

ISSN 0389-4010

UDC 519.28

629.783

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1032

誘導制御を伴う宇宙航行系プログラムの
軌道推定に関する理論構成

志 甫 徹

1989年8月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

誘導制御を伴う宇宙航行系プログラムの 軌道推定に関する理論構成*

志 甫 徹**

Theoretical Specifications of the Trajectory Estimation for a Space Navigation System with the Function of Guidance and Control.

Toru SHIHO

ABSTRACT

The theoretical specifications of the trajectory estimation for a space navigation system (observation and trajectory estimation processes with the function of guidance and control) of STANPS-N are presented in this paper. STANPS-N is the abbreviation for Space Trajectory and Mission Analysis Program System (Navigation version) developed at National Aerospace Laboratory.

Observation data from the range and range-rate radar are processed sequentially by the conventional Kalman filter or extended Kalman filter with the system noise compensation method. Unknown parameters (for example, observation bias, station location, astronomical and geophysical constants) can also be estimated by the enlarged system formulation. The evaluation algorithms for the effect of the impulsive velocity correction on the change of estimate and error covariance matrix are also presented.

1. ま え が き

航技研において、以前に人工衛星及び惑星間宇宙船の運動解析、誘導制御及びミッション解析等に関する研究に用いるために、宇宙飛行体軌道の研究用多目的シミュレーション・プログラム“STANPS”(Space Trajectory and Mission Analysis Program System)の開発を行った。このプログラムは人工衛星及び惑星間宇宙船の軌道生成プログラムを基幹として、レーダや光学センサーによる観測系、カルマン・フィルタなどの情報処理系、及び誘導制御系から成る航法系のプログラムを配したものであり、全体で約30,000ステップを越す膨大なプログラムになっている。このプログラムは、人工衛星及び惑星間宇宙船の軌道

制御の分野の研究、即ち、軌道力学、軌道推定、ミッション解析、或いは航法系における観測系、フィルタ系、誘導制御系等の研究に利用することを目的としている。従って、単に、軌道生成やミッション解析に用いるだけでなく、運動方程式や数値積分法の検討、航法系における種々のセンサーやフィルタ・アルゴリズム、誘導方式の比較検討など、プログラム構成の一部を変更して、それぞれの目的に応じて使用することができるようになっている。

本報告は、宇宙飛行体の軌道生成プログラム、例えば、STANPS-B(人工衛星)、またはSTANPS-C(惑星間宇宙船)と結合させて使用する誘導制御を伴う宇宙航法系プログラム(STANPS-N)の軌道推定に用いられている理論の概要と計算アルゴリズムについて記述する。軌道生成系の運動方程式や各摂動力のモデルに関しては、既に報告

* 平成元年8月2日受付

** 制御部

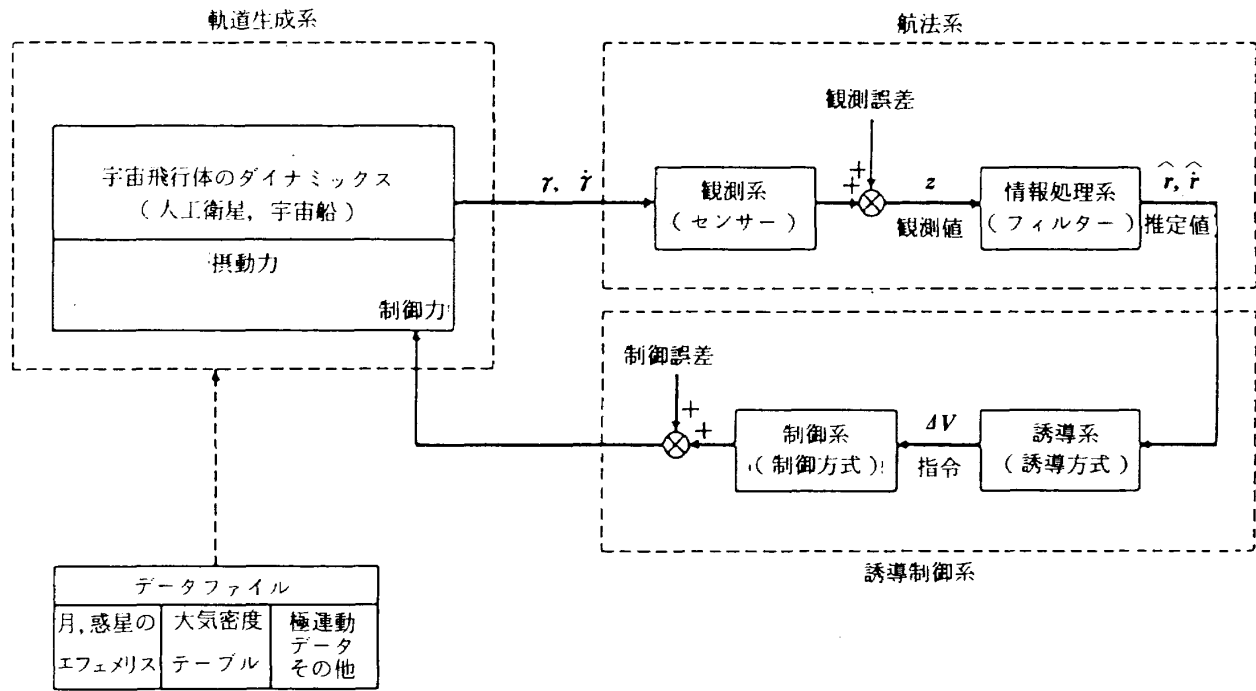


図 1.1 システムの構成

済みの航空宇宙技術研究所資料 TM-359¹⁾に詳しいので、重複を避けて記述は省略した。図 1.1 にシステムの構成を示す。図中の右側点線に囲まれた航法系と誘導制御系の 2 つのブロックが本報告の記述の対象であり、軌道推定の観点から見た理論的基礎を報告するものである。

2. 時 系

宇宙飛行体の運動は、Newton の運動方程式に従うものとする。その時の独立 (時間) 変数は暦表時 ET (Ephemeris Time) とする。即ち運動方程式は、この暦表時に関して積分される。

軌道生成、観測、軌道推定などの計算では、種々の時系が、場合に応じて用いられるが、詳細は文献1), 3) を参照して頂くこととして、ここでは概略の説明をしておく。現在使われている時系は、次の四つに分類することができる。

(1) 恒星時系 (地球の自転に基づく時系)

地球の自転速度が一定でないために、一様に流れる時系ではないが、地球の積算時に関する情報を与えてくれる。この時系には地球の対恒星 (実際には春分点を使う) 自転周期を積算して得られる恒星時、及び天の赤道を等速で動く太陽のグリニッジ子午線通過時刻を正午とする世界時 (UT) が

ある。世界時 (UT) は地上に固定した天文経緯度で決められる子午線を太陽が通過する時刻観測から得られる世界時 (UT0: 観測世界時) と次に述べる UT1, 及び UT2 がある。即ち、地球の極運動のため地上に固定された子午線と天球に設定された子午線の方向が変化するが、これを修正し天球の子午線 (自転軸方向) 通過時刻から求めた世界時 UT1 ($UT1 = UT0 + \Delta\lambda$, $\Delta\lambda$ は極運動の修正値), 及び地球自転の季節変化を修正し年間を通じて平滑化された世界時 UT2 ($UT2 = UT1 + \Delta S$, ΔS は季節変化の修正値) である。

(2) 暦表時系 (太陽系内の天体運動* に基づく時系)

太陽系の天体の公転運動はニュートンの万有引力の法則によって記述される。この場合用いられる時系を暦表時 (Ephemeris time) という。暦表時は運動方程式の独立変数 t のことであり、物理的には一様に流れることが前提になっている。

具体的には、地球の公転を反映する太陽の運動を記述する力学式を基にして定義され、ニューカムの太陽表によって太陽の位置を与える時刻を用いる。その起点 (元期) は、太陽の幾何学的平均

* 主として、地球の公転が基本となる。

黄経が $279^{\circ}41'48''.04$ に達した瞬間を1900年1月0日12h ETとし、その単位（秒間隔）は1900年1月0日12h ETにおける1太陽年の長さから導かれている。

(3) 原子時系（物理現象に基づく時系）

原子時と呼ばれるもので、量子力学の理論から不変とされるセシウム原子の固有振動数を積算して時間経過を求める時系で、上述の(1), (2)の天文時とは本質的に異なる時系である。時間間隔の単位（秒）は、セシウム原子の2つの準位間の遷移に対応する放射の周波数から決められている。

世界各地の原子時計データを比較総合して、BIH**（Bureau International de l'Heure, 国際報時局）が合成する最終的な原子時を国際原子時（TAI, Temps Atomique International）と呼ぶ。TAIの起点は1958年1月1日0h0m0s UT2の瞬間を同年同月同日0h0m0s TAIと定めている。

** 1988年1月より IERS (International Earth Rotation Service) に改組された。

(4) 人工的時系

この他に、我々が現在日常に用いている時系に協定世界時 UTC (Universal Time Coordinated) がある。これは原子振動に基づく原子時の秒を刻み、地球自転に基づく世界時の時刻を示すように管理された人工的時系である。UTCが使われはじめた頃は UT2-UTC を ± 0.1 秒の許容範囲に収めるよう周波数を変化させる周波数オフセットを行い、0.1秒刻みの秒信号のステップ調整が行われていたが、1972年1月1日以降は周波数オフセットは全廃され、ちょうど1秒のステップ調整だけで (UT1-UTC) が ± 0.9 秒（1975年1月1日改訂）を超えぬよう管理されている。UTCとTAIの差は常に整数秒である。1秒ステップ調整は、12月及び6月（第1優先）など、必要とあらば任意の月の各末日の最終秒（UTC）の後へ1秒を挿入するか、または最終秒を引抜くことによって行われる。この際挿入される（引抜かれる）1秒を正（負）のうるう秒と呼ぶ。

各時系間の関係を図 2.1 に示す。個々の時系に

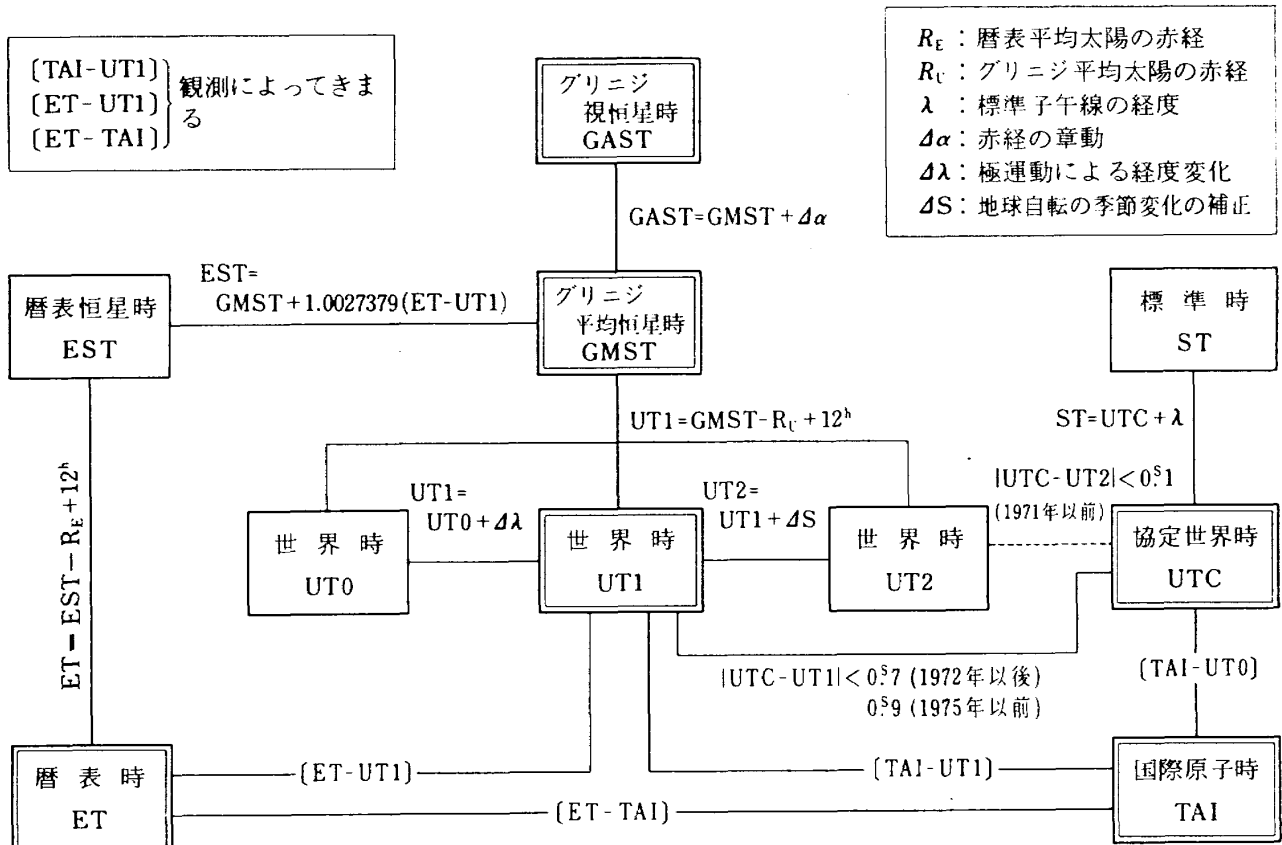


図 2.1 各時系間の関係

関しての詳細は参考文献^{1,2,3)}にゆずる。

宇宙飛行体の運動を決定する場合に、各時系は次のように用いられる。

恒星時、世界時：慣性座標系と地球固定座標系の変換

暦表時：太陽系天体、宇宙飛行体の運動、積分

国際原子時 (TAI)：運動方程式の積分

協定世界時 (UTC)：観測時系

宇宙飛行体の運動の解析に用いられている時系は、図 2.1 において二重枠の部分である。

国際原子時 (TAI) を基準とした時系変換の例¹⁾ を図 2.2 に示しておく。ここで MJED は修正ユリウス暦表日である。図中の (TAI-UT1), (ET-UT1), (ET-TAI) は観測によってきまる量であり、(TAI-UT1) は BIH から、また (ET-UT1), (ET-TAI) は海上保安庁水路部から、定期的に公表されている。

3. 座 標 系

本報告では、1950.0年における平均赤道面慣性座標系を基準座標系とする。

以下によく用いられる座標系に関して概略を述べる。

3.1 1950.0平均赤道面慣性座標系

地球重心(場合により、太陽、月、或いは惑星を中心)を中心とし、基準軸を1950.0年(ベッセル年初：暦表平均太陽の赤経が18h40mに達した瞬間)における平均春分点方向にとり、1950.0年における平均赤道面を基準面とした右手直交系の慣性座標系である。基準面上で春分点方向から見かけの太陽の運動方向に測られる角度を赤経とし、基準面から天球北極方向に測った角度を赤緯として表わす。赤経は1周24時間とし時間で測られることが多い。これは基準座標系となるもので、運動方程式はこの慣性座標系で記述され、運動方程式の積分もこの座標系に関して行われる。

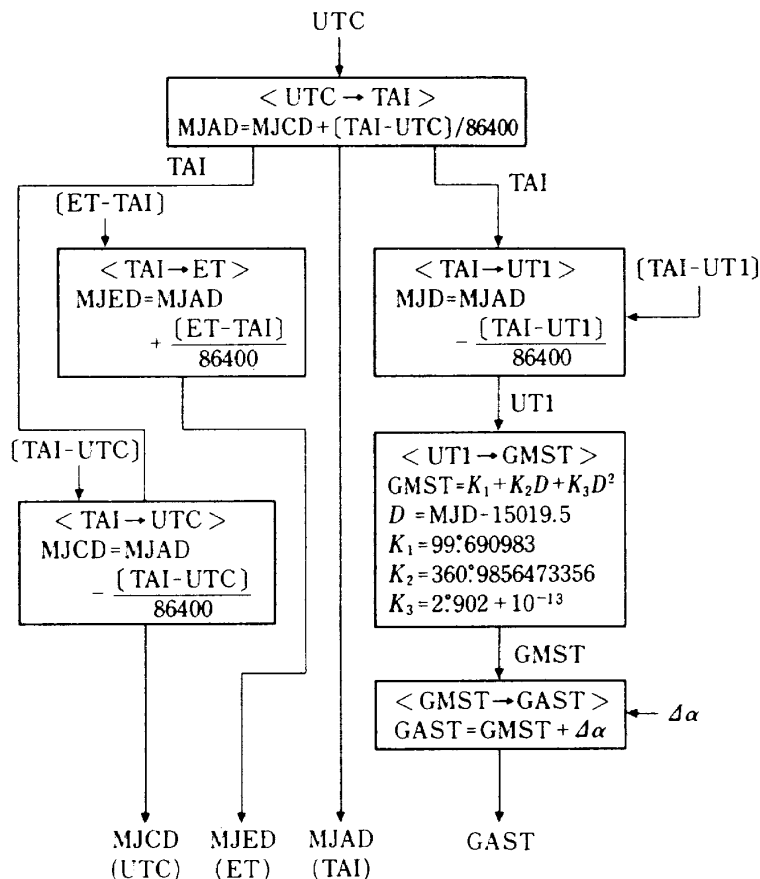


図 2.2 時系の変換

3.2 瞬時の平均赤道面座標系

瞬時の平均赤道面上、瞬時の春分点方向を基準軸にとった右手直交座標系を瞬時の平均赤道面座標系 (Mean of Date System) といい、元期から瞬時までの地球の歳差運動*による赤道面変化を補正したものである。

3.3 瞬時の真赤道面座標系

基準面を瞬時の真赤道面、基準軸を瞬時の真の春分点方向にとった右手直交座標系を瞬時の真赤道面座標系 (True of Date System) という。これは瞬時の平均赤道面座標系に地球の章動運動**による赤道面変化を補正したものであり、1950.0平均赤道面座標系に地球の歳差、章動による座標系の移動を補正したものである。

3.4 瞬時の真黄道面座標系

基準面を瞬時の黄道面にとり、基準軸を瞬時の真の春分点方向にとった右手直交座標系であり、基準面上春分点方向から見かけの太陽の運動方向に測った角度を黄経、基準面から黄道北極方向に測った角度を黄緯とする。月・太陽・惑星の引力、太陽輻射圧による摂動加速度の計算は、この座標系で行う。

以上の4つが軌道生成系で使われる座標系であり、図3.1に示す。座標系間の変換については参考文献1)に詳しいので省略する。

以下に本報告で必要とする座標系について述べる。

3.5 擬地球固定座標系^{3,9)}

瞬時の真赤道面を基準面とし、それとグリニッジ子午線の交点方向を基準軸とする右手直交座標系を擬地球固定座標系 (Pseudo Body-Fixed System) という。この座標系の各軸は地球の基準回転楕円体の軸とは一般には一致していない。この座標系は地球の自転と共に基準座標系に対して回転する。

瞬時の真赤道面座標系からの擬地球固定座標系への座標変換行列 S は次式によって与えられる。

$$S = \begin{bmatrix} \cos \theta_g & \sin \theta_g & 0 \\ -\sin \theta_g & \cos \theta_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ここで θ_g はグリニッジ視恒星時 (グリニッジ時角) で、真の赤道面上でグリニッジ子午線から真の春分点に向けて測る。

3.6 地球固定座標系

擬地球固定座標系に、地球の極運動による補正を施して得られるのが地球固定座標系である。基準面は、地球重心と慣用国際極原点 CIO Conventional International Origin, 1900年から1905年までの北極の平均位置) を結ぶ軸に直交する地球赤道面であり、その面とグリニッジ子午線の交点方向を基準軸とする。各軸は地球の基準回転楕円体の形状軸と一致する。地球の重力ポテンシャル、及び大気抵抗による摂動加速度の計算は、この座標系で行うと便利である。

地球が自転軸に対してよるめく運動を極運動と

* 歳差運動

地球は赤道にふくらんだ回転楕円体をしているため、太陽や月の引力によって、黄道面の軸である黄道軸に対して $23^{\circ}26'$ の角度を保っている自転軸を引き起そうとする偶力が働き、地球の自転軸はみそすり運動を起こし、赤道面が変化 (長周期) する。この運動を日月歳差といい、この運動のため地球の自転軸は約25,800年の周期で黄道北極のまわりを逆行する。これにともなって、春分点は黄道上を約 $50.3''/\text{year}$ で西方に移動する。また、惑星がそれぞれ軌道傾斜角をもっているために、惑星の引力によって黄道面が変化する。この運動を惑星歳差といい、春分点は赤道上を約 $0.12''/\text{year}$ で東方に移動させる。日月歳差と惑星歳差を合わせたものを一般歳差という。

** 章動運動

月及び地球の公転軌道は楕円軌道であり、黄道上の円運動で近似した平均的な歳差運動から周期的なずれを生ずる。この周期運動を章動といい、月と太陽の引力による短周期の赤道面変化である。章動のうち最大のものは、月の昇交点が黄道上を逆行して一周する18.6年の周期のものであり、春分点を前後に約 $\pm 18''$ 振動させる。

