

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-949

超音速三次元流に対する特性曲線法について

野 溝 国 生

DP-55

1987年10月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

超音速三次元流に対する特性曲線法について*

野 溝 国 生**

Normal Force Coefficient of Supersonic Flows over Conical Flare, Cone-cylinder and Conical Boattails

by

Kunio Nomizo

Abstract

A numerical calculation of the supersonic flow of a perfect gas over conical flares, cone-cylinder and conical boattail at a small angle of attack was performed. The Allen. E. PUCKETT method was found to be useful for predicting the flow field about conical flares with slope abnormalities.

The relationship of the normal force distribution between linearized theory and the present method is shown.

The normal force distribution calculated by the present method was found to be smaller than that of linearized theory as a whole.

Linearized theory estimates the density of gas to be thicker than that of present theory. The present method was simplified by eliminating the density terms.

According to the linearized theory, the normal force coefficient is determined by the area ratio of a flare or boattail and is constant along the flare or boattail surface. However, the present method shows that the normal force coefficient decreases downstream, since the density of a gas decreases as it flows downstream.

Even if the mach number varies, linearized theory shows that normal force is constant. But present theory shows that normal force decreases as mach number increases for flare and boattails an exact analytical solution is obtained for supersonic flow along with a slightly inclined circular cone. The governing equations are simplified by eliminating the density terms, and the after-body of a cone cylinder was calculated by the present method.

In the present paper, we also investigate overexpanded sonic jets through axisymmetric conical nozzles and investigated the effect of pressure and mach number of super sonic jets.

* 昭和62年9月7日 受付

** 宇宙研究グループ

1. 序 論

超音速流中の三次元軸対称物体の理論的取扱いは、厳密な方程式については、解析、数値的取扱いが、一般に困難であり、多くの労力を要する。又線型化された方程式の解は、しばしば発散し、信頼できる解を得ることが難しい。これに対し特性曲線法は厳密方程式のまま、信頼しうる解が求められるが、三次元形式の繁雑さから、従来あまり多くの研究が見られない。この報告は特性曲線法を実用的にある程度の近似を行い、比較的簡単に信頼できる解を得る方法を示した。

実例として、円錐フレアー、円錐ポートテイル、円錐-円筒物体について考察した。

しかし、フレアーについての垂直力計算は発表された例がきわめて少なく、かなりあらい近似計算、たとえば、円錐の一部としての計算などが実用化されているにすぎない。

フレアーと反対に胴体断面積を減少させる。ポートテイルについては、これが円柱部の後方につけられているものとし、全機の重心は円柱側の中心線上にあるとし、一様流に対し、重心のまわりの微小な迎角を問題とする。その時ポートテイルには迎角を増大させる力が働き、すなわち機体を不安定化する作用をもつ。このようなポートテイルの垂直力に関する計算は、筆者の知るかぎりでは未公刊の文献の簡単な結果のみ紹介されたにすぎない⁸⁾。又半経験的な方法として文献⁹⁾があるが、ロケット全体の垂直力傾斜を測定したにとどまり、細部の解析は行われていない。

本研究に於ては、まず迎角のない場合について特性曲線法を用いて解き、その場合の流線に沿って座標軸を各メッシュについて定めて、迎角のある場合の流れを解析した。(三次元流となる)

座標軸が流線に沿って変ると座標変換を各メッシュについて行わなければならないが直角座標のため、解析は容易である。又ポテンシャル流として解析してあるため、一変数として解析出来る。

又円錐-円筒物体については、先端部に続く、平行胴体部に働く垂直力はしばしば先端部にかゝるものと同程度に達し、ロケット空力性能計算の際重要

な問題になる。従来、これについての実験値は、いくつか発表されているが、計算は高マッハ数に適当な、Newtonian flowあるいはShock-expansion法によるものがほとんどである^{1)~21)}その理由は円錐-円筒部のつぎめのところは、解析的不連続点に相当し、解析が困難なため、そのような困難を含まない近似的手法として、Newtonian flowあるいは、Shock-expansion法が用いられるわけである。この方法は解の発散を伴わず比較的簡単に近似解が求まるのが特長である。

linearized characteristics methodはV. Rakich等によって行われているが、V. Rakichの方法は密度項が入ってくるために数値解ではあるが計算方法が差分法的であり複雑である。又フレアーの肩のところのような解析的不連続な点についてはあまり適当でない。

又円錐の垂直力傾斜についてはStone²²⁾等の論文があるが、これも又密度項を含んでいる。

密度項を近似的に消去した論文としては、Robert T. Doty²³⁾等の論文がある。

本研究に於ける解法は、ポテンシャルをひとつの変数とした差分法に属するものであり、他の変数を含まない。今までの解法と比して、特性曲線法と、差分法を混合して使っている点に特長がある。

本計算は従来厳密解の少い迎角問題について、厳密な方程式にもとづく特性曲線法によって、解を求めたのであるが、計算中に摂動項に関しては、線型化して計算することにより著しく計算能率を上げることが出来る。

又超音速の一様流に対して、コーンが微小に傾いて置かれた場合の解については、Stoneが線型的な方法で計算を遂行し得ることを示し、SimやKopalによって計算が行われた。

又本報告に於て、軸対称ノズルを通過する超音速流を理論的に計算し、超音速流のマッハ数と圧力の影響を調べた。そしてノズル軸上に於ける周期性を調べた。

2. 記 号

C_N : 垂直力係数, $N/(q_\infty \cdot \pi \cdot R^2)$

$C_{N\alpha}$: 垂直力係数傾斜 $(dC_N/d\alpha)_{\alpha=0}$

- C_{PO} : 迎角のない場合の圧力係数
- C_{PD} : " ある "
- C_{PC} : 横断流による圧力係数
- C : 音速
- C_0 : よどみ点の音速
- $D\theta$: 横断流による流体速度偏向角
- k : 比熱比
- L : フレヤー, ボートテイルの全長
- M : マッハ数
- N : 垂直力 (フレヤー, ボートテイル全体に働く)
- p : 圧力
- q_∞ : $1/2 \rho_\infty \cdot U_\infty^2$
- R_0 : 物体半径 (フレヤー, ボートテイルの肩より上流の円筒半径)
- r : 半径方向成分 (フレヤー, ボートテイル円筒部) コーンの場合=先端からの
- S : フレヤー, ボートテイル断面積距離
- U_∞ : 一様流の速さ
- U_a : 一様流軸方向成分 ($U_\infty \cos \alpha = U_a$)
- U_c : " 横断流成分 ($U_\infty \sin \alpha = U_c$)
- u : x 方向流体速度
- V : $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ (コーンの場合)
: $\sqrt{u^2 + v^2 + w_f^2}$ (ボートテイル, フレヤーの場合)
- v : r 方向流体速度
- V_ϕ : x, r 軸に直角な方向の速度 (コーンの場合)
- V_{max} : よどみ点に於ける V の値
- x : フレヤー, ボートテイルのつけ根からの距離 (フレヤー, ボートテイルの場合)
コーンの先端からの距離 (コーンの場合)
- w_f : x 軸および r 軸面と r 軸に垂直方向の速度 (フレヤー, ボートテイルの場合)
- α : 迎角
- β : $\sqrt{M_\infty^2 - 1}$
- δ : フレヤーの開き角
- θ : 流体の流れの角度
- ρ : 密度

ϕ : 速度ポテンシャル ($\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x = u, \frac{\partial \phi}{\partial r} = \phi_r = v, \frac{\partial \phi}{\partial (w_f)} = r \cdot w_f$)

- ω : r 軸の x 軸に対する角度 (コーンの場合)
- ω_f : x 軸および r 軸面と r 軸に垂直方向の角度 (フレヤー, ボートテイルの場合)
- φ : r 軸, および ω 方向面と r 軸に垂直方向の角度 (コーンの場合)
- μ : マッハ角

添字

- B : フレヤー端
- max : 最大 (よどみ点に於ける)
- ∞ : 自由流
- 0 : 無迎角時
- D : 迎角による変動分

3. 基礎方程式

その1)

気体が等エントロピー, 無渦流と仮定し, 流れが定常状態である時に連続の式が成立するから,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (1)$$

$$u = \phi_x, \quad v = \phi_y, \quad w = \phi_z \quad (2)$$

とすると, 厳密方程式で一変数によって次のようにかける。

$$(C^2 - \phi_x^2) \phi_{xx} + (C^2 - \phi_y^2) \phi_{yy} + (C^2 - \phi_z^2) \phi_{zz} - 2(\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_y \phi_z \phi_{yz} + \phi_z \phi_x \phi_{zx}) = 0 \quad (3)$$

となる。この(3)式はポテンシャル流としては完全であるが, 主流方向に直角方向成分が小さい時は(3)に於ける微少項を省略して, 線型化出来る。

つまり主流方向を x 方向とすれば, $\phi_x^2, \phi_z^2, \phi_x \phi_y \phi_{xy}, \phi_z \phi_x \phi_{zx}$ は2次の微少量, $\phi_y \phi_z \phi_{yz}$ は3次の微少量で省略出来る。(3)を C^2 でわると

$$\left(1 - \frac{\phi_x^2}{C^2}\right) \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (4)$$

$\frac{\phi_x^2}{C^2} = M^2$ (後述の如く微少擾乱の時 $M = \text{const}$ と(4)はなる)

$$(1 - M^2) \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (5)$$

一様流からの擾乱が小さい場合は、速度ポテンシャルは次のように書かれる。

$$\phi = U_\infty x + \phi_A \quad (U_\infty : \text{const}) \quad (6)$$

ここに於て、 ϕ は擾乱速度ポテンシャル、これから擾乱速度、 u, v, w が得られる。 $(\phi_A : \text{一次の微少量})$

$$\frac{\phi_x^2}{C^2} = M^2 = \frac{(U_\infty + \phi_{Ax})^2}{C^2} \quad (7)$$

又 $C = C_0 + \Delta C$ $\left\{ \begin{array}{l} \Delta C : \text{音速の微少変動分} \\ 0 : \text{乱れをうけない} \end{array} \right\}$ とかける。よって

$$M^2 = \frac{(U_\infty + \phi_{Ax})^2}{(C_0 + \Delta C)^2} = \frac{(U_\infty)^2}{C_0^2} + O(\epsilon) \quad (8)$$

$O(\epsilon)$ は一次の微少量を示す。

$$M^2 = M_\infty^2 + O(\epsilon) \quad (9)$$

よって、(5)式は、

$$(1 - M_\infty^2 - O(\epsilon)) \cdot \phi_{Axx} + \phi_{Ayy} + \phi_{Azz} = 0 \quad (10)$$

