

NAL TR-1049

ISSN 0389-4010

UDC 536.21 :

624.074.43 :

624.016

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1049

多層複合円筒殻に対する熱伝導の一次近似方程式

遠藤修司

1989年12月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

多層複合円筒殻に対する熱伝導の一次近似方程式*

遠藤修司**

Approximate Equations for Heat Conduction in Multi-Layered Cylindrical Shells

By
Shuji ENDO

Abstract

A system of two coupled two-dimensional heat conduction equations for multi-layered cylindrical shells, whose layers are in perfect thermal contact, is formulated as a first approximation, consistent with the Kirchhoff-Love hypothesis in the theory of shells. This system of equations is deduced from the exact three-dimensional heat conduction equation, by expanding the temperature function into an infinite series of Legendre polynomials with respect to the thickness coordinate of each layer. Some analytical examples of heat conduction problems are then given for the special cases where the resulting heat conduction equations can be decoupled.

1. 緒言

航空機やロケット，宇宙船などの飛行体は，しばしば飛行荷重のほかに空力的加熱，原動機などの推進系からの加熱，太陽輻射，あるいは大気温度の変動などによる熱的荷重を受けることがあり，耐熱策として外板を多層複合構造とするなどの工夫が講じられることがある。このような場合，これら飛行体の主要な構造要素となる多層複合円筒殻の温度分布，熱変形および応力状態を把握することは，その構造設計の上で重要な事柄の一つとなる。変形と温度との間の連成が無視できる程度にゆるやかな温度変化を伴う通常の熱負荷問題では，物体中の温度分布は，それによって生ずる変形・応力の状態に無関係に決められる。したがって，変形・応力状態の解析は，先ず熱伝導方程式の初期値・境界値問題を解いて温度分布を決定し，次いでその温度分布に対応した熱

応力を考慮して力学的支配方程式の境界値問題を解くという二段階を踏むこととなる。

本報告では，多層複合円筒殻の熱構造解析をKirchhoff-Loveの仮定に基づく一次近似殻理論を用いて行なうことを前提に，その第一段階として，多層複合円筒殻に対する熱伝導の一次近似方程式を導くことを試みる。殻に対する熱伝導方程式は，力学的基礎方程式と同様に，肉厚が薄いという幾何学的特徴を生かして二次元化近似するのが数式的取り扱い上好ましい。すでに，単層殻に対する熱伝導方程式の近似式は幾つか提案されている。例えば，Bolotin¹⁾は温度分布を肉厚方向に線形と仮定して三次元熱伝導方程式を，肉厚方向の平均温度と温度勾配とに関する独立な二つの二次元の方程式で与えている。SteeleとYang²⁾は温度関数を肉厚方向にLegendreの多項式の無限級数に展開し，三次元の方程式をその展開係数に対する相互に連成した無限個の二次元の方程式に近似している。この方程式は，Bolotinの結果を包含し，未知関数の数を増すこと

*平成元年11月16日 受付

**構造力学部

によって近似精度を任意に向上できる特長を持っている。さらに彼らは、その最初の二つの近似式を用いて、各々の層が薄く、それぞれの肉厚方向の温度分布を線形と仮定できる二層複合円筒殻の定常熱伝導を支配する方程式を得ている。また、筆者³⁾は、熱伝導方程式の二次元化近似式と殻理論の力学的基礎方程式との関連を明確にするため、SteeleとYangの方法を熱伝導方程式を二次元化するためだけでなく、三次元弾性論から円筒殻の基礎式を導く過程にも適用して、Kirchhoff-Loveの仮定に基づく円筒殻理論においては、変位および応力ばかりでなく温度分布も肉厚方向に線形近似するのが合理的な一次近似であることを示し、殻理論の力学的基礎方程式と同等の精度を備えた熱伝導の一次近似方程式を導いている。本解析では、単層殻の場合に得た筆者らの結果を基礎に、各層の界面で温度ならびに熱流束の連続性が成立するものとして、多層複合円筒殻に対する非定常熱伝導の一次近似方程式を導出する。

なお、本稿は、その要旨を日本学会熱工学研究連絡委員会ほか主催の第26回日本伝熱シンポジウム⁴⁾において、発表したものである。

2. 三次元基礎方程式の二次元化とその一次近似

熱伝導の三次元基礎方程式の二次元化およびその一次近似については、文献3)に詳述されているが、本報告の展開に必要な基礎的事項でもあるので、やや詳しく述べる。殻理論との関連の詳細については、同文献を参照していただきたい。

2.1 三次元熱伝導方程式

図1に示すような N 層の異種材料から成る外半径 R_a 、内半径 R_b の多層複合円筒殻を考え、その殻厚を h 、中央面半径を R 、長さを $2l$ とし、最外層から内に向かって j 番目($j=1, 2, \dots, N$)の層の肉厚およびその中央面半径をそれぞれ h_j および R_j とする。円筒殻の中央断面の図心に原点をとり、座標 (x, θ) を定める。ここに、 x は軸方向距離、 θ は周方向角を表わす。また、各層に対して法線座標 z_j を各々の中央面からの外向き垂直距離として定義する。いま、時間を t 、複合円筒殻の各層の温度分布を $T_j(x,$

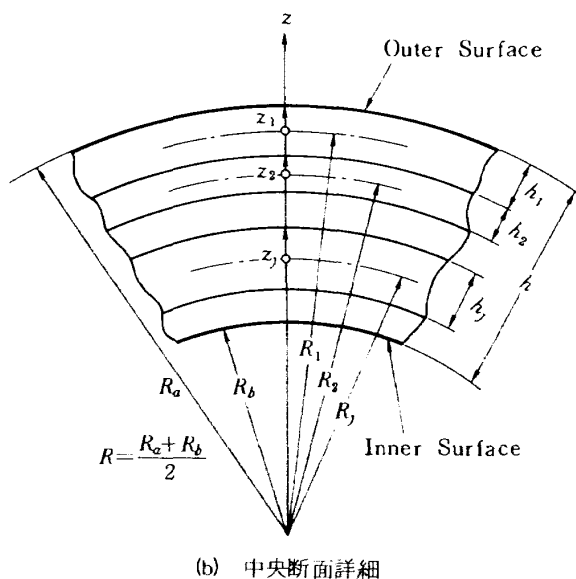
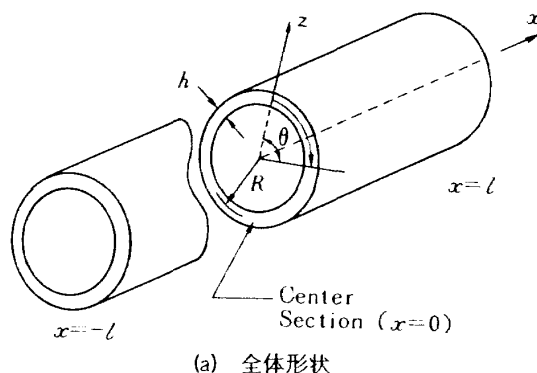


図1 円筒殻形状と座標系

$\theta, z_j, t)$ とすると、三次元熱伝導の基礎方程式は、図1の円筒座標系 (x, θ, z_j) を用いて、各層に対し、次式で与えられる。ただし、内部発熱は無く、各層単体の材料の熱伝導率は等方性で到る所で一定とする。

$$\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{1}{(R_j + z_j)^2} \frac{\partial^2 T_j}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R_j + z_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \left\{ (R_j + z_j) \frac{\partial T_j}{\partial z_j} \right\}$$

$$; (T_j = T_j(x, \theta, z_j, t), j = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

ここに、 a_j は各層の材料の温度伝播率(thermal diffusivity)で次式で定義される。

$$a_j = \frac{\lambda_j}{c_j \rho_j} \quad ; (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

ただし、 c_j, ρ_j および λ_j は各層の材料のそれぞれ比熱、密度および熱伝導率である。また、 R_j 、すなわち、最外層から j 番目の層の中央面半径は、複合

円筒殻の中央面半径 R および各層の肉厚 h_j と次の関係にある。

$$R_j = R \left\{ 1 - \frac{1}{2R} \left(\sum_{r=1}^{j-1} h_r - \sum_{r=j+1}^N h_r \right) \right\} ; (j=1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

ただし、 $\sum_{r=1}^{j-1}$ における $j=1$ 、あるいは $N=2$ であるときの $\sum_{r=j+1}^N$ における $j=2$ 、のときのように j の値によって、和の範囲が空になるとき、その級数の項は零とする。

2.2 二次元化

本節では、三次元の温度関数を各層の肉厚方向の座標に関する無限級数に展開して、三次元熱伝導方程式を、その展開係数に対する無限個の相互に連成 (coupling) した二次元の方程式として与える。

複合円筒殻の各層の中央面から外向き法線方向に次式で定義される無次元座標 ζ_j を導入する。

$$\zeta_j = \frac{2z_j}{h_j} ; (-1 \leq \zeta_j \leq 1, j=1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

したがって、各層の上面および下面は、それぞれ $\zeta_j = 1$ および $\zeta_j = -1$ で表わされることになる。この新たな独立変数 ζ_j を用いれば、各層に対する三次元の熱伝導方程式、式(1)、は次の形に書ける。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_j} \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right)^2 \frac{\partial T_j}{\partial t} \\ &= \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right)^2 \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{1}{R_j^2} \frac{\partial^2 T_j}{\partial \theta^2} \\ &+ \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left\{ \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{\partial T_j}{\partial \zeta_j} \right\} \\ & ; (T_j = T_j(x, \theta, \zeta_j, t), j=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (5)$$