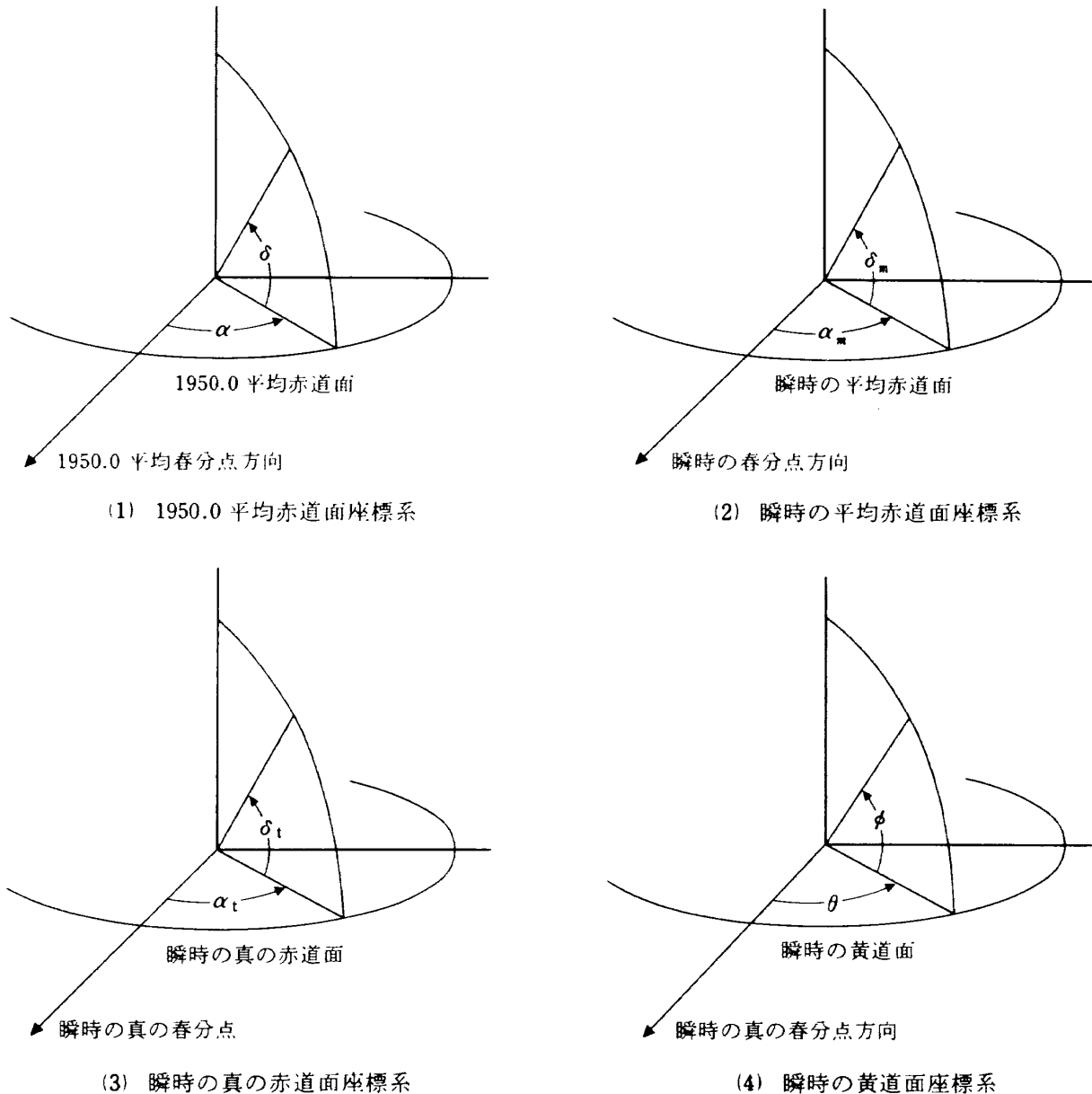


図 3.1 座標系

いい、自転軸が地表を貫く点、即ち北極位置が変化して行く現象である。換言すれば、地球の形状軸（基準回転楕円体の軸）と自転軸とが常に一致している訳ではなく、形状軸に対して自転軸がぐらつく現象である。

極の位置変化は、慣用国際極原点CIOを原点にとり、そこにおける接平面上でグリニッジ子午線（経度 0° ）方向に x 軸を、西経 90° の方向に y 軸をとった平面座標系において、角度の秒で表わされる。この変化の大きさは $0.5''$ 、距離にして15m程度であるが、地表の観測点の緯度、経度を変動させる。

擬地球固定座標系から地球固定座標系への座標変換行列 B は、次式で与えられる。

$$B = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \sin y & \sin x \cos y \\ 0 & \cos y & -\sin y \\ -\sin x & \cos x \sin y & \cos x \cos y \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

x, y の値は、5日平均値がBIH Circular Dによって公表されており、航技研では線形近似による内挿で計算に用いている。

なお、 x, y は微小な回転角であるから、次式が良い近似を与える。

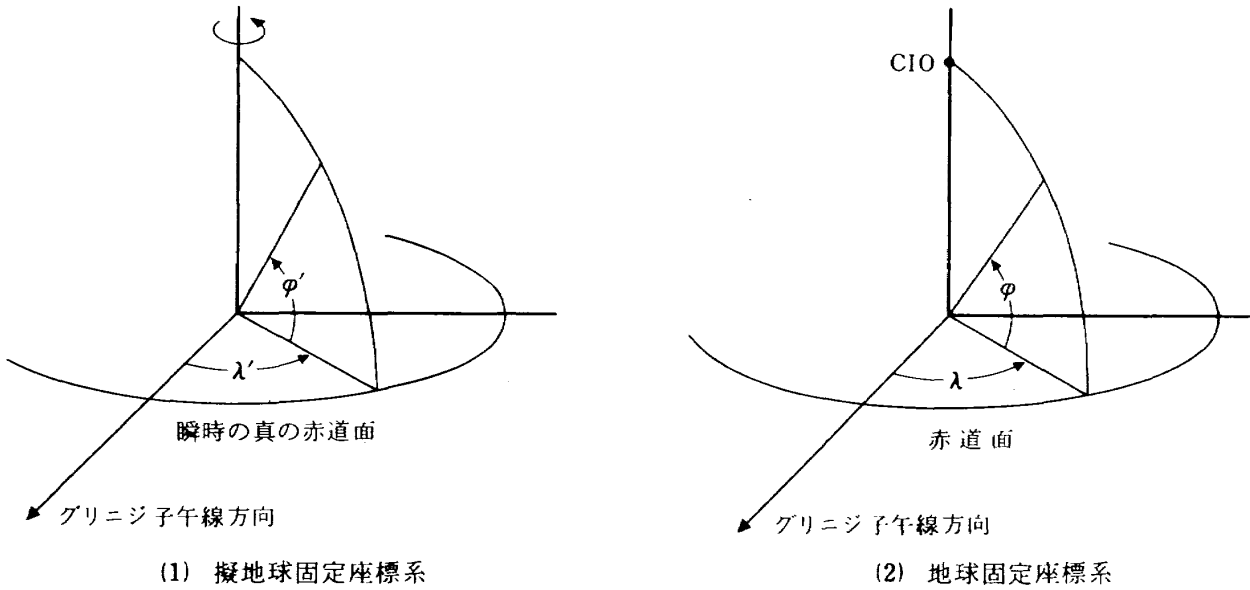


図 3.2 擬地球固定座標系と地球固定座標系

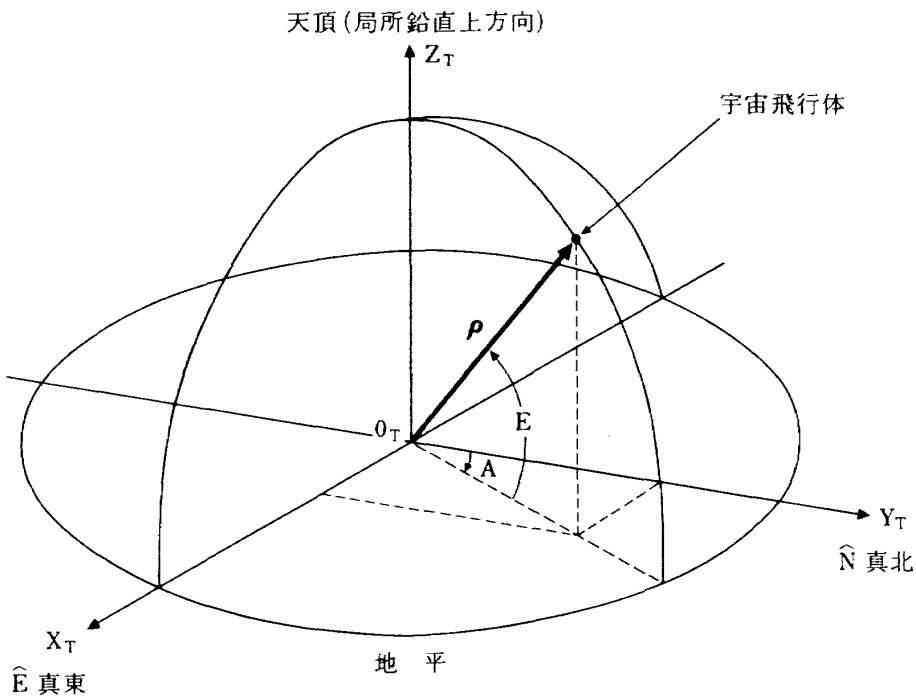


図 3.3 観測点座標系 (地表面座標系)

$$B \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -y \\ -x & y & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

図 3.2 に擬地球固定座標系と地球固定座標系を示す。

3.7 観測点座標系

地表上の観測点の局所鉛直上方を基準とした局所接平面を定義する。地球の形状軸の北極方向に

真北，東まわり 90° 方向を真東とした右手直交座標系を観測点座標系 (Topocentric System), または地表面座標系という。天体，或いは宇宙飛行体の観測は，この座標系を基準として行われ，レンジ，レンジ・レート，方位角，上下角等の観測量が得られる。図 3.3 は観測点座標系を示す。

観測点座標系から地球固定座標系への座標変換行列 T は次のように与えられる。

$$T = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_s & -\sin \phi_s \cos \lambda_s & \cos \phi_s \cos \lambda_s \\ \cos \lambda_s & -\sin \phi_s \sin \lambda_s & \cos \phi_s \sin \lambda_s \\ 0 & \cos \phi_s & \sin \phi_s \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

ここで、 λ_s は観測点経度、 ϕ_s は観測点地理学的緯度であり添字 s は station を表わす。

図 3.4 に地球固定座標系と観測点座標系の関係を示しておく。

宇宙飛行体の運動方程式を解き、観測データと比較するためには各種の座標変換が必要不可欠である。図 3.5 に各座標系の関係を示す。図中の線のわきの記号は座標変換行列であり、 $()^T$ はその転置行列であり、逆変換行列である。 H_1 は地球自転の歳差章動に対する変換行列で、歳差に対する変換 P と章動に対する変換 N とに分ければ、 H_1

$= NP$ (逆変換は $H_1^T = P^T N^T$) と表わすことができる。 H_2 は1950.0平均赤道座標系から擬地球固定座標系への変換行列で、 $H_2 = SH_1$ (逆変換は $H_2^T = H_1^T S^T$) であり、 S は地球の自転に関する変換であり自転速度変化を含み、グリニジ視恒星時によってきまる。 H_3 は1950.0平均赤道座標系から瞬時の真黄道面座標系への変換であり、 $H_3 = QH_1$ (逆変換 $H_3^T = H_1^T Q^T$) であり、 Q は黄道面と赤道面との変換行列である。 B は地球の極運動を補正するための変換であり、極の慣用国際原点 CIO からのずれの回転角によってきまる。 T は観測点座標系から地球固定座標系への変換行列であり、緯度と経度及び地球の形状モデルの基準楕円体から幾何学的に決定される。

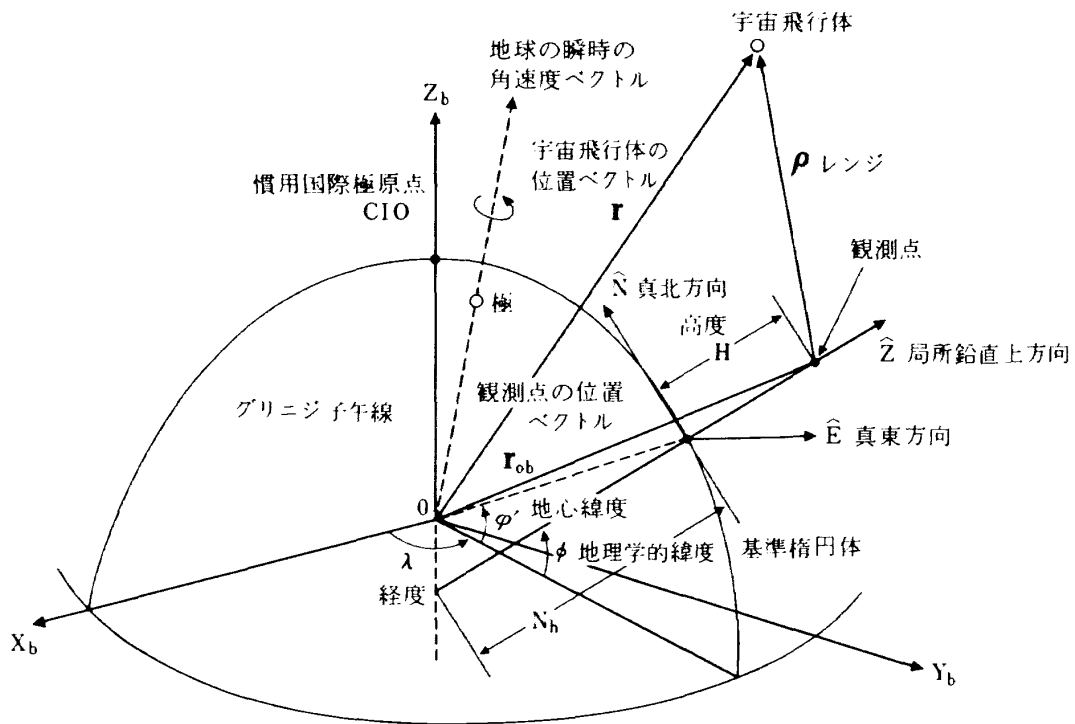


図 3.4 地球固定座標系と観測点座標系

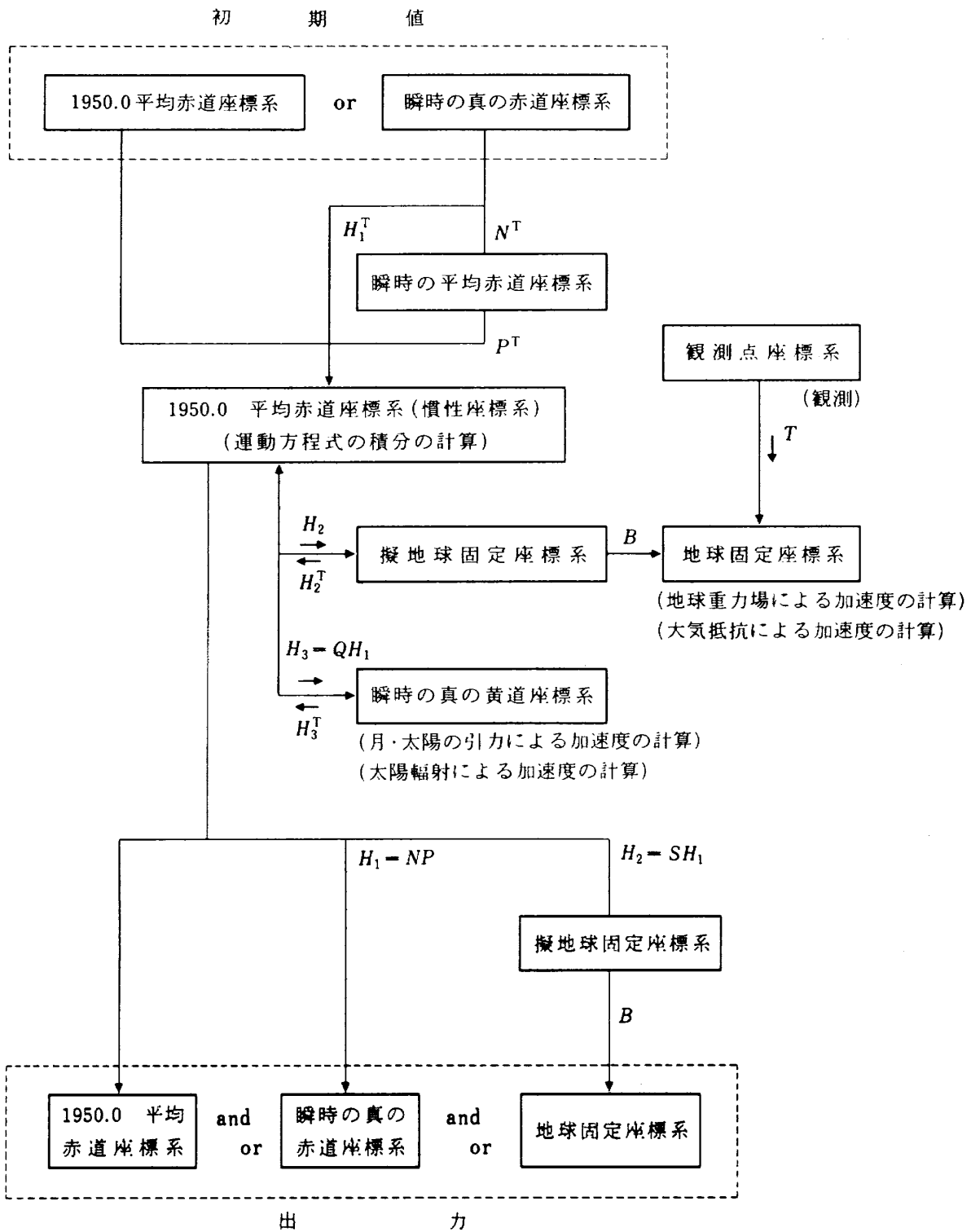


図 3.5 座標系の関係

4. 宇宙飛行体の運動系モデル

宇宙飛行体の運動モデルに関しては、重複を避けて詳細は参考文献1)を参照して頂くことにして概要を述べる。

人工衛星及び惑星間宇宙船のような宇宙飛行体の運動方程式は、1950.0平均赤道面慣性座標系において、次式で与えられる。

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_{SM} + \mathbf{a}_{SP} + \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{PG} + \mathbf{a}_{GR} \tag{4.1}$$

ここで、 \mathbf{r} は地心からの位置ベクトルであり、 $\ddot{\mathbf{r}}$ は時間に関する2階微分で加速度を表わしている。右辺の第1項は二体問題の加速度で、 μ は地心重力定数であるが、太陽、月、惑星を中心に記述した場合は、それぞれの重力定数を用いばよい。また、

- \mathbf{a}_S : 重力ポテンシャルの2次以上の項による摂動加速度 (重力場の歪みによる加速度)
- \mathbf{a}_{SM} : 月・太陽の引力による摂動加速度

- \mathbf{a}_{SP} : 太陽輻射圧による摂動加速度
- \mathbf{a}_D : 大気抵抗による摂動加速度
- \mathbf{a}_C : 制御推力による摂動加速度
- \mathbf{a}_{PG} : 惑星の引力による摂動加速度
- \mathbf{a}_{GR} : 一般相対論効果による摂動加速度

である。但し、地球の反射の効果は \mathbf{a}_{SP} に含まれている。また影は円筒モデル⁷⁾を用いている。

運動モデルの概要を図4.1に示す。各摂動加速度はそれぞれに最も適した座標系において定式化されているので、方程式の積分を実行する際には必要な変換を行わなければならない。制御力による加速度は常時作用する訳ではなく軌道修正時のみ考慮する。

運動方程式を直接積分する特別摂動法を用いる場合は採用する数値積分法によって精度が左右されるので、高精度で、かつ計算時間の速い方法を選ぶ必要がある。種々な方法が提案されているが、KSG (Krogh-Schampine-Gordon) 法²⁰⁾、GJ (Ganss-Jackson) 法¹⁾、CS (Cowell's Sum) 法などが適当と考えられる。

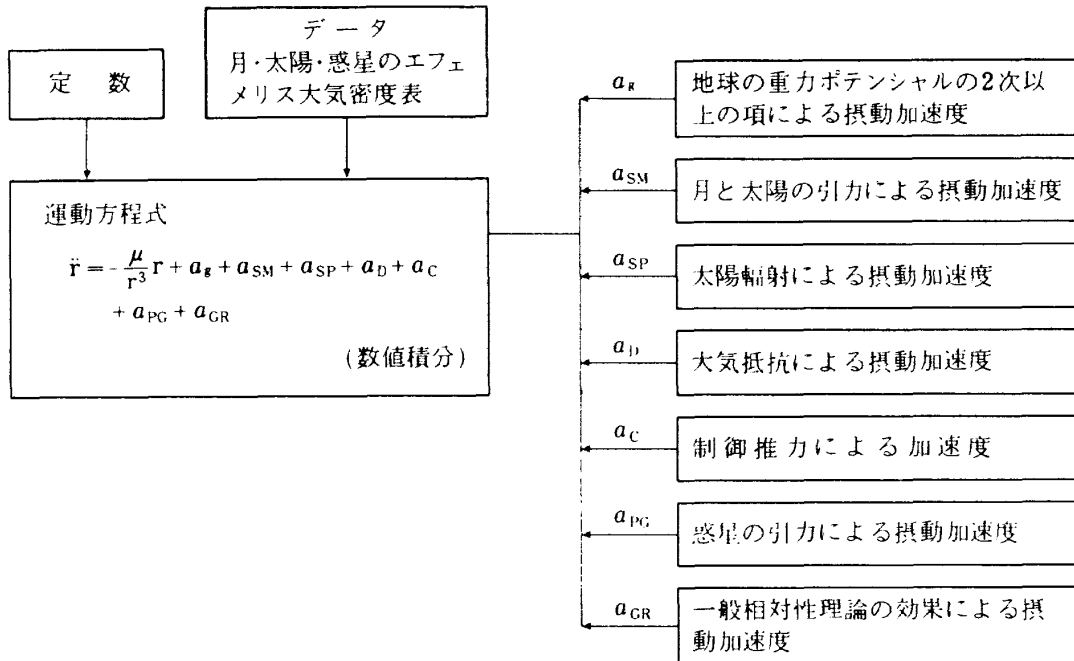


図 4.1 宇宙飛行体の運動モデル

5. 観測系

観測系として、最も基本的であり、すべてのミッションに必要な不可欠な地上からのレーダ観測システムについて記述する。レーダによる観測データは、電波誘導では勿論のこと、一般の誘導、或いは軌道解析、誘導誤差解析のために極めて重要な情報を提供する。