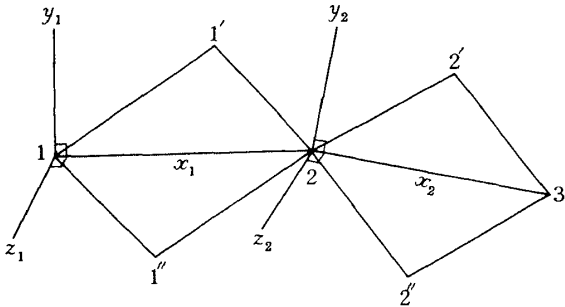


図 1 (a) 特性曲線と各メッシュに於ける直角座標との関係

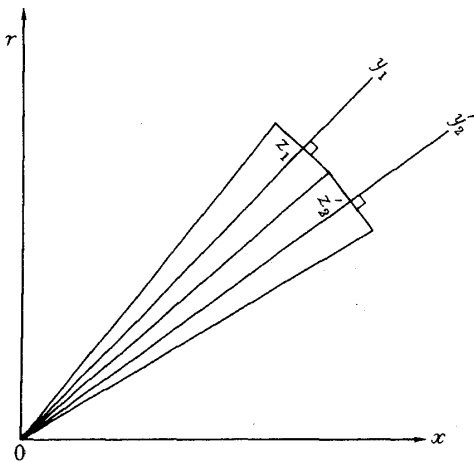


図 1 (b) 特性曲線と各メッシュに於ける直角座標との関係

$$(\phi_{xx} = \phi_{Axx}, \phi_{yy} = \phi_{Ayy}, \phi_{zz} = \phi_{Azz})$$

とかける。 $O(\epsilon) \cdot \phi_{xx}$ は二次の微少量となって省略出来る。よって(10)は

$$(1 - M_\infty^2) \cdot \phi_{Ayy} + \phi_{Ayy} + \phi_{Azz} = 0 \quad (11)$$

となる。ここに於て

$$\phi_A = \phi_0 + \phi \quad (12)$$

とおく。 $(\phi_0 : \text{迎角のない場合の擾乱ポテンシャル}, \phi : \text{迎角による擾乱ポテンシャル}, \text{とする})$ すると、(11)式は次のようにかける。

(これは非線型方程式である)

$$(1 - M_\infty^2)(\phi_{0xx} + \phi_{xx}) + \phi_{0yy} + \phi_{yy} + \phi_{0zz} + \phi_{zz} = 0 \quad (13)$$

$$(1 - M_\infty^2)\phi_{0xx} + \phi_{0yy} + \phi_{0zz} = 0 \quad (14)$$

これは、迎角のない場合であり、特性曲線法で計算出来るものである。(軸対称三次元特性曲線法)

直角座標では 3 変数であるが、軸対称の場合、円筒座標に変換すれば 2 変数となる。

$$(1 - M_\infty^2) \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$$

これは迎角による擾乱ポテンシャルであり、以下に述べる方法で計算する。

三次元流の計算方法

まきがきに於て指摘したように、迎角のない場合について特性曲線法によって流れたとき座標軸の基準にとる。図 1 (a) より明らかな如く、特性曲線は、それぞれ、 $1 \ 1', 1 \ 1'', 1' \ 2, 1'' \ 2, 2 \ 2', 2 \ 2'', 2' \ 3, 2'' \ 3$ を示す。 $x_1 (1-2), x_2 (2 \ 3)$ はそれぞれ、二次元流に於ける流線を示す。つまり、この流線を三次元流計算に於ける、 x_1 座標軸にとる。又それに直角な方向を y_1 座標軸にとる。又それに直角な方向を z_1 座標軸にとる。

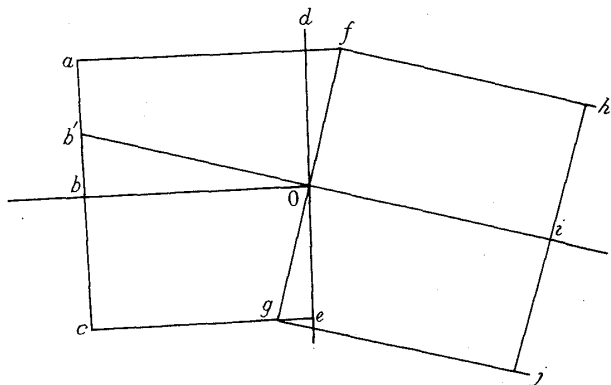


図 1 (c) 座標変換の方法

そして x_1 で計算したものを 2. の点に於て x_2 領域に合せて座標変換して x_2 領域の計算に使う, 直角座標変換であるので, 変換は容易である。

基礎式 その 1 のところで述べたように,

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

か擾乱ポテンシャルに関する基礎式であり, 摂動論によって得られたものである。二次元流では $\varphi = 0$ であり, φ は φ_0 に比し一次の微少量である。

図 2 に於て, $B_0 = A_0 = DY$, $C_0 = 0 D = DZ$
 $E_0 = 0 F = DX$ をおき, F の φ_{x_1} を求めるのが目的である。

$$\varphi_{yy} = \frac{(\varphi_{y_1} - \varphi_{00}) - (\varphi_{00} - \varphi_{y_2})}{(DY)^2} \quad (15)$$

$$\varphi_{zz} = \frac{(\varphi_{z_1} - \varphi_{00}) - (\varphi_{00} - \varphi_{z_2})}{(DZ)^2} \quad (16)$$

$$\varphi_{xx} = \frac{(\varphi_{x_1} - \varphi_{00}) - (\varphi_{00} - \varphi_{x_2})}{(DX)^2} \quad (17)$$

φ_{x_1} 以外はすべてわかっているから基礎式にこれらを代入すれば φ_{x_1} が求まる。

座標変換の方法

図 1(c) に示す如く, $b-0-i$ を二次元流 (迎角のない場合) の流線にとる。 x 軸が b_0 , y 軸が b_a の座標系から, x 軸が 0_i , y 軸が 0_f の座標系に φ の値をうつしかえる事が必要である。

a, b, c, e に於ける φ の値は既知であるので, 内そう法によって, f, g, b' に於ける φ の値は求まるはずである。そうすれば, それらの値をもとにして i の値が求まるはずである。

境界の場合

固体表面 (例えば, ボートテイル上, フレヤー上) の場合

x 軸, z 軸を固体表面にとると, y 軸は, x, z 平面に垂直である。よって, 図の如く, A 点に於ける φ の値を φ_{y_1} とすれば x 軸をはさんで対称的な点 B に於ける φ の値 φ_B は xz 平面に対して速度が対称的でなくてはならないので, ($\varphi_B = \varphi_{y_2}$)

$$\varphi_B - \varphi_{00} = \varphi_{00} - \varphi_{y_1}$$

つまり $\varphi_B = 2\varphi_{00} - \varphi_{y_1}$

ととらなければならない。これが固体表面に於ける境界条件である。以上の操作により φ_{x_1} の値が求まる。

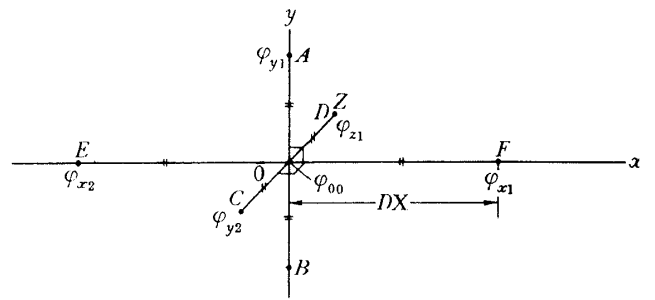


図 2 ポテンシャルを使った計算方法説明図

その 2) (迎角のない場合の流線の定め方)

特性曲線法 (非線型方程式)

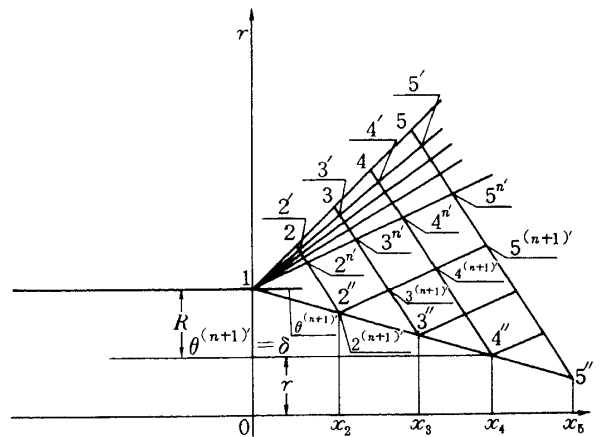
流れが軸対称で定常であり, 回転をしない場合,

$$\begin{aligned} (1 - \frac{u^2}{C^2}) \phi_{xx} - 2 \frac{uv}{C^2} \phi_{xr} + (1 - \frac{v^2}{C^2}) \phi_{rr} \\ + \frac{\phi_r}{r} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ここに於て

$$C^2 = C_0^2 - \frac{k-1}{2} V^2 = C_0^2 - \frac{k-1}{2} (u^2 + v^2) \quad (19)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \phi_r \quad (20)$$



ボートテイル上に於ける特性曲線のあみの目

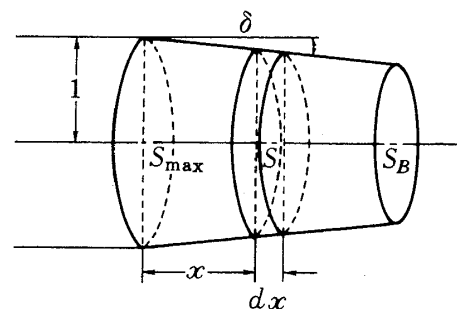


図 3 ボートテイルに於ける特性曲線の形状

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{I,II} = \frac{-uv \pm C\sqrt{u^2+v^2-C^2}}{C^2-u^2} - \frac{C^2v}{C^2-v^2} \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{du}\right)_{I,II} \quad (21)$$

ここに於て上側の符号は I 族，下側の符号は II 族に対応する。これらの等式は速度成分と，角度成分によって書き表わされるとなご便利である。すなわち

$$u = V \cos \theta; \quad v = V \sin \theta \quad (22)$$

そして $\sin \alpha = C/V$ という事に注意すると

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{I,II} = \tan(\theta \mp \alpha) \quad (23)$$

$$\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{d\theta}\right)_{I,II} = \mp \tan \alpha + \frac{\sin \alpha \cdot \tan \alpha \cdot \sin \theta}{\sin(\theta \mp \alpha)} \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)_{I,II} \quad (24)$$

