S_{Hm}} (\phi_U - \phi_L) \frac{\partial \phi_s}{\partial \mathbf{n}_H} dS \end{aligned} \quad (5.22)$$

となる。

最後に、式 (5.14) の右辺第 2 項の積分において、境界面 S_F を無限に広げる場合を考える。これは ϕ と ϕ_s に対する無限遠の条件に関係している。扁球座標 r^* , θ^* , ϕ^* を

$$\left. \begin{aligned} x &= \beta r^* \cos \theta^* \\ y &= r^* \sin \theta^* \cos \phi^* \\ z &= r^* \sin \theta^* \sin \phi^* \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

によつて定義すると、 ϕ が満たすべき無限遠の条件は、 $r^* \rightarrow \infty$ のとき

$$r^* \phi : \text{有界} \quad (5.24)$$

$$r^* \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial r^*} + \frac{1 - M \cos \theta^*}{a\beta} \left(i\omega \phi + \Omega \frac{\partial \phi}{\partial \phi^*} \right) \right\} \rightarrow 0 \quad (5.25)$$

である。¹¹⁾ 式 (5.25) は、Helmholtz の方程式の解に対する Sommerfeld の放射条件に対応する条件である。境界面 S_F として、 $r^* = \text{一定}$ の扁平回転楕円面を採用すると、式 (5.14) の右辺第 2 項の積分は、文献 11 の式 (70), (73) によつて

$$\begin{aligned} & \iint_{S_F} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \Big|_{\tilde{\phi}=\phi_s} dS \\ &= -\beta r^{*2} \int_0^{2\pi} d\phi^* \int_0^\pi \left[\phi_s \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial r^*} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1 - M \cos \theta^*}{a\beta} \left(i\omega \phi + \Omega \frac{\partial \phi}{\partial \phi^*} \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. - \phi \left\{ \frac{\partial \phi_s}{\partial r^*} + \frac{1 + M \cos \theta^*}{a\beta} \left(i\omega \phi_s \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$- \Omega \frac{\partial \phi_s}{\partial \phi^*} \Big) \Big] \sin \theta^* d\theta^* \tag{5.26}$$

と書くことができる。φ_s に対する無限遠の条件としては、r* → ∞ のとき

$$r^* \phi_s : \text{有界} \tag{5.27}$$

$$r^* \left\{ \frac{\partial \phi_s}{\partial r^*} + \frac{1 + M \cos \theta^*}{a\beta} \left(i \omega \phi_s - \Omega \frac{\partial \phi_s}{\partial \phi^*} \right) \right\} \rightarrow 0 \tag{5.28}$$

であることを要求するのは合理的である。¹¹⁾ 式 (5.24), (5.25), (5.27), (5.28) を用いると、r* → ∞ のとき

$$\iint_{S_f} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \Big|_{\tilde{\psi}=\phi_s} dS \rightarrow 0 \tag{5.29}$$

となる。式 (5.14), (5.16), (5.22), (5.29) によって

$$\begin{aligned} \phi(\xi_1, \mu_1, \theta_1) = & - \sum_{m=0}^{N-1} \iint_{S_{Hm}} (\phi_U - \phi_L) \\ & \times \frac{\partial \phi_s}{\partial n_H} dS \end{aligned} \tag{5.30}$$

の関係が得られる。式 (5.30) によれば、流れ場内の任意の点 (ξ₁, μ₁, θ₁) における φ の値は、プロペラ翼上下面における φ の値の差の分布を与えれば求められる。また、こうして求められる φ の値は、点 (ξ₁, μ₁, θ₁) について式 (5.24), (5.25) の形の無限遠の条件を満足する。¹¹⁾

6. 随伴方程式の基本特異解

随伴方程式の基本特異解 φ_s はいろいろな方法で求めることができる。ここでは Fourier 変換を用いることにする。

Fourier 変換可能な任意の関数 f(x, y, z) の Fourier 変換と、その逆変換を

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \\ & \times e^{-i(\lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z)} dx dy dz \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f \\ & \times e^{i(\lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z)} d\lambda_x d\lambda_y d\lambda_z \end{aligned} \tag{6.2}$$

のように定義する。式 (2.11), (3.20), (4.2) によ

って、無次元の円柱座標では

$$\left. \begin{aligned} x &= h \xi \\ y &= h \mu \cos \theta \\ z &= h \mu \sin \theta \end{aligned} \right\} \tag{6.3}$$

である。また波数 λ_x, λ_y, λ_z に対しても、円柱座標を導入して

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x &= \frac{\lambda}{h} \\ \lambda_y &= \frac{\lambda'}{h} \sin \theta' \\ \lambda_z &= \frac{\lambda'}{h} \cos \theta' \end{aligned} \right\} \tag{6.4}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z &= \lambda \xi + \lambda' \mu \sin(\theta' + \theta) \\ &\text{と書ける。整数次の Bessel 関数の母関数表示} \end{aligned}$$

$$e^{i\zeta \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\zeta) e^{in\phi}$$

を用いると

$$\begin{aligned} e^{-i(\lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z)} &= e^{-i\lambda \xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda' \mu) e^{-in(\theta' + \theta)} \end{aligned}$$

となるから、式 (6.1) は

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}f &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta'} \mathcal{F}_n f \\ \mathcal{F}_n f &= h^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda \xi} d\xi \int_0^{\infty} \mu J_n(\lambda' \mu) d\mu \\ &\times \int_0^{2\pi} f(x, y, z) e^{-in\theta} d\theta \end{aligned} \right\} \tag{6.5}$$

の形に書くことができる。また、この式の第 1 式から

$$\mathcal{F}_n f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta'} \mathcal{F}f d\theta' \tag{6.6}$$

である。逆変換は同様にして

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} f_n(\xi, \mu) \\ f_n(\xi, \mu) &= \frac{1}{(2\pi h)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \xi} d\lambda \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \times \int_0^\infty \lambda' J_n(\lambda' \mu) d\lambda' \int_0^{2\pi} e^{in\theta'} \mathcal{F}f d\theta' \right\} \quad (6.7)$$

の形に書かれる。式(6.6)を用いると、上式の第2式は

$$f_n(\xi, \mu) = \frac{1}{(2\pi)^2 h^3} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda\xi} d\lambda \times \int_0^\infty \lambda' J_n(\lambda' \mu) \mathcal{F}_n f d\lambda' \quad (6.8)$$

となる。

$\mu \neq 0$ として、式(5.15)の両辺を $h\mu$ で割ると

$$h^2 \nabla^2 \phi_s - M^2 \left(i\nu - \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \phi_s = \frac{1}{h\mu} \delta(\xi - \xi_1) \delta(\mu - \mu_1) \times \sum_{n=-\infty}^\infty \delta(\theta - \theta_1 - 2n\pi) \quad (6.9)$$