5.1 レーダ観測モデル

レーダ観測局の座標系（レーダ・ステーション座標系）は、図3.3に示した観測点座標系を用い、観測点に原点 O_T を持ち、接平面上真東に X_T 軸、真北に Y_T 軸、局所鉛直上方（天頂方向）に Z_T 軸をとった地球表面固定の座標系で、地球の自転とともに回転する。

ここで、

ρ : レンジベクトル (Range vector), 観測点に対する宇宙飛行体の位置ベクトル

A : 方位角 (Azimuth), 接平面内で真北から時計回りに測った角

E : 上下角 (Elevation), 接平面から ρ に向けて測った角で、迎角ということもある。

X_T, Y_T, Z_T 軸の単位ベクトルをそれぞれ ξ, η, ζ とし、 ρ を (x_T, y_T, z_T) とすると、

$$\rho = x_T \xi + y_T \eta + z_T \zeta, \quad \rho = |\rho| \quad (5.1.1)$$

と表わされるから、

$$\begin{cases} x_T = \rho \cdot \xi = \rho \cos E \cos A \\ y_T = \rho \cdot \eta = \rho \cos E \sin A \\ z_T = \rho \cdot \zeta = \rho \sin E \end{cases} \quad (5.1.2)$$

ここで、 (\cdot) はベクトルの内積を示す。従って、

$$\begin{cases} \tan A = \frac{\rho \cdot \eta}{\rho \cdot \xi}, \quad |A| \leq \pi \\ \sin E = \frac{\rho \cdot \zeta}{\rho}, \quad 0 \leq E \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5.1.3)$$

なる関係式が得られる。

観測を Range & Range Rate Radar で行うとすれば、通常、ひとつのレーダ観測局では、この観測点座標系において、次の4つの物理量に関する観測情報が得られる。

ρ : 直距離 (Range)

$\dot{\rho}$: 直距離変化率 (Range rate)

A : 方位角 (Azimuth)

E : 上下角 (Elevation)

これらの量は次のように定義される。

$$\begin{cases} \rho = |\rho| \\ \dot{\rho} = \frac{\dot{\rho} \cdot \rho}{\rho} \\ A = \tan^{-1} \left[\frac{\rho \cdot \eta}{\rho \cdot \xi} \right], \quad |A| \leq \pi \\ E = \sin^{-1} \left[\frac{\rho \cdot \zeta}{\rho} \right], \quad \delta \leq E \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5.1.4)$$

ここで、

ρ : 観測点に対する宇宙飛行体の位置ベクトル

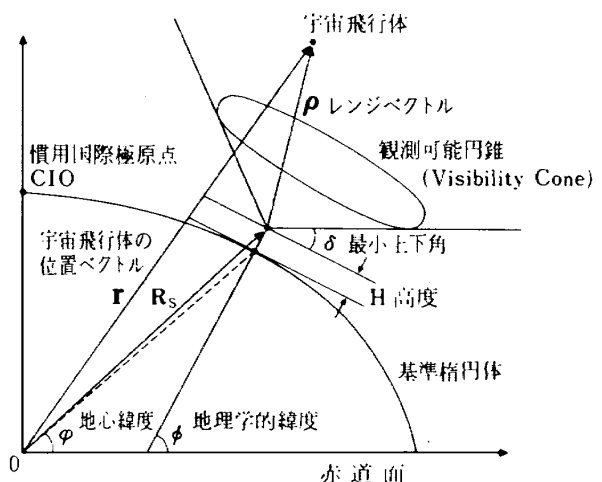
$\dot{\rho}$: 観測点に対する宇宙飛行体の相対速度ベクトル

ξ, η, ζ : 観測点座標系の各軸の単位ベクトル

δ : レーダ観測の観測可能最小上下角

である。

レーダ観測では、観測可能最小上下角 δ 以上でないと追跡できない。即ち、追跡可能領域は観測点を頂点とした頂角 $(\pi - 2\delta)$ の円錐の内部に限られる。この円錐を観測可能円錐 (Visibility Cone) という。最小上下角 δ は、山がある等の障害、低上下角の場合空気の屈折等の原因で、観測誤差の影響が大きくなる等の理由で、考慮しなければならない。



R_S : 観測点の位置ベクトル

図 5.1 追跡可能領域

図 5.1 に追跡可能領域を地球固定座標系との関係を示す。

(5.1.4)式は、いわゆる error-free の完全観測の方程式であるが、実際には、各種の系統的 (Systematic) 誤差、及び偶然 (random) 誤差に汚された観測データしか入手できない。従って、観測誤差を含んだレーダ観測における最終的な観測方程式は次式で示される。

$$\mathbf{y}^j(t_k) = \mathbf{h}^j(t_k) + \mathbf{b}^j(t_k) + \mathbf{v}^j(t_k) \quad (5.1.5)$$

ここで、上付添字の j は第 j 番目の観測局を表わし、 t_k は k 回目の観測時刻を示し、

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \rho_M \\ \dot{\rho}_M \\ A_M \\ E_M \end{bmatrix} \quad : \text{観測値 (添字 } M \text{ は誤差を含むことを示す)}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \rho \\ \dot{\rho} \\ A \\ E \end{bmatrix} \quad : \text{観測量の真値 (5.1.4) 式}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_\rho \\ b_{\dot{\rho}} \\ b_A \\ b_E \end{bmatrix} \quad : \text{観測バイアス誤差}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_\rho \\ v_{\dot{\rho}} \\ v_A \\ v_E \end{bmatrix} \quad : \text{観測ランダム誤差}$$

である。

観測バイアスの処理に関しては、6.4 節で未知パラメータを含む系の推定について後述するが、コンスタントバイアスなら、 $\dot{\mathbf{b}}=0$ 、時変バイアスならば、 $\dot{\mathbf{b}}=\boldsymbol{\beta}(t)$ という微分方程式を仮定して、システムの運動方程式と連立させて解いて求めることになる。

5.2 観測量の変換

観測量は観測点座標系に基づいて得られるので、処理するために基準座標系に統一しなければならない。ここでは、そのために必要な変換について

記述する。

(1) 地球固定座標系における観測点の位置ベクトル

$\bar{\lambda}$: 極運動効果の補正を加えた経度

$\bar{\phi}$: 極運動効果の補正を加えた地理学的緯度

H : 高度 (基準楕円体からの高度)

とし、地球の基準楕円体の扁平率を f 、平均赤道半径を a_e とすると、地球固定座標系における観測点の位置ベクトル \mathbf{R}_s は次式で与えられる。

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \cos \bar{\phi} \cos \bar{\lambda} \\ G_1 \cos \bar{\phi} \sin \bar{\lambda} \\ G_2 \sin \bar{\phi} \end{bmatrix} \quad (5.2.1)^6$$

ここで、

$$G_1 = \frac{a_e}{[1 - (2f - f^2) \sin^2 \bar{\phi}]^{1/2}} + H$$

$$G_2 = \frac{(1 - f^2) a_e}{[1 - (2f - f^2) \sin^2 \bar{\phi}]^{1/2}} + H$$

である。また、(5.2.1)式は次のように表わされることもある。即ち、

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N_h + H) \cos \bar{\phi} \cos \bar{\lambda} \\ (N_h + H) \cos \bar{\phi} \sin \bar{\lambda} \\ (N_h + H - f^2 N_h) \sin \bar{\phi} \end{bmatrix} \quad (5.2.1')$$

ここで、

$$N_h \triangleq \frac{a_e}{\sqrt{1 - (2f - f^2) \sin^2 \bar{\phi}}}$$

であり、 G_1 、 G_2 と N_h の関係は、

$$\begin{cases} G_1 \equiv N_h + H \\ G_2 \equiv (1 - f^2) N_h + H \end{cases}$$

である。 H 、 N_h は図 3.4 の中に示してある。

なお、基準楕円体として、SAO-SE-III¹¹⁾ (Smithsonian Standard Earth III, Gaposchkin, 1973) を採用すれば、

$$a_e = 6378.1404 \text{ km}$$

$$f = 1/298.256$$

である。

(2) 極運動の影響を考慮した地理学的緯度及び経度の補正

(5.2.1) 式中に極運動効果の補正を加えた地理学的緯度 $\bar{\phi}$ 、経度 $\bar{\lambda}$ が表われているが、擬地球固定

座標系における観測点の位置ベクトル R'_s ($|R'_s| = |R_s|$) と緯度 ϕ 、経度 λ が与えられれば、擬地球固定座標系から地球固定座標系への座標変換 (座標変換行列 B , 3.2 式) を行うことにより、 $\bar{\phi}$ 、 $\bar{\lambda}$ の内容を陽に知ることなしに R_s が求まる。ここでは、 $\bar{\phi}$ 、 $\bar{\lambda}$ の値を陽に知る必要のある場合もあるので、極運動による緯度、経度の補正³⁾ について記述しておく。

極運動については、既に 3.6 で記述したが、図 5.2 に示すような座標系を考える。原点 0 は慣用国際極原点 CIO であり、そこにおける接平面上でグリニッジ子午線方向に x 軸、西経 90° 方向に y 軸をとる。ある瞬間における自転軸の北極が $P(x, y)$ にあったとすると、経度 λ の方向にある A 点では、 OP を OA 上に投影した OQ に相当するだけの緯度変化 $d\phi$ が起こり

$$d\phi = x \cos \lambda'_0 + y \sin \lambda'_0 \quad (5.2.2)$$

で表わされる。また、経度 λ_0 、緯度 ϕ_0 の地点では、

$$d\lambda = (-x \sin \lambda'_0 + y \cos \lambda'_0) \tan \phi_0 \quad (5.2.3)$$

に相当する経度変化が起こる。但し、 ϕ_0 、 λ'_0 は P が 0 にある時の緯度と経度であり、 ϕ は北半球で正、 λ' は西経を正にとる。 ϕ_0 、 λ_0 は通常の地図上に与えられているものである。

λ'_0 は西経を意味しているので、東経 λ_0 に変換すると、

$$\begin{cases} d\phi = x \cos \lambda_0 - y \sin \lambda_0 \\ d\lambda = (x \sin \lambda_0 + y \cos \lambda_0) \tan \phi_0 \end{cases} \quad (5.2.4)$$

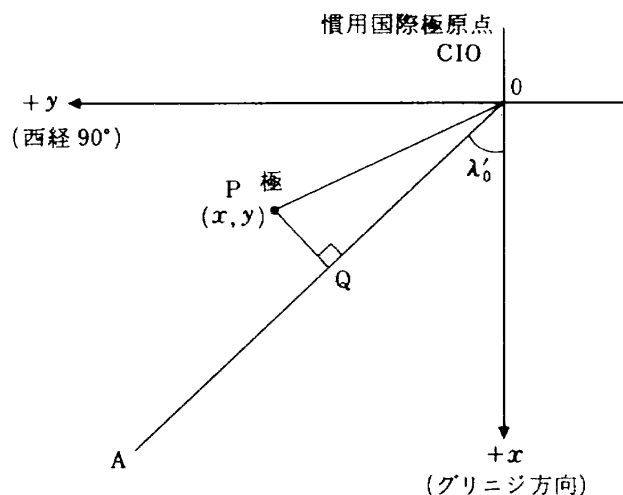


図 5.2 極運動を規定する座標系

の形になる。 x, y は角度の値をそのまま用いてよい。

従って、極運動を考慮した緯度、経度の補正は次式によって行う。

$$\begin{cases} \bar{\phi} = \phi_0 + d\phi \\ \bar{\lambda} = \lambda_0 + d\lambda \end{cases} \quad (5.2.5)$$

(3) 観測点座標系から地球固定座標系への変換ここで、 $R_i(\theta)$ を i 軸回り (反時計回りを正) に θ だけ回転する回転行列とし、 $i=1, 2, 3$ はそれぞれ x, y, z 軸を意味するものとすれば、

$$\begin{aligned} R_1(\theta) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \\ R_2(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \\ R_3(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

と定義され、次の性質を持つ。

$$R_i(-\theta) = R_i^{-1}(\theta) = R_i^T(\theta) \quad (5.2.7)$$

ここで $()^{-1}$ は逆行列、 $()^T$ は転置行列を表わす。

観測点座標系から地球固定座標系への変換行列を T とし、観測点の地理学的緯度を ϕ_s 、経度を λ_s とすれば、

$$\begin{aligned} T &= R_3(-\lambda_s) R_2\left(\frac{\pi}{2} - \phi_s\right) R_3\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= R_3^T(\lambda_s) R_2\left(\frac{\pi}{2} - \phi_s\right) R_3^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda_s & -\sin \phi_s \cos \lambda_s & \cos \phi_s \cos \lambda_s \\ \cos \lambda_s & -\sin \phi_s \sin \lambda_s & \cos \phi_s \sin \lambda_s \\ 0 & \cos \phi_s & \sin \phi_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

となる。また地球固定座標系から観測点座標系への変換は、 T の転置行列 T^T で表わされる (図 3.3, 3.4 参照)。

観測点座標系と地球固定座標系との間の変換行列は観測点座標系の第 1 軸の方向が文献によって異なるため、具体的表現が違っているのに注意を要するが、上述した回転行列を用いた方法で計算

すれば容易にチェックできる。

観測点座標系と地球固定座標系との間の変換は、

ρ : 観測点座標系で記述した宇宙飛行体の位置ベクトル

r_b : 地球固定座標系で記述した宇宙飛行体の位置ベクトル

R_s : 地球固定座標系で記述した観測点の位置ベクトル

T : 観測点座標系から地球固定座標系への座標変換行列(逆変換は T^T)

とすれば、次のように表わされる。

$$r_b = T\rho + R_s \quad (5.2.9)$$

$$\dot{r}_b = T\dot{\rho}$$

また、観測点座標系の各座標軸の方向を示す単位ベクトル ξ , η , ζ は観測点座標系において

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

として与えられるから、地球固定座標系で表わせば、

$$\begin{aligned} \xi^f = T\xi &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda_s \\ \cos \lambda_s \\ 0 \end{bmatrix} \\ \eta^f = T\eta &= \begin{bmatrix} -\sin \phi_s \cos \lambda_s \\ -\sin \phi_s \sin \lambda_s \\ \cos \phi_s \end{bmatrix} \\ \zeta^f = T\zeta &= \begin{bmatrix} \cos \phi_s \cos \lambda_s \\ \cos \phi_s \sin \lambda_s \\ \sin \phi_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

となる。

(4) 観測量の変換

地球固定座標系に関して、宇宙飛行体及び観測局の位置ベクトルを、それぞれ r_b , R_s とすると、観測局から見た宇宙飛行体の位置ベクトルは地球固定座標系において、

$$\rho_b = r_b - R_s \quad (5.2.11)$$

となるから、距離(レンジ)は

$$\rho = (\rho_b \cdot \rho_b)^{1/2} \quad (5.2.12)$$

で与えられる。従って位置、速度ベクトルに対する変分は、次式のようになる。

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial r_b} = \frac{\rho_b^T}{\rho} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \dot{r}_b} = 0 \end{cases} \quad (5.2.13)$$

観測局の位置ベクトル R_s は固定であるから $\dot{R}_s = 0$ より次の関係式が得られる。

$$\dot{\rho}_b = \dot{r}_b \quad (5.2.14)$$

いま、 ρ_b 方向の単位ベクトル u_b を考えると、

$$\rho_b = \rho u_b$$

と書けるから、

$$\dot{\rho}_b = \dot{\rho} u_b + \rho \dot{u}_b$$

となる。従って、

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_b \cdot u_b = \dot{r}_b \cdot u_b \quad (5.2.15)$$

となる。従って、位置、速度ベクトルに対する変分は、

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial r_b} = \frac{1}{\rho} \left[\dot{r}_b - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \rho_b \right]^T \\ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{r}_b} = \frac{\rho_b^T}{\rho} \end{cases} \quad (5.2.16)$$

となる。

ここで、方向余弦 l , m , n を (5.2.10) 式を用いて、

$$l = u_b \cdot \xi_b, \quad m = u_b \cdot \eta_b, \quad n = u_b \cdot \zeta_b \quad (5.2.17)$$

と定義すれば、方位角 A , 及び上下角 E は、

$$A = \tan^{-1} \left(\frac{l}{m} \right) \quad (5.2.18)$$

$$E = \sin^{-1} (n) \quad (5.2.19)$$

と表わされ、対応する変分はそれぞれ、

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial r_b} = \frac{m \xi_b - l \eta_b}{\rho(1-n^2)} \\ \frac{\partial A}{\partial \dot{r}_b} = 0 \end{cases} \quad (5.2.20)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial r_b} = \frac{\zeta_b - n u_b}{\rho \sqrt{1-n^2}} \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{r}_b} = 0 \end{cases} \quad (5.2.21)$$

で与えられる。

なお、(5.2.9), (5.2.14) 式から

$$\begin{cases} \rho_b = T\rho \\ \dot{\rho}_b = T\dot{\rho} \end{cases} \quad (5.2.22)$$

の関係が得られる。ここで、 ρ 、 $\dot{\rho}$ は観測点座標系で表わされたレンジ、レンジレートベクトルであり、 T は観測点座標系から地球固定座標系への変換行列である。

5.3 観測感度行列

ここで後述する軌道推定の際に用いられる観測感度行列について述べる。

観測方程式を

$$Y(t_k) = h(X, t_k) + v(t_k) \quad (5.3.1)$$

としたとき、観測感度行列は、

$$H(t_k) \triangleq \left[\frac{\partial h}{\partial X^T} \right] \quad (5.3.2)$$

として定義される。ここで、 $Y(t_k)$ は m 次元観測ベクトル、 $X(t_k)$ は n 次元状態変数ベクトル、 $v(t_k)$ は m 次元観測誤差ベクトルであり、 t_k は観測時刻を示し、 $H(t_k)$ は $m \times n$ 行列となる。

前述したレーダ観測の場合には、もし観測ベクトルの成分を ρ 、 $\dot{\rho}$ 、 A 、 E の順に並べたとすると、

$$H(t_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial X} & \frac{\partial \rho}{\partial Y} & \frac{\partial \rho}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Z} & \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{X}} & \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{Y}} & \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{Z}} \\ \frac{\partial A}{\partial X} & \frac{\partial A}{\partial Y} & \frac{\partial A}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial E}{\partial X} & \frac{\partial E}{\partial Y} & \frac{\partial E}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

のように表わせる。第1行目は(5.2.13)式、第2行目は(5.2.16)式、第3行目は(5.2.20)式、第4行目は(5.2.21)式で与えられる。行列中で0が入っている要素は以上の諸式で0となる部分を先取りして記した。またレンジ・レーダの場合には、 $\dot{\rho}$ に関する第2行目が不要となる。

観測方程式がバイアス誤差のような未知パラメータを含む場合には、未知パラメータも状態変数に含め、宇宙飛行体の位置、速度に対応する部分行列を $H_1(t_k)$ 、未知パラメータに対応する部分行列を $H_2(t_k)$ とすれば、観測感度行列は、次のように構成される。

$$H(t_k) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{H_1(t_k)}^{6} & \overbrace{H_2(t_k)}^{n-6} \end{array} \right) \updownarrow m$$

また、いくつかの観測局の観測データが同時に使える場合には、第 j 番目の観測局に関する観測感度行列を $H^j(t_k)$ とすると

$$H(t_k) = \begin{bmatrix} H_1^1(t_k) & \cdots & H_1^j(t_k) & \cdots & H_1^m(t_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_2^1(t_k) & \cdots & H_2^j(t_k) & \cdots & H_2^m(t_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

のように構成される。

6. 軌道推定系 (情報処理系)

ここでは、観測系からの情報、即ち観測ノイズを含んだ観測データから宇宙飛行体の状態変数を推定するアルゴリズムとして、通常のカルマンフィルタと拡張カルマンフィルタ、及び未知パラメータを含んだ場合のフィルタ²¹⁾について記述する。

6.1 カルマンフィルタ

(1) 問題の定式化

いま、線形システム方程式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.1.1)$$

と、観測方程式

$$\mathbf{y}(t) = H(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (6.1.2)$$

が与えられたとする。

ここで、

$\mathbf{x}(t)$: 状態ベクトル (n 次元)

$F(t)$: $n \times n$ 行列

$B(t)$: $n \times q$ 行列

$\mathbf{u}(t)$: システムノイズ (q 次元)

($\dot{\quad}$) : 時間に関する微分

及び

$\mathbf{y}(t)$: 観測ベクトル (m 次元)

$H(t)$: 観測感度行列 ($m \times n$ 次元)

$\mathbf{v}(t)$: 観測ノイズベクトル (m 次元)

であり、 $\mathbf{u}(t)$ 、 $\mathbf{v}(t)$ は白色ガウス雑音と仮定し、 $\mathbf{x}(t)$ は平均値0の正規分布をなすとして、次の仮定を置く。

$$\begin{cases} E[\mathbf{u}(t)] = 0 \\ E[\mathbf{v}(t)] = 0 \\ E[\mathbf{u}(t)\mathbf{u}(\tau)^T] = \mathbf{Q}(t)\delta(t-\tau) \\ E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] = \mathbf{R}(t)\delta(t-\tau) \\ E[\mathbf{u}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] = 0 \end{cases} \quad (6.1.3)$$

ここで $E[\]$ は期待値を表わし、 $\delta(t-\tau)$ はクロネッカーのデルタである。(6.1.3)の第5式はシステムノイズと観測ノイズとは相関がないことを仮定している。また、 $\mathbf{Q}(t)$ はシステムノイズの共分散行列 ($q \times q$ 次元)、 $\mathbf{R}(t)$ は観測ノイズの共分散行列 ($m \times m$ 次元) である。なお、システムノイズとはシステムのモデル化誤差を意味している。