計算手順

全体の過程の中の一つの段階は次の如く要約される。(31)は次の如くかゝれる。

$$r_3 - r_1 = (x_3 - x_1) \tan(\theta_1 - \alpha_1) \quad (25)$$

$$r_3 - r_2 = (x_3 - x_2) \tan(\theta_2 + \alpha_2) \quad (26)$$

$\theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2$ はすべて知られているのであるから， r_3 と x_3 はグラフ的にとくことが出来る。(21)に $d\theta \cdot \cot \alpha$ をかけると，次の形を得る。

$$(d\theta)_{I,II} \pm (\cot \alpha / V)(dV)_{I,II}$$

$$\mp \frac{\sin \theta \cdot \sin \alpha}{\sin(\theta \mp \alpha)} \cdot \frac{(dr)_{I,II}}{r} = 0$$

$$Q = (\cot \alpha) / V \quad (27)$$

$$F = (\sin \theta \cdot \sin \alpha) / \sin(\theta + \alpha) \quad (28)$$

$$G = (\sin \theta \cdot \sin \alpha) / \sin(\theta - \alpha) \quad (29)$$

図 9 の 1-3, 2-3 に応用すると

$$\theta_3 - \theta_1 + Q_1(V_3 - V_1) - G_1/r_1(r_3 - r_1) = 0 \quad (30)$$

$$\theta_3 - \theta_2 - Q_2(V_3 - V_2) + F_2/r_2(r_3 - r_2) = 0 \quad (31)$$

1, 2 に於てすべての状態が与えられており， r_3 はすでに求められているので，この等式は同時に， θ_3, r_3 についてとかれうる。

このようにして第一段階の近似が完成する。この近似は，1-2, 2-3 の平均的状态を計算することによって改良される。第一近似によって， r_3, x_3, V_3, θ_3 が求められているので，(26)式に於て θ_1 のかわりに $\bar{\theta}_{1-3} = (\theta_1 + \theta_2) / 2$ ， $\bar{\alpha}_{1-3} = (\alpha_1 + \alpha_3) / 2$ ，このようにして， Q_{1-3} ，と \bar{G}_{1-3} / r_{1-3} を計算して使用することにする。このような過程を 2, 3 回くりかえすことにより，良好な近似が得られる。本報告に於てはすべて 3 回くりが行われた。

初期条件はポートテイルの肩のところをさしており，この部分の初期条件はプラントル・メー流によって与えられる。よって 1, 2 点から 2 点の状态を計算手順のところで述べた方法によって計算し，2 点と 3 点から 3 点の状态を計算する。このようにして次々と次の状態が計算される。 $2^n, 3^n$

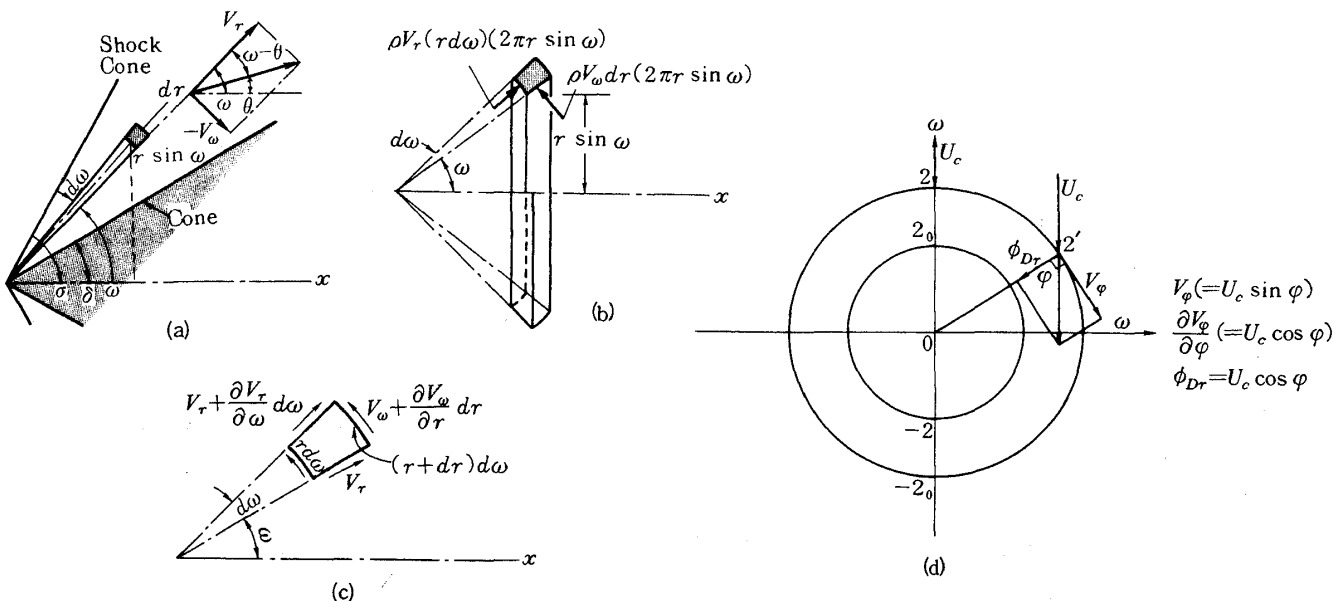


図 4 コーンに於ける座標の関係

……のラインが計算された後、 $1, 2^{n'}$ から $2^{(n+1)'}$ の状態を計算するわけであるが、これは今迄とやゝ異り(31)に於て θ_3 を $\theta^{(n+1)'}$ とし(26)に於て $x_3 = R_3 \cot\{\theta^{(n+1)'}\}$ として R_3 の値を求めしかる後に r_3 を求めて(31)に於て V_3 の値を求める。 $3^{(n+1)'}$ を求める方法は前述の計算で述べた方法である。

その3) コーンの計算

図4を参照すると、質量保存則は次のように表わされる。なお φ は x 軸まわりの回転角であり、図示された円錐の軸を中心としての回転方向の角度である。衝撃波は斜衝撃波である。(図4, 5参照)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} (d\varphi \cdot \rho \cdot V_r \cdot r^2 \cdot d\omega \cdot \sin \omega) \cdot dr \\ & + \frac{\partial}{\partial \omega} (d\varphi \cdot \rho \cdot V_\omega \cdot r \cdot dr \cdot \sin \omega) \cdot d\omega \\ & + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho V_\varphi \cdot r \cdot d\omega \cdot dr) d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

(33)式に於て最初の2項はTaylor-Maccollの解から得られるものである。

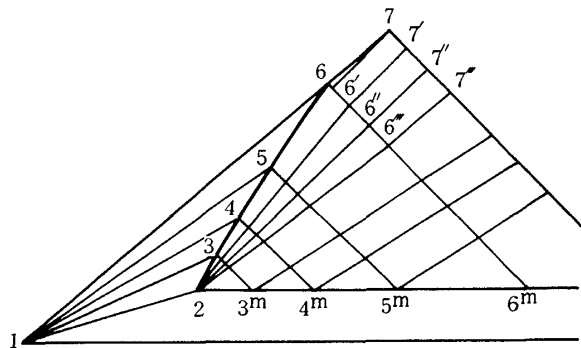


図5 コーン及びコーンの肩の後に於ける特性曲線のあみの目

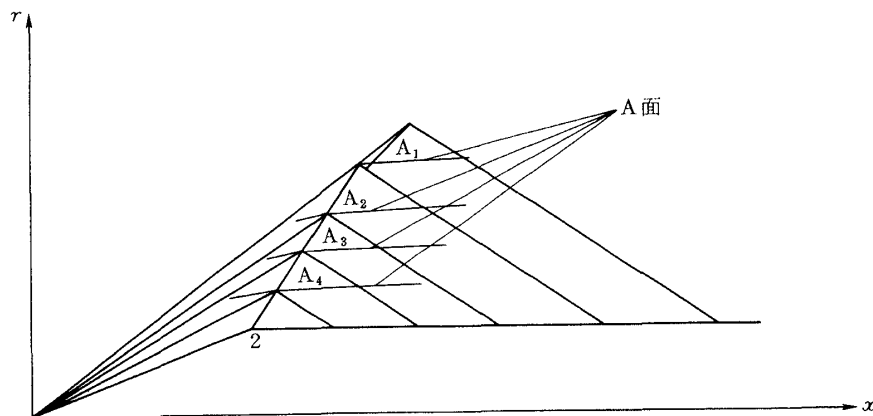


図6 コーン及びコーンの肩の後に於ける特性曲線のあみの目

(32)式を単純化すると

$$\begin{aligned} & 2.0 \cdot \rho V_r + \frac{\partial \rho}{\partial \omega} \cdot V_\omega + \rho \frac{\partial V_\omega}{\partial \omega} + \rho V_\omega (\cos(\omega)/\sin(\omega)) \\ & + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot V_\varphi + \rho \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{1}{\sin(\omega)} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

本報告は垂直力傾斜を求めるものであり、 $\partial/\partial\varphi$ は微量として解析出来る。軸対称流で φ 方向流れによる効果をうけていない場合、添字0をつけて示し、 φ 方向乱れをうけている場合、添字1をつけて示し、(41)式の $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$ の値を検討すると、微量変動分の2次以上の項は省略できるので、

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} V_\varphi \quad \frac{\partial (\rho_0 + \rho_1)}{\partial \varphi} \cdot V_\varphi \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial \varphi} \cdot V_\varphi \quad (34)$$

これは2次の微量であり省略可能である。又

$$\rho \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = (\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = \rho_0 \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \rho_1 \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \quad (35)$$

となり、 $\rho_1 \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$ は2次の微量であり省略出来る。よって、(33)式は次のように単純化される。

$$\begin{aligned} & 2.0 \cdot \rho \cdot V_r + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega} \cdot V_\omega + \rho \frac{\partial V_\omega}{\partial \omega} \right) \\ & + \rho \cdot V_\omega \cdot (\cos(\omega)/\sin(\omega)) + \rho \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{\sin(\omega)} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

又

$$dp = -\rho V dV = -\rho (V_r \cdot dV_r + V_\omega dV_\omega + V_\varphi dV_\varphi) \quad (37)$$

$V_\varphi \cdot dV_\varphi$ は2次の微量であるので省略出来る。よって(37)は次のようにかきかえることが出来る。

$$dp = -\rho (V_r \cdot dV_r + V_\omega \cdot dV_\omega) \quad (38)$$

$$dp/d\rho = c^2 \quad (39)$$

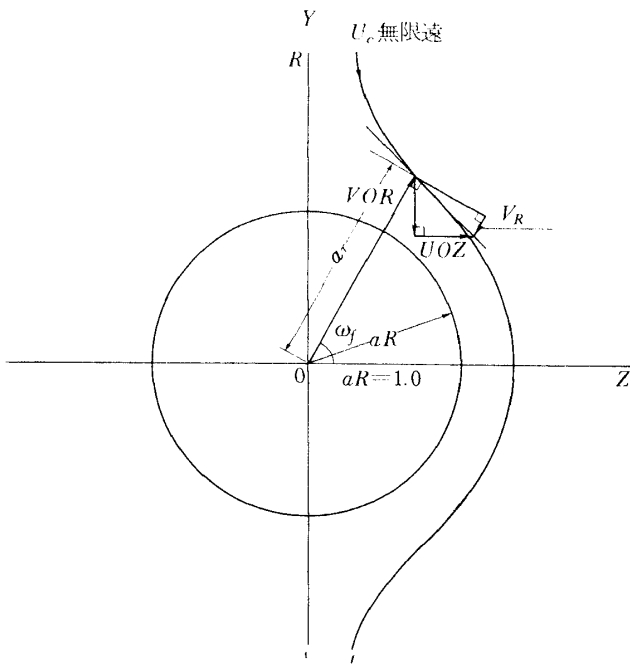


図 7

一様流は図 8 の 1 -1 より上流の円筒によって影響をうけるので、この影響が考慮されなくてはならない。その影響が図 8 の 1-2, -1, -2 に出てくるわけである。その影響の解析が(49)から(56)までに与えられている。