円筒殻各層で内部の温度変化はなめらかで連続であることを仮定し、それを次に示すように変域 $-1 \leq \zeta_j \leq 1$ において直交関数系を成す Legendre の多項式 $P_n(\zeta_j)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) の級数に展開する。

$$T_j(x, \theta, \zeta_j, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_j^{(n)}(x, \theta, t) P_n(\zeta_j)$$

$$; (j=1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

ここに、 $T_j^{(n)}$ は温度関数 T_j の Legendre 展開における展開係数で ζ_j に対する依存性は無く、表記のように二つの空間座標 x, θ および時間 t の関数である。

温度関数を式(6)にしたがって Legendre 展開するとき、その展開係数 $T_j^{(n)}$ が従うべき微分方程式、言い換えると、空間座標 x および θ について二次元化された熱伝導の方程式、が温度関数 T_j を支配している三次元の熱伝導方程式、式(5)、から、次のようにして導出される。まず、式(5)に含まれる温度関数を式(6)にしたがって Legendre の多項式の級数に展開すると、式(5)の級数表示が次の形に書ける。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right)^2 \frac{\partial T_j^{(n)}}{\partial t} P_n(\zeta_j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right)^2 \frac{\partial^2 T_j^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{1}{R_j^2} \frac{\partial^2 T_j^{(n)}}{\partial \theta^2} \right\} P_n(\zeta_j) \\ &+ \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 T_j^{(n)} \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{d}{d\zeta_j} \left\{ \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{dP_n(\zeta_j)}{d\zeta_j} \right\} \\ & ; (T_j^{(n)} = T_j^{(n)}(x, \theta, t), j=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (7)$$

上式の両辺に $P_m(\zeta_j)$ ($m=0, 1, 2, \dots$) を乗じ、 ζ_j について -1 から 1 まで積分する。この際、積分と和の順序は交換できるものとする。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_j} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right)^2 \frac{\partial T_j^{(n)}}{\partial t} P_n(\zeta_j) P_m(\zeta_j) d\zeta_j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^1 \left\{ \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right)^2 \frac{\partial^2 T_j^{(n)}}{\partial x^2} \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{R_j^2} \frac{\partial^2 T_j^{(n)}}{\partial \theta^2} \right\} P_n(\zeta_j) P_m(\zeta_j) d\zeta_j \\ &+ \left. \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 T_j^{(n)} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{d}{d\zeta_j} \left\{ \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \right. \right. \\ &\times \left. \left. \frac{dP_n(\zeta_j)}{d\zeta_j} \right\} P_m(\zeta_j) d\zeta_j \right] \\ & ; (T_j^{(n)} = T_j^{(n)}(x, \theta, t), j=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)の右辺の角括弧内の第2項の積分は部分積分することにより次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{d}{d\zeta_j} \left\{ \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{dP_n(\zeta_j)}{d\zeta_j} \right\} P_m(\zeta_j) d\zeta_j \\ &= \left| \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right)^2 \frac{dP_n(\zeta_j)}{d\zeta_j} P_m(\zeta_j) \right|_{-1}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left| \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) P_n(\zeta_j) \left\{ \frac{h_j}{2R_j} P_m(\zeta_j) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{dP_m(\zeta_j)}{d\zeta_j} \right\} \right|_{-1}^1 \\
& + \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) P_n(\zeta_j) \left\{ 2 \left(\frac{h_j}{2R_j} \right) \frac{dP_m(\zeta_j)}{d\zeta_j} \right. \\
& \left. + \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{d^2 P_m(\zeta_j)}{d\zeta_j^2} \right\} d\zeta_j \\
& + \frac{h_j}{2R_j} \int_{-1}^1 P_n(\zeta_j) \left\{ \frac{h_j}{2R_j} P_m(\zeta_j) \right. \\
& \left. + \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{dP_m(\zeta_j)}{d\zeta_j} \right\} d\zeta_j \\
& ; (j=1, 2, \dots, N) \quad (9)
\end{aligned}$$

この式を用い、式(6)の關係に注意して整理すると、式(8)は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^1 \left\{ \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right)^2 \left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(n)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_j^{(n)}}{\partial x^2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{R_j^2} \frac{\partial^2 T_j^{(n)}}{\partial \theta^2} \right\} P_n(\zeta_j) P_m(\zeta_j) d\zeta_j \right. \\
& - \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 \frac{h_j}{2R_j} T_j^{(n)} \int_{-1}^1 P_n(\zeta_j) \left\{ \frac{h_j}{2R_j} P_m(\zeta_j) \right. \\
& \left. + \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{dP_m(\zeta_j)}{d\zeta_j} \right\} d\zeta_j \\
& - \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 T_j^{(n)} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) P_n(\zeta_j) \left\{ 2 \left(\frac{h_j}{2R_j} \right) \right. \\
& \left. \times \frac{dP_m(\zeta_j)}{d\zeta_j} + \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{d^2 P_m(\zeta_j)}{d\zeta_j^2} \right\} d\zeta_j \left. \right] \\
& + \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 \left| \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) T_j(x, \theta, \zeta_j, t) \right. \\
& \quad \times \left. \left\{ \frac{h_j}{2R_j} P_m(\zeta_j) + \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{dP_m(\zeta_j)}{d\zeta_j} \right\} \right|_{-1}^1 \\
& = \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 \left| \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right)^2 \frac{\partial T_j}{\partial \zeta_j}(x, \theta, \zeta_j, t) P_m(\zeta_j) \right|_{-1}^1 \\
& ; (T_j^{(n)} = T_j^{(n)}(x, \theta, t), j=1, 2, \dots, N) \quad (10)
\end{aligned}$$

上式を書き直せば次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(n)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_j^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{1}{R_j^2} \frac{\partial^2 T_j^{(n)}}{\partial \theta^2} \right) \int_{-1}^1 P_n(\zeta_j) P_m(\zeta_j) d\zeta_j \right. \\
& + \left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(n)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_j^{(n)}}{\partial x^2} \right) \left\{ 2 \left(\frac{h_j}{2R_j} \right) \int_{-1}^1 \zeta_j P_n(\zeta_j) P_m(\zeta_j) d\zeta_j \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{h_j}{2R_j} \right)^2 \int_{-1}^1 \zeta_j^2 P_n(\zeta_j) P_m(\zeta_j) d\zeta_j \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 T_j^{(n)} \left\{ \left(\frac{h_j}{2R_j} \right)^2 \int_{-1}^1 P_n(\zeta_j) P_m(\zeta_j) d\zeta_j \right. \\
& + 3 \left(\frac{h_j}{2R_j} \right) \int_{-1}^1 P_n(\zeta_j) \frac{dP_m(\zeta_j)}{d\zeta_j} d\zeta_j \\
& + 3 \left(\frac{h_j}{2R_j} \right)^2 \int_{-1}^1 \zeta_j P_n(\zeta_j) \frac{dP_m(\zeta_j)}{d\zeta_j} d\zeta_j \\
& + \int_{-1}^1 P_n(\zeta_j) \frac{d^2 P_m(\zeta_j)}{d\zeta_j^2} d\zeta_j \\
& + 2 \left(\frac{h_j}{2R_j} \right) \int_{-1}^1 \zeta_j P_n(\zeta_j) \frac{d^2 P_m(\zeta_j)}{d\zeta_j^2} d\zeta_j \\
& \left. \left. + \left(\frac{h_j}{2R_j} \right)^2 \int_{-1}^1 \zeta_j^2 P_n(\zeta_j) \frac{d^2 P_m(\zeta_j)}{d\zeta_j^2} d\zeta_j \right\} \right] \\
& + \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 \left| \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) T_j(x, \theta, \zeta_j, t) \right. \\
& \quad \times \left. \left\{ \frac{h_j}{2R_j} P_m(\zeta_j) + \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right) \frac{dP_m(\zeta_j)}{d\zeta_j} \right\} \right|_{-1}^1 \\
& = \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 \left| \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \zeta_j \right)^2 \frac{\partial T_j}{\partial \zeta_j}(x, \theta, \zeta_j, t) P_m(\zeta_j) \right|_{-1}^1 \\
& ; (T_j^{(n)} = T_j^{(n)}(x, \theta, t), j=1, 2, \dots, N) \quad (11)
\end{aligned}$$