の形となる。 ϕ_s と、その2階までの導関数の Fourier 変換が存在するとして、式(6.9)の両辺を Fourier 変換する。式(6.1), (6.4), (6.5)によって

$$\mathcal{F} h^2 \nabla^2 \phi_s = -h^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2) \mathcal{F} \phi_s = -(\lambda^2 + \lambda'^2) \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-in\theta'} \mathcal{F}_n \phi_s$$

$$\mathcal{F} \left(i\nu - \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \phi_s = - \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-in\theta'} (\nu - \lambda - n)^2 \mathcal{F}_n \phi_s$$

$$\mathcal{F} \frac{1}{h\mu} \delta(\xi - \xi_1) \delta(\mu - \mu_1) \sum_{n=-\infty}^\infty \delta(\theta - \theta_1 - 2n'\pi)$$

$$= h^2 \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-in\theta'} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\lambda\xi} \delta(\xi - \xi_1) d\xi$$

$$\times \int_0^\infty J_n(\lambda' \mu) \delta(\mu - \mu_1) d\mu$$

$$\times \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \sum_{n'=-\infty}^\infty \delta(\theta - \theta_1 - 2n'\pi) d\theta$$

$$= h^2 \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-in\theta'} J_n(\lambda' \mu_1) e^{-i(\lambda\xi_1 + n\theta_1)}$$

である。最後の式では $\mu = 0$ における極が打消され

て、不都合を生じることがない。以上によって

$$\left\{ -(\lambda^2 + \lambda'^2) + M^2(\nu - \lambda - n)^2 \right\} \mathcal{F}_n \phi_s = h^2 J_n(\lambda' \mu_1) e^{-i(\lambda\xi_1 + n\theta_1)}$$

となるから、左辺の $\mathcal{F}_n \phi_s$ の係数が0でなければ

$$\mathcal{F}_n \phi_s = - \frac{h^2 J_n(\lambda' \mu_1) e^{-i(\lambda\xi_1 + n\theta_1)}}{\lambda^2 + \lambda'^2 - M^2(\nu - \lambda - n)^2} \quad (6.10)$$

である。

式(6.7), (6.8)を用いて、式(6.10)の逆変換を求めると

$$\phi_s = - \frac{1}{(2\pi)^2 h} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{in(\theta - \theta_1)} \times \int_0^\infty \lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu_1) d\lambda' \times \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\lambda(\xi - \xi_1)}}{\lambda^2 + \lambda'^2 - M^2(\nu - \lambda - n)^2} d\lambda \quad (6.11)$$

となる。 λ に関する積分を

$$I_\lambda = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\lambda(\xi - \xi_1)}}{\lambda^2 + \lambda'^2 - M^2(\nu - \lambda - n)^2} d\lambda \quad (6.12)$$

とおくと、被積分関数の分母は

$$\lambda^2 + \lambda'^2 - M^2(\nu - \lambda - n)^2 = \beta^2 \left[\left\{ \lambda + \frac{M^2(\nu - n)}{\beta^2} \right\}^2 + \frac{1}{\beta^4} \left\{ \beta^2 \lambda'^2 - M^2(\nu - n)^2 \right\} \right] \quad (6.13)$$

の形にすることができる。

$\beta^2 \lambda'^2 - M^2(\nu - n)^2 > 0$ のとき、 I_λ の被積分関数の分母が0になることはない。この場合は公式¹⁵⁾

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ixy}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|y|}$$

を用いると

$$I_\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2 \lambda'^2 - M^2(\nu - n)^2}} \times \exp \left\{ - \frac{\sqrt{\beta^2 \lambda'^2 - M^2(\nu - n)^2}}{\beta^2} |\xi - \xi_1| - i \frac{M^2(\nu - n)}{\beta^2} (\xi - \xi_1) \right\} \quad (6.14)$$

となる。

$\beta^2 \lambda'^2 - M^2(\nu - n)^2 < 0$ のときは, I_λ の被積分関数の分母を 0 とする λ が存在するから, 小さい正数 ε を導入して, ν を $\nu - i\varepsilon$ と置き換えて積分する。すなわち

$$I_\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(\varepsilon - \varepsilon_1)}}{\lambda^2 + \lambda'^2 - M^2(\nu - i\varepsilon - \lambda - n)^2} d\lambda \quad (6.15)$$

とする。 ε は或る種のエネルギー吸収率¹⁶⁾ と考えることもできるし, また発散振動の発散率¹⁷⁾ と考えることもできて, 上のようにして特異点を避けることは合理的であろう。式 (6.15) の被積分関数の分母は

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + \lambda'^2 - M^2(\nu - i\varepsilon - \lambda - n)^2 \\ &= \beta^2 \left\{ \lambda + \frac{M^2(\nu - i\varepsilon - n)}{\beta^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\beta^2} \sqrt{M^2(\nu - i\varepsilon - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2} \right\} \\ & \quad \times \left\{ \lambda + \frac{M^2(\nu - i\varepsilon - n)}{\beta^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\beta^2} \sqrt{M^2(\nu - i\varepsilon - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

と書くことができ, ε は小さいから

$$\begin{aligned} & \sqrt{M^2(\nu - i\varepsilon - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2} \\ & \approx \sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2} \\ & \quad - i\varepsilon \frac{M^2(\nu - n)}{\sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2}} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{\beta^2} \left\{ M^2(\nu - n) + \sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2} \right\} \\ b_1 &= \frac{M^2}{\beta^2} \left\{ 1 + \frac{\nu - n}{\sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2}} \right\} \\ a_2 &= -\frac{1}{\beta^2} \left\{ M^2(\nu - n) - \sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2} \right\} \\ b_2 &= \frac{M^2}{\beta^2} \left\{ 1 - \frac{\nu - n}{\sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

とおくと, 式 (6.15) は

$$I_\lambda = \frac{1}{2\sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2}}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(\varepsilon - \varepsilon_1)}}{\lambda - a_2 - i\varepsilon b_2} d\lambda \right. \\ & \quad \left. - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(\varepsilon - \varepsilon_1)}}{\lambda - a_1 - i\varepsilon b_1} d\lambda \right\} \quad (6.18) \end{aligned}$$

となる。式 (6.17) において

$$\left| \frac{\nu - n}{\sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2}} \right| > 1 \quad (6.19)$$

であることがわかるから

$$\left. \begin{aligned} \nu - n > 0 \text{ のとき} & \quad b_1 > 0, \quad b_2 < 0 \\ \nu - n < 0 \text{ のとき} & \quad b_1 < 0, \quad b_2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

である。

Fourier 変換対

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy} dy$$

において, $b > 0$ として

$$f(x) = \begin{cases} e^{(-\varepsilon b + ia)x} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

とおくと

$$F(y) = \frac{-i}{y - a - i\varepsilon b}$$

$$f(x) = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixy}}{y - a - i\varepsilon b} dy$$

となるから, $b > 0$ のとき

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixy}}{y - a - i\varepsilon b} dy \\ & = \begin{cases} 2\pi i e^{iax} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.21)$$

である。同様にして $b < 0$ のとき

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixy}}{y - a - i\varepsilon b} dy \\ & = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ -2\pi i e^{iax} & (x < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.22)$$