ポートテイルもフレヤーの場合に準ずる。

(a) 座標系

図 8 にフレヤーの形状、衝撃波、及び座標系を示す。フレヤーの中心線は $R=0$ であり、 x 軸であるとする。又衝撃波は斜衝撃波である。

一様流の速度は U_∞ とし、 x 軸方向成分を U_a 、 r

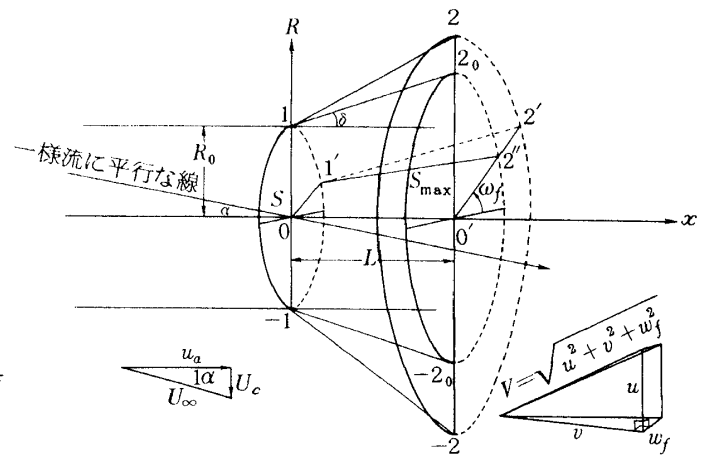


図 8 円錐フレヤーと諸量の関係

の一方成分を $U_c \cdot \sin \omega_f$ とする。

又フレヤーによって一様流は方向を変えられるが、その x 方向成分を u 、 r 方向成分を v とする。

(b) 境界条件

図 9 に境界条件を示す、図 8 の 1' -2 上の点が図 9 の A 点に相当する。1' -2' はフレヤー上の衝撃波面である。2_0, 2'_1 - 2_0 面はフレヤー面、2, 2' - 2 面は衝撃波面である。(図 8, 9 共通)

U_c は図の如く横断流速成分であり、横断流による ω_f 方向の速度は¹⁷⁾、 $U_{cs} = U_c - U_c \frac{(aR)^2}{(a_r)^2}$ とすると

$$\phi_{\omega_f} = \frac{1}{r} U_c^s \sin \omega_f \text{ となり、 } \phi_{\omega_f \omega_f} = \frac{1}{r} U_c^s \cos \omega_f \text{ と}$$

なる。同様にポートテイルの中心線方向に向う速度は、 $\phi_{Dr} = \frac{1}{r} U_c^s \cos \omega_f$ となる。(図 10 には DV

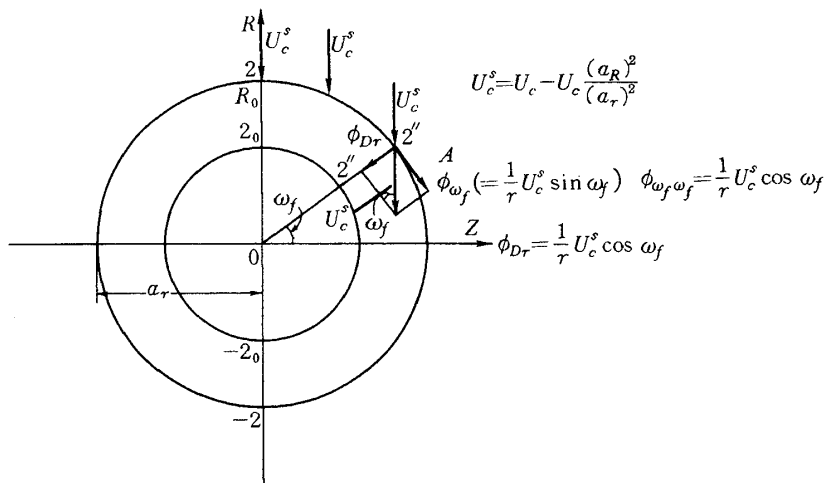


図 9 円錐フレヤーの肩から出るマッハ錐上に於ける ϕ_{ω_f} と U_c の関係

とかいてある)

よって横断流による初期条件としての角度は、

$$D\theta = U_c^s \cos \omega_f / U_\infty \quad (57)$$

(57)式の D 分は文献¹⁷⁾によるすべて $\cos \omega_f$ (図7, 8, 9, 10 参照) に比例し, $\phi_{\omega_f \omega_f}$ も同様に $\cos \omega_f$ に比例する。よって代表的な ω_f についてのみ計算すればあとは容易に計算し得る。今最大の D 分を D_0 で表わし, 又最大の $\phi_{\omega_f \omega_f}$ 分を $\phi_{\omega_f \omega_f}$ で表わすと, 一般に $\phi_{\omega_f \omega_f}$, $D\theta$, DV は次のように表わすことが出来る。

$$\phi_{\omega_f \omega_f} = \phi_{\omega_f \omega_f} \cdot \cos \omega_f \quad (58)$$

$$D\theta = (U_c^s / U_\infty) \cdot \cos (\omega_f) \quad (59)$$

$$DV = U_c^s \cos \omega_f \quad (60)$$

となる。境界条件は, 図10に於て 1, 2, 3 の点にそれぞれ流体の流れの速度, 角度を与えるのは迎え角

のない場合と同様である。

(c) 計算方法

(b)に於て初期条件を求めたので, 後は, (1)~(25)に於て述べられている方法により, φ を求める。

DV は図2に於ける如く φ の差として計算されるものであるので, 図10(a)に於ける 2-3 の部分を図10(b)に描くと, $DV = (\varphi_3 - \varphi_2) / DR$ となる。また, 擾乱分については衝撃波に入るまでは, φ の値は x 方向については変化はない。

4.2 円錐の場合

(a) 座標系

図4(a)(b)(c)にコーンの軸に対して直角の方向から見た関係を示す。コーンの先端から半径方向座標が r , ω は r を x 軸まわりの回転角, φ は $x-r$ 面の x 軸まわりの回転角。