Legendre の多項式の直交性から、式(11)の左辺に現われる積分は、 n と m とのある特別な組み合わせの場合を除いて、その積分値は零となる。すなわち、これらの積分は、次に示す場合の外はその値は零となる。

$$\int_{-1}^1 P_n(\zeta) P_m(\zeta) d\zeta = \frac{2}{2m+1} ; (n=m) \quad (12.1)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \zeta P_n(\zeta) P_m(\zeta) d\zeta \\
& = \begin{cases} \frac{2m}{(2m-1)(2m+1)} & ; (n=m-1) \\ \frac{2(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} & ; (n=m+1) \end{cases} \quad (12.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \zeta^2 P_n(\zeta) P_m(\zeta) d\zeta \\
& = \begin{cases} \frac{2(m-1)m}{(2m-3)(2m-1)(2m+1)} & ; (n=m-2) \\ \frac{2\{2m(m+1)-1\}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)} & ; (n=m) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{2(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)} ; (n=m+2) \right. \quad (12.3)$$

$$\int_{-1}^1 P_n(\zeta) \frac{dP_m(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = 2 ; \left(\begin{matrix} n=m-(2i+1) \\ i=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right) \quad (12.4)$$

$$\int_{-1}^1 \zeta P_n(\zeta) \frac{dP_m(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = \begin{cases} \frac{2m}{2m+1} ; (n=m) \\ 2 ; \left(\begin{matrix} n=m-2i \\ i=1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right) \end{cases} \quad (12.5)$$

$$\int_{-1}^1 P_n(\zeta) \frac{d^2 P_m(\zeta)}{d\zeta^2} d\zeta = (m-n)(m+n+1) ; \left(\begin{matrix} n=m-2i \\ i=1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right) \quad (12.6)$$

$$\int_{-1}^1 \zeta P_n(\zeta) \frac{d^2 P_m(\zeta)}{d\zeta^2} d\zeta = (m-n)(m+n+1) - 2 ; \left(\begin{matrix} n=m-(2i+1) \\ i=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right) \quad (12.7)$$

$$\int_{-1}^1 \zeta^2 P_n(\zeta) \frac{d^2 P_m(\zeta)}{d\zeta^2} d\zeta = \begin{cases} \frac{2(m-1)m}{2m+1} ; (n=m) \\ (m-n)(m+n+1) - 4 \\ ; \left(\begin{matrix} n=m-2i \\ i=1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right) \end{cases} \quad (12.8)$$

また、 $P_n(\zeta)$ および $dP_n(\zeta)/d\zeta$ の $\zeta = \pm 1$ での値は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_n(1) &= 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n \\ \frac{dP_n}{d\zeta}(1) &= \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{dP_n}{d\zeta}(-1) = -\frac{n(n+1)}{2} (-1)^n \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

結局、式(11)の各積分を実行した結果として、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2m+1} \left\{ \frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(m)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_j^{(m)}}{\partial x^2} - \frac{1}{R_j^2} \frac{\partial^2 T_j^{(m)}}{\partial \theta^2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{h_j}{2R_j} \right) \left\{ \frac{2m}{2m-1} \left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(m-1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_j^{(m-1)}}{\partial x^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2(m+1)}{2m+3} \left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(m+1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_j^{(m+1)}}{\partial x^2} \right) \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left(\frac{h_j}{2R_j} \right)^2 \left\{ \frac{(m-1)m}{(2m-3)(2m-1)} \left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(m-2)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_j^{(m-2)}}{\partial x^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2m(m+1)-1}{(2m-1)(2m+3)} \left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(m)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_j^{(m)}}{\partial x^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} \left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(m+2)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_j^{(m+2)}}{\partial x^2} \right) \right\} \\ & - 2 \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 \left[\frac{(m+1)^2}{2m+1} \left(\frac{h_j}{2R_j} \right)^2 T_j^{(m)} \right. \\ & \left. + \frac{h_j}{2R_j} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \{ 2(2i+1)(m-i)+1 \} T_j^{(m-2i-1)} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left[\left(\frac{h_j}{2R_j} \right)^2 + i(2m-2i+1) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left\{ 1 + \left(\frac{h_j}{2R_j} \right)^2 \right\} T_j^{(m-2i)} \right] \right. \\ & \left. + \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 \left[\left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \right) \left\{ \frac{h_j}{2R_j} + \frac{m(m+1)}{2} \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \right) \right\} T_j^+(x, \theta, t) \right. \right. \\ & \left. \left. + (-1)^m \left(1 - \frac{h_j}{2R_j} \right) \left\{ -\frac{h_j}{2R_j} + \frac{m(m+1)}{2} \left(1 - \frac{h_j}{2R_j} \right) \right\} T_j^-(x, \theta, t) \right] \right. \\ & \left. = \left(\frac{2}{h_j} \right)^2 \left\{ \left(1 + \frac{h_j}{2R_j} \right)^2 \frac{\partial T_j^+}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) \right. \right. \\ & \left. \left. - (-1)^m \left(1 - \frac{h_j}{2R_j} \right)^2 \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) \right\} \right. \\ & \left. ; (T_j^{(m)} = T_j^{(m)}(x, \theta, t), j=1, 2, \dots, N., m=0, 1, 2, \dots) \right. \quad (14) \end{aligned}$$

ここで、 $\sum_{i=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor}$ および $\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor}$ は、前者について言えば、 $i=0$ から、 m が奇数ならば $(m-1)/2$ まで、 m が偶数ならばその一つ前の整数 $(m-2)/2$ までの和をとることであり、後者についても同様に、 $i=1$ から、 m が偶数ならば $m/2$ まで、 m が奇数ならば $(m-1)/2$ までの和をとることである。また、前にも述べたことであるが、 m の値によって和の範囲が空になるときは、その級数の項は零とする。肩符号+および-は、それぞれ各層の上面および下面における諸量を表わすために付された記号である。すなわち、 T_j^+ および T_j^- ならびに $\partial T_j^+ / \partial \zeta_j$ および $\partial T_j^- / \partial \zeta_j$ は、それぞれ各層の上面および下面での温度ならびに無次元肉厚方向の温度勾配であり、式(6)および(13)を用いれば、 $T_j^{(n)}$ とそれぞれ次の関係にある

ことが判る。

$$\begin{aligned}
 T_j^+(x, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_j^{(n)}(x, \theta, t) \\
 T_j^-(x, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_j^{(n)}(x, \theta, t) \\
 \frac{\partial T_j^+}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) T_j^{(n)}(x, \theta, t) \\
 \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n+1) T_j^{(n)}(x, \theta, t)
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

しかし、これらの諸量は、しばしば境界条件、あるいは隣接する各層の境界面での連続条件により、別途規定されることが多く、式(14)の形に表記しておくのがそれらの条件の適用の上で都合の良いことが多い。

式(14)は、その導出過程において、なんら近似あるいは省略をすることなく、変域 $-1 \leq \zeta_j \leq 1$ で完全系を成す Legendre の多項式 $P_n(\zeta_j)$ による温度関数 $T_j(x, \theta, \zeta_j, t)$ の完全級数表示から、その展開係数 $T_j^{(n)}(x, \theta, t)$ の従うべき微分方程式として導かれた。したがって、式(14)は、薄肉円筒殻は勿論のこと厚肉円筒に対して適用可能な式で、最も一般的な円筒殻に対する熱伝導の二次元化高次方程式とすることができる。もし、与えられた初期条件および境界条件の下に、この無限個の相互に連成した方程式の解が得られるならば、所要の温度分布は式(6)により厳密に決定される。しかし、実際には、温度関数の完全な展開は不可能であり、また、互いに連成した微分方程式を厳密に解くことも一般には困難であって、工学的には、実用上許容される誤差に応じて、展開次数を定めることになる。

2.3 Kirchhoff-Love の仮定に基づく一次近似

前節に導いた二次元化された高次の熱伝導方程式は、厚肉円筒に対しても適用が可能であり、しかも次数を増すことによって、近似精度を任意に向上することができる。しかしながら、解析の対象が薄肉円筒殻の熱構造解析においては、三次元熱伝導方程式の二次元化は、三次元弾性論から殻理論の力学的

基礎方程式を導く二次元化近似と同等の近似精度を備えていれば十分である。本節では前節に得た二次元化された高次の熱伝導方程式に対して、一次近似殻理論の定式化の過程において用いられる、いわゆる Kirchhoff-Love の仮定を適用し、それに基づく近似を行ない、薄肉殻の力学的挙動を記述する殻理論の基礎式と同等の精度をもつ熱伝導方程式の一次近似式を導く。

Kirchhoff-Love の仮定に基づく殻理論は、中央面半径 R に比べて殻厚 h が十分に小さい殻を対象としており、この仮定による殻理論が妥当であるためには次の条件が満たされていなければならない。

$$\frac{h}{R} \ll 1 \tag{16}$$

したがって、薄肉の多層複合円筒殻では、式(3)により、近似的に次式が成り立つ。

$$R_j = R \quad ; (j=1, 2, \dots, N) \tag{17}$$

また、各層に対して次の関係が満足されねばならないことになる。

$$\frac{h_j}{R_j} \ll 1 \quad ; (j=1, 2, \dots, N) \tag{18}$$

式(14)に、式(17)および式(18)に基づく省略を行なえば、薄肉の複合円筒殻の各層に対する二次元化された高次の熱伝導方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(m)}}{\partial t} - \nabla^2 T_j^{(m)} & - \frac{4(2m+1)}{h_j^2} \sum_{i=1}^{i \leq m} i(2m-2i+1) T_j^{(m-2i)} \\
 & + \frac{m(m+1)(2m+1)}{h_j^2} \{ T_j^+(x, \theta, t) + (-1)^m T_j^-(x, \theta, t) \} \\
 & = \frac{2(2m+1)}{h_j^2} \left\{ \frac{\partial T_j^+}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) - (-1)^m \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) \right\} \\
 ; (T_j^{(m)} = T_j^{(m)}(x, \theta, t), j=1, 2, \dots, N, m=0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

ここに、 ∇^2 は次式で定義される微分演算子である。

$$\nabla^2(\) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(\) \tag{20}$$

式(19)の結果は、Steele と Yang²⁾ とが、薄肉殻を前提に、基礎となる三次元熱伝導方程式、式(1)、の段階で $z_j/R_j \ll 1$ ($-h_j/2 \leq z_j \leq h_j/2$) に基づく省略を行ない、それを二次元化することによって得た