である。式 (6.20) ~ (6.22) によって

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(\varepsilon - \varepsilon_1)}}{\lambda - a_2 - i\varepsilon b_2} d\lambda$$

$$\begin{aligned}
 & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(\xi - \xi_1)}}{\lambda - a_1 - i\varepsilon b_1} d\lambda \\
 & = \begin{cases} \left. \begin{aligned} & -2\pi i e^{ia_1(\xi - \xi_1)} (\xi - \xi_1 > 0) \\ & -2\pi i e^{ia_2(\xi - \xi_1)} (\xi - \xi_1 < 0) \end{aligned} \right\} (\nu - n > 0) \\ \left. \begin{aligned} & 2\pi i e^{ia_2(\xi - \xi_1)} (\xi - \xi_1 > 0) \\ & 2\pi i e^{ia_1(\xi - \xi_1)} (\xi - \xi_1 < 0) \end{aligned} \right\} (\nu - n < 0) \end{cases} \\
 & \hspace{15em} (6.23)
 \end{aligned}$$

となる。

式(6.17), (6.18), (6.23)から, $\beta^2 \lambda'^2 - M^2 \times (\nu - n)^2 < 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 I_\lambda & = - \frac{i\pi \operatorname{sgn}(\nu - n)}{\sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2}} \\
 & \times \exp i \left\{ - \frac{M^2(\nu - n)}{\beta^2} (\xi - \xi_1) \right. \\
 & \left. - \frac{\sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2}}{\beta^2} |\xi - \xi_1| \right. \\
 & \left. \times \operatorname{sgn}(\nu - n) \right\} \hspace{10em} (6.24)
 \end{aligned}$$

となる。

式(6.11), (6.14), (6.24)によって

$$\begin{aligned}
 \phi_s & = \frac{1}{4\pi h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i \left\{ - \frac{M^2(\nu - n)}{\beta^2} (\xi - \xi_1) + n(\theta - \theta_1) \right\}} \\
 & \times \left\{ i \operatorname{sgn}(\nu - n) \int_0^{\frac{M|\nu - n|}{\beta}} \frac{\lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu_1)}{\sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2}} \right. \\
 & \times e^{-i \frac{\sqrt{M^2(\nu - n)^2 - \beta^2 \lambda'^2}}{\beta^2} |\xi - \xi_1| \operatorname{sgn}(\nu - n)} d\lambda' \\
 & - \int_{\frac{M|\nu - n|}{\beta}}^{\infty} \frac{\lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu_1)}{\sqrt{\beta^2 \lambda'^2 - M^2(\nu - n)^2}} \\
 & \left. \times e^{-\frac{\sqrt{\beta^2 \lambda'^2 - M^2(\nu - n)^2}}{\beta^2} |\xi - \xi_1|} d\lambda' \right\} \hspace{2em} (6.25)
 \end{aligned}$$

が得られる。こうして求められた ϕ_s は, 式(5.27), (5.28)の無限遠の条件を満足することを要求される。実際この条件が満たされることを付録に示す。これは正数 ε を導入して式(6.15)の積分を行ったことによって。仮に ε を負に選んだ場合は, 式(6.24)とは異なる結果になり, 基本特異解として別の解を得ることになるであろう。

7. 積分方程式

式(3.18)において

$$\Phi(\mu, \sigma, \tau, t) = \phi(\mu, \sigma, \tau) e^{i\omega t} \quad (7.1)$$

$$n_{Bm}(\mu, \tau, t) = \bar{n}_{Bm}(\mu, \tau) e^{i\omega t} \quad (7.2)$$

$$\frac{Dn_{Bm}}{Dt} = w_m(\mu, \tau) e^{i\omega t} \quad (7.3)$$

と書くと, プロペラ翼面における境界条件は

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_H} \right|_{\sigma = \theta_m} = w_m \quad (7.4)$$

となる。ここで $\partial/\partial n_H$ は式(3.22)の演算である。

式(3.7)によって

$$w_m = i\omega \bar{n}_{Bm} + 2\Omega \frac{\partial \bar{n}_{Bm}}{\partial \tau} \quad (7.5)$$

である。 w_m を運動学的吹上げ* (の複素振幅) と呼ぶことができる。

式(2.20), (3.7)によって

$$\begin{aligned}
 \phi(\mu, \sigma, \tau) & = i\omega \phi + 2\Omega \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \\
 & = \left(\frac{i\nu}{2} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) (2\Omega \phi) \hspace{2em} (7.6)
 \end{aligned}$$

の関係がある。式(3.6)から $\tau = \sigma + 2x/h$ であるから, $\sigma =$ 一定の螺旋面に沿って無限前方に遡るとき, すなわち $x \rightarrow -\infty$ のとき $\tau \rightarrow -\infty$ となる。無限前方で $\phi = 0$ となるように ϕ を定義して, 式(7.6)を積分すると

$$\phi = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{\tau} \phi(\mu, \sigma, \tau') e^{\frac{i\nu}{2}(\tau' - \tau)} d\tau' \quad (7.7)$$

が得られる。

式(5.30)において, 座標 ξ_1, μ_1, θ_1 を ξ, μ, θ と書き, ξ, μ, θ を ξ', μ', θ' と書き直して, さらにこれらを螺旋座標で表すと

$$\begin{aligned}
 \phi(\mu, \sigma, \tau) & = - \sum_{l=0}^{N-1} \iint_{S_{Hl}} \Delta \phi_l(\mu', \tau') \\
 & \times \left. \frac{\partial \phi_s(\mu', \sigma', \tau'; \mu, \sigma, \tau)}{\partial n'_H} \right|_{\sigma' = \theta_l} dS' \hspace{2em} (7.8)
 \end{aligned}$$

* プロペラでは「吹上げ」と呼ぶのは必ずしも適当ではないが, 便宜上直進翼の場合と同じ呼び方をしておく。

となる。ここで

$$\begin{aligned} \Delta\phi_l(\mu', \tau') &= \phi_U(\mu', \sigma' = \theta_l, \tau') \\ &\quad - \phi_L(\mu', \sigma' = \theta_l, \tau') \end{aligned} \quad (7.9)$$

であって、 θ_l は式(3.9)で与えられる。また式(3.22)によって

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n'_H} &= \frac{1}{h\sqrt{1+\mu'^2}} \left\{ \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma'} \right. \\ &\quad \left. - \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \tau'} \right\} \end{aligned} \quad (7.10)$$

である。 dS' は $\sigma' = \theta_l$ の基準螺旋面上の点 (μ', τ') における曲面要素の面積を表す。

$\sigma = \text{一定}$ の螺旋面上の曲線要素の長さは

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (d\tau)^2 + (\tau d\theta)^2} \Big|_{\sigma = \text{一定}} \\ &= h\sqrt{(d\xi)^2 + (d\mu)^2 + (\mu d\theta)^2} \Big|_{\sigma = \text{一定}} \end{aligned}$$