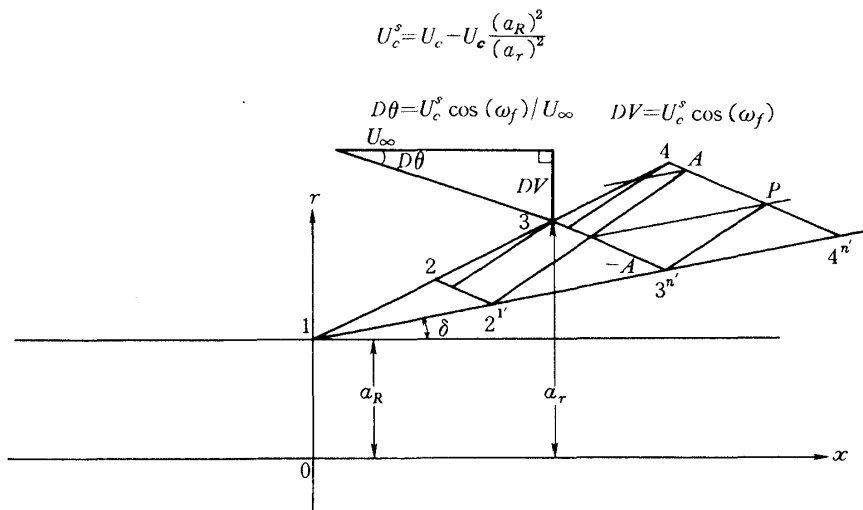


図10(a) フレヤーの肩から出るマッハ錐上に於ける $D\theta$ と U_c の関係

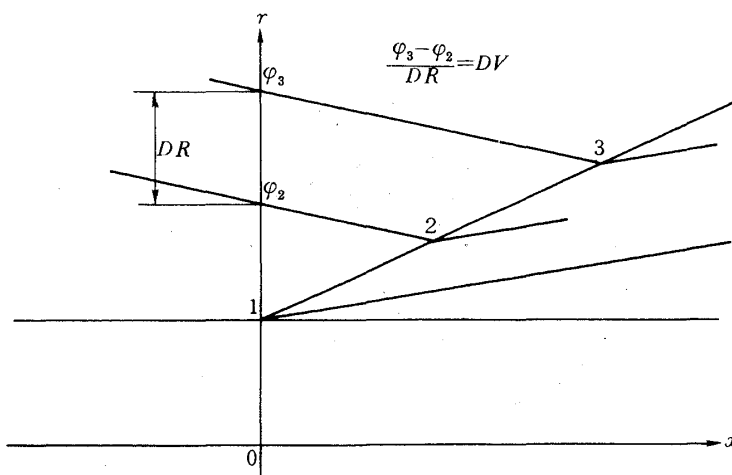


図10(b) フレヤー上に於ける DV とポテンシャルの関係

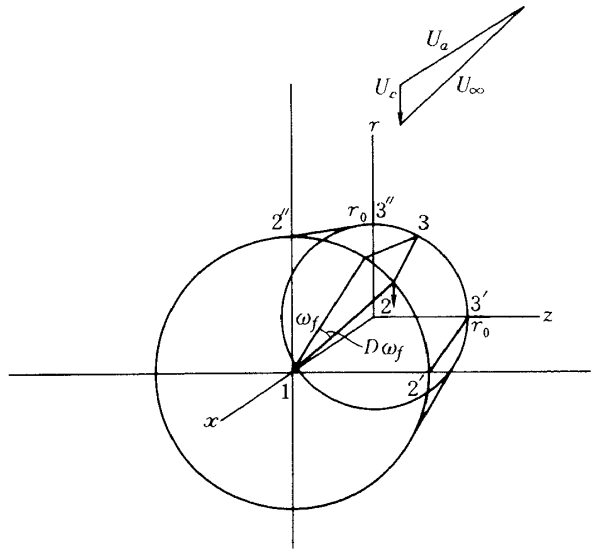


図 11 円錐フレアーに於て横断流 U_c による流線の
ずれの角度 $D\omega_f$ と ω_f の関係

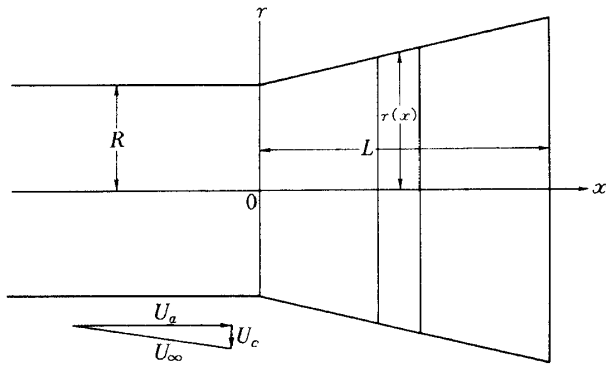


図 12 円錐フレアー上に於ける垂直力傾斜の
積分図

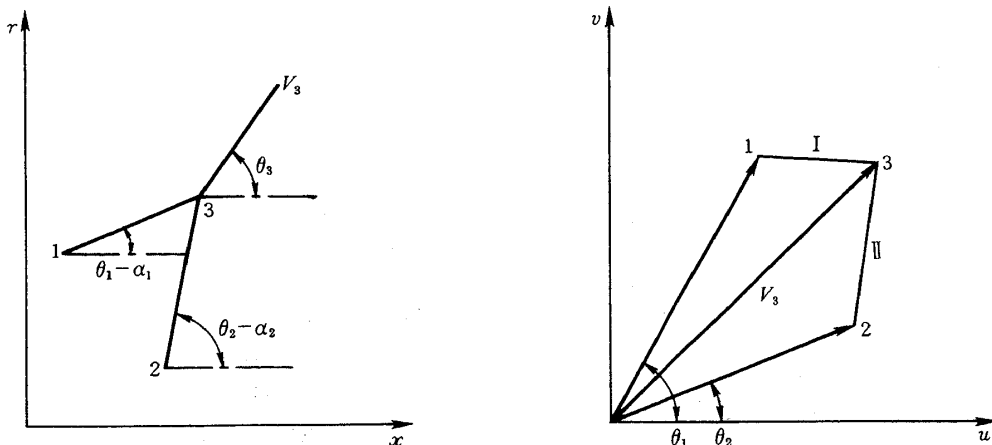


図 13 特性曲線法による 1つのステップ

図 4 (d)ではコーンの先端から下流を見た関係を示す。0はコーンの中心線, 2, 2'-2は衝撃波面, 2_0, 2''-2_0はコーン面である。

(b) 境界条件

図 4 (d)に明らかな如く,

横断流による衝撃波面の接線方向の速度は,

$$V_\varphi (U_c \sin \varphi)$$

横断流による衝撃波面の法線方向の速度は,

$$\phi_{Dr} (U_c \cos \varphi)$$

である。

(c) 計算方法

(b)に於て初期条件を求めてあるので、その後は、(27)~(43)に述べられている方法により、 V_r, V_ω, V_φ を求める。これらによって求める方法は Stone 等の方法と同じである。しかし密度項は含まれていない。円錐の部分の C_{Na} は、Kopal, Stone 等によって十分な計算がされているので、²³⁾(35)(35)では密度項を消去した式を示した。

4.3 円筒の場合

(a) 座標系

図 5 に示すとおりであり 2 より後方が円筒部に相当する。

(b) 境界条件

フレアーの場合との相違点は図14の 1-3'' に相当した部分が図 5 の 2-6'' に相当したものになるだけで、あとはすべてフレアーの場合と同じである。つまり図14に於て $\delta=0$ としたものに相当する。又、図 5 に於ける、3, 4, 5, 6, 7, 点に於て図 9 に於ける U_c^s に相当した横断流成分を入れて計算すれば

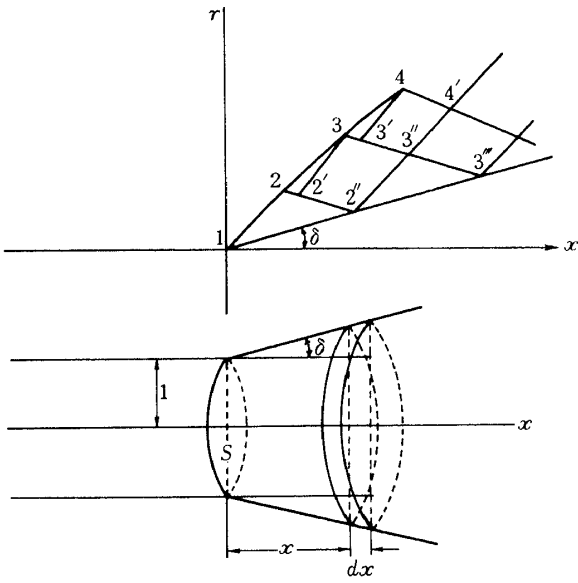


図 14 フレヤー上における特性曲線とフレヤーの形状

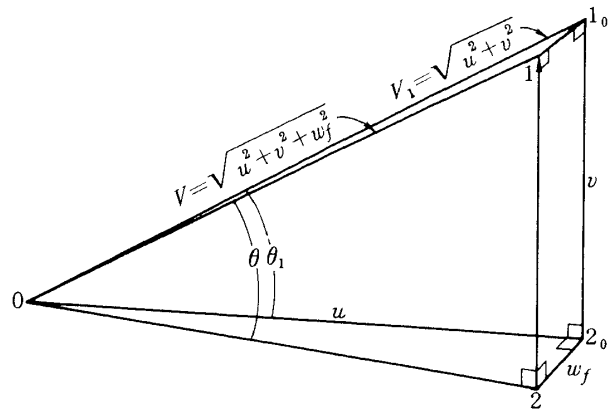


図 15 $u, v, w_f, \theta, V, V_1$ の関係

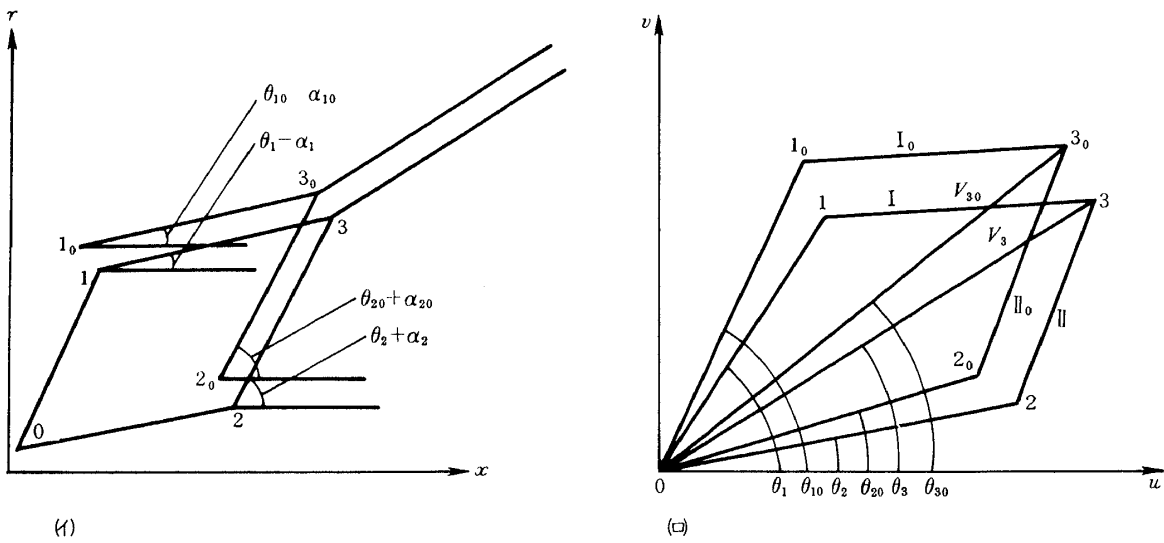


図 16 迎角のある場合とない場合の特性曲線法による 1 つのステップの比較 (0 : 迎角 0 の時)