結果に一致する。

不均一温度場に Kirchhoff-Love の仮定に基づく円筒殻理論を拡張して適用するとき、同仮定から、変位、ひずみおよび応力ばかりでなく温度分布も肉厚方向に線形近似するのが合理的な一次近似であることが明らかにされている³⁾。したがって、薄肉の複合円筒殻では、各層の温度関数 T_j の完全級数表示、式(6)は、 $n \geq 2$ の項を無視できて、Kirchhoff-Love の仮定に基づく温度関数の合理的な近似式として次式を得る。

$$T_j(x, \theta, \zeta_j, t) = T_j^{(0)}(x, \theta, t) + \zeta_j T_j^{(1)}(x, \theta, t) \quad ; (j=1, 2, \dots, N) \quad (21)$$

このとき、 $T_j^{(0)}$ および $T_j^{(1)}$ は、無次元肉厚方向のそれぞれ平均温度および温度勾配(温度モーメント)を表わし、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} T_j^{(0)}(x, \theta, t) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T_j(x, \theta, \zeta_j, t) d\zeta_j \\ &= \frac{1}{2} \{T_j^+(x, \theta, t) + T_j^-(x, \theta, t)\} \\ T_j^{(1)}(x, \theta, t) &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 T_j(x, \theta, \zeta_j, t) \zeta_j d\zeta_j \\ &= \frac{1}{2} \{T_j^+(x, \theta, t) - T_j^-(x, \theta, t)\} \\ & \quad ; (j=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

このように、Kirchhoff-Love の仮定に基づく殻理論では、温度関数の肉厚方向への線形近似、式(21)が成り立つことから、式(19)はさらに省略を進めることができ、 $m=0$ および1に対する次の二式のみを考えれば良いことになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(0)}}{\partial t} - \nabla^2 T_j^{(0)} &= \frac{2}{h_j^2} \left\{ \frac{\partial T_j^+}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) - \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) \right\} \\ \frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(1)}}{\partial t} - \nabla^2 T_j^{(1)} + \frac{6}{h_j^2} \{T_j^+(x, \theta, t) - T_j^-(x, \theta, t)\} \\ &= \frac{6}{h_j^2} \left\{ \frac{\partial T_j^+}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) + \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) \right\} \\ & \quad ; (T_j^{(m)} = T_j^{(m)}(x, \theta, t), j=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここに、式(15)により

$$\left. \begin{aligned} T_j^+(x, \theta, t) &= T_j^{(0)}(x, \theta, t) + T_j^{(1)}(x, \theta, t) \\ T_j^-(x, \theta, t) &= T_j^{(0)}(x, \theta, t) - T_j^{(1)}(x, \theta, t) \\ \frac{\partial T_j^+}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) &= T_j^{(1)}(x, \theta, t) \\ \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j}(x, \theta, t) &= T_j^{(1)}(x, \theta, t) \\ & \quad ; (j=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

結局、式(23)が各層に対する二次元化一次近似熱伝導方程式である。この結果は、Bolotin¹⁾が温度関数を最初から肉厚方向に線形と仮定することによって導いた結果に基本的に一致する。

3. 多層複合円筒殻に対する熱伝導の支配方程式

前章に見たように、複合円筒殻の各層に対する熱伝導の一次近似方程式は、二つの未知関数を含む二つの二次元の偏微分方程式の組として与えられるから、 N 層の複合円筒殻では、 $2N$ 個の未知関数を含む $2N$ 個の方程式の組が得られる。本章では、これら $2N$ 個の方程式から $(2N-2)$ 個の未知関数を消去することによって、多層複合円筒殻に対する熱伝導の一次近似方程式として、2個だけの未知関数を含む2個の方程式の組を導く。

3.1 外・内表面での境界条件と内部境界での連続条件

外表面($\zeta_1=1$)および内表面($\zeta_N=-1$)に、それぞれ温度 $\tilde{T}^+(x, \theta, t)$ および $\tilde{T}^-(x, \theta, t)$ の外部媒体が接している多層複合円筒殻を考える。この複合円筒殻と外部媒体との間に熱伝達による熱交換があるものとし、両表面において各瞬間における境界条件が次式で与えられるものとする。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_1^+}{\partial \zeta_1}(x, \theta, t) &= \frac{B^+}{2} \{ \tilde{T}^+(x, \theta, t) - T_1^+(x, \theta, t) \} \\ \frac{\partial T_N^-}{\partial \zeta_N}(x, \theta, t) &= -\frac{B^-}{2} \{ \tilde{T}^-(x, \theta, t) - T_N^-(x, \theta, t) \} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここに、 B^+ および B^- は、それぞれ第1層および第 N 層におけるBiot数(無次元熱伝達係数)で、次式で定義される。

$$B^+ = \frac{\alpha_c^+ h_1}{\lambda_1}, \quad B^- = \frac{\alpha_c^- h_N}{\lambda_N} \quad (26)$$

ただし、 α_c^+ および α_c^- は、それぞれ複合円筒殻の外表面および内表面と各境界層間との熱伝達率である。

また、隣接する各層の界面において、接触熱抵抗は無く、各瞬間において温度ならびに熱流束の連続性が成立するものとするならば、界面における連続条件として次式が満足されねばならない。

$$\left. \begin{aligned} T_j^- (x, \theta, t) &= T_{j+1}^+ (x, \theta, t) \\ \frac{\lambda_j}{h_j} \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j} (x, \theta, t) &= \frac{\lambda_{j+1}}{h_{j+1}} \frac{\partial T_{j+1}^+}{\partial \zeta_{j+1}} (x, \theta, t) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

; (j=1, 2, ..., N-1)

したがって、多層複合円筒殻の各層の温度 T_j は、上記の境界条件および各界面での連続条件を満足するものでなければならない。

連続条件、式(27)、を用いると、各層の無次元肉厚方向の平均温度 $T_j^{(0)}(x, \theta, t)$ および温度勾配 $T_j^{(1)}(x, \theta, t)$ (j=1, 2, ..., N) は、それぞれ第1層および第2層の平均温度 $T_1^{(0)}(x, \theta, t)$ および $T_2^{(0)}(x, \theta, t)$ によって表わされることが、次のようにして判る。まず、連続条件、式(27)、を式(24)の関係を用いて、次の形に書き換える。

$$\left. \begin{aligned} T_j^{(0)}(x, \theta, t) - T_j^{(1)}(x, \theta, t) &= T_{j+1}^{(0)}(x, \theta, t) \\ &\quad + T_{j+1}^{(1)}(x, \theta, t) \\ \frac{\lambda_j}{h_j} T_j^{(1)}(x, \theta, t) &= \frac{\lambda_{j+1}}{h_{j+1}} T_{j+1}^{(1)}(x, \theta, t) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

; (j=1, 2, ..., N-1)

上式を、 $T_j^{(1)}$ および $T_{j+1}^{(1)}$ について解けば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} T_j^{(1)}(x, \theta, t) &= \frac{h_j \lambda_{j+1}}{h_j \lambda_{j+1} + h_{j+1} \lambda_j} \left\{ T_j^{(0)}(x, \theta, t) \right. \\ &\quad \left. - T_{j+1}^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \\ T_{j+1}^{(1)}(x, \theta, t) &= \frac{h_{j+1} \lambda_j}{h_j \lambda_{j+1} + h_{j+1} \lambda_j} \left\{ T_j^{(0)}(x, \theta, t) \right. \\ &\quad \left. - T_{j+1}^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

; (j=1, 2, ..., N-1)

式(29)の第1式および第2式をそれぞれ次の形に表示する。

$$\left. T_1^{(1)}(x, \theta, t) = \frac{h_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \left\{ T_1^{(0)}(x, \theta, t) \right. \right. \\ \left. \left. - T_2^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \right\}$$

$$\left. T_j^{(1)}(x, \theta, t) = \frac{h_j \lambda_{j+1}}{h_j \lambda_{j+1} + h_{j+1} \lambda_j} \left\{ T_j^{(0)}(x, \theta, t) \right. \right. \\ \left. \left. - T_{j+1}^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \right\} \quad (30.1)$$

(j=2, 3, ..., N-1)

$$\left. T_j^{(1)}(x, \theta, t) = \frac{h_j \lambda_{j-1}}{h_{j-1} \lambda_j + h_j \lambda_{j-1}} \left\{ T_{j-1}^{(0)}(x, \theta, t) \right. \right. \\ \left. \left. - T_j^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \right\} \quad (30.2)$$

(j=2, 3, ..., N-1)

$$\left. T_N^{(1)}(x, \theta, t) = \frac{h_N \lambda_{N-1}}{h_{N-1} \lambda_N + h_N \lambda_{N-1}} \left\{ T_{N-1}^{(0)}(x, \theta, t) \right. \right. \\ \left. \left. - T_N^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \right\} \quad (30.2)$$

式(30.1)の第2式と式(30.2)の第1式を等置すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} T_j^{(0)}(x, \theta, t) - T_{j+1}^{(0)}(x, \theta, t) \\ = \frac{\lambda_{j-1} (h_j \lambda_{j+1} + h_{j+1} \lambda_j)}{\lambda_{j+1} (h_{j-1} \lambda_j + h_j \lambda_{j-1})} \left\{ T_{j-1}^{(0)}(x, \theta, t) - T_j^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

; (j=2, 3, ..., N-1)

上式は、 $\{T_{j-1}^{(0)}(x, \theta, t) - T_j^{(0)}(x, \theta, t)\}$ が判れば、 $\{T_j^{(0)}(x, \theta, t) - T_{j+1}^{(0)}(x, \theta, t)\}$ が求まる、いわゆる漸化式の形をしていることに留意するなら容易に次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} T_j^{(0)}(x, \theta, t) - T_{j+1}^{(0)}(x, \theta, t) \\ = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_j \lambda_{j+1}} \cdot \frac{h_j \lambda_{j+1} + h_{j+1} \lambda_j}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \left\{ T_1^{(0)}(x, \theta, t) - T_2^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