初期条件として、次式が与えられるものとする。

$$\begin{cases} E[\mathbf{x}_0] = \hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 \\ E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] = \mathbf{P}(t_0) = \bar{\mathbf{P}}(t_0) \end{cases} \quad (6.1.4)$$

ここで、 $(\hat{\ })$ は推定値、 $(\bar{\ })$ は予測値、 $\mathbf{P}(t)$ は推定誤差の共分散行列 ($n \times n$ 次元) である。

推定誤差を $(\tilde{\ })$ で表わして次式を定義する。

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) \triangleq \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (6.1.5)$$

ここで $\mathbf{x}(t)$ は真値であり、実際にはわからない。

以上のように設定すると、問題は、時刻 t_0 から t までの観測値 $\{\mathbf{y}(\tau) : t_0 \leq \tau \leq t\}$ から状態変数の推定値 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ を求めることになる。

(6.1.1) 式の解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_k) &= \Phi(t_k, t_{k-1}) \mathbf{x}(t_{k-1}) \\ &+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

ここで、 $\Phi(t_k, t_{k-1})$ は遷移行列 (Transition matrix) であり、次式から計算される。

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_{k-1}) = \mathbf{F}(t) \Phi(t, t_{k-1}) \quad (6.1.7)$$

$$\Phi(t_{k-1}, t_{k-1}) = \mathbf{I}_n$$

ここで、 \mathbf{I}_n は $n \times n$ の単位行列である。

なお、遷移行列は次の性質を持つ。

- 1) $\Phi(t, \tau)$ は常に正則
- 2) $\Phi(t_k, t_s) = \Phi(t_k, t_{k-1}) \Phi(t_{k-1}, t_s)$
- 3) $\Phi(t, \tau)^{-1} = \Phi(\tau, t) = \Phi(t, \tau)^T$
- 4) $\Phi(t, t) = \mathbf{I}_n$

カルマンフィルタは逐次推定アルゴリズムであり、観測値が入った場合を推定を観測更新、観測

値の入らない場合の推定 (予測) を時間更新という。

(2) 観測更新 (Measurement Update)

推定値 $\mathbf{x}(t_k)$ を次式で仮定する。

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t_k) = \bar{\mathbf{x}}(t_k) + \mathbf{K}(t_k) [\mathbf{y}(t_k) - \mathbf{H}(t_k) \bar{\mathbf{x}}(t_k)] \\ \bar{\mathbf{x}}(t_k) \triangleq \Phi(t_k, t_{k-1}) \bar{\mathbf{x}}(t_{k-1}) \end{cases} \quad (6.1.8)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{x}}(t_k)$ は予測値 (計算予測値) であり、 $\mathbf{K}(t_k)$ はカルマンゲインである。 $\mathbf{K}(t_k)$ が求まれば推定値が与えられる。

今、(6.1.8)の第1式右辺第2項の $[\]$ を、

$$\Delta \mathbf{y}(t_k) \triangleq [\mathbf{y}(t_k) - \mathbf{H}(t_k) \bar{\mathbf{x}}(t_k)] \quad (6.1.9)$$

と定義する。 $\Delta \mathbf{y}(t_k)$ はイノベーション過程 (Innovation Process) と呼ばれ、観測値と計算予測観測値の差になっているので、O-Cとも呼ばれる。

従って、

$$\hat{\mathbf{x}}(t_k) = \bar{\mathbf{x}}(t_k) + \mathbf{K}(t_k) \Delta \mathbf{y}(t_k) \quad (6.1.8')$$

と書き直すことができる。この式の意味するところは、推定値は実際の観測値と計算予測観測値との差に状態変数の真値に関する情報 (誤差も含まれている) が含まれているから、それに重みをつけて、システムの挙動によって予想される予測値を修正して決定されるということである。

カルマンゲイン $\mathbf{K}(t_k)$ の求め方

$\mathbf{K}(t_k)$ の求め方は、推定値 $\hat{\mathbf{x}}(t_k)$ と推定誤差 $\tilde{\mathbf{x}}(t_k)$ が互いに独立で相関がないという、いわゆる直交条件から求める。

直交条件は、次式で定義される。

$$\text{cov}[\tilde{\mathbf{x}}(t_k), \hat{\mathbf{x}}(t_k)] = E[\tilde{\mathbf{x}}(t_k) \hat{\mathbf{x}}(t_k)^T] = 0 \quad (6.1.10)$$

(6.1.9) 式は、(6.1.2), (6.1.4), (6.1.5), (6.1.8)

式から

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y}(t_k) &= \mathbf{H}(t_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \tilde{\mathbf{x}}(t_{k-1}) \\ &+ \mathbf{v}(t_k) + \mathbf{H}(t_k) \mathbf{w}(t_k) \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

ここで

$$\begin{cases} \mathbf{w}(t_k) \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{W}(t_k, t_{k-1}) \triangleq \text{cov}[\mathbf{w}(t_k), \mathbf{w}(t_k)] \\ = E[\mathbf{w}(t_k) \mathbf{w}(t_k)^T] \end{cases} \quad (6.1.12)$$

と定義する。 $\mathbf{w}(t_k)$ は時刻 t_{k-1} から t_k の間に、システムに作用したシステムノイズの累積であり、

$W(t_k, t_{k-1})$ はその共分散行列である。以後必要に応じて、 $W(t_k)$ と略記することがある。

従って、推定値は、

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t_k) &= \Phi(t_k, t_{k-1})\hat{\mathbf{x}}(t_{k-1}) \\ &+ K(t_k)H(t_k)\Phi(t_k, t_{k-1})\tilde{\mathbf{x}}(t_{k-1}) \\ &+ K(t_k)v(t_k) + K(t_k)H(t_k)w(t_k)\end{aligned}\quad (6.1.13)$$

推定誤差は、

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(t_k) &= [I - K(t_k)H(t_k)]\Phi(t_k, t_{k-1})\tilde{\mathbf{x}}(t_{k-1}) \\ &+ [I - K(t_k)H(t_k)]w(t_k) - K(t_k)v(t_k)\end{aligned}\quad (6.1.14)$$

となる。

直交条件 (6.1.10) 式に (6.1.13), (6.1.14) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\text{cov}[\tilde{\mathbf{x}}(t_k), \hat{\mathbf{x}}(t_k)] &= \{ [I - K(t_k)H(t_k)]\Phi(t_k, t_{k-1}) \\ &\times P(t_{k-1})\Phi(t_k, t_{k-1})^T H(t_k)^T \\ &- K(t_k)R(t_k) + [I - K(t_k)H(t_k)] \\ &\times W(t_k)H(t_k)^T \} K(t_k)^T = 0\end{aligned}\quad (6.1.15)$$

ここで、 $P(t_k)$ は推定誤差の共分散行列で

$$P(t_k) \triangleq \text{cov}[\tilde{\mathbf{x}}(t_k), \tilde{\mathbf{x}}(t_k)] = E[\tilde{\mathbf{x}}(t_k)\tilde{\mathbf{x}}(t_k)^T]\quad (6.1.16)$$

と定義する。

$K(t_k)$ の値如何にかかわらず、(6.1.15)式が常に成立する条件は、式中の $\{ \} = 0$ である。従って、その式を $K(t_k)$ について解けば、カルマンゲインが求められ、次式のようになる。

$$K(t_k) = \bar{P}(t_k)H(t_k)^T \times [H(t_k)\bar{P}(t_k)H(t_k)^T + R(t_k)]^{-1}\quad (6.1.17)$$

$$\bar{P}(t_k) \triangleq \Phi(t_k, t_{k-1})P(t_{k-1}) \times \Phi(t_k, t_{k-1})^T + W(t_k)\quad (6.1.18)$$

誤差共分散行列 $P(t_k)$ の導き方

$P(t_k)$ の定義式 (6.1.16) に (6.1.14) 式を代入し、(6.1.18) 式を考慮すると、

$$P(t_k) = [I - K(t_k)H(t_k)]\bar{P}(t_k) \times [I - K(t_k)H(t_k)]^T$$

$$\begin{aligned}&+ K(t_k)R(t_k)K(t_k)^T \\ &= [I - K(t_k)H(t_k)]\bar{P}(t_k) \\ &- \{ [I - K(t_k)H(t_k)]\bar{P}(t_k)H(t_k)^T \\ &- K(t_k)R(t_k) \} K(t_k)^T\end{aligned}\quad (6.1.19)^*$$

となる。右辺第2項の $\{ \} K(t_k)^T$ は、(6.1.18) 式を考慮すれば、(6.1.15) 式から 0 となる。

従って、

$$P(t_k) = [I - K(t_k)H(t_k)]\bar{P}(t_k)\quad (6.1.20)$$

(3) 時間更新 (Time Update)

観測値が入らない場合、予測推定値を計算するのが、ここで言う時間更新である。

推定値は

$$\hat{\mathbf{x}}(t_k) \equiv \bar{\mathbf{x}}(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1})\hat{\mathbf{x}}(t_{k-1})\quad (6.1.21)$$

で与えられる。また、推定誤差は、

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_k) = \mathbf{x}(t_k) - \hat{\mathbf{x}}(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1})\tilde{\mathbf{x}}(t_{k-1}) + w(t_k)\quad (6.1.22)$$

であるから、

$$P(t_k) \equiv \bar{P}(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1})P(t_{k-1}) \times \Phi(t_k, t_{k-1})^T + W(t_k)\quad (6.1.23)$$

となる。

システムノイズ共分散行列の計算

ここで $W(t)$ の具体的な形を求める。(6.1.12) 式から、

$$\begin{aligned}W(t, t_{k-1}) &= W(t) \\ &= E \left[\left(\int_{t_{k-1}}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_{t_{k-1}}^t \Phi(t, s) B(s) u(s) ds \right)^T \right] \\ &= \int_{t_{k-1}}^t \int_{t_{k-1}}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) \delta(\tau - s) \\ &\quad \times B(s)^T \Phi(t, s)^T d\tau ds\end{aligned}$$

*なお、(6.1.19) 式の表現は Joseph 共分散と呼ばれており、二次形式の形になっているので、常に $P(t_k)$ の非負性が保たれ、フィルタの発散 (divergence) が起こりにくいとされているが、計算量が多い割には余り効果的でないようである。

$$= \int_{t_{k-1}}^t \dot{\Phi}(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B(\tau)^T \Phi(t, \tau)^T d\tau \quad (6.1.24)$$

上式の両辺を t に関して微分し、Leibnitz の微分公式**を用いると、

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \int_{t_{k-1}}^t \dot{\Phi}(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B(\tau)^T \\ &\quad \times \Phi(t, \tau)^T d\tau \\ &\quad + \int_{t_{k-1}}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B(\tau)^T \\ &\quad \times \dot{\Phi}(t, \tau)^T d\tau \\ &\quad + \Phi(t, t) B(t) Q(t) B(t)^T \Phi(t, t)^T \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

ここで、

$$\dot{\Phi}(t, \tau) = F(t) \Phi(t, \tau), \quad \Phi(t, t) = I$$

の関係を代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \int_{t_{k-1}}^t F(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B(\tau)^T \\ &\quad \times \Phi(t, \tau)^T d\tau \\ &\quad + \int_{t_{k-1}}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B(\tau)^T \\ &\quad \times \Phi(t, \tau)^T F(t)^T d\tau + B(t) Q(t) B(t)^T \\ &= F(t) \left[\int_{t_{k-1}}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B(\tau)^T \right. \\ &\quad \left. \times \Phi(t, \tau)^T d\tau \right] \\ &\quad + \left[\int_{t_{k-1}}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B(\tau)^T \right. \\ &\quad \left. \times \Phi(t, \tau)^T d\tau \right] F(t)^T + B(t) Q(t) B(t)^T \end{aligned}$$

ここで (6.1.24) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= F(t) W(t) + W(t) F(t)^T \\ &\quad + B(t) Q(t) B(t)^T \quad (6.1.26) \\ W(t_{k-1}) &= W(t_{k-1}, t_{k-1}) = 0 \end{aligned}$$

が得られる。この行列微分方程式を初期値を $W(t_{k-1}) = 0$ として解けば $W(t_k)$ が求められる。初期値は $W(t)$ の定義式 (6.1.24) から 0 であることが明白である。

推定誤差共分散行列 $P(t_k)$ の計算の別法

(6.1.23) 式を $t_k = t$ として書換えると、

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) &= \Phi(t, t_{k-1}) P(t_{k-1}) \Phi(t, t_{k-1})^T \\ &\quad + \int_{t_{k-1}}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B(\tau)^T \\ &\quad \times \Phi(t, \tau)^T d\tau \end{aligned} \quad (6.1.27)$$

両辺を t に関して微分し、Leibnitz の微分公式を適用すると、

$$\begin{aligned} \dot{\bar{P}}(t) &= \dot{\Phi}(t, t_{k-1}) P(t_{k-1}) \Phi(t, t_{k-1})^T \\ &\quad + \Phi(t, t_{k-1}) P(t_{k-1}) \dot{\Phi}(t, t_{k-1})^T \\ &\quad + \Phi(t, t) B(t) Q(t) B(t)^T \Phi(t, t)^T \\ &\quad + \int_{t_{k-1}}^t \left\{ \dot{\Phi}(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B(\tau)^T \right. \\ &\quad \left. \times \Phi(t, \tau)^T + \Phi(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B(\tau)^T \right. \\ &\quad \left. \times \dot{\Phi}(t, \tau)^T \right\} d\tau \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

となる。

ここで、

$$\dot{\Phi}(t, \tau) = F(t) \Phi(t, \tau), \quad \Phi(t, t) = I$$

の関係を代入すると、(6.1.28) 式は、

** Leibnitz の微分公式

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_a^b f(x, \lambda) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) dx \right. \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{v(\lambda)}^{u(\lambda)} f(x, \lambda) dx = \int_{v(\lambda)}^{u(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) dx + f(u, \lambda) \frac{\partial u}{\partial \lambda} - f(v, \lambda) \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right. \quad (2)$$

第2公式において、 $\lambda = t$, $x = \tau$, $u(\lambda) = t_{k-1}$, $v(\lambda) = t$ と置けば、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{t_{k-1}}^t f(\tau, t) d\tau = \int_{t_{k-1}}^t \frac{\partial}{\partial t} f(\tau, t) d\tau + f(t, t)$$

となるから、これを適用すればよい。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{P}}(t) = & F(t)\Phi(t, t_{k-1})P(t_{k-1})\Phi(t, t_{k-1})^T \\ & + \Phi(t, t_{k-1})P(t_{k-1})\Phi(t, t_{k-1})^T F(t) \\ & + \int_{t_{k-1}}^t F(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)Q(\tau)B(\tau)^T \\ & \times \Phi(t, \tau)^T d\tau \\ & + \int_{t_{k-1}}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)Q(\tau)B(\tau)^T \\ & \times \Phi(t, \tau)^T F(t)^T d\tau + B(t)Q(t)B(t)^T \end{aligned}$$

となる。これに、(6.1.27)式を適用すると、次式が得られる。

$$\dot{\bar{P}}(t) = F(t)\bar{P}(t) + \bar{P}(t)F(t)^T + B(t)Q(t)B(t)^T \quad (6.1.29)$$

上式を初期値 $\bar{P}(t_{k-1}) = P(t_{k-1})$ として解けば、 $\bar{P}(t_k)$ が求められる。

システム方程式のモデル化誤差の影響を白色ガウス雑音のシステムノイズを用いて補償する方法をテキサス大学の Taplay らは SNC (System Noise Compensation) 法と呼んでいる。

図 6.1 に、カルマンフィルタのブロック線図を示しておく。点線で示したスイッチは観測更新と時間更新の切換えを示している。

時間更新の場合の推定誤差共分散行列の計算法には、上述の如く 2 方式がある。計算量を比較してみると、 $W(t_k)$ を計算する第 1 法では、遷移行列の n^2 個と $W(t)$ 行列の対称性を考慮して $n(n+1)/2$ であるから、合計 $n^2 + n(n+1)/2$ 個の連立常微分方程式を解くことになる。 $P(t)$ を真接数値積分する第 2 法では、遷移行列の n^2 個と対称な誤差共分散行列の $n(n+1)/2$ 個の合計 $n^2 + n(n+1)/2$ 個の連立常微分方程式を解くことになり、計算量は変わらない。システムノイズの表現に対して近似的な解析的表現ができる場合には、 $W(t)$ の計算は簡略化される場合がある。しかし、第 2 法において、予測推定値 $\bar{x}(t_k)$ の計算を遷移行列を介さずに、直接システムのシステムノイズ項を省略した微分方程式

$$\dot{\bar{x}}(t) = F(t)\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t_{k-1}) = \hat{x}(t_{k-1}) \quad (6.1.30)$$

を数値積分することにすれば、 $\bar{x}(t)$ の n 個と $P(t)$ の $n(n+1)/2$ 個の合計 $n + n(n+1)/2$ 個の常微分方程式を解くことになり、計算量は大幅に減少する。

以上の議論も含めて、表 6.1 に、カルマンフィルタ (離散型) のアルゴリズムの要約を示しておく。

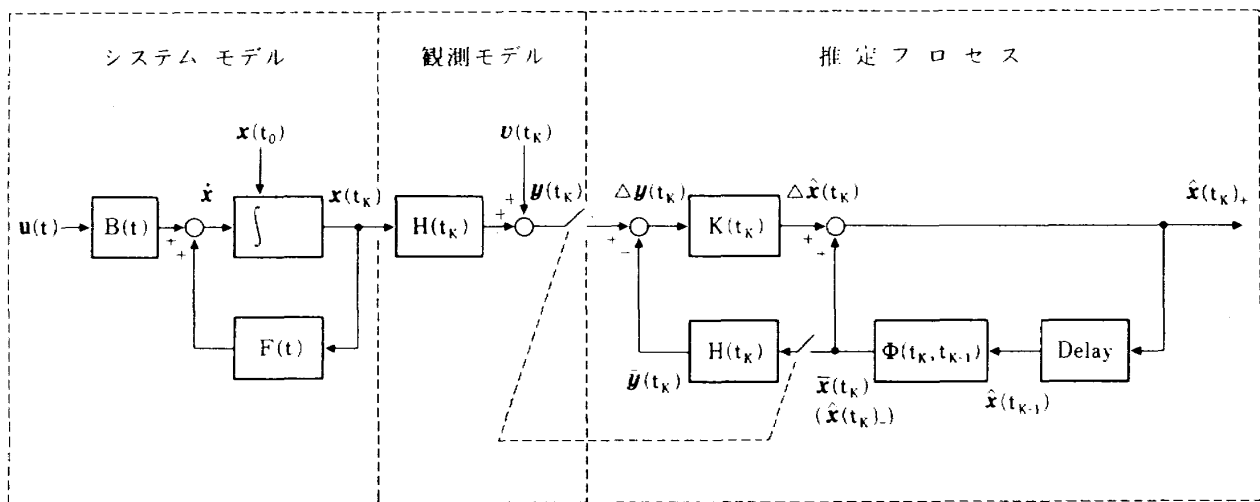


図 6.1 カルマンフィルタのブロック線図

表 6.1 カルマンフィルタ (離散型) の要約

システムモデル 観測モデル	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{H}(t_k)\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{v}(t_k), k=1,2, \dots$
初期条件	$E[\mathbf{x}(t_0)] = \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}(t_0)$ $E[(\mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}(t_0))(\mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}(t_0))^T] = \mathbf{P}(t_0) = \bar{\mathbf{P}}(t_0)$
仮定	$E[\mathbf{u}(t)] = 0$ $E[\mathbf{u}(t)\mathbf{u}(\tau)^T] = \mathbf{Q}(t)\delta(t-\tau)$ $E[\mathbf{v}(t_i)] = 0$ $E[\mathbf{v}(t_i)\mathbf{v}(t_j)^T] = \mathbf{R}(t_i)\delta_{ij}$ $E[\mathbf{u}(t)\mathbf{v}(t_i)^T] = 0$
時間更新	(1) $\bar{\mathbf{x}}(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1})\hat{\mathbf{x}}(t_{k-1})$ $\dot{\Phi}(t, t_{k-1}) = \mathbf{F}(t)\Phi(t, t_{k-1}), \Phi(t_{k-1}, t_{k-1}) = \mathbf{I}$ $\bar{\mathbf{P}}(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1})\mathbf{P}(t_{k-1})\Phi(t_k, t_{k-1})^T + \mathbf{W}(t_k)$ $\dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{W}(t) + \mathbf{W}(t)\mathbf{F}(t)^T + \mathbf{B}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(t)^T, \mathbf{W}(t_{k-1}) = 0$ (2) $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}}(t),$ $\dot{\hat{\mathbf{P}}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}(t)^T + \mathbf{B}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(t)^T$
観測更新	$\hat{\mathbf{x}}(t_k) = \bar{\mathbf{x}}(t_k) + \mathbf{K}(t_k)[\mathbf{y}(t_k) - \mathbf{H}(t_k)\bar{\mathbf{x}}(t_k)]$ $\mathbf{K}(t_k) = \bar{\mathbf{P}}(t_k)\mathbf{H}(t_k)^T[\mathbf{H}(t_k)\bar{\mathbf{P}}(t_k)\mathbf{H}(t_k)^T + \mathbf{R}(t_k)]^{-1}$ $\mathbf{P}(t_k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(t_k)\mathbf{H}(t_k)]\bar{\mathbf{P}}(t_k)$

6.2 軌道推定への適用

カルマンフィルタはシステム方程式、観測方程式共に線形系を仮定しているのので、ここでは、運動方程式 (システム方程式)、観測方程式が両方とも非線形な宇宙飛行体の軌道推定への適用について述べる。これはカルマンフィルタの非線形システムへの適用の典型的な例である。