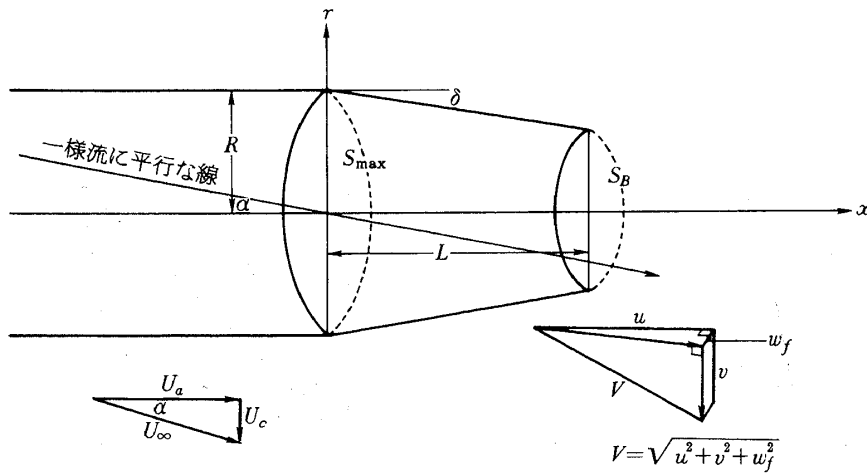


図 17 円錐ボートテイルと諸量の関係

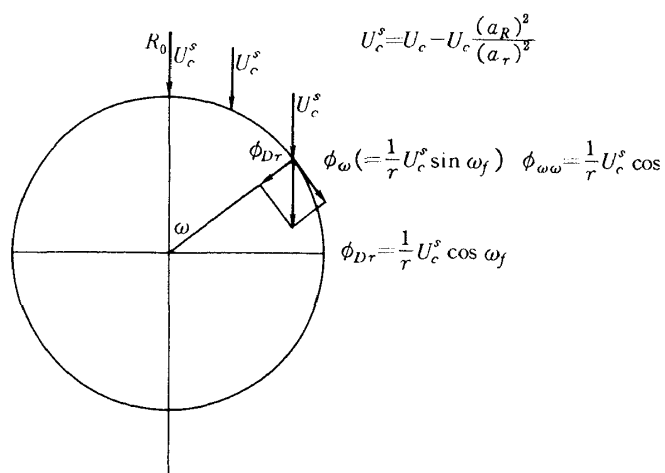


図 18 円錐ポータイルの肩から出るマッハ錐上に於ける ϕ_{ω} と U_c の関係

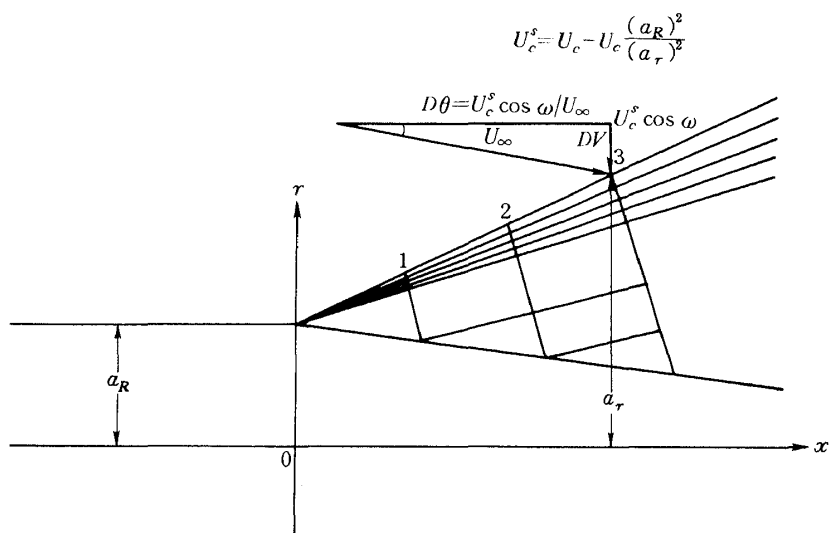


図 19 ポータイルの肩から出るマッハ錐上に於ける $D\theta$ と U_c の関係

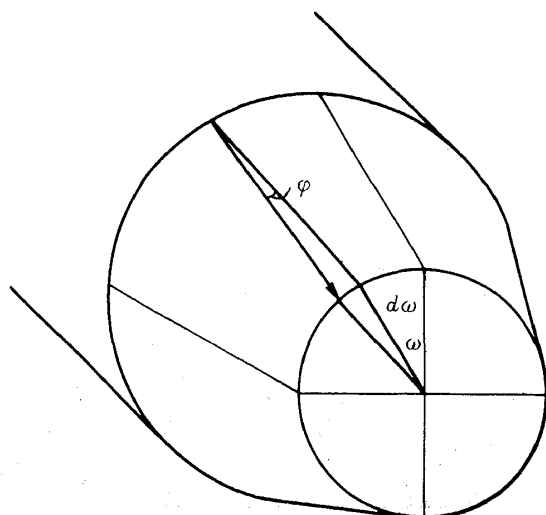


図 20 円錐ポータイルに於て横断流 U_c による流線のずれの角度 $d\omega$ と ϕ と ω の関係

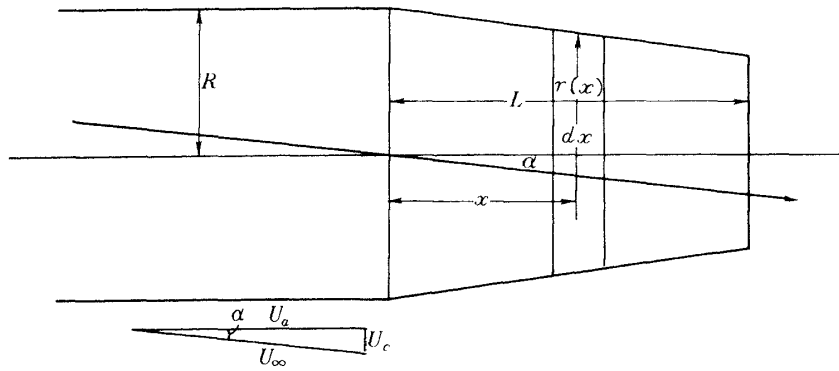


図 21 円錐ポートテイルに於ける垂直力傾斜の積分図

よい。この横断流成分はすでにコーンのところで求めたものを使う。

(c) 計算方法

フレアーの場合と完全に同一である。

4.4 垂直力係数傾斜

垂直方向は次のように与えられる。

(6.の附録参照)

$$N = q_{\infty} \int_0^L \int_0^{2\pi} \cos \omega_f (-C_{pc}) r(x) \cdot d\omega_f dx \tag{61}$$

ここに L は考えている物体の長さであり q_{∞} は一様流の動圧である。垂直力係数 C_N に直すためには、

$$C_N = N / q_{\infty} \cdot \pi \cdot R^2 \tag{62}$$

迎角 α の時の垂直力係数を C_N とすれば、 α について微分すると垂直力係数傾斜が求まる。

$$C_{N\alpha} = \frac{q_{\infty}}{q_{\infty} \pi R^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \cos \omega_f \left(-\frac{dC_{pc}}{d\alpha} \right) \cdot r(x) d\omega_f dx \tag{63}$$

(63) の積分路は図21に示す如く、 $\alpha = 0$ の極限に於て行えばよいのであるから、図のような積分路で

よいわけである。

5. 軸対称超音速ノズル内の流れ

まわりの圧力がノズル内の圧力より高い流れについて解析した。図22に於てA点に於てはプラントルメヤー流にしがう。又図より明らかな如く、軸上の点Dに於て反射する。ノズルの出口と、まわりの圧力比が増すにしたがって、圧縮波が加わり、その結果として境界衝撃波が発生する。更に下流に於ては圧縮効果が非常に大となるのでは、斜め衝撃波は生じ得なくて、直角衝撃波が生ずる。

軸対称非回転ロケット噴射構造は直角衝撃波が生じない場合は特性曲線法によって計算され得る。特性曲線法のメッシュは図に示したとおりである。図には非常にあらう示してあるが実際はこれより、はるかにこまかくして計算を行った。

基礎式についてはすでに述べているのでここではあらためて述べない。これら解析の結果についてのみ考察する。

この解析の目的は超音速流の周期性について考察

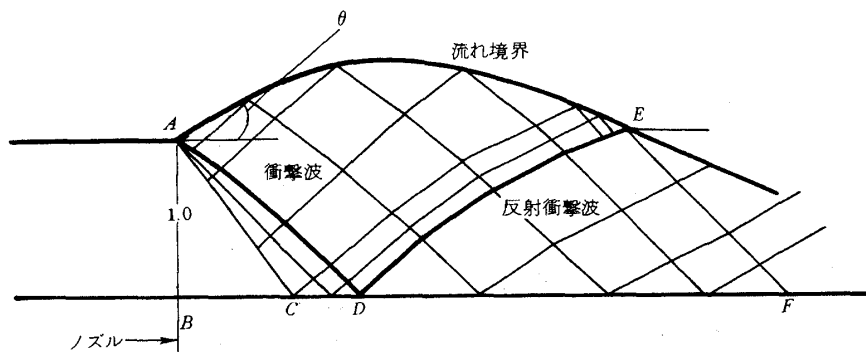


図 22 ノズルからの超音速流の形状、及び特性曲線のあみの目

するのが目的である。図23から $M=1.2$, $M=1.5$ の2例について考察しているが、本稿の目的は圧力係数の周期性の θ に対する依存度を考察することにあるので、主として $M=1.5$ の場合について考察した。

図24以降 $M=1.5$ の場合、 θ を変化させた場合の周期性の変化について調べてみると、図より明らかな如く、周期性は最初の2周期は維持されるが、後に不安定となる。図25のように θ が図24より大となると周期は大体維持されるものの、2つの周期がすぎた後の圧力係数の周期に前のような規則性が見受けられない。図26でも同様で、 θ が増加すると周期性は一段とくずれる傾向がある。この傾向は $\theta=10^\circ$ になると一層いちじるしくなり、第2周期に於ても規則性は維持されない。

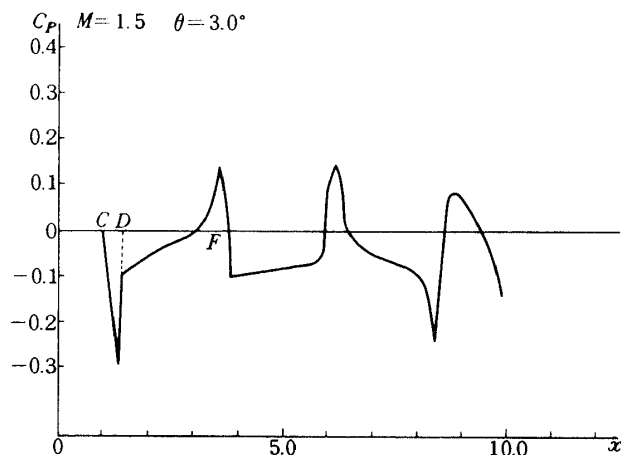


図25 軸対称ノズル内の中心線上に於ける圧力係数 $M=1.5 \quad \theta=3.0^\circ$

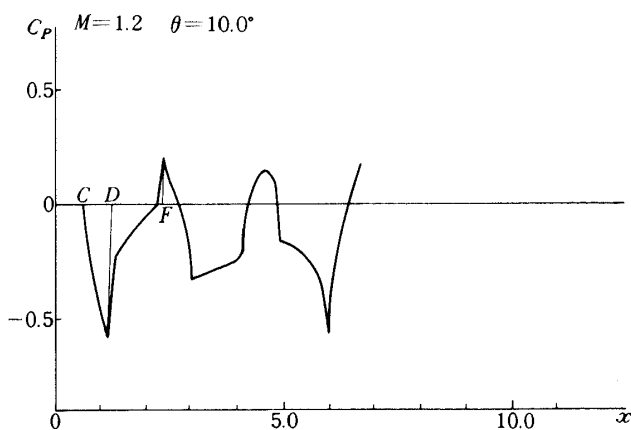


図23 軸対称ノズル内の中心線上に於ける圧力係数 $M=1.2 \quad \theta=10.0^\circ$

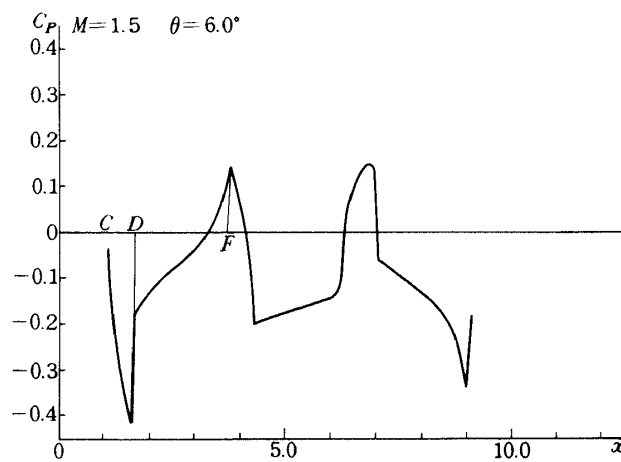


図26 軸対称ノズル内の中心線上に於ける圧力係数 $M=1.5 \quad \theta=6.0^\circ$

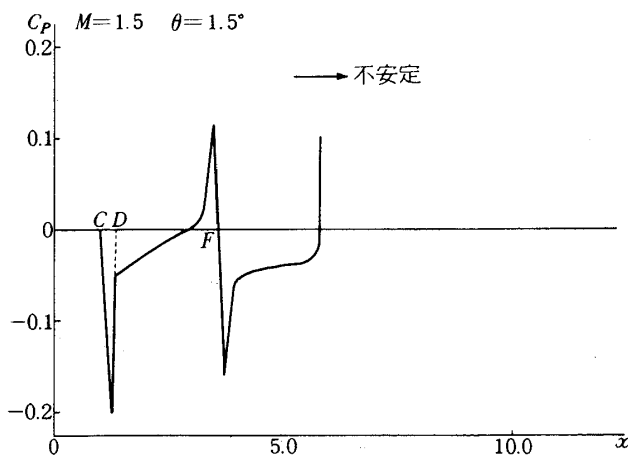


図24 軸対称ノズル内の中心線上に於ける圧力係数 $M=1.5 \quad \theta=1.5^\circ$

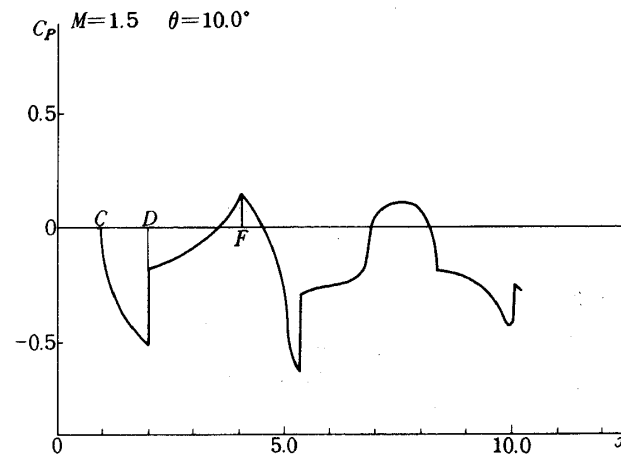


図27 軸対称ノズル内の中心線上に於ける圧力係数 $M=1.5 \quad \theta=10.0^\circ$

考 察

フレアー^{1)~21)}に関するスレンダーボディ理論による垂直力係数傾斜の計算結果は以下の特徴を示している。

1. フレアー前面の断面積 S_B 、および後端の断面積 S_{max} との比 S_B/S_{max} を一定にした場合、垂直力係数傾斜 C_{Na} は開き角によらず一定である。
2. マッハ数を変えても C_{Na} は変わらない。