; (j=2, 3, ..., N-1)

少し書き換えて、

$$\begin{aligned} T_{j+1}^{(0)}(x, \theta, t) &= T_j^{(0)}(x, \theta, t) \\ &\quad - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \cdot \frac{h_j \lambda_{j+1} + h_{j+1} \lambda_j}{\lambda_j \lambda_{j+1}} \left\{ T_1^{(0)}(x, \theta, t) \right. \\ &\quad \left. - T_2^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

; (j=2, 3, ..., N-1)

結局、上式より、 $T_j^{(0)}(x, \theta, t)$ (j=3, 4, ..., N) は $T_1^{(0)}(x, \theta, t)$ および $T_2^{(0)}(x, \theta, t)$ によって次式で与えられる。

$$\begin{aligned} T_j^{(0)}(x, \theta, t) &= T_2^{(0)}(x, \theta, t) \\ &\quad - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \sum_{r=2}^{j-1} \frac{h_r \lambda_{r+1} + h_{r+1} \lambda_r}{\lambda_r \lambda_{r+1}} \left\{ T_1^{(0)}(x, \theta, t) \right. \\ &\quad \left. - T_2^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

; (j=3, 4, ..., N)

次いで、式(29)の第1式および第2式において $j = 1$ とおくことによって得られる $T_1^{(1)}(x, \theta, t)$ および $T_2^{(1)}(x, \theta, t)$ に対する表示式と、式(29)の第2式の右辺に式(32)を代入して得られる $T_{j+1}^{(1)}(x, \theta, t)$ ($j = 2, 3, \dots, N-1$) なる表示式とを併せて記すならば、 $T_j^{(1)}(x, \theta, t)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) は $T_1^{(0)}(x, \theta, t)$ および $T_2^{(0)}(x, \theta, t)$ とによって次のように与えられる。

$$T_j^{(1)}(x, \theta, t) = \frac{h_j}{\lambda_j} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \left\{ T_1^{(0)}(x, \theta, t) - T_2^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \quad ; (j = 1, 2, \dots, N) \quad (35)$$

すなわち、多層複合円筒殻の各層の温度 $T_j(x, \theta, \zeta_j, t)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) は、第1層および第2層の肉厚方向平均温度 $T_1^{(0)}(x, \theta, t)$ と $T_2^{(0)}(x, \theta, t)$ とが何らかの方法で決定されるならば、式(34)および式(35)ならびに式(21)を用いて直ちに計算できることが判る。

3.2 支配方程式

各層に対する熱伝導の一次近似方程式、式(23)の j に1から N までの値を入れ、第1層および第 N 層の表式に境界条件、式(25)の第1式および第2式をそれぞれ適用するならば、各層に対して次の表示を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial t} - \nabla^2 T_1^{(0)} + \frac{B^+}{h_1^2} T_1^+ + \frac{2}{h_1^2} \frac{\partial T_1^-}{\partial \zeta_1} = \frac{B^+}{h_1^2} \tilde{T}^+ \\ & \frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(0)}}{\partial t} - \nabla^2 T_j^{(0)} - \frac{2}{h_j^2} \left(\frac{\partial T_j^+}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j} \right) = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad (j = 2, 3, \dots, N-1) \\ & \frac{1}{a_N} \frac{\partial T_N^{(0)}}{\partial t} - \nabla^2 T_N^{(0)} + \frac{B^-}{h_N^2} T_N^- - \frac{2}{h_N^2} \frac{\partial T_N^+}{\partial \zeta_N} = \frac{B^-}{h_N^2} \tilde{T}^- \end{aligned} \right\} \quad (36.1)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial t} - \nabla^2 T_1^{(1)} + \frac{3(2+B^+)}{h_1^2} T_1^+ \\ & \qquad - \frac{6}{h_1^2} T_1^- - \frac{6}{h_1^2} \frac{\partial T_1^-}{\partial \zeta_1} = \frac{3B^+}{h_1^2} \tilde{T}^+ \\ & \frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(1)}}{\partial t} - \nabla^2 T_j^{(1)} + \frac{6}{h_j^2} (T_j^+ - T_j^-) \\ & \qquad - \frac{6}{h_j^2} \left(\frac{\partial T_j^+}{\partial \zeta_j} + \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j} \right) = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad (j = 2, 3, \dots, N-1) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{a_N} \frac{\partial T_N^{(1)}}{\partial t} - \nabla^2 T_N^{(1)} - \frac{3(2+B^-)}{h_N^2} T_N^- \\ & \qquad + \frac{6}{h_N^2} T_N^+ - \frac{6}{h_N^2} \frac{\partial T_N^+}{\partial \zeta_N} = -\frac{3B^-}{h_N^2} \tilde{T}^- \end{aligned} \right\} \quad (36.2)$$

上式中の T_j^+ ($j = 2, 3, \dots, N$) および T_j^- ($j = 1, 2, \dots, N-1$) ならびに $\partial T_j^+ / \partial \zeta_j$ ($j = 2, 3, \dots, N$) および $\partial T_j^- / \partial \zeta_j$ ($j = 1, 2, \dots, N-1$) は、それぞれ連続条件、式(27)を満足するものであることを念頭に置いて、式(36.1)の三つの式に上から順次 $h_1 \lambda_1$, $h_j \lambda_j$ ($j = 2, 3, \dots, N-1$), $h_N \lambda_N$ を乗じ、辺々を加え合わせれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{h_j \lambda_j}{a_j} \frac{\partial T_j^{(0)}}{\partial t} - \sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \nabla^2 T_j^{(0)} \\ & + \frac{\lambda_1 B^+}{h_1} T_1^+ + \frac{\lambda_N B^-}{h_N} T_N^- \\ & + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\lambda_j}{h_j} \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j} - \frac{\lambda_{j+1}}{h_{j+1}} \frac{\partial T_{j+1}^+}{\partial \zeta_{j+1}} \right) = \frac{\lambda_1 B^+}{h_1} \tilde{T}^+ \\ & + \frac{\lambda_N B^-}{h_N} \tilde{T}^- \end{aligned} \quad (37.1)$$

同様に、式(36.1)の三つの式に順次 $3h_1 \lambda_1 \sum_{r=2}^N \frac{h_r}{\lambda_r}$,

$$3h_j \lambda_j \left(\sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \quad (j = 2, 3, \dots, N-1),$$

$-3h_N \lambda_N \sum_{r=1}^{N-1} \frac{h_r}{\lambda_r}$ を乗じ、さらに式(36.2)の三つの式に順次 h_1^2 , h_j^2 ($j = 2, 3, \dots, N-1$), h_N^2 を乗じて、これらの辺々を加え合わせれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} & 3 \sum_{j=1}^N \left\{ h_j \lambda_j \left(\sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(0)}}{\partial t} - \nabla^2 T_j^{(0)} \right) \right\} \\ & + \sum_{j=1}^N \left\{ h_j^2 \left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(1)}}{\partial t} - \nabla^2 T_j^{(1)} \right) \right\} \\ & + 3 \left\{ \left[2+B^+ \left(1 + \frac{\lambda_1}{h_1} \sum_{r=2}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right] T_1^+ \right. \\ & \qquad \left. - \left[2+B^- \left(1 + \frac{\lambda_N}{h_N} \sum_{r=1}^{N-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right] T_N^- \right\} \\ & + 6 \left\{ \sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \left(\frac{\lambda_j}{h_j} \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j} - \frac{\lambda_{j+1}}{h_{j+1}} \frac{\partial T_{j+1}^+}{\partial \zeta_{j+1}} \right) \sum_{r=j+2}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right\} \right. \\ & \qquad \left. - \sum_{j=2}^{N-1} \left\{ \left(\frac{\lambda_j}{h_j} \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j} - \frac{\lambda_{j+1}}{h_{j+1}} \frac{\partial T_{j+1}^+}{\partial \zeta_{j+1}} \right) \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \left(\frac{\lambda_j}{h_j} \frac{\partial T_j^-}{\partial \zeta_j} - \frac{\lambda_{j+1}}{h_{j+1}} \frac{\partial T_{j+1}^+}{\partial \zeta_{j+1}} \right) \left(\frac{h_j}{\lambda_j} - \frac{h_{j+1}}{\lambda_{j+1}} \right) \right\} \\
& - 6 \sum_{j=1}^{N-1} (T_j^- - T_{j+1}^+) \\
& = 3 \left\{ \left(1 + \frac{\lambda_1}{h_1} \sum_{r=2}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) B^+ \tilde{T}^+ - \left(1 + \frac{\lambda_N}{h_N} \sum_{r=1}^{N-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) B^- \tilde{T}^- \right\}
\end{aligned} \tag{37.2}$$