宇宙飛行体の運動方程式及び観測方程式が、次式で与えられるとする。

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (6.2.1)$$

$$\mathbf{Y}(t_k) = \mathbf{h}(\mathbf{X}(t_k), t_k) + \mathbf{v}(t_k) \quad (6.2.2)$$

ここで、 $\mathbf{X}(t)$ は宇宙飛行体の状態変数を表わし、位置、速度ベクトルをそれぞれ \mathbf{r}, \mathbf{v} とすれば、 $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dots)^T$ である。 $\mathbf{Y}(t_k)$ は時刻 t_k に得られた実際の観測量であり、 $\mathbf{B}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t_k)$ に関しては前節と同じである。

いま、 $\mathbf{X}(t)$ の基準値 (基準軌道値) $\mathbf{X}(t)_R$ の周りで Taylor 展開して、高次項 (H.O.T.) を省略して、線形化すると次式のようになる。

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_R(t), t) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}^T} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_R} \times (\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_R(t)) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (6.2.3)$$

$$\mathbf{Y}(t_k) = \mathbf{h}(\mathbf{X}_R(t_k)) + \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{X}^T} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_R} \times (\mathbf{X}(t_k) - \mathbf{X}_R(t_k)) + \mathbf{v}(t_k) \quad (6.2.4)$$

ここで、

$$\dot{\mathbf{X}}_R(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_R(t), t) \quad (6.2.5)$$

$$\mathbf{F}(t) \triangleq \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}^T} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_R} \quad (6.2.6)$$

$$\mathbf{H}(t) \triangleq \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{X}^T} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_R} \quad (6.2.7)$$

$$\mathbf{x}(t) \triangleq \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_R(t) \quad (6.2.8)$$

$$\mathbf{y}(t_k) \triangleq \mathbf{Y}(t_k) - \mathbf{h}(\mathbf{X}_R(t_k), t_k) \quad (6.2.9)$$

と置くと、(6.1.3), (6.1.4) 式は次のように書ける。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (6.2.10)$$

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{H}(t_k)\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{v}(t_k) \quad (6.2.11)$$

従って、これらの式にカルマンフィルタのアルゴリズムを適用すればよい。ここで $\mathbf{x}(t)$ は予め計算された基準軌道からのずれ (deviation) を表わすベクトルである。

なお、もとの非線形システムの推定値及び推定誤差は次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{X}}(t) \cong \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{X}_R(t) \quad (6.2.12)$$

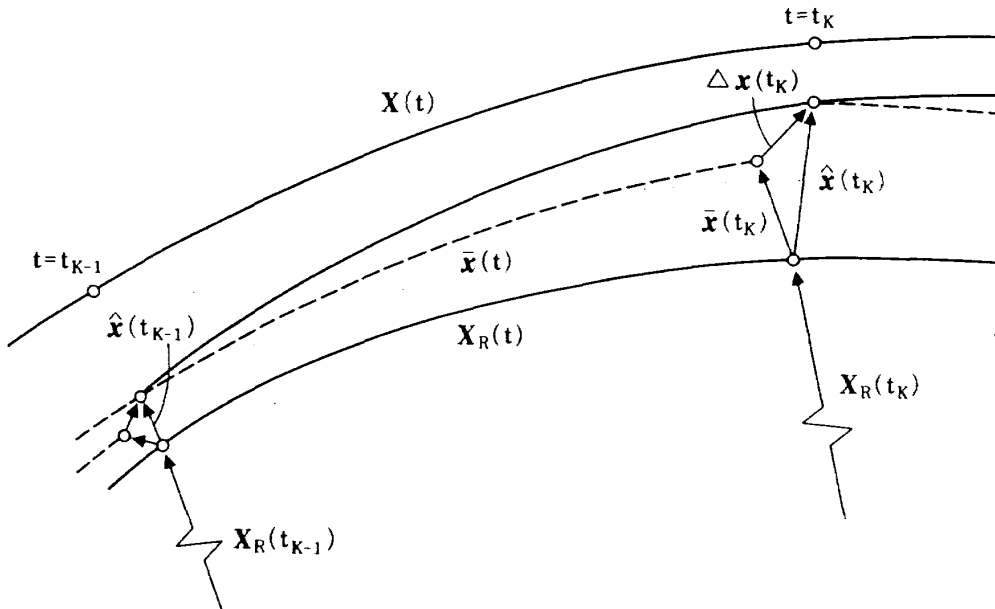
$$\tilde{\mathbf{X}}(t) \cong \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (6.2.13)$$

図 6.2 に軌道推定に適用した場合のカルマンフィルタの概念図を示す。また、図 6.3 に軌道推定 (非線形系) に適用した場合のカルマンフィルタのブロック線図を示す。図 6.1 と比べると情報処理の流れが複雑になっていることがわかる。

なお、基準軌道は (6.2.5) 式によって予め計算される。また、遷移行列は (6.2.6) 式で定義された $F(t)$ を用いて、(6.1.7) 式により計算される。

6.3 拡張カルマンフィルタ

通常のカルマンフィルタを非線形システムに適用するときには、基準値 $\mathbf{X}_R(t)$ を用いてシステムを線形化した。基準値からのずれが余りに大きくなると線形性が保たれなくなり、カルマンフィルタの性能が劣化して良い推定値を与えなくなるので、それに対応するために、各ステップ ($t_{k-1} \leq t \leq t_k$) 毎に基準値を更新して行くことを考える。この手法を拡張カルマンフィルタ (Extended Kalman Filter, EKF) という。ついでながら通常



$$\hat{\mathbf{X}}(t_k) = \hat{\mathbf{x}}(t_k) + \mathbf{X}_R(t_k)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_k) = \bar{\mathbf{x}}(t_k) + \Delta \mathbf{x}(t_k)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1}) \hat{\mathbf{x}}(t_{k-1})$$

$$\Delta \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{K}(t_k) [\mathbf{y}(t_k) - \mathbf{H}(t_k) \bar{\mathbf{x}}(t_k)]$$

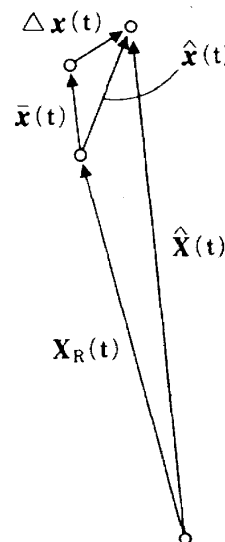


図 6.2 カルマンフィルタによる軌道推定の概念図

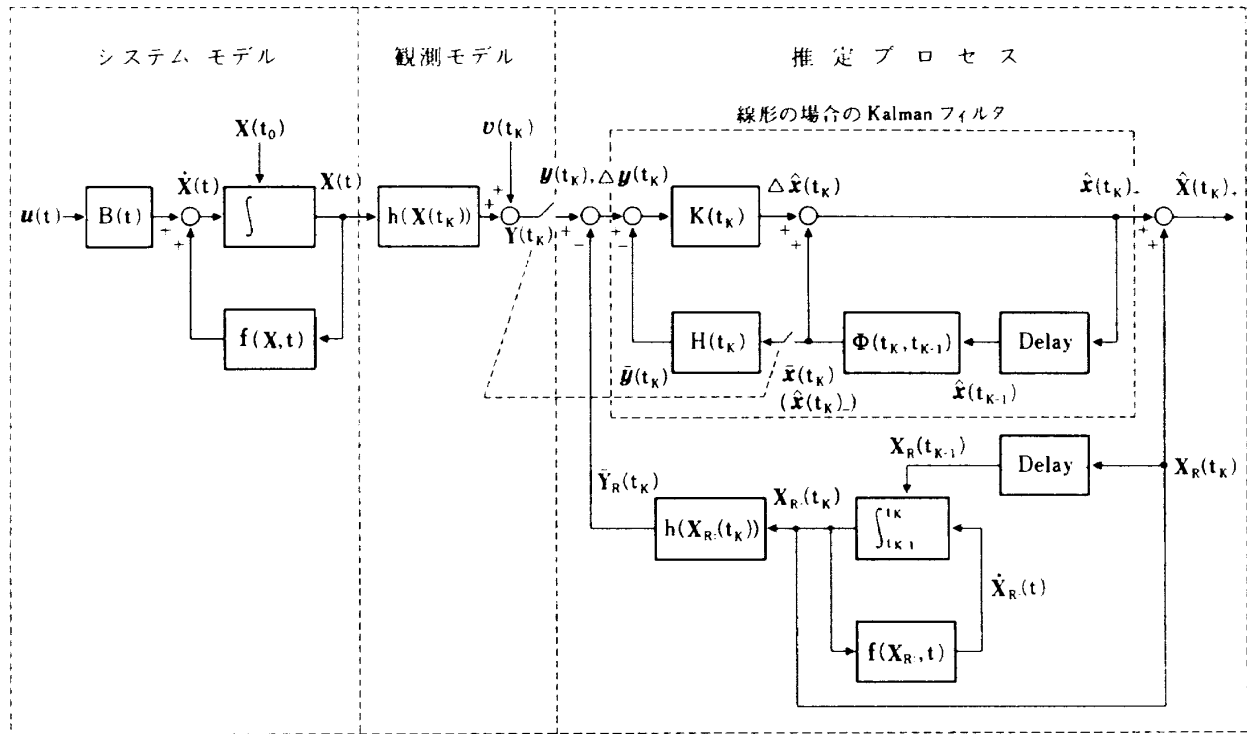


図 6.3 軌道推定に適用したカルマンフィルタ

のカルマンフィルタを CKF (Conventional Kalman Filter) と呼ぶことがある。

非線形なシステム方程式を

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t) + B(t)u(t) \quad (6.3.1)$$

とし、非線形観測方程式を、

$$Y(t_k) = h(X(t_k), t_k) + v(t_k) \quad (6.3.2)$$

とする。ここで各記号の意味や仮定条件は前節と同じである。

時間区間 $(t_{k-1} \leq t \leq t_k)$ 毎に更新する基準値を $\bar{X}(t)$ として、基準値からのずれ (deviation) を $x(t)$ とすると、

$$x(t) \triangleq X(t) - \bar{X}(t) \quad (6.3.3)$$

と定義される。

ここで、前節と同様にして (6.3.1), (6.3.2) 式を $\bar{X}(t)$ の周りで Taylor 展開して高次項 (H.O.T.) を省略すると、

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (6.3.4)$$

$$y(t_k) = H(t_k)x(t_k) + v(t_k) \quad (6.3.5)$$

が得られる。

ここで、

$$F(t) \triangleq \left[\frac{\partial f}{\partial X^T} \right]_{X=\bar{X}} \quad (6.3.6)$$

$$H(t) \triangleq \left[\frac{\partial h}{\partial X^T} \right]_{X=\bar{X}} \quad (6.3.7)$$

$$y(t_k) \triangleq Y(t_k) - h(\bar{X}(t_k), t_k) \quad (6.3.8)$$

であり、基準値 $\bar{X}(t)$ は、

$$\dot{\bar{X}}(t) = f(\bar{X}(t), t) \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k \quad (6.3.9)$$

を初期値 $\bar{X}(t_{k-1}) = \hat{X}(t_{k-1})_+$ で解いて得られる。ここで $()_+$ は観測更新または時間更新の処理後を表わし、 $()_-$ は処理前を示すことにする。

前と同様に推定値を $(\hat{\quad})$ 、推定誤差を $(\tilde{\quad})$ で表わすとして次式を定義しておく。

$$X(t_k) \triangleq \hat{X}(t_k)_+ + \tilde{X}(t_k)_+ \quad (6.3.10)$$

$$X(t_k) \triangleq \hat{X}(t_k)_- + \tilde{X}(t_k)_- \quad (6.3.11)$$

$$x(t_k) \triangleq \hat{x}(t_k) + \tilde{x}(t_k) \quad (6.3.12)$$

$$\hat{X}(t_k) = \hat{x}(t_k) + \bar{X}(t_k) \quad (6.3.13)$$

$$\tilde{X}(t_k) = \tilde{x}(t_k) \quad (6.3.14)$$

遷移行列 $\Phi(t_k, t_{k-1})$ は、同様にして (6.1.7) 式から計算される。

以上のように設定すると区間 $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ においては通常のカルマンフィルタと全く同様の議論ができるので、 $\hat{x}(t_k)$, $K(t_k)$, $P(t_k)$ は全く同じ式が使える。

(1) 観測更新

推定値 $\hat{X}(t_k)$ は,

$$\begin{aligned}\hat{X}(t_k) &= \bar{X}(t_k) + \hat{x}(t_k) \\ &= \bar{X}(t_k) + \Phi(t_k, t_{k-1}) \hat{x}(t_{k-1})_+ \\ &\quad + K(t_k) [y(t_k) - H(t_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \\ &\quad \times \hat{x}(t_{k-1})_+] \quad (6.3.15)\end{aligned}$$

となる。ところで、拡張カルマンフィルタでは前区間の推定値で新区間の基準値を更新するので、

$$\begin{cases} \bar{X}(t_{k-1})_+ = \bar{X}(t_{k-1})_- + \hat{x}(t_{k-1})_- \\ \hat{x}(t_{k-1})_+ = 0 \end{cases} \quad (6.3.16)$$

と $t = t_{k-1}$ の前後で切替えるので、(6.3.15)式は、

$$\hat{X}(t_k) = \bar{X}(t_k) + K(t_k) y(t_k)$$

となり、(6.3.8)式を代入して最終的に、

$$\hat{X}(t_k) = \bar{X}(t_k) + K(t_k) [Y(t_k) - h(\bar{X}(t_k))] \quad (6.3.17)$$

を得る。

拡張カルマンゲイン $K(t_k)$ は、

$$K(t_k) = \bar{P}(t_k) H(t_k)^T [H(t_k) \bar{P}(t_k) H(t_k)^T + R(t_k)]^{-1} \quad (6.3.18)$$

ここで $\bar{P}(t_k)$ は一応、

$$\begin{aligned}\bar{P}(t_k) &= \Phi(t_k, t_{k-1}) P(t_{k-1}) \Phi(t_k, t_{k-1})^T \\ &\quad + W(t_k)\end{aligned}$$

で定義されるが、通常のカルマンフィルタの場合と同様の議論により、時間更新の際に計算される $\bar{P}(t_k)$ を用い、この定義式の $\bar{P}(t_k)$ は実際には用いない。

推定誤差の共分散行列 $P(t_k)$ は、

$$P(t_k) = [I - K(t_k) H(t_k)] \bar{P}(t_k) \quad (6.3.19)$$

で与えられる。

(2) 時間更新

推定値 (予測推定値) $\bar{X}(t_k)$ は

$$\begin{aligned}\dot{\bar{X}}(t) &= f(\bar{X}(t), t), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k \\ \bar{X}(t_{k-1}) &= \hat{X}(t_{k-1})\end{aligned} \quad (6.3.20)$$

を数値積分して求める。

(予測) 推定値の誤差共分散行列 $\bar{P}(t_k)$ は、カ

ルマンフィルタと全く同様の議論から、次式が導かれる。

$$\begin{aligned}\dot{\bar{P}}(t) &= F(t) P(t) + P(t) F(t)^T \\ &\quad + B(t) Q(t) B(t)^T \\ \bar{P}(t_{k-1}) &= P(t_{k-1})\end{aligned} \quad (6.3.21)$$

以上が拡張カルマンフィルタのアルゴリズムである。導出の途中では、遷移行列 $\Phi(t_k, t_{k-1})$ 、累積システムノイズの共分散行列 $W(t_k)$ 及び基準軌道からのずれ $x(t_k)$ を用いたが、最終結果に陽には現われて来ない。

アルゴリズム導出別法²¹⁾

検証の意味で、カルマンフィルタと対比せずに、別の方法でアルゴリズムを導く。

観測更新の場合の推定値を次式のように仮定する。

$$\hat{X}(t_k)_+ = A(t_k) + K(t_k) Y(t_k) \quad (6.3.22)$$

この式の意味するところは、推定値 $\hat{X}(t_k)_+$ は観測ベクトル $Y(t_k)$ の一次結合で表現されると仮定することである。

ここで (6.3.10)、(6.3.11)式及び (6.3.2)、(6.3.22)式から、

$$\begin{aligned}\tilde{X}(t_k)_+ &= X(t_k) - \hat{X}(t_k)_+ \\ &= [\hat{X}(t_k)_- + \tilde{X}(t_k)_-] - A(t_k) \\ &\quad - K(t_k) [h(X(t_k)) + v(t_k)]\end{aligned} \quad (6.3.23)$$

上式に不偏推定の条件^{18,19)}

$$E[\tilde{X}(t_k)_+] = E[\tilde{X}(t_k)_-] = 0 \quad (6.3.24)$$

を適用すると、

$$\begin{aligned}E[\tilde{X}(t_k)_+] &= E[\hat{X}(t_k)_-] + E[\tilde{X}(t_k)_-] - A(t_k) \\ &\quad - K(t_k) E[h(X(t_k))] - K(t_k) E[v(t_k)] = 0\end{aligned} \quad (6.3.25)$$

ここで、観測誤差の仮定条件から、 $E[v(t_k)] = 0$ であり、また観測値が入らない時の推定値 $\hat{X}(t_k)_-$ は基準値 $\bar{X}(t_k)$ と考えてよいから

$$\hat{X}(t_k)_- \equiv \bar{X}(t_k) \quad (6.3.26)$$

と定義すれば、

$$E[\hat{X}(t_k)_-] = \bar{X}(t_k) \quad (6.3.27)$$

従って、(6.3.25)式から

$$A(t_k) = \bar{X}(t_k) - K(t_k) E[h(X(t_k))] \quad (6.3.28)$$

となる。

次に、 $\mathbf{h}(X(t_k))$ を $\hat{X}(t_k)_-$ の周りでTaylor展開して高次項を省略し、(6.3.11), (6.3.26)式を考えると、

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(X(t_k)) &\cong \mathbf{h}(\hat{X}(t_k)_-) + \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial X^T} \right]_{X=\hat{X}(t_k)_-} \\ &\quad \times (X(t_k) - \hat{X}(t_k)_-) \\ &= \mathbf{h}(\hat{X}(t_k)_-) + H(t_k) \tilde{X}(t_k)_- \\ &= \mathbf{h}(\bar{X}(t_k)) + H(t_k) \tilde{X}(t_k)_- \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

となる。ここで

$$H(t_k) = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial X^T} \right]_{X=\hat{X}(t_k)_-} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial X^T} \right]_{X=\bar{X}(t_k)} \quad (6.3.30)$$

である。(6.3.29)式の両辺の期待値をとると、

$$E[\mathbf{h}(X(t_k))] = E[\mathbf{h}(\bar{X}(t_k))] = \mathbf{h}(\bar{X}(t_k)) \quad (6.3.31)$$

となるから、(6.3.28)式から $A(t_k)$ が決定され

$$A(t_k) = \bar{X}(t_k) - K(t_k) \mathbf{h}(\bar{X}(t_k))$$

となる。従って、(6.3.2)式から

$$\hat{X}(t_k)_+ = \bar{X}(t_k) + K(t_k) [Y(t_k) - \mathbf{h}(\bar{X}(t_k))] \quad (6.3.32)$$

となる。

(6.3.2), (6.3.26), (6.3.29)式を用いて書換えると、

$$\begin{aligned} \hat{X}(t_k)_+ &= \hat{X}(t_k)_- + K(t_k) H(t_k) \tilde{X}(t_k)_- \\ &\quad + K(t_k) \mathbf{v}(t_k) \end{aligned} \quad (6.3.33)$$

従って、

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t_k)_+ &= X(t_k) - \hat{X}(t_k)_+ \\ &= [I - K(t_k) H(t_k)] \tilde{X}(t_k)_- - K(t_k) \mathbf{v}(t_k) \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

ここで、 $\hat{X}(t_k)_-$, $\tilde{X}(t_k)_-$ は観測値が得られる直前の値であるから観測誤差 $\mathbf{v}(t_k)$ とは独立である。即ち、

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}(t_k)_- \cdot \mathbf{v}(t_k)^T] &= E[\hat{X}(t_k)_+ \cdot \mathbf{v}(t_k)^T] = 0 \\ \text{cov}[\tilde{X}(t_k)_+, \hat{X}(t_k)_+] &= E[\tilde{X}(t_k)_+ \cdot \hat{X}(t_k)_+^T] \\ &= \{ [I - K(t_k) H(t_k)] \bar{P}(t_k) H(t_k)^T \\ &\quad - K(t_k) R(t_k) \} K(t_k)^T = 0 \end{aligned} \quad (6.3.35)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \bar{P}(t_k) &\cong E[\tilde{X}(t_k)_- \cdot \tilde{X}(t_k)_-^T] \\ R(t_k) &\cong E[\mathbf{v}(t_k) \mathbf{v}(t_k)^T] \end{aligned}$$

である。 $K(t_k)$ の値如何にかかわらず直交条件が成立つためには、 $\{ \} = 0$ でなければならぬから、

$$\begin{aligned} [I - K(t_k) H(t_k)] \bar{P}(t_k) H(t_k)^T \\ - K(t_k) R(t_k) = 0 \end{aligned}$$

従って、 $K(t_k)$ について解けば次式を得る。

$$\begin{aligned} K(t_k) &= \bar{P}(t_k) H(t_k)^T [H(t_k) \bar{P}(t_k) H(t_k)^T \\ &\quad + R(t_k)]^{-1} \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

推定誤差の共分散行列 $P(t_k)_+$ は、(6.3.34)式を用いて、

$$\begin{aligned} P(t_k)_+ &= E[\tilde{X}(t_k)_+ \cdot \tilde{X}(t_k)_+^T] \\ &= [I - K(t_k) H(t_k)] \bar{P}(t_k) \\ &\quad - \{ [I - K(t_k) H(t_k)] \bar{P}(t_k) H(t_k)^T \\ &\quad - K(t_k) R(t_k) \} K(t_k)^T \end{aligned}$$