本研究による計算では、断面積比からの計算結果は同一の S_B/S_{max} をとった場合、マッハ数の増大に比して垂直力係数傾斜は減少する傾向が見受けられる。この原因は高マッハ数になるにしたがって、マッハ角が小となり、フレアーのつけ根のあたりで横断流の圧力係数への影響が出にくい部分の影響がより下流まで影響するためである。

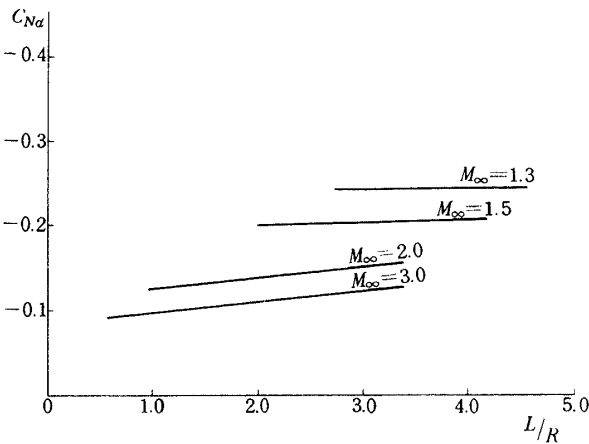


図 28 円錐フレアー上の垂直力係数傾斜 ($S_B/S_{max}=1/1.6$)

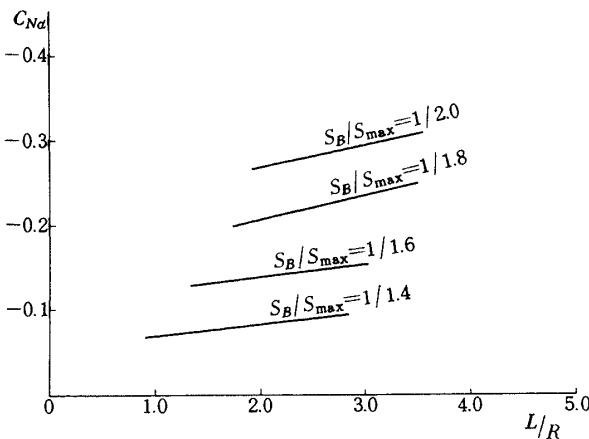


図 29 円錐フレアー上の垂直力係数傾斜 ($M_{\infty}=2.0$)

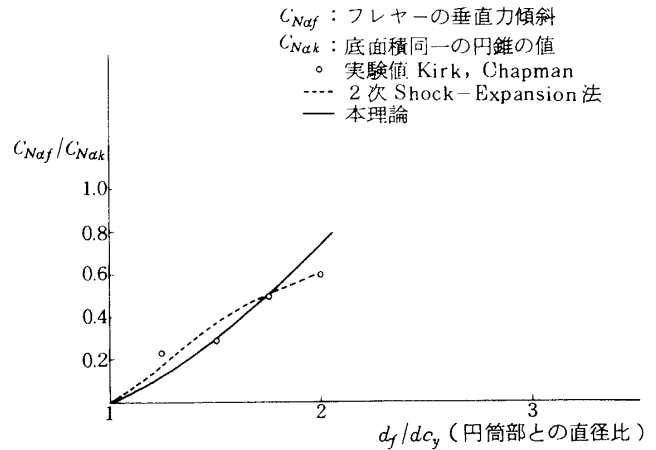


図 30 円錐状フレアーの効果

一方、垂直力係数傾斜の増加の程度は、今迄の計算では、特に、スレンダーボディ理論では、 S_B/S_{max} に比例して増加するが、本理論では S_B/S_{max} に比例する以上に増加する。これは迎角のない場合、圧力係数が開き角に比例する以上に圧力係数が増加することに起因する。

ボートテイルの場合の解析結果は図 31 から図 33 に示す、スレンダーボディ理論による断面積比からの垂直力係数傾斜の計算結果は、開き角によらず一定であるが、本報告の方法では、スレンダーボディ理論に比して非常に小さい。この傾向は開き角が大きい程大きく、小さい程小さい。つまり従来のスレンダーボディ理論では肩の後の空気密度が自由流に比して小さい事が考慮されていないからである。それに加え、フレアーの場合についてもいえることであるが、ボートテイルの肩のあたりでは、横断流の

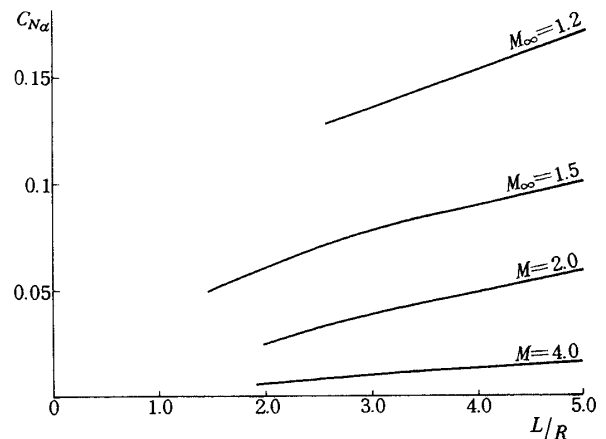


図 31 円錐ボートテイル上の垂直力係数傾斜 ($S_B/S_{max}=0.6$)

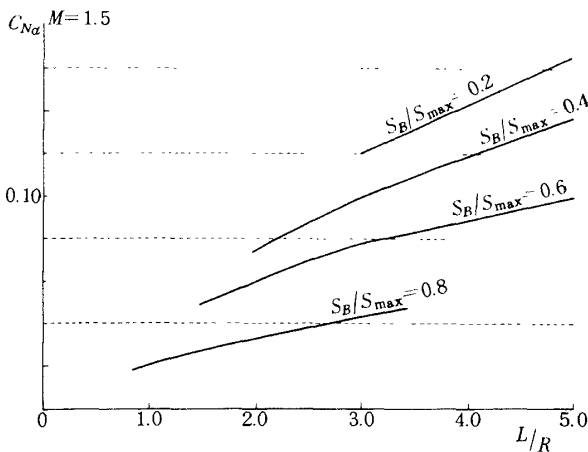


図 32 $M_\infty=0.5$ 円錐ボートテイル上の垂直力係数傾斜

垂直力係数傾斜に対する影響が非常に小さく、その影響が、下流にまで影響するからである。これもスレンダーボディ理論には入っていない。

次に迎え角のない場合の圧力係数の非線型性について特徴的な事は下流に於て δ の絶対値が大きい場合、圧力係数は急激に大となる可能性をあらゆるマッハ数についてもっているという事であり、この影響は特に低マッハ数の垂直力係数傾斜もうける。つまり下流にゆくにしたがって圧力係数が増大するために垂直力係数傾斜も増す傾向が見られ、これはスレンダーボディ理論では、指摘出来ない。

又従来のスレンダーボディ理論では、垂直力係数傾斜はマッハ数のいかに関係せず一定であるが、この理論に於ては、マッハ数が大となるにしたがって、その絶対値は徐々に小さくなる傾向を示す。(図31～図32)

この事はマッハ数が大きくなるにしたがってNewtonian flow に近づき、ボートテイルの肩の後部に於ける空気の圧力が小となることに関係する。よって同じ S_B/S_{max} について L/R が大となるにしたがって垂直力係数傾斜が大となるにしたがって垂直力係数傾斜が大となる事は、ボートテイルの開き角が小となるにしたがって後の空気の圧力の減少量が小さくなるためと考えられる。

図33に実験データを示すが、本理論から予想されるとおり、垂直力の効果は、ほとんど認められなかった。この事はスレンダーボディ理論からは全く予想出来ない。

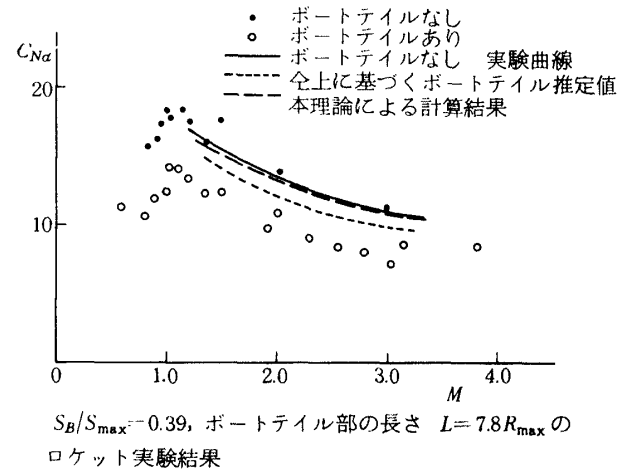
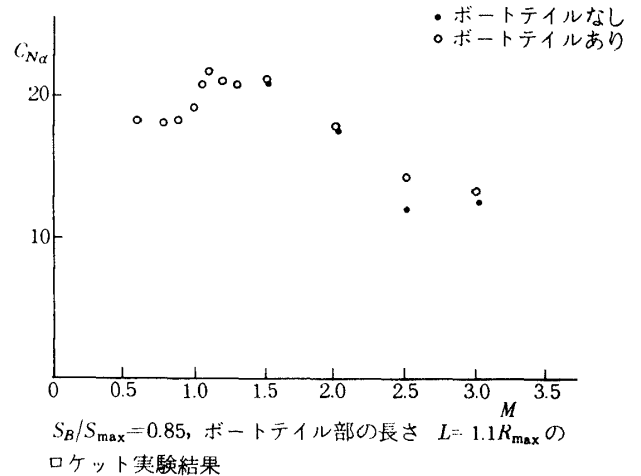