連続条件, 式(27), を適用すると, 式(37.1)の左辺の最終項ならびに式(37.2)の左辺第4項および第5項はそれぞれ零となるから, その結果は次式のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{h_j \lambda_j}{a_j} \frac{\partial T_j^{(0)}}{\partial t} - \sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \nabla^2 T_j^{(0)} + \frac{\lambda_1 B^+}{h_1} T_1^+ + \frac{\lambda_N B^-}{h_N} T_N^- \\
& = \frac{\lambda_1 B^+}{h_1} \tilde{T}^+ + \frac{\lambda_N B^-}{h_N} \tilde{T}^- \\
& 3 \sum_{j=1}^N \left\{ h_j \lambda_j \left(\sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(0)}}{\partial t} - \nabla^2 T_j^{(0)} \right) \right\} \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ h_j^2 \left(\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j^{(1)}}{\partial t} - \nabla^2 T_j^{(1)} \right) \right\} \\
& + 3 \left\{ \left[2 + B^+ \left(1 + \frac{\lambda_1}{h_1} \sum_{r=2}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right] T_1^+ \right. \\
& \quad \left. - \left[2 + B^- \left(1 + \frac{\lambda_N}{h_N} \sum_{r=1}^{N-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right] T_N^- \right\} \\
& = 3 \left\{ \left(1 + \frac{\lambda_1}{h_1} \sum_{r=2}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) B^+ \tilde{T}^+ - \left(1 + \frac{\lambda_N}{h_N} \sum_{r=1}^{N-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) B^- \tilde{T}^- \right\}
\end{aligned} \right. \tag{38}
\end{aligned}$$

言うまでもなく, 上式中の T_1^+ および T_N^- は未知関数であって, 式(24)の第1式および第2式により, それぞれ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
T_1^+(x, \theta, t) &= T_1^{(0)}(x, \theta, t) + T_1^{(1)}(x, \theta, t) \\
T_N^-(x, \theta, t) &= T_N^{(0)}(x, \theta, t) - T_N^{(1)}(x, \theta, t)
\end{aligned} \right\} \tag{39}$$

また, \tilde{T}^+ および \tilde{T}^- は x, θ および t の関数で境界条件により規定される既知関数である。

微分方程式, 式(38), は式(34)および(35)の関係をを用いて, 次に示すように, 二つの未知関数 $T_1^{(0)}(x, \theta, t)$ および $T_2^{(0)}(x, \theta, t)$ だけを含む方程式に, 書き換えることができる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(C_{11}^I T_1^{(0)} + C_{12}^I T_2^{(0)} \right) - \nabla^2 \left(C_{21}^I T_1^{(0)} + C_{22}^I T_2^{(0)} \right) \right]$$

$$\left. \begin{aligned}
& + C_{41}^I T_1^{(0)} - C_{42}^I T_2^{(0)} \\
& = \alpha_C^+ \tilde{T}^+(x, \theta, t) + \alpha_C^- \tilde{T}^-(x, \theta, t) \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left(C_{11}^I T_1^{(0)} + C_{12}^I T_2^{(0)} \right) - \nabla^2 \left(C_{21}^I T_1^{(0)} + C_{22}^I T_2^{(0)} \right) \\
& + C_{41}^I T_1^{(0)} - C_{42}^I T_2^{(0)} \\
& = 3 \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \left\{ \alpha_C^+ \tilde{T}^+(x, \theta, t) - \alpha_C^- \tilde{T}^-(x, \theta, t) \right\} \\
& ; (T_1^{(0)} = T_1^{(0)}(x, \theta, t), T_2^{(0)} = T_2^{(0)}(x, \theta, t))
\end{aligned} \right\} \tag{40}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned}
C_{11}^I &= \frac{h_1 \lambda_1}{a_1} - B_1^I, & C_{12}^I &= \sum_{j=2}^N \frac{h_j \lambda_j}{a_j} + B_1^I \\
C_{21}^I &= h_1 \lambda_1 - B_2^I, & C_{22}^I &= \sum_{j=2}^N h_j \lambda_j + B_2^I \\
C_{41}^I &= \left(1 + \frac{h_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \right) \alpha_C^+ - B_4^I \alpha_C^- \\
C_{42}^I &= \frac{h_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \alpha_C^+ - (1 + B_4^I) \alpha_C^- \\
C_{11}^I &= \frac{3 h_1 \lambda_1}{a_1} \sum_{r=2}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - B_1^I \\
C_{12}^I &= 3 \sum_{j=2}^N \left\{ \frac{h_j \lambda_j}{a_j} \left(\sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} + B_1^I \\
C_{21}^I &= 3 h_1 \lambda_1 \sum_{r=2}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - B_2^I \\
C_{22}^I &= 3 \sum_{j=2}^N \left\{ h_j \lambda_j \left(\sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} + B_2^I \\
C_{41}^I &= 3 \left\{ \left(1 + \frac{h_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \right) \left(2 + \alpha_C^+ \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right. \\
& \quad \left. + B_4^I \left(2 + \alpha_C^- \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} \\
C_{42}^I &= 3 \left\{ \frac{h_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \left(2 + \alpha_C^+ \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right. \\
& \quad \left. + (1 + B_4^I) \left(2 + \alpha_C^- \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\}
\end{aligned} \right\} \tag{41}$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned}
B_1^I &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \sum_{j=3}^N \left(\frac{h_j \lambda_j}{a_j} \sum_{r=2}^{j-1} \frac{h_r \lambda_{r+1} + h_{r+1} \lambda_r}{\lambda_r \lambda_{r+1}} \right) \\
B_2^I &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \sum_{j=3}^N \left(h_j \lambda_j \sum_{r=2}^{j-1} \frac{h_r \lambda_{r+1} + h_{r+1} \lambda_r}{\lambda_r \lambda_{r+1}} \right)
\end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 B_4^I &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \left(\frac{h_N}{\lambda_N} + \sum_{r=2}^{N-1} \frac{h_r \lambda_{r+1} + h_{r+1} \lambda_r}{\lambda_r \lambda_{r+1}} \right) \\
 B_1^II &= \frac{3 \lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \sum_{j=3}^N \left\{ \frac{h_j \lambda_j}{a_j} \left(\sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \sum_{r=2}^{j-1} \frac{h_r \lambda_{r+1} + h_{r+1} \lambda_r}{\lambda_r \lambda_{r+1}} \right\} \\
 &\quad - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \sum_{j=1}^N \frac{h_j^3}{a_j \lambda_j} \\
 B_2^II &= \frac{3 \lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \sum_{j=3}^N \left\{ h_j \lambda_j \left(\sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \sum_{r=2}^{j-1} \frac{h_r \lambda_{r+1} + h_{r+1} \lambda_r}{\lambda_r \lambda_{r+1}} \right\} \\
 &\quad - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \sum_{j=1}^N \frac{h_j^3}{\lambda_j} \\
 B_4^II &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \left(\frac{h_N}{\lambda_N} + \sum_{r=2}^{N-1} \frac{h_r \lambda_{r+1} + h_{r+1} \lambda_r}{\lambda_r \lambda_{r+1}} \right) \equiv B_4^I
 \end{aligned} \tag{42}$$

式(40)は、独立変数 x, θ および t について、それぞれ二つの従属変数 $T_1^{(0)}$ および $T_2^{(0)}$ の導関数を含む互いに連成した微分方程式となっている。そこで、次の従属変数の変換を行なう。

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi_0(x, \theta, t) &= \frac{1}{\sum_{j=1}^N h_j \lambda_j} \left\{ C_{21}^I T_1^{(0)}(x, \theta, t) + C_{22}^I T_2^{(0)}(x, \theta, t) \right\} \\
 \Phi_1(x, \theta, t) &= T_1^{(0)}(x, \theta, t) - T_2^{(0)}(x, \theta, t)
 \end{aligned} \right\} \tag{43}$$

この変換によって、式(40)の第1式は空間座標 x および θ についての微分項に関して一つの未知関数 $\Phi_0(x, \theta, t)$ だけをを含む微分方程式に書き直される。変換の結果は次のとおりである。

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (A_{11}^I \Phi_0 + A_{12}^I \Phi_1) - A_{21}^I \nabla^2 \Phi_0 + A_{41}^I \Phi_0 + A_{42}^I \Phi_1 \\
 = \alpha_C^+ \tilde{T}^+(x, \theta, t) + \alpha_C^- \tilde{T}^-(x, \theta, t) \\
 \frac{\partial}{\partial t} (A_{11}^{II} \Phi_0 + A_{12}^{II} \Phi_1) - \nabla^2 (A_{21}^{II} \Phi_0 + A_{22}^{II} \Phi_1) \\
 + A_{41}^{II} \Phi_0 + A_{42}^{II} \Phi_1 \\
 = 3 \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \left\{ \alpha_C^+ \tilde{T}^+(x, \theta, t) - \alpha_C^- \tilde{T}^-(x, \theta, t) \right\} \\
 ; (\Phi_0 = \Phi_0(x, \theta, t), \Phi_1 = \Phi_1(x, \theta, t))
 \end{aligned} \right\} \tag{44}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 A_{11}^I &= \sum_{j=1}^N \frac{h_j \lambda_j}{a_j}, \quad A_{12}^I = C_{11}^I - C_{21}^I \left(A_{11}^I / \sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \right) \\
 A_{21}^I &= \sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \\
 A_{41}^I &= \alpha_C^+ + \alpha_C^-, \quad A_{42}^I = C_{41}^I - C_{21}^I \left(A_{41}^I / \sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \right) \\
 A_{11}^{II} &= 3 \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{h_j \lambda_j}{a_j} \left(\sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} \\
 A_{12}^{II} &= C_{11}^{II} - C_{21}^I \left(A_{11}^{II} / \sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \right) \\
 A_{21}^{II} &= 3 \sum_{j=1}^N \left\{ h_j \lambda_j \left(\sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} \\
 A_{22}^{II} &= C_{21}^{II} - C_{21}^I \left(A_{21}^{II} / \sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \right) \\
 A_{41}^{II} &= 3 (\alpha_C^+ - \alpha_C^-) \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r}, \quad A_{42}^{II} = C_{41}^{II} - C_{21}^I \left(A_{41}^{II} / \sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \right)
 \end{aligned} \right\} \tag{45}$$