となる。右辺第2項は(6.3.35)式から0である。

従って、

$$P(t_k)_+ = [I - K(t_k) H(t_k)] \bar{P}(t_k) \quad (6.3.37)$$

を得る。

以上、観測更新のアルゴリズムを定義式と不偏推定条件と直交条件だけから導いた。基準軌道からのずれや遷移行列を介さずに全く同一の式が導けることがわかる。時間更新については、カルマンフィルタの場合と全く同様な議論を行うので省略する。

拡張カルマンフィルタの式の場合には、通常のカルマンフィルタと違っている点は、基準軌道を予め計算して置いたものではなく、前回の更新の結果を用いて改訂した準基準軌道 (quasi-reference) と言うべきものを基準としている点と、改訂した時点では基準軌道からのずれ (deviation) が0となるように準基準軌道を修正している点である。拡張カルマンフィルタを導出する場合、最初、 $t=t_{k-1}$ における準基準軌道からのずれの推定値 $\hat{\mathbf{x}}(t_{k-1})$ を0としないで、ある値を持っているものと仮定しておけば、初めから与えられている基準軌道と更新毎に改訂する準基準軌道との差はあっても、その基準値の周りで線形化すれば、

$t_{k-1} \leq t \leq t_k$ の区間では、線形化方程式に関しては、通常のカルマンフィルタの場合と全く同じ議論ができ、最後の段階で、準基準軌道の定義に従って $\hat{\mathbf{x}}(t_{k-1})=0$ と置いて最終的なアルゴリズムを導出するというテクニック¹²⁾ を用いればよいことを付記しておく。

表 6.2 に拡張カルマンフィルタのアルゴリズムを要約しておく。また、図 6.4 に拡張カルマンフィルタの概念図を、図 6.5 にブロック線図を示す。

拡張カルマンフィルタは、通常のカルマンフィルタが基準軌道から大きくずれると線型性が保証されなくなり推定値が急速に劣化するのに対して、基準軌道からのずれに対して安定であること、システムノイズ補償を考慮していれば、モデル化誤差も補償され、誤差共分散行列 $P(t_k)$ は観測更新が進んでも、システムノイズ共分散行列 $Q(t)$ に依存する正定行列によって常に下に有界となるので、零に収束せず、安定な推定値を期待できる。従って、拡張カルマンフィルタは適用範囲が極め

て広いフィルタであり、実用的である。ただ、次節で述べる未知パラメータの推定も含めた拡大システムで扱う場合には、 $P(t_k)$ 行列がいわゆる ill-conditioned になり、フィルタが発散しやすくなる場合がある。この場合には、本報告では触れないが、平方根アルゴリズム、或るは U-D 分解アルゴリズムを採用する必要が出て来る。

6.4 未知パラメータを含む場合の推定

一般に、未知パラメータを含む場合のシステム方程式、及び観測方程式は次のように記述される。

$$\dot{X}(t) = f(X(t), P, t) + B(t)u(t) \quad (6.4.1)$$

$$Y(t_k) = h(X(t_k), P, S) + v(t_k) \quad (6.4.2)$$

ここで、

$X(t)$: 状態変数ベクトル (n 次元)

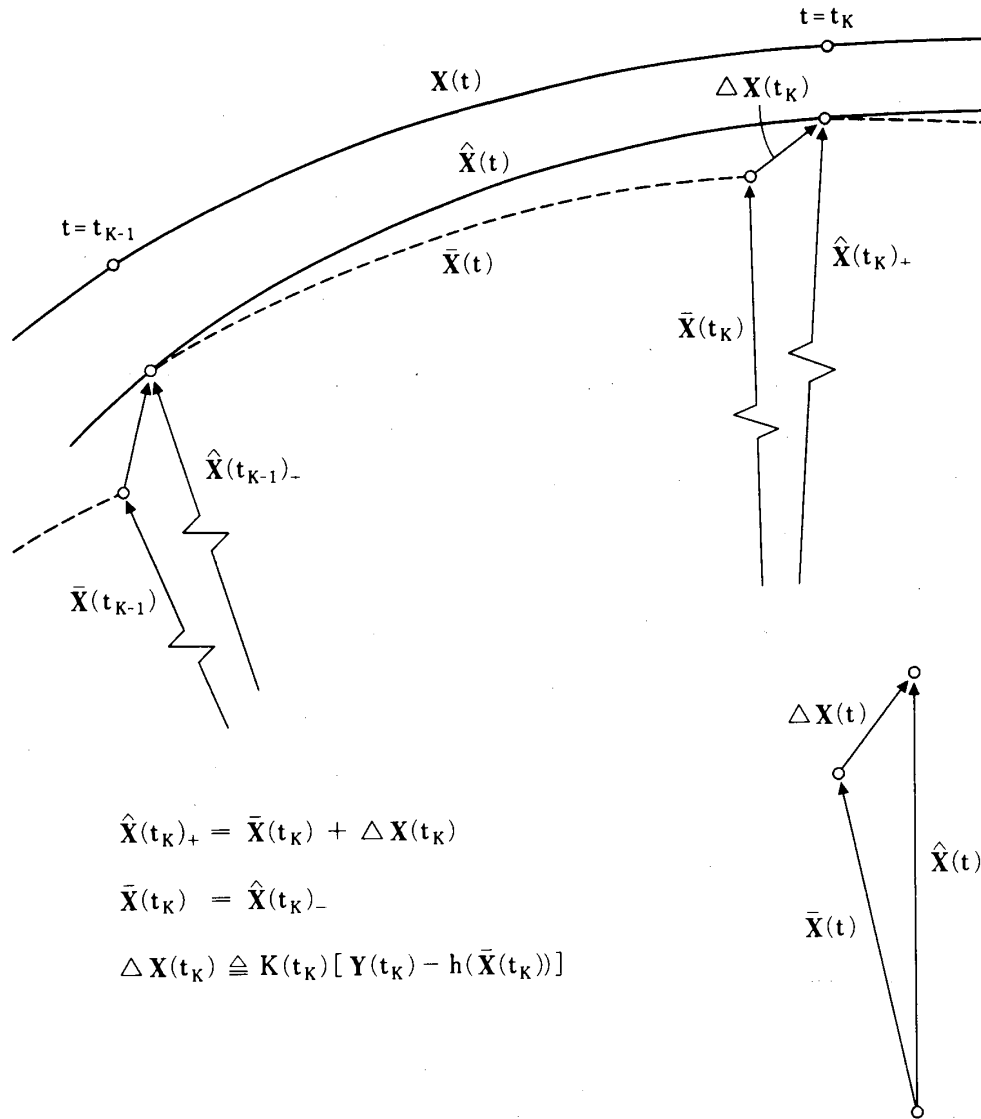
$Y(t_k)$: 観測値ベクトル (n 次元)

P : システムパラメータ (r 次元)

S : 観測パラメータ (s 次元)

表 6.2 拡張カルマンフィルタ (離散型) の要約

システムモデル 観測モデル	$\dot{X}(t) = f(X(t), t) + B(t)u(t)$ $Y(t_k) = h(X(t_k)) + v(t_k)$
初期条件	$E[X(t_0)] = \bar{X}(t_0)$ $E[(X(t_0) - \bar{X}(t_0))(X(t_0) - \bar{X}(t_0))^T] = \bar{P}(t_0) = P(t_0)$
仮定	$E[u(t)] = 0$ $E[u(t)u(\tau)^T] = Q(t)\delta(t-\tau)$ $E[v(t_i)] = 0$ $E[v(t_i)v(t_j)^T] = R(t_i)\delta_{ij}$ $E[u(t)v(t_i)^T] = 0$
時間更新	$\dot{\bar{X}}(t) = f(\bar{X}(t), t), \bar{X}(t_{k-1}) = \hat{X}(t_{k-1})_+$ $\dot{\bar{P}}(t) = F(t)\bar{P}(t) + \bar{P}(t)F(t)^T + B(t)Q(t)B(t)^T$ $F(t) \triangleq \left[\frac{\partial f}{\partial X^T} \right]_{X=\bar{X}}$
観測更新	$\hat{X}(t_k)_+ = \bar{X}(t_k) + K(t_k)[Y(t_k) - h(\bar{X}(t_k))]$ $K(t_k) = \bar{P}(t_k)H(t_k)^T [H(t_k)\bar{P}(t_k)H(t_k)^T + R(t_k)]^{-1}$ $P(t_k)_+ = [I - K(t_k)H(t_k)]\bar{P}(t_k)$ $H(t_k) \triangleq \left[\frac{\partial h}{\partial X^T} \right]_{X=\bar{X}}$



$$\hat{X}(t_k)_+ = \bar{X}(t_k) + \Delta X(t_k)$$

$$\bar{X}(t_k) = \hat{X}(t_k)_-$$

$$\Delta X(t_k) \cong K(t_k) [Y(t_k) - h(\bar{X}(t_k))]$$

図 6.4 拡張カルマンフィルタの概念図

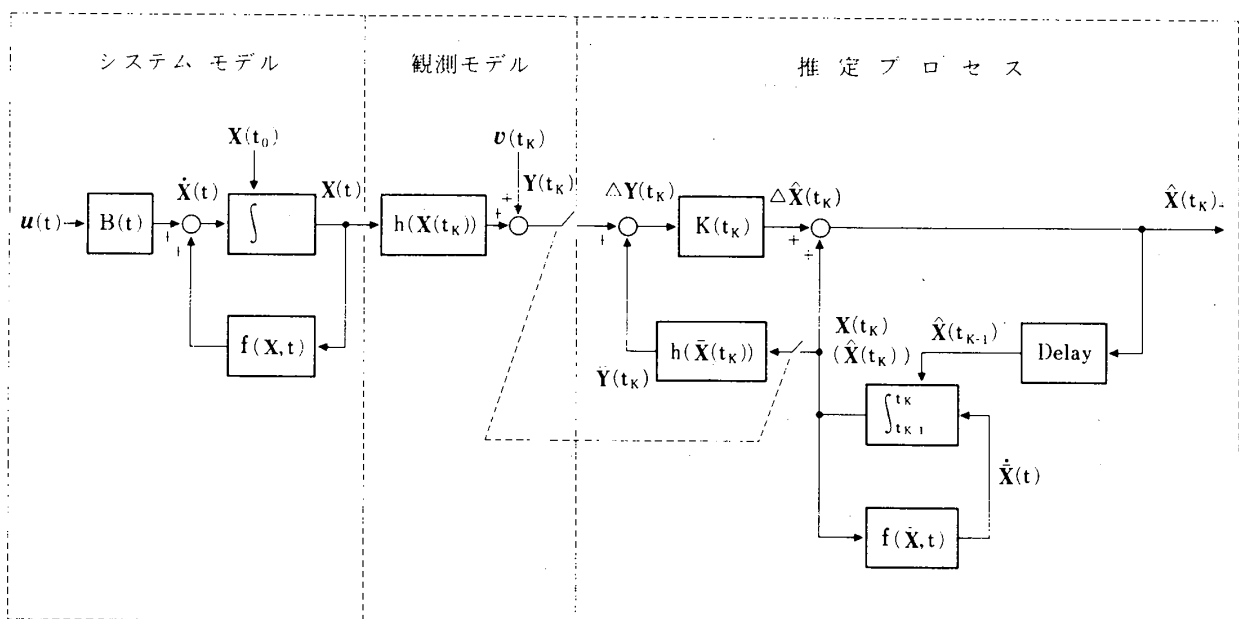


図 6.5 拡張カルマンフィルタのブロック線図

$B(t)$: $n \times q$ 行列
 $u(t)$: システムノイズ (q 次元)
 $v(t_k)$: 観測ノイズ (p 次元)
 t_k : 観測時刻 (離散的)

である。

パラメータ P, S は、その値は未知 (あるいは概略値は既知だが不精確) であるが、時間には無関係な一定値である。従って、

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = 0 \\ \dot{S}(t) = 0 \end{cases} \quad (6.4.3)$$

と考えることができる。

以上のような推定問題は、拡大システムを用いて、問題を解けばよい。即ち、

$$\left. \begin{aligned} X^*(t) &\triangleq \begin{bmatrix} X(t) \\ \dots \\ P(t) \\ \dots \\ S(t) \end{bmatrix} \\ f^*(X^*(t), t) &\triangleq \begin{bmatrix} f(X^*(t), t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ B^*(t) &\triangleq \begin{bmatrix} B(t) \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6.4.4)$$

と置けば、(6.4.1), (6.4.2) 式は、

$$\dot{X}^*(t) = f^*(X^*(t), t) + B^*(t)u(t) \quad (6.4.5)$$

$$Y(t_k) = h(X^*(t_k), t_k) + v(t_k) \quad (6.4.6)$$

と書くことができる。従って、この拡大システムに対してフィルタのアルゴリズムを適用すればよい。

軌道推定の場合、 P は重力場の定数などの地球物理学あるいは天文学的定数であり、 S は観測バイアス、観測局の位置 (緯度、経度、高度) 等である。軌道と同時に未知パラメータを推定し、不精確なパラメータ定数を確定することは、軌道推定を高精度化することになる。ただ計算量が確実に増えるので、目的と要求精度によって、どこまでの範囲のパラメータ推定を含ませるのかを決定しなければならない。

さらに、未知パラメータが定数でない場合には、白色ガウス雑音で駆動される

$$\dot{\zeta}(t) = \beta(t)\zeta(t) + u_\zeta(t) \quad (6.4.7)$$

のような適当な微分方程式 (Shaping filter という) を導入して、状態ベクトルに加えることにより、拡大システムに帰着させて推定することができる。

なお、システムノイズをこの形で補償する方法を、B.D. Tapley らは Dynamic Model Compensation 法²⁰⁾ (DMC) と呼んでいるが、本報告では触れない。

7. 誘導制御系

誘導系と制御系は相互に密接な関連があつて、明確な境界線を引くことはできない場合が多いが、本質的な任務によって、一応区分することにする。即ち、誘導系は、航法系 (軌道推定系) からの出力を基に、軌道修正に必要な速度修正量 $\Delta v(t_k)$ を決定する。そして制御系は、誘導系からの出力の必要速度修正量を、もし必要なら適当な変換を行って実行に移す。

ここでは、インパルス速度修正による軌道修正の場合について、必要速度修正量の計算法、及び速度修正を行うことによって生ずる状態変数の推定値、推定誤差共分散行列等の変化の計算法について述べる。

7.1 基本的摂動行列の定義

ここでは必要速度修正量を計算する際に用いられる基本的な摂動行列 (Perturbation Matrix) を定義する。人によっては、摂動行列を航行行列 (Navigation Matrix) と呼ぶ場合があるが、本報告では、軌道推定が中心となる航法と紛らわしいので、摂動行列で統一する。摂動行列の本質は感度行列である。

(1) $C^*(t), C(t)$ の定義

宇宙飛行体の現時点での位置ベクトルを $r(t)$ とし、基準軌道の位置ベクトルを $r_R(t)$ とすると、基準軌道からの位置ベクトルのずれ $\delta r(t)$ は次式で与えられる。

$$\delta r(t) = r(t) - r_R(t) \quad (7.1.1)$$

宇宙飛行体を $r(t)$ の位置から目標点に free-fall で飛行させるのに必要な速度を $v^*(r; t)$ とすると、

$$v^*(r; t) = v_R(t) + C^*(t) \delta r \quad (7.1.2)$$

と表わされ、ここで、

$$C^*(t) = C^*(r_R; t) \triangleq \left[\frac{\partial v^*}{\partial r^T} \right]_{r=r_R} \quad (7.1.3)$$

$v_R(t)$: 基準軌道の速度ベクトル

と定義する。

宇宙飛行体の実際の速度 (actual velocity) を $v(t)$ とすると,

$$v(t) = v(r; t) = v_R(t) + C(t) \delta r \quad (7.1.4)$$

と表わされ, ここで

$$C(t) = C(r_R; t) \triangleq \left[\frac{\partial v}{\partial r^T} \right]_{r=r_R} \quad (7.1.5)$$

と定義する。

宇宙飛行体を, $t=t_A$ において目標点に持って行くに必要な速度修正量は,

$$\Delta v(t) \triangleq v^*(t) - v(t) \quad (7.1.6)$$

と定義でき, (7.1.2), (7.1.4) 式を代入すれば,

$$\Delta v(t) = [C^*(t) - C(t)] \delta r(t) \quad (7.1.7)$$

と表わされる。

(2) $R(t)$, $R^*(t)$ の定義

一方, 自由飛行 (free flight) の場合, $r(t)$ は $v(t_0)$ の関数と考えられるから,

$$\delta v(t_0) \triangleq v(t_0) - v_R(t_0) \quad (7.1.8)$$

と定義して, $r(t)$ を $v_R(t_0)$ に関して Taylor 展開して, 高次項を省略すれば,

$$r(v(t_0); t) = r_R(v_R(t_0); t) + R(t) \delta v(t_0) \quad (7.1.9)$$

と表わされ, ここで

$$R(t) = R(v_R(t_0); t) \triangleq \left[\frac{\partial r}{\partial v(t_0)^T} \right]_{v(t_0)=v_R(t_0)} \quad (7.1.10)$$

と定義する。

(7.1.9) 式から

$$\delta r(t) = R(t) \delta v(t_0) \quad (7.1.11)$$

(7.1.7) 式に代入すると,

$$\Delta v(t) = A(t) \delta v(t_0) \quad (7.1.12)$$

$$A(t) \triangleq [C^*(t) - C(t)] R(t) \quad (7.1.13)$$

と表わすことができる。

到達時刻 (ime of Arrival) t_A における速度のずれを,

$$\delta v(t_A) \triangleq v(t_A) - v_R(t_A) \quad (7.1.14)$$

と表わすと,

$$r(v(t_A); t) = r_R(v_R(t_A); t) + R^*(t) \delta v(t_A) \quad (7.1.15)$$

と表わされ, ここで

$$R^*(t) = R^*(v_R(t_A); t) \triangleq \left[\frac{\partial r}{\partial v(t_A)^T} \right]_{v(t_A)=v_R(t_A)} \quad (7.1.16)$$

と定義する。

(7.1.15) 式から

$$\delta r(t) = R^*(t) \delta v(t_A) \quad (7.1.17)$$

であるから, (7.1.11), (7.1.17) 式から,

$$R^*(t) \delta v(t_A) = R(t) \delta v(t_0)$$

従って,

$$\delta v(t_A) = R^*(t)^{-1} R(t) \delta v(t_0) \quad (7.1.18)$$

となる。

(3) $V(t)$, $V^*(t)$ の定義

宇宙飛行体の速度 $v(t)$ を, $v(t_0)$ の関数と考えると,

$$v(t) = v(v(t_0); t) = v_R(v_R(t_0); t) + V(t) \delta v(t_0) \quad (7.1.19)$$

と表わされ, ここで,

$$V(t) = V(v_R(t_0); t) \triangleq \left[\frac{\partial v(t)}{\partial v(t_0)^T} \right]_{v(t_0)=v_R(t_0)} \quad (7.1.20)$$

と定義する。

また, $v^*(t)$ を $t(t_A)$ の関数と考えると,

$$v^*(t) = v^*(v(t_A); t) = v_R(v_R(t_A); t) + V^*(t) \delta v(t_A) \quad (7.1.21)$$

と表わされ, ここで,

$$V^*(t) = V^*(v_R(t_A); t) \triangleq \left[\frac{\partial v^*(t)}{\partial v(t_A)^T} \right]_{v(t_A)=v_R(t_A)} \quad (7.1.22)$$

と定義する。

(7.1.5), (7.1.10), (7.1.20) 式から,

$$V(t) = C(t) R(t) \quad (7.1.23)$$

また, (7.1.3), (7.1.6), (7.1.22) 式から

$$V^*(t) = C^*(t) R^*(t) \quad (7.1.24)$$

の関係式が得られる。

(7.1.23) 式を用いれば, (7.1.13) 式は,

$$A(t) = C^*(t) R(t) - V(t) \quad (7.1.25)$$

と書換えられる。

同様にして,

$$A^*(t) \triangleq C(t) R^*(t) - V^*(t) \quad (7.1.26)$$

と定義しておく、摂動行列は、 $R(t)$, $R^*(t)$, $V(t)$, $V^*(t)$ のセットか、あるいは、 $C(t)$, $C^*(t)$, $A(t)$, $A^*(t)$ のセットとして考えることができる。

なお、本節で時刻に、 t , t_0 を用いているが、前章の軌道推定系の記述との関連について述べれば、

$$t = t_k, t_0 = t_{k-1}$$

の意味であり、 $t = t_k$ を決定点 (Decision point) とすれば、その時点で次の3つのいずれかを実行する。

- 1) 時間更新
- 2) 観測更新
- 3) 軌道修正

本章としての見通しをよくするため、 t , t_0 を用いるが、上述の意味であることに注意されたい。

7.2 摂動行列の微分方程式

自由飛行における宇宙飛行体の運動方程式を、

$$\begin{cases} \frac{dr(t)}{dt} = v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = g(r, t) \end{cases} \quad (7.2.1)$$

とする。

(7.1.9), (7.1.19) 式を (7.2.1) 式に代入すると、

$$\frac{dr_R(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} \delta v(t_0) = v_R(t) + V(t) \delta v(t_0) \quad (7.2.2)$$

$$\frac{dv_R(t)}{dt} + \frac{dV(t)}{dt} \delta v(t_0) = g(r_R + R(t) \delta v(t_0); t) \quad (7.2.3)$$