図 33 $S_B/S_{max}=0.39$, ボートテイル部の長さ $L=7.8R_{max}$ のロケット実験結果

円錐 - 円筒物体上の垂直力係数傾斜^{22), 23)} (図 34～35)
スレンダーボディ理論では、円筒上では、

1. 円筒上では 0 である。

本研究では、円筒上では

1. 円錐部の垂直力係数傾斜もしくはそれ以上である。
2. 円錐の開き角が 15° より小さな場合、マッハ数の増大にしたがって垂直力係数傾斜は下の傾向を示し、また開き角が 20° より大なる時はマッハ数の増大に比して垂直力係数傾斜は増大する傾向を示すこの原因は開き角が小の時はニュートンフロー的となってマッハ数の増大と共に垂直力係数傾斜は減少し反対の時はコーン上の圧力上昇が円筒部に強くきくためにマッハ数の上昇に比して垂直力係数傾斜は増大するた

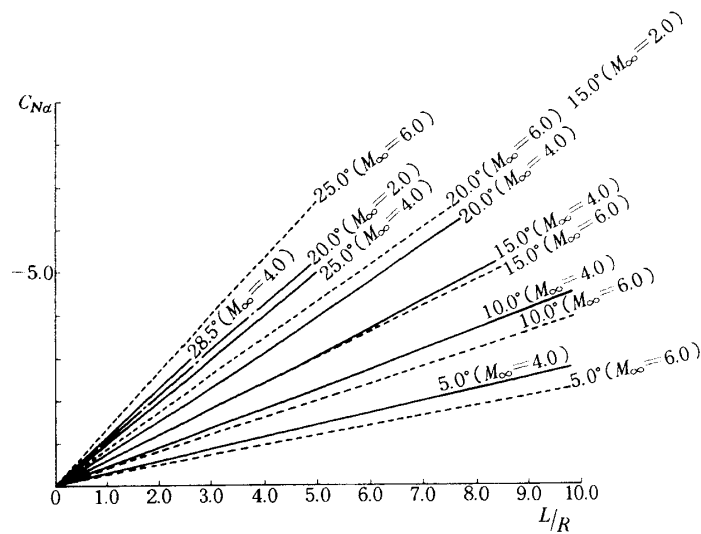


図 34 円錐 - 円筒物体上の垂直力係数傾斜

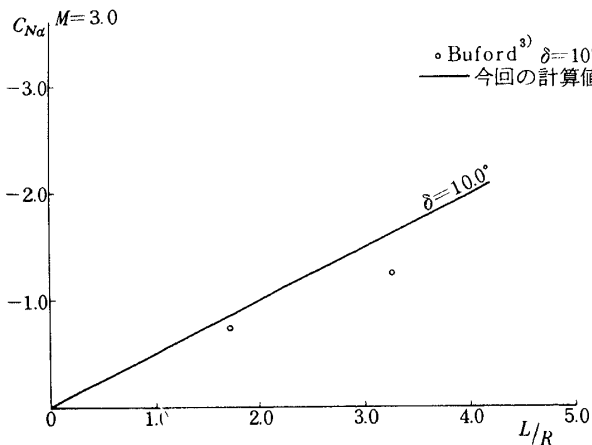


図 35 $M_{\infty}=3.0$ 円錐 - 円筒物体上の垂直力係数傾斜 (実験値との比較)

めと考えられる。

実験値との比較

図35に、 $M = 3.0$ 円錐 - 円筒物体上の垂直力係数傾斜 (円筒部のみ) の実験値との比較を示す。実験値の絶対値の方が理論値よりやや大きい。

5. 結 論

垂直力係数傾斜は、迎え角が微少に変化した場合軸対称物体に働く力は、迎え角の大きさに比例し、軸対称物体の軸に直角な方向に作用する力の係数で、ロケットの横ぶれ安定を論ずる際、重要な要素となる。フレヤー、円錐 - 円筒、ボートテイルについて、ポテンシャル理論により垂直力係数傾斜を求めた。その結果、今までのスレンダーボディ理論より精度

の高い計算が得られた。計算は円錐フレヤー、円錐 - 円筒物体について、広範囲のマッハ数、開き角について垂直力係数傾斜の計算を行なった。その結果以下の事が確認された。

フレヤーの場合

1. 垂直力係数傾斜の断面積からの計算結果は、同一の断面積比をとった場合、開き角に比例する。
2. 垂直力係数傾斜はマッハ数の増大に比して減少する。
3. 垂直力係数傾斜の増加の程度は、垂直力係数傾斜が開き角に比例して増大する以上に増大する。

円錐 - 円筒物体の場合

円錐の開き角が 15° 以下ではマッハ数の増大につれて垂直力係数傾斜は下る傾向を示し、 20° 以上ではその逆となる。

極値は確認されていない。大体に於て下流にゆくにしたがって単調増加である。

ボートテイルについては次の結論が得られた。

1. 下流にゆくにしたがって密度が高くなるため、特に低マッハ数に於て垂直力係数傾斜が増す傾向が見られる。
2. スレンダーボディ理論はマッハ数のいかに関係せず垂直力係数傾斜は一定であるが、この理論に於ては、マッハ数が大となるにしたがって、その絶対値は徐々に小となる傾向を示す。

3. 同じ S_B/S_{max} についてはスレンダーボディ理論では垂直力係数傾斜は一定であるが、この理論に於ては L/R が大きい程大きく、小さい程小さくなり $L/R=0$ では 0 に収束する。
4. スレンダーボディ理論に比して垂直力係数傾斜は非常に小さい。

軸対称超音速ノズル内の流れ

まわりの圧力がノズル内の圧力より高い流れについて解析した結果、ノズルの中心線上の圧力係数についていえば、ノズル内の圧力と外圧との圧力比が 1 に近い時は、大体第 2 周期まで、規則性が維持されるが、第 3 周期に入ると規則性がみだれる。又圧力比が大きくなるにしたがい大幅な規則性のみだれが生ずる。最後に東京農工大の谷教授に助言をいただきました事を感謝します。

6. 附 録

迎え角のない場合の圧力係数を C_{p0} 、ある場合の圧力係数を C_{pD} とすれば (p.6 の注参照)、

$$\begin{aligned} C_{p0} &= (p_0 - p_\infty) / \frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot U_\infty^2 \\ C_{pD} &= (p_0 + p_D - p_\infty) / \frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot U_\infty^2 \\ C_{pc} &= C_{pD} - C_{p0} = p_D / \frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot U_\infty^2 \end{aligned} \quad (44)$$

ここに於て

$$\begin{aligned} p_\infty &= \rho_\infty / k \times (C_0^2 - \frac{1}{2}(k-1)U_\infty^2) \\ p_0 &= \rho_0 / k \times (C_0^2 - \frac{1}{2}(k-1)V_0^2) \quad (0: \text{無迎角時}) \\ p_0 + p_D &= (\rho_0 + \rho_D) / k \times (C_0^2 - \frac{1}{2}(k-1)(V_0 + V_D)^2) \end{aligned} \quad (45)$$

V_D は図 2 に於て EF を固体表面 (D : 迎角によるとした時、 $V_D = (\varphi_{x1} - \varphi_{00}) / DX$ 変動分)

α の小さい範囲では C_{pc} は α に比例するので $\frac{\alpha C_{pc}}{d\alpha}$ は一定と考えることが出来る。

参 考 文 献

- 1) 谷 喬: ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法(Ⅲ)
- 2) Mac.C.Adams and W.R.Sears: Sleuder-Body Theory-Review and Extension, J.

- Aero.Sci., Vol.20, No.2(1953/2)pp85-98
- 3) W.B.Buford: The Effect of aftesbody Length and Mack Number on the Notional Force and Center of Pressuce of Covical and Qgival nose Bodies, J. Aero. Sci., Vol.25, No.2(1958/2) pp. 103-108
- 4) H.W.Liepmann and A.Rashko: Elements of Gas dynamics(1956)John Wiley and Sons.
- 5) H.S.Tsien: Supersonic Flow Over and Inclined Body of Revolution, J. Aero. Sci., Vol.5, No.12(1938/10)pp 480-483
- 6) SS.Chin: Missile Configuration Design (1981)p. 30, McGraw-Hill.
- 7) 小橋安次郎, 谷 喬, 田中博喜: LS-A ロケット高速風洞試験, 第 9 回宇宙技術講演会(昭和 41)
- 8) H.Zienkiwicz, Unpublished work for English Elect. Co., この結果のみが J.E. Phythian and R.L.Dommett: Sempirical Method of Estimating Forces on Bodies at Supersonic Speed, J. of Royal Aero. Soc., Vol.62, Nn.7(1958/7)pp.520-524
- 9) 谷 喬, 原 亘利, 関根英男: マッハ数によるロケット静安定化の予備試験, 日本航空学誌, 12巻, 127号(昭和 39)(昭和 39) pp3-8.
- 10) D.B.Kirk and G.T.Chapman: The Stabilizing Effectiveness of Conical Flares on Bodies with Conical Noses, NASA Technical Memo, X-30(1959)
- 11) F.Tamaki, S Mitsuish and S.Nagai: Aersdynamic Characteristics of Cone-Cylinder-Flare Configuration at Supersonic Speeds, Proc. 3rd Internatinal Symposium on Rockets and Astronautics, Tokyo (1959) p. 157
- 13) G.W.Gvimmingn, E.P.Williams and G. B.W.Young, Lift on Inclined Bodies of Revolution in Hypersonic Flow, J. Aero Sci, Vol.17, Nol.11(1950/11) pp.675-690
- 14) 小橋安次郎, 宮沢政文: 二段式ロケット飛しょう体の揚力および圧力中心推定法, 航技研資

- 料TM-30(1964)
- 15) M.D.Van Dyke: First and Second-Order Theory of Supersonic Flow Past Bodies of Revolution, J. Aero. Sci. Vol.18, No.3 (1951/3) pp. 161-178.
- 16) C.A.Syverson and D.H.Dinnic: A Second Order Shock-Expansion Method Applicable to Bodies of Revolution near zero Lift, NACA Technical Note, 3527(1956)
- 17) J.V.Rakich. numerical calculation of supersonic Flows of perfect gas over bodies of revolution at small angles of yaw. NASA TN-D2390 1964
- 18) 遠藤宏二, 日刊工業新聞社, ロケット工学, pp. 106.
- 19) Ralph J.muraca. An empirical method for determining atatic distributed aerodynamic loads on axisymmetric multistage launch vehicles, NASA-TN-D3283 march 1966.
- 20) 野溝国生: 超音速に於ける円錐ポードテイル上の圧力係数TM-270(1975)
- 21) 近藤次郎: 迎え角のある回転体, 高速空気力学 pp. 369 丸善
- 22) Stone, A.H., "On Supersonic Flow Around Yawing Cones," Journal of mathematics Physics, Vol.27, 1948, pp67-81
- 23) Robert, T.Doty and maurice L. Rasmussen "Approximation for Hypersonic Flow past an Inclined Cone" AIAA Journal Vol.11 number 9, 1973.
- 24) PUCKETT, A. E., and STEWART, H. J., Aerodynamic Performance of Delta Wings at Supersonic Speed, Jour, Sci. Vol.14. No.10 (1947)p567.

航空宇宙技術研究所報告949号

昭和62年10月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7-44-1
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山5-6-17

Printed in Japan