である。式(3.6)によって

$$d\xi = \frac{d\tau - d\sigma}{2}, \quad d\theta = \frac{d\sigma - d\tau}{2} \quad (7.11)$$

であるから

$$ds = h\sqrt{\frac{1}{4}(1+\mu^2)(d\tau)^2 + (d\mu)^2} \quad (7.12)$$

となる。したがって

$$\left. \begin{aligned} ds \Big|_{\mu = \text{一定}} &= \frac{h}{2} \sqrt{1+\mu^2} d\tau \\ ds \Big|_{\tau = \text{一定}} &= h d\mu \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

が得られる。 $\sigma = \text{一定}$ かつ $\mu = \text{一定}$ の曲線は、明らかに x 軸を軸とする円柱面上にのっている。 $\sigma = \text{一定}$ かつ $\tau = \text{一定}$ の曲線は、式(7.11)によって $x = \text{一定}$ かつ $\theta = \text{一定}$ の曲線であって、これは x 軸に垂直な半直線を表す。すなわち式(7.13)の長さをもつ二つの曲線要素は互に直交する。このことは式(7.12)によってもただちにわかる。したがって $\sigma = \text{一定}$ の螺旋面上の点 (μ, τ) における曲面要素の面積は

$$\begin{aligned} dS &= (ds \Big|_{\mu = \text{一定}}) \cdot (ds \Big|_{\tau = \text{一定}}) \\ &= \frac{h^2}{2} \sqrt{1+\mu^2} d\mu d\tau \end{aligned} \quad (7.14)$$

となる。

式(7.7), (7.8), (7.14)によって

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\mu, \sigma, \tau)}{\partial n_H} \Big|_{\sigma = \theta_m} &= -\frac{h^2}{4Q} \sum_{l=0}^{N-1} \iint_{S_{Hl}} \Delta\phi_l(\mu', \tau') \\ &\quad \times \left[\left\{ \frac{\partial^2}{\partial n'_H \partial n_H} \int_{-\infty}^{\tau} \phi_S(\mu', \sigma', \tau'; \mu, \sigma, \tau'') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times e^{\frac{i\nu}{2}(\tau'' - \tau)} d\tau'' \right\} \Big|_{\substack{\sigma'_l = \theta'_m \\ \sigma = \theta'_l}} \right] \sqrt{1+\mu'^2} \\ &\quad \times d\mu' d\tau' \end{aligned} \quad (7.15)$$

の関係が得られる。式(7.15)は、ある一つのプロペラ翼面上の吹上げを、すべてのプロペラ翼の上下面の加速度ポテンシャルの差で表す式である。式(6.25)から

$$\begin{aligned} \phi_S(\mu', \sigma', \tau'; \mu, \sigma, \tau'') &= \frac{1}{4\pi h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{2\beta^2} \{M^2(\nu-n)\right. \\ &\quad \left. \times (\sigma' - \tau' - \sigma + \tau'') + \beta^2 n(\sigma' + \tau' - \sigma - \tau'')\} \right] \\ &\quad \times \left\{ i \operatorname{sgn}(\nu-n) \int_0^B \frac{L}{r_1} \right. \\ &\quad \times e^{-\frac{i\tau_1}{2\beta^2} |\sigma' - \tau' - \sigma + \tau''| \operatorname{sgn}(\nu-n)} d\lambda' \\ &\quad \left. - \int_B^{\infty} \frac{L}{r_2} e^{-\frac{i\tau_2}{2\beta^2} |\sigma' - \tau' - \sigma + \tau''|} d\lambda' \right\} \end{aligned} \quad (7.16)$$

と書くことができる。ここで

$$B = \frac{M|\nu-n|}{\beta} \quad (7.17)$$

$$L = \lambda' J_n(\lambda' \mu') J_n(\lambda' \mu) \quad (7.18)$$

$$r_1 = \sqrt{M^2(\nu-n)^2 - \beta^2 \lambda'^2} \quad (7.19)$$

$$r_2 = \sqrt{\beta^2 \lambda'^2 - M^2(\nu-n)^2} \quad (7.20)$$

とおいた。

式(7.15)において

$$\begin{aligned} P(\mu, \sigma, \tau; \mu', \sigma', \tau') &\equiv 4\pi h \int_{-\infty}^{\tau} \phi_S(\mu', \sigma', \tau'; \mu, \sigma, \tau'') \\ &\quad \times e^{\frac{i\nu}{2}(\tau'' - \tau)} d\tau'' \\ &= 4\pi h e^{\frac{i\nu}{2}(\tau' - \tau)} \int_{-\infty}^{\tau} \phi_S e^{\frac{i\nu}{2}(\tau'' - \tau')} d\tau'' \end{aligned} \quad (7.21)$$

とおくと、式(7.16)によって、 $\tau - \tau' - \sigma + \sigma' < 0$
 のときは($\sigma' - \tau' - \sigma + \tau'' < 0$ である)

$$\begin{aligned}
 P = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{i}{2\beta^2} \{ M^2(\nu-n) + \beta^2 n \} \right. \\
 & \times (\sigma - \sigma') - \frac{i\nu}{2} (\tau - \tau') \left. \right] \\
 & \times \left[i \operatorname{sgn}(\nu-n) \int_0^B \frac{L}{r_1} \right. \\
 & \times e^{-\frac{i r_1}{2\beta^2} (\sigma - \sigma') \operatorname{sgn}(\nu-n)} d\lambda' \\
 & \times \int_{-\infty}^{\tau} e^{\frac{i}{2\beta^2} \{ r_1 \operatorname{sgn}(\nu-n) + \nu-n \} (\tau'' - \tau')} d\tau'' \\
 & - \int_B^{\infty} \frac{L}{r_2} e^{-\frac{i r_2}{2\beta^2} (\sigma - \sigma')} d\lambda' \\
 & \left. \times \int_{-\infty}^{\tau} e^{\frac{i}{2\beta^2} \{ r_2 + i(\nu-n) \} (\tau'' - \tau')} d\tau'' \right] \quad (7.22)
 \end{aligned}$$