(7.2.3) 式の右辺を $r_R(t)$ の周りに Taylor 展開して、高次項を省略すれば、

$$\begin{aligned} & \frac{dv_R(t)}{dt} + \frac{dV(t)}{dt} \delta v(t_0) \\ &= g(r_R(t); t) + \left[\frac{\partial g}{\partial r^T} \right]_{v(t_A)=v_R(t_A)} \\ & \quad \times R(t) \delta v(t_0) \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

となる。ここで、基準軌道も (7.2.1) 式を満足させているから、

$$\frac{dR(t)}{dt} \delta v(t_0) = V(t) \delta v(t_0) \quad (7.2.5)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} \delta v(t_0) = G(r_R, t) R(t) \delta v(t_0) \quad (7.2.6)$$

となる。ここで、 $G(r_R, t)$ は重力傾斜行列 (Gravity Gradient Matrix) といい、次式で定義される。

$$G(r_R, t) \triangleq \left[\frac{\partial g}{\partial r^T} \right]_{r=r_R(t)} \quad (7.2.7)$$

なお、二体問題として考えれば、

$$\begin{aligned} G(r_R, t) &= \frac{\mu}{r_R^5} [3r_R r_R^T - r_R^2 I_3] \\ &= \frac{\mu}{r_R^5} \begin{bmatrix} 3r_{Rx}^2 - r_R^2 & 3r_{Rx}r_{Ry} & 3r_{Rx}r_{Rz} \\ 3r_{Ry}r_{Rx} & 3r_{Ry}^2 - r_R^2 & 3r_{Ry}r_{Rz} \\ 3r_{Rz}r_{Rx} & 3r_{Rz}r_{Ry} & 3r_{Rz}^2 - r_R^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

となる。ただし、 I_3 は 3×3 単位行列であり、添字の x, y, z は各軸方向の成分を示し、 μ は重力定数である。

(7.2.5), (7.2.6) 式は、任意の $\delta v(t_0)$ について成立つから、 $R(t)$, $V(t)$ は次の方程式の解として得られる。

$$\frac{dR(t)}{dt} = V(t) \quad (7.2.9)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = G(r_R, t) R(t) \quad (7.2.10)$$

初期値としては、

$$R(t_0) = O_3 \quad (3 \times 3 \text{ 零行列}) \quad (7.2.11)$$

$$V(t_0) = I_3 \quad (3 \times 3 \text{ 単位行列}) \quad (7.2.12)$$

で与えられる。

同様の議論を (7.1.15), (7.1.21) 式を用いて行えば、

$$\frac{dR^*(t)}{dt} = V^*(t) \quad (7.2.13)$$

$$\frac{dV^*(t)}{dt} = G(r_R, t) R^*(t) \quad (7.2.14)$$

なる方程式が得られる。これらの方程式の終端条件は、

$$R^*(t_A) = O_3 \quad (7.2.15)$$

$$V^*(t_A) = I_3 \quad (7.2.16)$$

で与えられる。

今, \mathbf{c}, \mathbf{c}^* を任意の定数ベクトルとして,

$$\begin{cases} \delta \mathbf{r}(t) = R(t)\mathbf{c} + R^*(t)\mathbf{c}^* & (7.2.11) \\ \delta \mathbf{v}(t) = V(t)\mathbf{c} + V^*(t)\mathbf{c}^* & (7.2.18) \end{cases}$$

と書く, 上式の両辺を t に関して微分して, (7.2.9), (7.2.10), (7.2.13) 式を用いれば,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta \mathbf{r}(t)) &= \frac{dR(t)}{dt}\mathbf{c} + \frac{dR^*(t)}{dt}\mathbf{c}^* \\ &= V(t)\mathbf{c} + V^*(t)\mathbf{c}^* = \delta \mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta \mathbf{v}(t)) &= \frac{dV(t)}{dt}\mathbf{c} + \frac{dV^*(t)}{dt}\mathbf{c}^* \\ &= G(\mathbf{r}_R, t)[R(t)\mathbf{c} + R^*(t)\mathbf{c}^*] \\ &= G(\mathbf{r}_R, t)\delta \mathbf{r}(t) \end{aligned} \quad (7.2.20)$$

となり, これは (7.2.1) 式を基準軌道の周りに展開した線形摂動方程式 (linearized perturbation equation) である。換言すれば, (7.2.17), (7.2.18) 式の表現は摂動方程式を満足する。従って, (7.2.17), (7.2.18) 式は, 任意の時刻における基準軌道からのずれ (deviation) を表わすことができる。

7.3 Patched Conic 法による摂動行列の計算

本節では, t_0, t_A (目標点到達時刻), t_0 からの時間間隔 t , 及び $\mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}(t_0), \mathbf{r}(t_A), \mathbf{v}(t_A)$ を与えて, 摂動行列 $R(t), V(t), R^*(t), V^*(t)$ を計算する。なお, 誘導の場合の運動モデルは二体問題とする。

(1) Kepler 方程式の解

まず, $\mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}(t_0)$ から,

$$\alpha = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu} = \frac{1}{a} \quad (7.3.1)$$

を計算する。ここで α は軌道半長径 (Semi-major axis) a の逆数であり,

$$\begin{cases} \alpha > 0 : \text{楕円軌道} \\ \alpha = 0 : \text{放物線軌道} \\ \alpha < 0 : \text{双曲線軌道} \end{cases}$$

である。

次に, Battin の統一 Kepler 方程式⁵⁾

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu}t &= \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{\sqrt{\mu}} x^2 \bar{C}(\alpha x^2) \\ &+ (1 - r_0 \alpha) \bar{S}(\alpha x^2) + r_0 x \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

を解いて x を求める。

ここで, $\bar{C}(), \bar{S}()$ なる関数は次のように定義

する。

$$\begin{aligned} \bar{S}(\xi) &\triangleq \frac{1}{3!} - \frac{\xi}{5!} + \frac{\xi^2}{7!} - \dots \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{\xi} - \sin \sqrt{\xi}}{(\sqrt{\xi})^3}, & \xi > 0 \\ \frac{1}{6}, & \xi = 0 \\ \frac{\sinh \sqrt{-\xi} - \sqrt{-\xi}}{(\sqrt{-\xi})^3}, & \xi < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}(\xi) &\triangleq \frac{1}{2!} - \frac{\xi}{4!} + \frac{\xi^2}{6!} - \dots \\ &= \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{\xi}}{\xi}, & \xi > 0 \\ \frac{1}{2}, & \xi = 0 \\ \frac{\cosh \sqrt{-\xi} - 1}{(-\xi)}, & \xi < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

x を求めるには Newton 逐次近似を用いる。即ち,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(\sqrt{\mu}t)_{x=x_n} - \sqrt{\mu}t}{\left(\sqrt{\mu} \frac{dt}{dx}\right)_{x=x_n}}, \quad x_0 = 0 \quad (7.3.5)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu} \frac{dt}{dx} &= \left\{ \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{\sqrt{\mu}} [x - \alpha x^3 \bar{S}(\alpha x^2)] \right. \\ &\left. + (1 - r_0 \alpha) x^2 \bar{C}(\alpha x^2) + r_0 \right\} \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

であり, 逐次近似の収束の判定は,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon \quad (7.3.7)$$

で行う。 ϵ は予め与えられた十分小さな許容誤差である。

なお, x の意味は, 次の通りである。

$$\begin{cases} x = \frac{E - E_0}{\sqrt{\alpha_0}} & (\text{楕円軌道}) \\ x = \sqrt{p} \left(\tan \frac{f}{2} - \tan \frac{f_0}{2} \right) & (\text{放物線軌道}) \\ x = \frac{H - H_0}{\sqrt{-\alpha_0}} & (\text{双曲線軌道}) \end{cases}$$

ここで, 右辺の各記号は,

E : Eccentric anomaly (離心近点角)

p : Semi-latus rectum. (半直弦)

f : True anomaly (真近点角)

H : Hyperbolic anomaly (双曲線離心近点角)

であり、添字の 0 は $t=t_0$ に対応する。

x が決定されれば、 $r(t)$ 、 $v(t)$ が次式から計算できる。

$$\begin{cases} r(t) = \bar{F}(t)r_0 + \bar{G}(t)v_0 \\ v(t) = \bar{F}_t(t)r_0 + \bar{G}_t(t)v_0 \end{cases} \quad (7.3.8)$$

ここで、

$$\begin{cases} \bar{F}(t) = \left[1 - \frac{x^2}{r_0} \bar{C}(\alpha x^2) \right] \\ \bar{G}(t) = \left[t - \frac{x^3}{\sqrt{\mu}} \bar{S}(\alpha x^2) \right] \\ \bar{F}_t(t) = \frac{\sqrt{\mu}}{rr_0} [\alpha x^3 \bar{S}(\alpha x^2) - x] \\ \bar{G}_t(t) = \left[1 - \frac{x^2}{r} \bar{C}(\alpha x^2) \right] \\ r = |r(t)| = [r_x(t)^2 + r_y(t)^2 + r_z(t)^2]^{1/2} \end{cases} \quad (7.3.9)$$

であり、まず $r(t)$ が求まり、次に $v(t)$ が求められる。

(2) 摂動行列の計算

(i) (前向き) 摂動行列 $R(t)$ 、 $V(t)$ の計算

ここでベクトル演算子 ∇ を

$$\nabla \triangleq \left(\frac{\partial}{\partial v_0} \right)$$

と定義すると、

$$\begin{cases} R(t) = \nabla r(t) = r_0 (\nabla \bar{F})^T + G I_3 + v_0 (\nabla \bar{G})^T \end{cases} \quad (7.3.10)$$

$$\begin{cases} V(t) = \nabla v(t) = r_0 (\nabla \bar{F}_t)^T + \bar{G}_t I_3 + v_0 (\nabla \bar{G}_t)^T \end{cases} \quad (7.3.11)$$

と表わされる。ここで、 I は 3×3 単位行列、 $()^T$ は転置行列を表わす。 \bar{F} 、 \bar{G} 、 \bar{F}_t 、 \bar{G}_t は (7.3.9) 式の $\bar{F}(t)$ 、 $\bar{G}(t)$ 、 $\bar{F}_t(t)$ 、 $\bar{G}_t(t)$ の略記である。

また、 $\nabla \bar{F}$ 、 $\nabla \bar{G}$ 、 $\nabla \bar{F}_t$ 、 $\nabla \bar{G}_t$ はそれぞれ次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla \bar{F} &= \frac{x^2}{\alpha \mu r_0} [1 - \alpha x^2 \bar{S}(\alpha x^2) - 2\bar{C}(\alpha x^2)] v_0 \\ &\quad - \frac{x}{r_0} [1 - \alpha x^2 \bar{S}(\alpha x^2)] \nabla x \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla \bar{G} &= \frac{x^3}{\alpha \mu^{3/2}} [\bar{C}(\alpha x^2) - 3\bar{S}(\alpha x^2)] v_0 \\ &\quad - \frac{x^2}{\mu^{1/2}} \bar{C}(\alpha x^2) \nabla x \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

$$\begin{aligned} \nabla \bar{F}_t &= \frac{\mu^{1/2}}{rr_0} \left\{ \frac{x^3}{\mu} [\bar{S}(\alpha x^2) - \bar{C}(\alpha x^2)] v_0 \right. \\ &\quad \left. + [\alpha x^2 \bar{C}(\alpha x^2) - 1] \nabla x \right\} - \frac{\bar{F}_t}{r^2} R(t)^T r(t) \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

$$\nabla \bar{G}_t = \frac{r_0}{r} \nabla \bar{F} + \frac{x^2}{r^3} \bar{C}(\alpha x^2) R(t)^T r(t) \quad (7.3.15)$$

であり、

$$\begin{aligned} \nabla x &= \frac{1}{\alpha \mu} \left\{ x - \frac{\mu^{1/2}}{D} [\alpha r_0 (t - \bar{G}) + 3t - \bar{G}] \right. \\ &\quad \left. - \frac{x r_0}{\mu^{1/2}} \right\} v_0 - \frac{1}{D} \frac{r_0}{\mu^{1/2}} (1 - \bar{F}) r_0 \end{aligned} \quad (7.3.16)$$

$$\begin{aligned} D &\triangleq \frac{r_0 \cdot v_0}{\mu^{1/2}} [x - \alpha \mu^{1/2} (t - \bar{G})] \\ &\quad + (1 - r_0 \alpha) r_0 (1 - \bar{F}) + r_0 \end{aligned} \quad (7.3.17)$$

として計算される。

(iii) (後向き) 摂動行列 $R^*(t)$ 、 $V^*(t)$ の計算

摂動行列 $R^*(t)$ 、 $V^*(t)$ は、目標到達時刻 t_A から逆向き (後向き) に計算されるので、前述の公式群において、

$$\begin{aligned} r_0 &\rightarrow r(t_A) \\ v_0 &\rightarrow v(t_A) \\ t &\rightarrow t - (t_A - t_0) \end{aligned}$$

と置換えることによって計算できる。

(iiii) 合成摂動行列 $C(t)$ 、 $C^*(t)$ 、 $A(t)$ 、 $A^*(t)$ の計算

$R(t)$ 、 $V(t)$ 、 $R^*(t)$ 、 $V^*(t)$ が求めれば、 $C(t)$ 、 $C^*(t)$ 、 $A(t)$ 、 $A^*(t)$ は次式によって計算できる。

$$C(t) = V(t) R(t)^{-1} \quad (7.3.18)$$

$$C^*(t) = V^*(t) R^*(t)^{-1} \quad (7.3.19)$$

$$A(t) = C^*(t) R(t) - V(t) \quad (7.1.25)$$

$$A^*(t) = C(t) R^*(t) - V^*(t) \quad (7.1.26)$$

7.4 速度修正量 $\Delta v(t)$ の決定

本節では、固定到達時間誘導方式 (Fixed-Time-

of Arrival Guidance, FTAG) と可変到達時間誘導方式 (Variable-Time-of Arrival Guidance, VTAG) の二つの場合について, 速度修正量 (Velocity Correction) $\Delta v(t)$ の決定法について述べる。

(1) 到達時間固定の場合 (FTA)

(7.2.17), (7.2.18) 式は再録すると,

$$\begin{cases} \delta r(t) = R(t)c + R^*(t)c^* & (7.4.1) \\ \delta v(t) = V(t)c + V^*(t)c^* & (7.4.2) \end{cases}$$

である。宇宙飛行体が目標点 (Target point) を通過する条件は, $\delta r(t_A) = 0$ であるから, (7.4.1) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} \delta r(t_A) &= R(t_A)c + R^*(t_A)c^* \\ &= R(t_A)c = 0 \quad (\because R^*(t_A) = 0) \\ \therefore c &= 0 \end{aligned}$$

従って, (7.4.1), (7.4.2) 式は,

$$\begin{cases} \delta r(t) = R^*(t)c^* & (7.4.3) \\ \delta v(t) = V^*(t)c^* & (7.4.4) \end{cases}$$

となる。この2式から c^* を消去すると,

$$\delta v(t) = V^*(t)R^*(t)^{-1}\delta r(t) \quad (7.4.5)$$

となり, これは $t=t$ における必要速度偏差 (Required velocity deviation) であるから, $\delta v(t)_{\text{req.}}$ と表記して, (7.3.19) 式を考慮して書直すと, 次式を得る。

$$\delta v(t)_{\text{req.}} = C^*(t)\delta r(t) \quad (7.4.5')$$

実際の速度偏差 (Actual velocity deviation) を $\delta v(t)$ とすれば, 必要な速度修正量 (Velocity correction) ベクトル $\Delta v(t)$ は,

$$\Delta v(t) \triangleq \delta v(t)_{\text{req.}} - \delta v(t) \quad (7.4.6)$$

と定義されるから, (7.4.5') 式を用いると,

$$\Delta v(t)_{\text{FTA}} = C^*(t)\delta r(t) - \delta v(t) \quad (7.4.7)$$

となる。

ここで,

$$\mathbf{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \delta r(t) \\ \vdots \\ \delta v(t) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow 3 \\ \updownarrow 3 \\ \updownarrow n-6 \end{matrix} \quad (7.4.8)$$

$$\Gamma(t) \triangleq [C^*(t), -I_3, 0_{3 \times (n-6)}] \quad (7.4.9)$$

と定義する。ここで, I_3 は 3×3 単位行列, $0_{3 \times (n-6)}$ は $3 \times (n-1)$ 零行列である。

また, $\mathbf{x}(t)$ は軌道推定系で用いている状態ベクトルであり,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t) (= \hat{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}_R(t)) & \text{(カルマンフィルタ)} \\ \hat{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}_R(t) & \text{(拡張カルマンフィルタ)} \end{cases}$$

の関係がある。フィルタの出力が $\hat{\mathbf{x}}(t)$ か $\hat{\mathbf{X}}(t)$ と異なるだけで, 本質的には基準軌道からの deviation の推定値を意味している。

従って, (7.4.7) 式は

$$\Delta v(t)_{\text{FTA}} = \Gamma(t)\mathbf{x}(t) \quad (7.4.10)$$

と書くことができる。上述したように $\mathbf{x}(t)$ に軌道推定系から与えられる推定値を用いるから

$$\Delta \hat{v}(t)_{\text{FTA}} = \Gamma(t)\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (7.4.11)$$

と書直すことができる。ここで $\Delta \hat{v}(t)$ は速度修正ベクトルの推定値を意味する。

今, $t=t_k$ で速度修正を行うものとし, 観測情報を処理してすぐ軌道修正を行うことは, 実際上無理なので, $t=t_{k-1}$ における情報 $\hat{\mathbf{x}}(t_{k-1})$ を利用するものとする, 時間更新の $\bar{\mathbf{x}}(t_k)$ を使えばよいから,

$$\Delta \hat{v}(t_k)_{\text{FTA}} = \Gamma(t_k)\bar{\mathbf{x}}(t_k) \quad (7.4.12)$$

となる。

なお, $\Gamma(t_k)$ の部分行列 $C^*(t_k)$ は 7.3 で述べた方法で計算するが, その時,

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= t_{k-1} \\ t &= t_k - t_{k-1} \\ t_A &= t_A \\ r_0 &= r_R(t_{k-1}) \\ v_0 &= v_R(t_{k-1}) \\ r(t_A) &= r_R(t_A) \\ v(t_A) &= v_R(t_A) \end{aligned} \right\} \quad (7.4.13)$$

として計算すればよい。ここで添字 R は基準軌道を示す。

速度修正量の推定誤差 $\Delta \tilde{v}(t_k)$ は,

$$\Delta \tilde{v}(t_k) = \Delta v(t_k) - \Delta \hat{v}(t_k) = \Gamma(t_k)\tilde{\mathbf{x}}(t_k) -$$

であるから, 推定誤差の共分散行列を $D(t_k)$ とすると,

$$\begin{aligned} D(t_k) &= \Gamma(t_k)P(t_k) - \Gamma(t_k)^T \\ &= \Gamma(t_k)\bar{P}(t_k)\Gamma(t_k)^T \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

で与えられ、ここで $\bar{P}(t_k)$ は時間更新の場合の推定誤差の共分散行列である。なお、 $D(t_k)$ は 3×3 行列である。

(2) 到達時間可変の場合(VTA)

到達時間 t_A を微小時間 δt 変化させたときの影響を考慮する。

目標物体(惑星、宇宙ステーション等)の位置、及び速度ベクトルを $r_T(t)$, $v_T(t)$ とすると、新しい目標点(target point, or point of contact) は $r_T(t_A + \delta t)$ である。

宇宙飛行体と目標との相対速度を $v_r(t)$ とすれば、

$$v_r(t_A) = v(t_A) - v_T(t_A) \quad (7.4.16)$$

であるから、新しい目標点に達するためには、 $t = t_A$ において、 $r_T(t_A)$ からのずれは $-v_r(t_A) \delta t$ でなければならない。即ち、線形性の仮定が成立しているならば、 $t = t_A + \delta t$ において、目標点に到達するためには、宇宙飛行体が $t = t_A$ に達する点を $r_T(t_A) - v_r(t_A) \delta t$ と選ばばよい。

従って、(7.4.1)式から、 $R^*(t_A) = 0$ であるから、

$$\delta r(t_A) = -v_r(t_A) \delta t = R(t_A) c \quad (7.4.17)$$

一方、 $t = t_k^+$ において

$$\begin{cases} \delta \hat{r}(t_k) = R(t_k) c + R^*(t_k) c^* \\ \delta \hat{v}(t_k)^+ = V(t_k) c + V^*(t_k) c^* \end{cases} \quad (7.4.18)$$

であるから、(7.4.17), (7.4.18)式から c , c^* を消去すれば、

$$\begin{aligned} \delta v(t_k)^+ &= A(t_k) R^{-1}(t_A) v_r(t_A) \delta t \\ &+ C^*(t_k) \delta r(t_k) \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

となる。添字の+は $t_A + \delta t$ に対応していることを示す。

従って、

$$\Delta \hat{v}_{VTA} = \Delta \hat{v}_{FTA}(t_k) + v(t_k) \delta t \quad (7.4.20)$$

と書き表わせる。ここで、

$$v(t_k) \triangleq A(t_k) R^{-1} v_r(t_A) \quad (7.4.21)$$

と定義する。

ここで、 δt は $\Delta \hat{v}_{VTA}(t_k)$ を最小にするように選ぶとすれば、 $\Delta \hat{v}_{VTA}(t_k)$ と $v(t_k)$ が直交するようにすればよい。従って、(7.4.20)式から、この δt

を δt で表わせば、

$$\delta t = - \frac{\Delta \hat{v}_{FTA}(t_k) \cdot v(t_k)}{v(t_k) \cdot v(t_k)} \quad (7.4.22)$$

となる。ここで、

$$M(t_k) \triangleq I_3 - \frac{v(t_k) v(t_k)^T}{v(t_k) \cdot v(t_k)} \quad (7.4.23)$$