方程式の組、式(44)、は、その二つの式から $\nabla^2 \Phi_0$ を消去して得られる式で、第2の式を置き換え整理すると、次の微分方程式の組によって表わされる。

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (F_1 \Phi_0 + F_2 \Phi_1) - \nabla^2 \Phi_0 + F_3 \Phi_0 + F_4 \Phi_1 \\
 = F_5 \tilde{T}^+(x, \theta, t) + F_6 \tilde{T}^-(x, \theta, t) \\
 \frac{\partial}{\partial t} (G_1 \Phi_0 + G_2 \Phi_1) - \nabla^2 \Phi_1 + G_3 \Phi_0 + G_4 \Phi_1 \\
 = G_5 \tilde{T}^+(x, \theta, t) - G_6 \tilde{T}^-(x, \theta, t) \\
 ; (\Phi_0 = \Phi_0(x, \theta, t), \Phi_1 = \Phi_1(x, \theta, t))
 \end{aligned} \right\} \tag{46}$$

ここに、

$$\left\{ \begin{aligned}
 F_1 &= \frac{A_{11}^I}{A_{21}^I}, \quad F_2 = \frac{A_{12}^I}{A_{21}^I}, \quad F_3 = \frac{A_{41}^I}{A_{21}^I}, \quad F_4 = \frac{A_{42}^I}{A_{21}^I} \\
 F_5 &= \frac{\alpha_C^+}{A_{21}^I}, \quad F_6 = \frac{\alpha_C^-}{A_{21}^I} \\
 G_1 &= \frac{A_{11}^{II} A_{21}^I - A_{21}^{II} A_{11}^I}{A_{22}^{II} A_{21}^I}, \quad G_2 = \frac{A_{12}^I A_{21}^I - A_{21}^{II} A_{12}^I}{A_{22}^{II} A_{21}^I} \\
 G_3 &= \frac{A_{41}^{II} A_{21}^I - A_{21}^{II} A_{41}^I}{A_{22}^{II} A_{21}^I}, \quad G_4 = \frac{A_{42}^I A_{21}^I - A_{21}^{II} A_{42}^I}{A_{22}^{II} A_{21}^I} \\
 G_5 &= \frac{\alpha_C^+}{A_{22}^{II}} \left(3 \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - \frac{A_{21}^I}{A_{21}^I} \right), \quad G_6 = \frac{\alpha_C^-}{A_{22}^{II}} \left(3 \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} + \frac{A_{21}^I}{A_{21}^I} \right)
 \end{aligned} \right\} \tag{47}$$

あるいはまた、 $\partial \Phi_0 / \partial t$ を消去して得られる式で、第 2 の式を置き換えるならば、次のようにも書き表わすことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (F_1 \Phi_0 + F_2 \Phi_1) - \nabla^2 \Phi_0 + F_3 \Phi_0 + F_4 \Phi_1 \\ = F_5 \tilde{T}^+(x, \theta, t) + F_6 \tilde{T}^-(x, \theta, t) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \nabla^2 (H_1 \Phi_0 + H_2 \Phi_1) + H_3 \Phi_0 + H_4 \Phi_1 \\ = H_5 \tilde{T}^+(x, \theta, t) - H_6 \tilde{T}^-(x, \theta, t) \\ ; (\Phi_0 = \Phi_0(x, \theta, t), \Phi_1 = \Phi_1(x, \theta, t)) \end{array} \right. \quad (48)$$

ここに、

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = \frac{A_{21}^I A_{11}^I - A_{11}^I A_{21}^I}{A_{12}^I A_{11}^I - A_{11}^I A_{12}^I}, \quad H_2 = \frac{A_{22}^I A_{11}^I}{A_{12}^I A_{11}^I - A_{11}^I A_{12}^I} \\ H_3 = \frac{A_{41}^I A_{11}^I - A_{11}^I A_{41}^I}{A_{12}^I A_{11}^I - A_{11}^I A_{12}^I}, \quad H_4 = \frac{A_{42}^I A_{11}^I - A_{11}^I A_{42}^I}{A_{12}^I A_{11}^I - A_{11}^I A_{12}^I} \\ H_5 = \alpha_c^+ \left(3 A_{11}^I \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} - A_{11}^I \right) / (A_{12}^I A_{11}^I - A_{11}^I A_{12}^I) \\ H_6 = \alpha_c^- \left(3 A_{11}^I \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} + A_{11}^I \right) / (A_{12}^I A_{11}^I - A_{11}^I A_{12}^I) \end{array} \right. \quad (49)$$

結局、外部媒体との間に熱伝達による熱交換のある本来三次元的な多層複合円筒殻の熱伝導を支配する方程式が、殻理論における Kirchhoff-Love の仮定を適用することにより、一次近似方程式として、式(46)あるいはこれを変形した式(48)のように、それぞれ互いに連成した二つの二次元の偏微分方程式の組に、二次元化されたことになる。式(46)は、温度が時間的に変化しない定常状態の場合、簡略化され、その表式は、二層複合円筒殻に適用されるとき、Steele と Yang²⁾ によって導かれた結果と一致する。

式(46)あるいは式(48)は、どちらを採っても同じことで、問題に応じて選択すれば良く、解 $\Phi_0(x, \theta, t)$ および $\Phi_1(x, \theta, t)$ が求まれば、次のようにして複合円筒殻の各層の温度分布は容易に決定される。まず、式(43)によって第 1 層および第 2 層の無次元肉厚方向の平均温度が次のように求まる。

$$T_1^{(0)}(x, \theta, t) = \Phi_0(x, \theta, t) + \left(C_{21}^I / \sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \right) \Phi_1(x, \theta, t) \quad \left\{ \right.$$

$$T_2^{(0)}(x, \theta, t) = \Phi_0(x, \theta, t) - \left(C_{21}^I / \sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \right) \Phi_1(x, \theta, t) \quad \left. \right\} \quad (50)$$

この $T_1^{(0)}$ と $T_2^{(0)}$ を式(34)の右辺に代入すれば、第 3、第 4、…、第 N 層のそれぞれの平均温度が次のように得られる。

$$T_k^{(0)}(x, \theta, t) = \Phi_0(x, \theta, t) - \left\{ \left(C_{21}^I / \sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \right) + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \sum_{r=2}^{k-1} \frac{h_r \lambda_{r+1} + h_{r+1} \lambda_r}{\lambda_r \lambda_{r+1}} \right\} \Phi_1(x, \theta, t) \quad ; (k=3, 4, \dots, N) \quad (51)$$

次いで、式(35)の右辺に式(50)の $T_1^{(0)}$ および $T_2^{(0)}$ を代入するならば、各層の無次元肉厚方向の温度勾配が次式で与えられる。

$$T_k^{(1)}(x, \theta, t) = \frac{h_k}{\lambda_k} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \Phi_1(x, \theta, t) \quad ; (k=1, 2, \dots, N) \quad (52)$$

したがって、各層の温度分布は、これらの無次元肉厚方向の平均温度および温度勾配を式(21)の右辺にそれぞれ代入することにより、直ちに算定されることになる。

先にも述べたように、式(46)および式(48)の第 1 式と第 2 式は、いずれも互いに連成しているため、これを解析的に取り扱うことは一般に簡単ではない。しかしながら、次の関係が成り立つ場合には問題ははや簡単化される。

$$\frac{\alpha_c^+ h_j}{\lambda_j} \ll 1, \quad \frac{\alpha_c^- h_j}{\lambda_j} \ll 1 \quad ; (j=1, 2, \dots, N) \quad (53)$$

この関係は、各層の肉厚 h_j の値が小さいことから、薄肉殻では多くの場合に満足され得る仮定である。さて、式(47)および式(49)の G_3 、 G_4 および H_3 、 H_4 に、式(45)と式(41)、(42)の諸式を用いて、その具体形を求めると、それぞれ、 $\alpha_c^+ h_j / \lambda_j$ および $\alpha_c^- h_j / \lambda_j$ ($j=1, 2, \dots, N$) なる因子を含む次の表示が得られる。

$$G_3 = \frac{\Delta_{G3}}{\Delta_G}, \quad G_4 = \frac{\Delta_{G4}}{\Delta_G}, \quad H_3 = \frac{\Delta_{H3}}{\Delta_H}, \quad H_4 = \frac{\Delta_{H4}}{\Delta_H} \quad (54)$$