また $\tau - \tau' - \sigma + \sigma' > 0$ のときは、 τ'' に関する積分を
 $\sigma' - \tau' - \sigma + \tau'' < 0$ の範囲と $\sigma' - \tau' - \sigma + \tau'' > 0$ の範
 囲のものに分けて

$$\begin{aligned}
 P = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{i}{2\beta^2} \{ M^2(\nu-n) + \beta^2 n \} \right. \\
 & \times (\sigma - \sigma') - \frac{i\nu}{2} (\tau - \tau') \left. \right] \\
 & \times \left[i \operatorname{sgn}(\nu-n) \int_0^B \frac{L}{r_1} \right. \\
 & \times e^{-\frac{i r_1}{2\beta^2} (\sigma - \sigma') \operatorname{sgn}(\nu-n)} d\lambda' \\
 & \times \int_{-\infty}^{\tau' + \sigma - \sigma'} e^{\frac{i}{2\beta^2} \{ r_1 \operatorname{sgn}(\nu-n) + \nu-n \} (\tau'' - \tau')} d\tau'' \\
 & + i \operatorname{sgn}(\nu-n) \int_0^B \frac{L}{r_1} e^{\frac{i r_1}{2\beta^2} (\sigma - \sigma') \operatorname{sgn}(\nu-n)} d\lambda' \\
 & \times \int_{\tau' + \sigma - \sigma'}^{\tau} e^{\frac{i}{2\beta^2} \{ -r_1 \operatorname{sgn}(\nu-n) + \nu-n \} (\tau'' - \tau')} d\tau'' \\
 & - \int_B^{\infty} \frac{L}{r_2} e^{-\frac{i r_2}{2\beta^2} (\sigma - \sigma')} d\lambda' \\
 & \left. \times \int_{-\infty}^{\tau' + \sigma - \sigma'} e^{\frac{i}{2\beta^2} \{ r_2 + i(\nu-n) \} (\tau'' - \tau')} d\tau'' \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_B^{\infty} \frac{L}{r_2} e^{\frac{i r_2}{2\beta^2} (\sigma - \sigma')} d\lambda' \\
 & \times \int_{\tau' + \sigma - \sigma'}^{\tau} e^{\frac{i}{2\beta^2} \{ -r_2 + i(\nu-n) \} (\tau'' - \tau')} d\tau'' \left. \right] \quad (7.23)
 \end{aligned}$$

となる。式(7.22)の中の

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{\frac{i}{2\beta^2} \{ r_1 \operatorname{sgn}(\nu-n) + \nu-n \} (\tau'' - \tau')} d\tau''$$

と、式(7.23)の中の

$$\int_{-\infty}^{\tau' + \sigma - \sigma'} e^{\frac{i}{2\beta^2} \{ r_1 \operatorname{sgn}(\nu-n) + \nu-n \} (\tau'' - \tau')} d\tau''$$

においては、式(6.15)と同じように $\nu - i\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$)
 と置き換えて積分を行った後、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取る
 ことにする。 τ'' に関する他の積分は容易に求められ
 る。こうして求められた二つの場合の P をまとめて
 $P(\mu, \sigma, \tau; \mu', \sigma', \tau')$

$$\begin{aligned}
 & = -4H(T) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2} \{ (\nu-2n)(\sigma - \sigma') - \nu(\tau - \tau') \}} \\
 & \times \int_0^{\infty} \frac{\lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu')}{\lambda'^2 + (\nu-n)^2} d\lambda' \\
 & + 2\beta^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^B \frac{\lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu')}{r_1 (-s_T r_1 + |\nu-n|)} \\
 & \times \exp \left[\frac{i}{2\beta^2} \{ s_\nu s_T r_1 - M^2(\nu-n) - \beta^2 n \} \right. \\
 & \times (\sigma - \sigma') + \frac{i}{2\beta^2} (-s_\nu s_T r_1 + \nu-n - \beta^2 \nu) \\
 & \left. \times (\tau - \tau') \right] d\lambda' \\
 & + 2\beta^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_B^{\infty} \frac{\lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu')}{r_2 \{ s_T r_2 - i(\nu-n) \}} \\
 & \times \exp \left[\frac{1}{2\beta^2} \{ s_T r_2 - iM^2(\nu-n) - i\beta^2 n \} \right. \\
 & \times (\sigma - \sigma') + \frac{1}{2\beta^2} \{ -s_T r_2 + i(\nu-n) \\
 & \left. - i\beta^2 \nu \} (\tau - \tau') \right] d\lambda' \quad (7.24)
 \end{aligned}$$

のように書くことができる。ここで

$$T = \tau - \tau' - \sigma + \sigma' \quad (7.25)$$

$$H(T) = \begin{cases} 1 & (T > 0) \\ 0 & (T < 0) \end{cases} \quad (7.25a)$$

$$\left. \begin{aligned} s_\nu &= \text{sgn}(\nu - n) \\ s_T &= \text{sgn}(T) \end{aligned} \right\} \quad (7.25b)$$

である。式 (7.24) の第 1 項の積分は、 $\nu - n \neq 0$ のとき (文献 18, p.429)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu')}{\lambda'^2 + (\nu - n)^2} d\lambda' \\ &= \begin{cases} K_n(|\nu - n| \mu) I_n(|\nu - n| \mu') (\mu > \mu') \\ K_n(|\nu - n| \mu) K_n(|\nu - n| \mu') (\mu' > \mu) \end{cases} \quad (7.26) \end{aligned}$$

となる。ここで I_n, K_n は変形された Bessel 関数である。また $\nu - n = 0$ のときは (文献 18, p.405)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu')}{\lambda'^2} d\lambda' \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2n} \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^n & (\mu > \mu') \\ \frac{1}{2n} \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^n & (\mu' > \mu) \end{cases} \quad (7.27) \end{aligned}$$

となる。

つきに式 (7.15) における n_H と n'_H による微分を行わなければならない。これは式 (7.24) において、 $T < 0$ の側と $T > 0$ の側とを別々に微分する。式 (7.24) の P の、 $T \rightarrow 0^-$ のときの形と、 $T \rightarrow 0^+$ のときの形は同じになって

$$\begin{aligned} & P \Big|_{\tau - \tau' = \sigma - \sigma'} \\ &= 2\beta^2 \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-in(\sigma - \sigma')} \\ & \times \left[\int_0^B \frac{\lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu')}{r_1(r_1 + |\nu - n|)} d\lambda' \right. \\ & \left. - \int_B^\infty \frac{\lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu')}{r_2\{r_2 + i(\nu - n)\}} d\lambda' \right] \quad (7.28) \end{aligned}$$

である。したがって式 (7.28) が有限に留まる限り、 P は $T = 0$ において連続である。 $\partial P / \partial n'_H$ の表式を示すことは省略するが、やはり $T \rightarrow 0^-$ のときの形と、 $T \rightarrow 0^+$ のときの形が同じになることを示すことができる。したがって同様のことが言える。

式 (7.15) の角括弧の内部を

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2}{\partial n'_H \partial n_H} \int_{-\infty}^\tau \phi_S e^{\frac{i\nu}{2}(\tau'' - \tau)} d\tau'' \right\} \Big|_{\substack{\sigma'_T = \theta'_m \\ \sigma'_T = \theta'_l}} \\ &= -\frac{1}{\pi h^3 \sqrt{1 + \mu^2} \sqrt{1 + \mu'^2}} Q_{ml}(\mu, \tau; \mu', \tau') \quad (7.29) \end{aligned}$$