と定義すれば、(7.4.20)式は

$$\Delta \hat{v}_{VTA}(t_k) = M(t_k) \Delta \hat{v}_{FTA}(t_k) \quad (7.4.24)$$

と書ける。ここで、 $\Delta \hat{v}_{FTA}(t_k)$ は(7.4.11)で与えられる $\Delta v(t_k)$ である。

なお、 $\Delta \hat{v}_{VTA}(t_k)$ の推定誤差 $\Delta \tilde{v}_{VTA}(t_k)$ は

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{v}_{VTA}(t_k) &= M(t_k) \Delta \tilde{v}_{FTA}(t_k) \\ &= M(t_k) \Gamma(t_k) \tilde{x}(t_k) \end{aligned} \quad (7.4.25)$$

であるから、推定誤差の共分散行列 $D_{VTA}(t_k)$ は、

$$D_{VTA}(t_k) = M(t_k) \Gamma(t_k) \bar{P}(t_k) \Gamma(t_k)^T M(t_k)^T \quad (7.4.26)$$

で与えられる。

7.5 速度修正実行後の諸情報の計算

(1) 推定値の変化

速度修正を実行した直後の状態変数 $\hat{x}(t_k)$ は、次のように与えられる。

$$\hat{x}(t_k) = \bar{x}(t_k) + J \Delta \hat{v}(t_k) \quad (7.5.1)$$

ここで、

$$\Delta \hat{v}(t_k) = \begin{cases} \Gamma(t_k) \bar{x}(t_k) & \text{(FTA)} \\ M(t_k) \Gamma(t_k) \bar{x}(t_k) & \text{(VTA)} \end{cases} \quad (7.5.2)$$

$$J \triangleq \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \\ 0_{(n-6) \times 3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ n \\ \downarrow \end{matrix} \quad (7.5.3)$$

である。また、 $\bar{x}(t_k)$ は時間更新の推定値であり、

$$\bar{x}(t_k) = \begin{cases} \bar{x}(t_k) & \text{(カルマンフィルタ)} \\ \bar{X}(t_k) - X_R(t_k) & \text{(拡張カルマンフィルタ)} \end{cases} \quad (7.5.4)$$

の関係がある。

以下添字のない $\Delta \hat{v}(t_k)$ は(7.5.2)式に示したように、FTAとVTAを統一的に扱うことを意味する。

なお、カルマンフィルタの場合は常に基準軌道からのずれを推定しているのに対して、拡張カルマンフィルタの場合は軌道そのものを推定しているので、速度修正量を計算する際には、基準軌道からのずれを求めてから速度修正量を計算する点が違っている。

軌道の推定値という観点から書直すと、次のようにまとめられる。

(i) カルマンフィルタの場合

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{X}}(t_k) = \mathbf{X}_R(t_k) + \bar{\mathbf{x}}(t_k) + J \Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k) & (7.5.5) \\ \Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k) = \begin{cases} \Gamma(t_k) \bar{\mathbf{x}}(t_k) & \text{(FTA)} \\ M(t_k) \Gamma(t_k) \bar{\mathbf{x}}(t_k) & \text{(VTA)} \end{cases} \end{cases}$$

(ii) 拡張カルマンフィルタの場合

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{X}}(t_k) = \bar{\mathbf{X}}(t_k) + J \Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k) & (7.5.6) \\ \Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k) = \begin{cases} \Gamma(t_k) \bar{\mathbf{x}}(t_k) \\ M(t_k) \Gamma(t_k) \bar{\mathbf{x}}(t_k) \end{cases} \\ \bar{\mathbf{x}}(t_k) = \bar{\mathbf{X}}(t_k) - \mathbf{X}_R(t_k) \end{cases}$$

(2) 推定誤差の共分散行列 $P(t_k)$ の変化

ここで実際に実行された速度修正 (velocity correction) を $\Delta \mathbf{v}_a(t_k)$ とし、必要速度修正 (required velocity correction) $\Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k)$ を実行する際の誤差を $\boldsymbol{\eta}(t_k)$ とすると、次式のように表わせる。

$$\Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k) = \Delta \mathbf{v}_a(t_k) + \boldsymbol{\eta}(t_k) \quad (7.5.7)$$

$\Delta \mathbf{v}_a(t_k)$ を用いると、基準軌道からのずれの真値 $\mathbf{x}(t_k)$ の速度修正の前後の変化は、

$$\mathbf{x}(t_{k+}) = \mathbf{x}(t_{k-}) + J \Delta \mathbf{v}_a(t_k) \quad (7.5.8)$$

と表わされる。ここで、 t_{k+} は速度修正後を、 t_{k-} は直前を表わす。

従って、推定誤差 $\tilde{\mathbf{x}}(t_{k+})$ 次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t_{k+}) &= \mathbf{x}(t_{k+}) - \hat{\mathbf{x}}(t_{k+}) \\ &= \tilde{\mathbf{x}}(t_{k-}) - J \boldsymbol{\eta}(t_k) \end{aligned} \quad (7.5.9)$$

よって、推定誤差の共分散行列 $P(t_k)$ は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P(t_{k+}) &= P(t_{k-}) + JN(t_k)J^T \\ &= \bar{P}(t_k) + JN(t_k)J^T \end{aligned} \quad (7.5.10)$$

ここで、 $\bar{P}(t_k)$ は時間更新の場合の誤差共分散行列であり、また、 $N(t_k)$ は速度修正実行の際の制御誤差の共分散行列で、次式で定義される。

$$N(t_k) = E[\boldsymbol{\eta}(t_k)\boldsymbol{\eta}(t_k)^T] \quad (7.5.11)$$

7.6 速度修正の制御誤差

(1) 実際に実行される速度修正量 $\Delta \mathbf{v}_a(t_k)$

前節で計算した必要速度修正ベクトル $\Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k)$ に基づいて軌道修正を実行する際に、実際には大きさ (magnitude) と方向 (orientation) とに誤差が入り、結果的には、 $\Delta \mathbf{v}_a(t_k)$ を実行したことになる。この誤差を制御誤差と定義しておく。

ここで、 $\Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k)$ がその 1 軸に沿うような座標系を考え、その座標系と基準座標系との座標変換行列を T_v とすれば、 $\Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k)$ は、

$$\Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k) = \Delta \hat{\mathbf{v}} T_v \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.6.1)$$

$$|\Delta \hat{\mathbf{v}}| \triangleq |\Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k)| \quad (7.6.2)$$

と書くことができる。

実行された速度修正の大きさ (magnitude) は次のように書ける。

$$\Delta v_a = (1 + \kappa) |\Delta \hat{\mathbf{v}}| \quad (7.6.3)$$

ここで κ は微小量で、平均値 0 の白色ガウス雑音とする。方向 (orientation) の誤差を考えるのに γ 、 β の二つの角を考え、図 7.1 に示すように定義する。

ここで、 γ は $\Delta \hat{\mathbf{v}}(t_k)$ と $\Delta \mathbf{v}_a(t_k)$ のなす角であり、 γ は微小量で平均値 0 の白色ガウス乱数とし、 β は $-\pi$ と π の間に分布する一様乱数と仮定する。

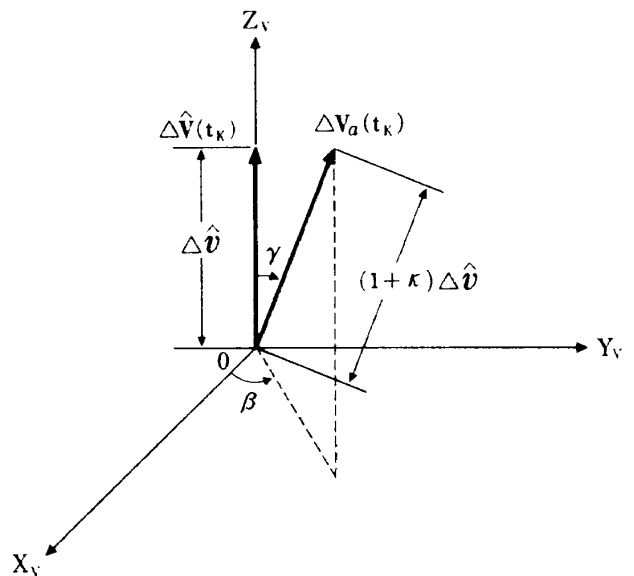


図 7.1 速度修正座標系

また、 κ , r , β はお互いに独立な乱数で相関はないものとする。

以上を式で表わし、必要な量を定義すると、次のようになる。

$$\bar{\beta} \triangleq E[\beta] = 0, \quad \beta : [-\pi, \pi] \text{の一樣乱数}$$

$$\bar{\kappa} \triangleq E[\kappa] = 0,$$

κ : 平均値 0 の白色ガウス乱数

$$\bar{r} \triangleq E[r] = 0,$$

r : 平均値 0 の白色ガウス乱数

$$\kappa \ll 1, r \ll 1$$

$$\bar{\kappa}^2 \triangleq \text{Cov}[\kappa, \kappa]$$

$$\bar{r}^2 \triangleq \text{Cov}[r, r]$$

$$\bar{\kappa r} = \bar{r\kappa} = \text{Cov}[\kappa, r] = 0$$

$$\bar{\kappa\beta} = \bar{\beta\kappa} = \text{Cov}[\beta, \kappa] = 0$$

$$\bar{r\beta} = \bar{\beta r} = \text{Cov}[r, \beta] = 0$$

ここで、 $E[\]$ は期待値、 $\text{Cov}[\ , \]$ は共分散を示す。

以上のように定義すると、 $\Delta v_a(t_k)$ は、

$$\Delta v_a(t_k) = (1 + \kappa) \Delta \hat{v} T_v \begin{pmatrix} \sin r \cos \beta \\ \sin r \sin \beta \\ \cos r \end{pmatrix}$$

と書き表わせ、ここで $r \ll 1$ であるから $\sin r \cong r$, $\cos r \cong 1$ と近似すると次式を得る。

$$\Delta v_a(t_k) = (1 + \kappa) \Delta \hat{v} T_v \begin{pmatrix} r \cos \beta \\ r \sin \beta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.6.4)$$

従って、速度修正実行の際の制御誤差ベクトル $\eta(t_k)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \eta(t_k) &= \Delta \hat{v}(t_k) - \Delta v_a(t_k) \\ &= -\Delta \hat{v} T_v \left[\begin{pmatrix} r \cos \beta \\ r \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa r \cos \beta \\ \kappa r \sin \beta \\ \kappa \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

ここで、 $\kappa \ll 1$, $r \ll 1$ の条件から $\kappa r \cong 0$ とみなしてよいから、

$$\eta(t_k) = -\Delta \hat{v} T_v \left[r \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (7.6.5)$$

のように書ける。

(2) 速度修正の制御誤差の共分散行列 $N(t_k)$

ここで、(7.5.11)式で定義した速度修正実行の際の制御誤差の共分散行列を計算する。

定義式(7.5.11)式に(7.6.5)式を代入して、 $\bar{\kappa r} = \bar{r\kappa} = 0$ を考慮すれば、

$$\begin{aligned} N(t_k) &= \Delta \hat{v}^2 T_v \left[\bar{r}^2 \begin{pmatrix} \overline{\cos^2 \beta} & \overline{\cos \beta \sin \beta} & 0 \\ \overline{\sin \beta \cos \beta} & \overline{\sin^2 \beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \bar{\kappa}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] T_v^T \quad (7.6.6) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\overline{\cos^2 \beta} = E[\cos^2 \beta]$$

$$\overline{\sin \beta \cos \beta} = \overline{\cos \beta \sin \beta} = E[\sin \beta \cos \beta]$$

$$\overline{\sin^2 \beta} = E[\sin^2 \beta]$$

である。

一般に、確率密度関数 $p(x)$ を持つ変数 x の関数 $f(x)$ の期待値は、

$$\overline{f(x)} = E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx \quad (7.6.7)$$

と定義される。

また、 $[a, b]$ に分布する一樣乱数の確率密度関数は、

$$p(x) = \begin{cases} 0, & (x > b) \\ \frac{1}{b-a}, & (a \leq x \leq b) \\ 0, & (x < a) \end{cases} \quad (7.6.8)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} &= E[f(x)] = \int_a^b f(x) p(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned} \quad (7.6.9)$$

と書ける。従って、今の場合 $a = -\pi$, $b = \pi$, $x = \beta$ であるから、

$$\overline{f(\beta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta) d\beta \quad (7.6.10)$$

となる。

上式を用いて計算すると、

$$\overline{\cos^2 \beta} = \frac{1}{2} (1 + \overline{\cos 2\beta}) = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\beta d\beta \right] = \frac{1}{2} \\ \overline{\sin^2 \beta} &= \frac{1}{2} (1 - \overline{\cos 2\beta}) = \frac{1}{2} \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\beta d\beta \right] = \frac{1}{2} \quad (7.6.11) \\ \overline{\sin \beta \cos \beta} &= \overline{\cos \beta \sin \beta} = \frac{1}{2} \overline{\sin 2\beta} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\beta d\beta \right] = 0 \end{aligned} \right.$$

この結果を (7.6.6) 式に代入すると,

$$N(t_k) = \Delta \hat{v}^2 T_v \begin{bmatrix} \frac{\bar{\gamma}^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + \bar{\kappa}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} T_v^T \quad (7.6.12)$$

となる。ただし、 $\bar{\gamma}^2$, $\bar{\kappa}^2$ は与えられるものとする。

この式は、座標変換行列がわかっている時に用いられる。

次に、座標変換行列 T_v を表に出さない式を導いてみる。座標変換行列 T_v はよく知られているように、次の性質を持つ。

$$T_v T_v^{-1} = T_v T_v^T = T_v^T T_v = I \quad (7.6.13)$$

この性質を用いて、(7.6.1)式から次の量を計算する。

$$\Delta \hat{v}(t_k)^T \Delta \hat{v}(t_k) = \Delta \hat{v}^2 (001) T^T T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Delta \hat{v}^2 \quad (7.6.14)$$

$$\Delta \hat{v}(t_k) \Delta \hat{v}(t_k)^T = \Delta \hat{v}^2 T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^T \quad (7.6.15)$$

ここで,

$$\begin{aligned} & \Delta \hat{v}^2 T_v \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_v^T \\ &= \Delta \hat{v}^2 T_v \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] T_v^T \end{aligned}$$

$$= \Delta \hat{v}^2 I_{3 \times 3} - \Delta \hat{v}^2 T_v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_v^T,$$

$$(\because T_v I T_v^T = T_v T^T = I)$$

であるから、この式に (7.6.14), (7.6.15) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} \Delta \hat{v}^2 T_v \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_v^T &= \Delta \hat{v}(t_k)^T \Delta \hat{v}(t_k) I \\ &- \Delta \hat{v}(t_k) \Delta \hat{v}^T(t_k) \quad (7.6.16) \end{aligned}$$

となる。

従って、(7.6.14), (7.6.15), (7.6.16) 式を (7.6.12) 式に代入すれば、次の表現を得る。

$$\begin{aligned} N(t_k) &= \frac{\bar{\gamma}^2}{2} [\Delta \hat{v}^2 I - \Delta \hat{v}(t_k) \Delta \hat{v}(t_k)^T] \\ &+ \bar{\kappa}^2 \Delta \hat{v}(t_k) \Delta \hat{v}(t_k)^T \quad (7.6.17) \\ \Delta \hat{v}^2 &= \Delta \hat{v}(t_k)^T \Delta \hat{v}(t_k) \end{aligned}$$

なお、ここで $\bar{\gamma}^2$, $\bar{\kappa}^2$ は誤差の分散として与えられるものとする。

以上で、速度修正した場合の推定値及び推定誤差の共分散行列の変化が計算できることになる。

本報告では、速度修正量とスラストの性能との関係については論議の対象外として扱ったことを付記しておく。

8. あとがき

以上、誘導制御を伴った宇宙航法系の軌道推定に関する理論構成について記述した。これは、プログラム STANPS-N の基盤となる理論であり、まだ改良の余地は多く残っているが、機能拡張やモデルの精密化はあっても、基調となる線は変わらない。STANPS-N の最初の version は STANPS-E と呼んでいたが、その後種々の修正を行ったものを STANPS-N としている。このプログラムは、航空宇宙技術研究所と宇宙開発事業団の共同研究“惑星探査技術の研究”においても用いられ、その結果は参考文献 22, 23 の中に収録されている。上記共同研究が終了する以前から並行して、人工衛星を利用した広域地殻変動解析の研究が始まり、手持ちのプログラムを改造して力学的衛星測地学

データ処理プログラムの作成に入ったため、本報告をまとめるのが遅くなった。

本報告のまとめとしては次の通りである。

(1) 推定アルゴリズムは通常のカルマンフィルタと拡張カルマンフィルタのみであるが、システムノイズを考慮してモデル化誤差を補償する定式化を採用している。

(2) 観測バイアス、観測局の位置、地球物理学的定数のような未知パラメータ（概略値は既知）を含む場合の推定アルゴリズムとして、拡大システムにより未知パラメータも同時に推定する方式を採っている。

(3) 未知パラメータも同時に推定することにより高精度な推定が可能となるが、一方拡大システムを用いるとフィルタの発散を起こしやすくなる傾向がある。システムノイズによる補償で、かなり抑えることができるが、根本的対策としては、平方根フィルタのアルゴリズムに変更した方がよい。

(4) 深宇宙探査や衛星測地学におけるように、逐次推定ではなく、多量の観測データを同時処理する最小二乗法による batch filter を追加する必要がある。

(5) 実データの処理の点に関して、観測データの補正は余り考慮していないので、整備する必要がある。

(6) 誘導制御に関しては、インパルス速度修正の場合について、速度修正の前後における推定値及び推定誤差共分散行列の変化を計算するアルゴリズムを与えているが、速度修正量とスラストの特性との関係や有限時間での推力付加等については考慮していない。

以上が、プログラムの性格が変化する1983年時点で凍結したプログラムの理論構成である。その後は、レーザレーダによる観測を処理する力学的衛星測地学データ処理プログラムとして、手持ちのプログラムを改造、機能拡充して、batch filter の追加、平方根アルゴリズムの採用、摂動力モデルに固体地球潮汐、海洋潮汐を追加し、実データ処理のための諸補正機能の追加を行ったが、これらに関しては稿を改めて報告する。なお、衛星測

地学データ処理プログラムと言うが、本質的には、パラメータ推定を含む形の高精度軌道決定プログラムである。従って、上記の(6)に関してのみ、その後の課題が残されたままになっている。

最後に、STANPS-E 開発の時点で、プログラム作成に富士通株式会社、大興電子通信株式会社の多大の御協力を頂いたので、遅ればせながら感謝の意を表す。

また、宇宙科学研究所の西村敏充教授には、多くの貴重なアドバイスを頂いたことを記して感謝の言葉とする。

参 考 文 献

- 1) 松島, 志甫, 村田, 武内; 宇宙飛行体の汎用軌道解析プログラム STANPS. (1)人工衛星および惑星間宇宙船の軌道生成プログラム, 航技研資料 TM-359, (1978).
- 2) 長沢 工; 天体の位置計算増補版, 地人書館 (1985).
- 3) 弓, 角田, 志甫, 他; 宇宙技術を用いた広域地殻変動観測システム調査研究, 科学技術庁委託研究委員会報告書 (1981).
- 4) J. M. A. Danby; Fundamentals of Celestial Mechanics, The Mcmillan Co. (1962).
- 5) R. H. Battin; Astronautical Guidance, McGraw-Hill, New York, (1964).
- 6) P. R. Escobal; Methods of Orbit Determination, John Wiley & Sons, Inc. (1965).
- 7) R. M. L. Baker; Astrodynamics, Academic Press, (1967).
- 8) A. E. Roy; Orbital Motion, Adam Hilger, Ltd., (1978).
- 9) T. D. Moyer; Mathematical Formulation of the Double-Precision Orbit Determination Program (DPODP), JPL Technical Report 32-1527 (1971).
- 10) E. W. Woolard; Theory of the Rotation of the Earth around its Center of Mass, Astronomical Paper, Vol. XV, Part 1 (1953).
- 11) E. M. Gapodchkin (ed.); 1973 Smithsonian

- Standard Earth (Ⅲ), SAO Special Report 353 (1973).
- 12) T. Shiho ; Two Proposed Methods of Trajectory Estimation for Self-Contained Space Navigation System, Proc. of 7th ISTS Tokyo 1967 (1967).
 - 13) R. S. Bucy and P. D. Joseph ; Filtering for Stochastic Processes with Application to Guidance, Interscience Publishers (1968).
 - 14) A. E. Bryson, Jr. and Yu-Chi Ho ; Applied Optimal Control, Blaisdell Publishing Co., (1969).
 - 15) 田辺, 志甫 ; カルマンフィルタとその応用, 航空宇宙学会誌, Vol.20, No.216 (1972).
 - 16) B. D. Tapley ; Statistical Orbit Determination Theory, Recent Advances in Dynamical Astronomy (B. D. Tapley & V. Szebehely ed.), D. Reidel, Dordrecht (1973).
 - 17) 村田, 志甫, 吉田 ; カルマン・フィルタによる軌道及び誘導誤差解析のためのシミュレーション・プログラム, 航技研資料 TM-266, (1974).
 - 18) 榎木, 添田, 中溝 ; 確率システム制御の基礎, 日新出版 (1975).
 - 19) A. Gelb (ed.) ; Applied Optimal Estimation, The MIT Press (1975).
 - 20) 村田 ; 軌道決定のためのフィルタリング理論, 航技研報告 TR-555 (1978).
 - 21) 志甫 ; 推定論講義ノート(研修生用), (1983).
 - 22) 奥石, 松島, 志甫, 中島, 木村, 斎藤, 小山 ; オービタによる月の探査, 航技研報告 TR-755 (1983).
 - 23) 志甫 ; 極軌道衛星による月の探査, 計測自動制御学会誌, Vol.23, No.1 (1984).

航空宇宙技術研究所報告1032号

平成元年8月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川2-27-12

Printed in Japan