と書くと、式 (7.21), (7.24), (3.22), (7.10) によって

$$\begin{aligned} Q_{ml} &= -\frac{1}{4} h^2 \sqrt{1 + \mu^2} \sqrt{1 + \mu'^2} \frac{\partial^2 P}{\partial n'_H \partial n_H} \Big|_{\substack{\sigma'_T = \theta'_m \\ \sigma'_T = \theta'_l}} \\ &= H(T) e^{\frac{i\nu}{2}(\theta_m - \theta_l)} e^{-\frac{i\nu}{2}(\tau - \tau')} \\ & \times \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-in(\theta_m - \theta_l)} \left\{ (\nu - n) \mu - \frac{n}{\mu} \right\} \\ & \times \left\{ (\nu - n) \mu' - \frac{n}{\mu'} \right\} \\ & \times \int_0^\infty \frac{\lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu')}{\lambda'^2 + (\nu - n)^2} d\lambda' \\ & - \frac{1}{2\beta^2} e^{-\frac{i\nu}{2\beta^2} M^2(\theta_m - \theta_l)} e^{\frac{i\nu}{2\beta^2} M^2(\tau - \tau')} \\ & \times \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-\frac{in}{2\beta^2} (1 - 2M^2)(\theta_m - \theta_l)} e^{-\frac{in}{2\beta^2} (\tau - \tau')} \\ & \times \left[\int_0^B \frac{\lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu')}{r_1(-s_T r_1 + |\nu - n|)} \right. \\ & \times \left[\{-s_\nu s_T r_1 + M^2(\nu - n)\} \mu + \frac{\beta^2 n}{\mu} \right] \\ & \times \left[\{-s_\nu s_T r_1 + M^2(\nu - n)\} \mu' + \frac{\beta^2 n}{\mu'} \right] \\ & \times e^{-\frac{i}{2\beta^2} (\tau - \tau' - \theta_m + \theta_l) s_\nu s_T r_1} d\lambda' \\ & + \int_B^\infty \frac{\lambda' J_n(\lambda' \mu) J_n(\lambda' \mu')}{r_2\{-s_T r_2 + i(\nu - n)\}} \\ & \times \left[\{-s_T r_2 + iM^2(\nu - n)\} \mu + \frac{i\beta^2 n}{\mu} \right] \\ & \times \left[\{-s_T r_2 + iM^2(\nu - n)\} \mu' + \frac{i\beta^2 n}{\mu'} \right] \\ & \times e^{-\frac{1}{2\beta^2} (\tau - \tau' - \theta_m + \theta_l) s_T r_2} d\lambda' \left. \right] \quad (7.30) \end{aligned}$$

となる。ここでは

$$T = \tau - \tau' - \theta_m + \theta_l \quad (7.31)$$

である。

式(7.4), (7.15), (7.29)を用いると

$$w_m(\mu, \tau) = \frac{1}{4\pi U \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{l=0}^{N-1} \iint_{S_{HI}} \Delta\phi_l(\mu', \tau') \times Q_{ml}(\mu, \tau; \mu', \tau') d\mu' d\tau' \quad (m=0, 1, \dots, N-1) \quad (7.32)$$

が得られる。式(7.32)は $w_m (m=0, 1, \dots, N-1)$ を与えて、 $\Delta\phi_l (l=0, 1, \dots, N-1)$ を求めるための連立積分方程式と見なすことができる。 Q_{ml} は核である。 Q_{ml} は $m=l$ かつ $\mu=\mu'$ のとき、 $T=0$ すなわち $\tau=\tau'$ において無限大の跳びを生じることを示すことができる。これは核の特異性の現れである。元来、式(7.15)の右辺においては、 $\sigma \equiv \theta_m$ として おいて μ' と τ' に関する積分を行い、しかる後 $\sigma \rightarrow \theta_m$ とすべきものを、積分と極限移行の順序を交換したために上の特異性を生じたと考えることができる。このような特異核をもつ積分は、直進翼の場合²⁰⁾からの類推によって Hadamard の有限部分を取ることによればよいであろう。しかし核の特異性についての立入った検討は本論文では行わない。

式(7.32)において w_m と $\Delta\phi_l$ を無次元化し、また核も

$$K_{ml}(\mu, \tau; \mu', \tau') = \frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2} Q_{ml}(\mu, \tau; \mu', \tau') \quad (7.33)$$

と置換えると

$$\frac{w_m(\mu, \tau)}{U\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{1}{8\pi} \sum_{l=0}^{N-1} \iint_{S_{HI}} \frac{\Delta\phi_l(\mu', \tau')}{\frac{1}{2}U^2(1+\mu'^2)} \times K_{ml}(\mu, \tau; \mu', \tau') d\mu' d\tau' \quad (m=0, 1, \dots, N-1) \quad (7.34)$$

の形となる。左辺は螺旋速度で無次元化した運動学的吹上げである。また $\Delta\phi_l / \{(1/2)U^2(1+\mu'^2)\}$ は、式(2.19)を参照して、螺旋速度の動圧で無次元化した空気力学的荷重(下面と上面の圧力の差)であることがわかる。

8. む す び

圧縮流中で振動するプロペラに作用する空気力学的荷重を、線形理論の範囲内で算定するための揚力面理論を、連立積分方程式の形に定式化した。積分方程式の数値解法については別の機会に報告することにしたい。

おわりに、有益なご教示を賜わり、貴重な文献をご恵与下さった花岡達郎博士に感謝します。

付録 随伴方程式の基本特異解が
無限遠の条件を満たすこと
の証明

式 (6.25) として求められ随伴方程式の基本特異
解

$$\begin{aligned} \psi_S = & \frac{1}{4\pi h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\{-\frac{M^2(\nu-n)}{\beta^2}(\xi-\xi_1)+n(\theta-\theta_1)\}} \\ & \times \left\{ i \operatorname{sgn}(\nu-n) \int_0^{\frac{M|\nu-n|}{\beta}} \frac{\lambda' J_n(\lambda'\mu) J_n(\lambda'\mu_1)}{\sqrt{M^2(\nu-n)^2 - \beta^2 \lambda'^2}} \right. \\ & \times e^{-i\frac{\sqrt{M^2(\nu-n)^2 - \beta^2 \lambda'^2}}{\beta^2} |\xi-\xi_1| \operatorname{sgn}(\nu-n)} d\lambda' \\ & - \int_0^{\infty} \frac{\lambda' J_n(\lambda'\mu) J_n(\lambda'\mu_1)}{\sqrt{\beta^2 \lambda'^2 - M^2(\nu-n)^2}} \\ & \left. \times e^{-\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 \lambda'^2 - M^2(\nu-n)^2}} |\xi-\xi_1|} d\lambda' \right\} \end{aligned} \quad (A.1)$$

が式 (5.27), (5.28) の無限遠の条件, すなわち $r^* \rightarrow \infty$ のとき

$$r^* \psi_S : \text{有界} \quad (A.2)$$

$$r^* \left\{ \frac{\partial \psi_S}{\partial r^*} + \frac{1+M \cos \theta^*}{a\beta} \left(i\omega \psi_S - \Omega \frac{\partial \psi_S}{\partial \phi^*} \right) \right\} \rightarrow 0 \quad (A.3)$$

を満足することを証明する。

関係式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(\theta'-\theta_1)+in'(\theta-\theta')} d\theta' \\ & = \begin{cases} e^{in(\theta-\theta_1)} & (n'=n) \\ 0 & (n' \neq n) \end{cases} \end{aligned}$$

と, J_0 に関する Neumann の加法定理

$$\begin{aligned} & J_0(\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}) \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) J_n(r') e^{in\theta} \end{aligned}$$

を用いると, 式 (A.1) において

$$\begin{aligned} & e^{in(\theta-\theta_1)} J_n(\lambda'\mu) J_n(\lambda'\mu_1) \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(\theta'-\theta_1)} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} J_{n'}(\lambda'\mu) J_{n'}(\lambda'\mu_1) \\ & \times e^{in'(\theta-\theta')} d\theta' \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(\theta'-\theta_1)} J_0(\lambda'\eta) d\theta' \quad (A.4)$$

と表される。ここで

$$\eta = \sqrt{\mu^2 + \mu_1^2 - 2\mu\mu_1 \cos(\theta-\theta')} \quad (A.5)$$

である。また公式^{18),19)}

$$\begin{aligned} \frac{e^{\pm ib\sqrt{y^2+a^2}}}{\sqrt{y^2+a^2}} & = \pm i \int_0^b \frac{x e^{\pm ia\sqrt{b^2-x^2}}}{\sqrt{b^2-x^2}} J_0(xy) dx \\ & + \int_b^{\infty} \frac{x e^{-a\sqrt{x^2-b^2}}}{\sqrt{x^2-b^2}} J_0(xy) dx \end{aligned}$$

が $a > 0, b > 0$ に対して成立する。式 (A.4) と上の
公式を用いると, 式 (A.1) は

$$\begin{aligned} \psi_S = & -\frac{1}{8\pi^2 \beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{M^2(\nu-n)}{\beta^2}(\xi-\xi_1)} \\ & \times \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\frac{M(\nu-n)}{\beta} \sqrt{(\frac{\xi-\xi_1}{\beta})^2 + \eta^2}}}{h \sqrt{(\frac{\xi-\xi_1}{\beta})^2 + \eta^2}} \\ & \times e^{in(\theta'-\theta_1)} d\theta' \\ = & -\frac{1}{8\pi^2 \beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{M(\omega-n\Omega)}{a\beta^2}(x-x_1)} \\ & \times \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\frac{\omega-n\Omega}{a\beta} \sqrt{(\frac{x-x_1}{\beta})^2 + (h\eta)^2}}}{\sqrt{(\frac{x-x_1}{\beta})^2 + (h\eta)^2}} \\ & \times e^{in(\theta'-\theta_1)} d\theta' \end{aligned} \quad (A.6)$$

となる。

式 (2.11), (5.23) によって, 円柱座標 x, r, θ
と扁球座標 r^*, θ^*, ϕ^* の関係を

$$\left. \begin{aligned} x & = \beta r^* \cos \theta^* \\ r & = r^* \sin \theta^* \\ \theta & = \phi^* \end{aligned} \right\} \quad (A.7)$$

とすることができる。扁球座標では, 式 (A.6) は

$$\psi_S = -\frac{1}{8\pi^2 \beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{M(\omega-n\Omega)}{a\beta}(r^* \cos \theta^* - \eta \cos \theta_1^*)}$$

$$\times \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\frac{\omega-n\Omega}{a\beta}R^*}}{R^*} e^{in(\phi^{*'}-\phi_1^*)} d\phi^{*'} \quad (\text{A.8})$$

と書かれる。ここで

$$\begin{aligned} R^* &\equiv \sqrt{\left(\frac{x-x_1}{\beta}\right)^2 + (h\eta)^2} \\ &= [r^{*2} + \tau_1^{*2} - 2r^*\tau_1^* \{ \cos\theta^* \cos\theta_1^* \\ &\quad + \sin\theta^* \sin\theta_1^* \cos(\phi^* - \phi^{*'}) \}]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

である。

まず式 (A.2) を証明する。δ 関数列の Fourier 級数展開 (文献 14, p.192)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$$

を用いると、式 (A.8) は

$$\begin{aligned} \phi_s &= -\frac{1}{8\pi^2\beta} e^{-\frac{iM\omega}{a\beta}(r^*\cos\theta^* - \tau_1^*\cos\theta_1^*)} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{i\omega}{a\beta}R^*}}{R^*} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp in \\ &\quad \times \left\{ \frac{M\Omega}{a\beta} (r^*\cos\theta^* - \tau_1^*\cos\theta_1^*) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Omega}{a\beta} R^* + \phi^{*'} - \phi_1^* \right\} d\phi^{*'} \\ &= -\frac{1}{4\pi\beta} e^{-\frac{iM\omega}{a\beta}(r^*\cos\theta^* - \tau_1^*\cos\theta_1^*)} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{i\omega}{a\beta}R^*}}{R^*} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\{f(\phi^{*'}) - 2n\pi\} d\phi^{*'} \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

と書くことができる。ここで

$$\begin{aligned} f(\phi^{*'}) &= \frac{\Omega}{a\beta} R^* + \phi^{*'} - \phi_1^* \\ &\quad + \frac{M\Omega}{a\beta} (r^*\cos\theta^* - \tau_1^*\cos\theta_1^*) \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

である。式 (A.10) において

$$I_{\phi^{*'}}^* = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{i\omega}{a\beta}R^*}}{R^*} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\{f(\phi^{*'}) - 2n\pi\} d\phi^{*'} \quad (\text{A.12})$$

とおく。式 (A.9) によって、 R^* は $\phi^{*'}$ の周期関数であるから、 $0 \leq \phi^{*' < 2\pi$, $-\infty < n < \infty$ の範囲で $f(\phi^{*'}) - 2n\pi = 0$ となる $\phi^{*'}$ の値は少くとも 1 個は存在し、且つ有限個しかない。その中の一つを ϕ^* とすると

$$I_{\phi^{*'}}^* = \sum_{\phi^{*'}} \frac{e^{-\frac{i\omega}{a\beta}R^*}}{R^*} \frac{1}{f'(\phi^{*'})} \Big|_{\phi^{*'}=\phi^*} \quad (\text{A.13})$$

となる。式 (A.11), (A.9) から

$$\left. \begin{aligned} f'(\phi^{*'}) &= \frac{\Omega}{a\beta} \frac{\partial R^*}{\partial \phi^{*'}} + 1 \\ \frac{\partial R^*}{\partial \phi^{*'}} &= \frac{r^*\tau_1^* \sin\theta^* \sin\theta_1^* \sin(\phi^{*'} - \phi^*)}{R^*} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.14})$$

を得る。式 (A.9) から、 $r^* \rightarrow \infty$ のとき $R^* \rightarrow r^*$ であるから、上式によって、 $r^* \rightarrow \infty$ のとき

$$f'(\phi^{*'}) = O(1) \quad (\text{A.15})$$

である。したがって、式 (A.13) によって、 $r^* \rightarrow \infty$ のとき

$$r^* I_{\phi^{*'}}^* : \text{有界}$$

であって、さらに式 (A.10) によって

$$r^* \phi_s : \text{有界}$$

となる。

式 (A.3) を証明するため、式 (A.8) において

$$F = \frac{e^{-\frac{i\omega-n\Omega}{a\beta}R^*}}{R^*} \quad (\text{A.16})$$

とおくと

$$\frac{\partial F}{\partial r^*} = -\left(i\frac{\omega-n\Omega}{a\beta} + \frac{1}{R^*}\right) F \frac{\partial R^*}{\partial r^*}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_s}{\partial r^*} &= -\frac{1}{8\pi^2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G \int_0^{2\pi} F e^{in(\phi^{*'}-\phi_1^*)} \\ &\quad \times \left\{ -i\frac{\omega-n\Omega}{a\beta} \left(M\cos\theta^* + \frac{\partial R^*}{\partial r^*} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R^*} \frac{\partial R^*}{\partial r^*} \right\} d\phi^{*'} \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$G = \exp\left\{-i\frac{M(\omega-n\Omega)}{a\beta}(r^*\cos\theta^* - r^*\cos\theta_1^*)\right\} \quad (\text{A.18})$$

である。つぎに、式 (A.9) によって

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial \phi^*} e^{in(\phi^* - \phi_1^*)} d\phi^* \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial \phi^{*'}} e^{in(\phi^{*'} - \phi_1^*)} d\phi^{*'} \\ &= in \int_0^{2\pi} F e^{in(\phi^{*'} - \phi_1^*)} d\phi^{*'} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_s}{\partial \phi^*} &= - \frac{1}{8\pi^2 \beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G \\ & \times in \int_0^{2\pi} F e^{in(\phi^{*'} - \phi_1^*)} d\phi^{*'} \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

となる。式 (A.8), (A.17), (A.19) によって

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_s}{\partial r^*} + \frac{1+M\cos\theta^*}{a\beta} \left(i\omega\phi_s - \Omega \frac{\partial \phi_s}{\partial \phi^*} \right) \\ = - \frac{1}{8\pi^2 \beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G \int_0^{2\pi} F e^{in(\phi^{*'} - \phi_1^*)} \\ \times \left\{ i \frac{\omega - n\Omega}{a\beta} \left(1 - \frac{\partial R^*}{\partial r^*} \right) - \frac{1}{R^*} \frac{\partial R^*}{\partial r^*} \right\} d\phi^{*'} \end{aligned}$$

を得る。式 (A.9) を

$$\left. \begin{aligned} R^* &= \sqrt{r^{*2} + r_1^{*2} - 2r^*r_1^*g} \\ g &= \cos\theta^* \cos\theta_1^* + \sin\theta^* \sin\theta_1^* \cos(\phi^* - \phi^{*'}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.21})$$

と書くと、 $r^* \rightarrow \infty$ のとき

$$R^* \approx r^* - r_1^*g + \frac{r_1^{*2}}{2r^*}$$

であるから

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\partial R^*}{\partial r^*} &= \frac{R^* - r^* + r_1^*g}{R^*} \approx \frac{r_1^{*2}}{2r^{*2}} \\ \frac{1}{R^*} \frac{\partial R^*}{\partial r^*} &\approx \frac{1}{r^*} \end{aligned}$$

となり、式 (A.20) において、 $r^* \rightarrow \infty$ のとき

$$i \frac{\omega - n\Omega}{a\beta} \left(1 - \frac{\partial R^*}{\partial r^*} \right) - \frac{1}{R^*} \frac{\partial R^*}{\partial r^*} \approx - \frac{1}{r^*} \quad (\text{A.22})$$

である。したがって式 (A.8), (A.20), (A.22) によって、 $r^* \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_s}{\partial r^*} + \frac{1+M\cos\theta^*}{a\beta} \left(i\omega\phi_s - \Omega \frac{\partial \phi_s}{\partial \phi^*} \right) \\ \approx - \frac{1}{r^*} \phi_s \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

となり、式 (A.3) が証明された。

引用文献

- 1) Kuessner, H. G. : Allgemeine Tragflaechentheorie, Luftfahrtforschung, Vol.17, No.11 /12, 1940, pp.370-378.
- 2) Landahl, M. T. : Unsteady Transonic Flow, Pergamon Press, 1961.
- 3) Namba, M. : Lifting Surface Theory for a Rotating Subsonic or Transonic Blade Row, Aeronautical Research Council R. & M. No.3740, 1974.
- 4) 近藤一夫 : 翼およびプロペラの理論における圧縮性流体の小変歪問題について, 九州帝国大学工学部彙報, 第17巻, 第4号, 1942, pp.195-226 ; On the Potential-Theoretical Fundamentals of the Aerodynamics of Screw Propellers at High Speed, 東京大学工学部紀要, 第25巻, 第1号, 1957, pp.1-39.
- 5) Hanaoka, T : Hydrodynamics of an Oscillating Screw Propeller, The 4th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, 1962.
- 6) Hanson, D. B. : Compressible Helicoidal Surface Theory for Propeller Aerodynamics and Noise, AIAA Journal, Vol.21, No.6, 1983, pp.881-889.
- 7) Hanson, D. B. : Compressible Lifting Surface Theory for Propeller Performance Calculation, Journal of Aircraft, Vol.22, No.1, 1985, pp.19-27.
- 8) Tai, H. and Runyan, H. L. : Lifting Surface Theory for a Helicopter Rotor in Forward Flight, NASA Tech. Memo. 86315, 1984.
- 9) Lamb, H. : Hydrodynamics, 6th edition, Cambridge Univ. Press, 1932, p.12.

- 10) Reissner, E. : Boundary Value Problems in Aerodynamics of Lifting Surfaces in Non-Uniform Motion, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol.5, No.9, 1949, pp.825-850.
- 11) 市川輝雄 : 亜音速流中で振動する翼およびプロペラの理論における無限遠の条件 (航空宇宙技術研究所報告として刊行の予定)。
- 12) Davidson, R. E. : Linearized Potential Theory of Propeller Induction in a Compressible Flow, NACA Tech. Note 2983, 1953.
- 13) 吉田耕作 : 微分方程式の解法, 第2版, 岩波書店, 1978.
- 14) 今井 功 : 応用超関数論 I, サイエンス社, 1981.
- 15) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信 : 数学公式 II, 岩波書店, 1957, p.275.
- 16) スミルノフ : 高等数学教程10, 共立出版株式会社, 1962, p.650.
- 17) Whitehead, D. S. : Vibration and Sound Generation in a Cascade of Flat Plates in Subsonic Flow, Aeronautical Research Council R. & M. No.3685, 1972.
- 18) Watson, G. N. : A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd edition, Cambridge University Press, 1944, p.416.
- 19) Erdelyi, A. (ed.) : Tables of Integral Transforms, Vol. II, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1954, p.9.
- 20) Multhopp, H. : Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting-Surface Theory), Appendix I, Aeronautical Research Council R. & M. No.2884, 1950.

航空宇宙技術研究所報告 943号

昭和62年8月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社三興印刷
東京都新宿区信濃町12三河ビル