ここに、

$$\Delta_{G3} = \frac{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \left[\alpha_c^+ \sum_{j=1}^N \left\{ h_j \lambda_j \left(\frac{h_j}{\lambda_j} + 2 \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} - \alpha_c^- \sum_{j=1}^N \left\{ h_j \lambda_j \left(\frac{h_j}{\lambda_j} + 2 \sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} \right]$$

$$\Delta_{G4} = 4 \left(\sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \right) \left(\sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) + \frac{\alpha_c^+}{\sum_{j=1}^N h_j \lambda_j} \left[\sum_{j=1}^N \left\{ h_j \lambda_j \left(\frac{h_j}{\lambda_j} + 2 \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\}^2 \right] + \frac{\alpha_c^-}{\sum_{j=1}^N h_j \lambda_j} \left[\sum_{j=1}^N \left\{ h_j \lambda_j \left(\frac{h_j}{\lambda_j} + 2 \sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\}^2 \right]$$

$$\Delta_{H3} = \frac{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \left[\alpha_c^+ \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{h_j \lambda_j}{a_j} \left(\frac{h_j}{\lambda_j} + 2 \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} - \alpha_c^- \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{h_j \lambda_j}{a_j} \left(\frac{h_j}{\lambda_j} + 2 \sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} \right]$$

$$\Delta_{H4} = 4 \left(\sum_{j=1}^N \frac{h_j \lambda_j}{a_j} \right) \left(\sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) + \frac{\alpha_c^+}{\sum_{j=1}^N h_j \lambda_j} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{h_j \lambda_j}{a_j} \left(\frac{h_j}{\lambda_j} + 2 \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} \times \sum_{j=1}^N \left\{ h_j \lambda_j \left(\frac{h_j}{\lambda_j} + 2 \sum_{r=1}^{j-1} \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} + \frac{\alpha_c^-}{\sum_{j=1}^N h_j \lambda_j} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{h_j \lambda_j}{a_j} \left(\frac{h_j}{\lambda_j} + 2 \sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\} \times \sum_{j=1}^N \left\{ h_j \lambda_j \left(\frac{h_j}{\lambda_j} + 2 \sum_{r=j+1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) \right\}$$

$$\Delta_G = \frac{1}{3} \left(\sum_{j=1}^N h_j \lambda_j \right) \left(\sum_{j=1}^N \frac{h_j^3}{\lambda_j} \right) + \sum_{j=1}^{N-1} \left[h_j \lambda_j \sum_{r=j}^{N-1} \left\{ h_{r+1} \lambda_{r+1} \left(\sum_{q=j}^r \frac{h_q \lambda_{q+1} + h_{q+1} \lambda_q}{\lambda_q \lambda_{q+1}} \right)^2 \right\} \right]$$

$$\Delta_H = \frac{1}{3} \left(\sum_{j=1}^N \frac{h_j \lambda_j}{a_j} \right) \left(\sum_{j=1}^N \frac{h_j^3}{a_j \lambda_j} \right) + \sum_{j=1}^{N-1} \left[\frac{h_j \lambda_j}{a_j} \sum_{r=j}^{N-1} \left\{ \frac{h_{r+1} \lambda_{r+1}}{a_{r+1}} \left(\sum_{q=j}^r \frac{h_q \lambda_{q+1} + h_{q+1} \lambda_q}{\lambda_q \lambda_{q+1}} \right)^2 \right\} \right] \quad (55)$$

したがって、式(46)および式(48)において、式(53)の仮定に基づくオーダ評価を行なうと、式(46)の第2式の左辺第3項の $G_3 \Phi_0$ は第4項の $G_4 \Phi_1$ に対し、式(48)の同じく第2式の左辺第3項の $H_3 \Phi_0$ は第4項の $H_4 \Phi_1$ に対し、それぞれ省略し得ることが判かる。こうして、式(46)および式(48)は、条件、式(53)の下

で、それぞれ次のように簡単な式となる。

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (F_1 \Phi_0 + F_2 \Phi_1) - \nabla^2 \Phi_0 + F_3 \Phi_0 + F_4 \Phi_1 \\ & = F_5 \tilde{T}^+(x, \theta, t) + F_6 \tilde{T}^-(x, \theta, t) \\ & \frac{\partial}{\partial t} (G_1 \Phi_0 + G_2 \Phi_1) - \nabla^2 \Phi_1 + G_4 \Phi_1 \\ & = G_5 \tilde{T}^+(x, \theta, t) - G_6 \tilde{T}^-(x, \theta, t) \\ & ; (\Phi_0 = \Phi_0(x, \theta, t), \Phi_1 = \Phi_1(x, \theta, t)) \end{aligned} \right. \quad (56)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (F_1 \Phi_0 + F_2 \Phi_1) - \nabla^2 \Phi_0 + F_3 \Phi_0 + F_4 \Phi_1 \\ & = F_5 \tilde{T}^+(x, \theta, t) + F_6 \tilde{T}^-(x, \theta, t) \\ & \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \nabla^2 (H_1 \Phi_0 + H_2 \Phi_1) + H_4 \Phi_1 \\ & = H_5 \tilde{T}^+(x, \theta, t) - H_6 \tilde{T}^-(x, \theta, t) \\ & ; (\Phi_0 = \Phi_0(x, \theta, t), \Phi_1 = \Phi_1(x, \theta, t)) \end{aligned} \right. \quad (57)$$

式(56)および式(57)の第1式と第2式は、いずれも依然として互いに連成した方程式系であるが、次の二つの特別な場合には連成が解け取り扱いが容易となる。

(i) 三次元定常熱流の伝導：

解 Φ_0 および Φ_1 が、時間 t に依存しない場合である。このとき、方程式の組、式(56)、を選択するのが好都合である。時間に関する微分項は消失するから、次式を得る。

$$\left\{ \begin{aligned} & \nabla^2 \Phi_0 - F_3 \Phi_0 - F_4 \Phi_1 = -F_5 \tilde{T}^+(x, \theta) - F_6 \tilde{T}^-(x, \theta) \\ & \nabla^2 \Phi_1 - G_4 \Phi_1 = -G_5 \tilde{T}^+(x, \theta) + G_6 \tilde{T}^-(x, \theta) \\ & ; (\Phi_0 = \Phi_0(x, \theta), \Phi_1 = \Phi_1(x, \theta)) \end{aligned} \right. \quad (58)$$

上の第2式は、1個の未知関数 $\Phi_1(x, \theta)$ に対する微分方程式であるから、これを解き、次いで、その解を用いて第1の式を解けば $\Phi_0(x, \theta)$ が得られる。

(ii) 半径(肉厚)方向の一次元非定常熱流の伝導：

温度が軸方向に一様で、かつ軸対称に分布する場合である。このときは、方程式の組、式(57)、を選ぶのが便利である。空間座標 x および θ に関する微分項は消滅するから、解くべき式は次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} (F_1 \Phi_0 + F_2 \Phi_1) + F_3 \Phi_0 + F_4 \Phi_1 \\ & = F_5 \tilde{T}^+(t) + F_6 \tilde{T}^-(t) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{dt} + H_4 \Phi_1 &= H_5 \tilde{T}^+(t) - H_6 \tilde{T}^-(t) & (59) \\ ; (\Phi_0 &= \Phi_0(t), \Phi_1 = \Phi_1(t)) \end{aligned} \right.$$

したがって、(i)の場合と同様に、先ず、第2式の解 $\Phi_1(t)$ を求め、次いで、その解を用いて第1式を解けば $\Phi_0(t)$ が定まる。式(59)は、複合円筒殻の半径方向の一次元熱伝導を支配する近似方程式として導かれたものであるが、明らかに曲率の影響は無視されており、見方を変えれば、複合平板に対する肉厚方向の一次元熱伝導を記述する近似方程式であると言える。

4. 解析例

前章までに誘導した多層複合円筒殻に対する熱伝導の一次近似式を用いた解析例を示す。簡単のために、 $\alpha_c^+ h_j / \lambda_j$ および $\alpha_c^- h_j / \lambda_j$ ($j=1, 2, \dots, N$) がそれぞれ1に比較して十分に小さい場合を想定し、解析解が容易に得られる三次元定常熱伝導および半径(肉厚)方向の一次元非定常熱伝導の問題を採り上げる。

(i) 三次元定常熱伝導問題：

外表面および内表面に接する媒体の温度 \tilde{T}^+ および \tilde{T}^- が Fourier の級数に展開できて、それぞれ次式で与えられる場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}^+(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{A}_m^+ \cos s_m x + \tilde{B}_m^+ \sin s_m x) \\ &\quad \times (\tilde{C}_n^+ \cos n \theta + \tilde{D}_n^+ \sin n \theta) \\ \tilde{T}^-(x, \theta) &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (\tilde{A}_p^- \cos s_p x + \tilde{B}_p^- \sin s_p x) \\ &\quad \times (\tilde{C}_q^- \cos q \theta + \tilde{D}_q^- \sin q \theta) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

ここに、

$$\begin{aligned} s_m &= \frac{m\pi}{l}, \quad s_p = \frac{p\pi}{l} & (61) \\ ; (m, p &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

また、 $\tilde{A}_m^+ \tilde{C}_n^+$, $\tilde{B}_m^+ \tilde{C}_n^+$, $\tilde{A}_m^+ \tilde{D}_n^+$, $\tilde{B}_m^+ \tilde{D}_n^+$ および $\tilde{A}_p^- \tilde{C}_q^-$, $\tilde{B}_p^- \tilde{C}_q^-$, $\tilde{A}_p^- \tilde{D}_q^-$, $\tilde{B}_p^- \tilde{D}_q^-$ は与えられる関数 $\tilde{T}^+(x, \theta)$ および $\tilde{T}^-(x, \theta)$ より決定される Fourier の展開係数で、それぞれ次式で与えられる。

$$\tilde{A}_m^+ \tilde{C}_n^+ = \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{\pi l} \int_{-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}^+(x, \theta) \cos s_m x \cos n \theta \, dx \, d\theta$$

$$\tilde{B}_m^+ \tilde{C}_n^+ = \frac{\epsilon_n}{\pi l} \int_{-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}^+(x, \theta) \sin s_m x \cos n \theta \, dx \, d\theta$$

$$\tilde{A}_m^+ \tilde{D}_n^+ = \frac{\epsilon_m}{\pi l} \int_{-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}^+(x, \theta) \cos s_m x \sin n \theta \, dx \, d\theta$$

$$\tilde{B}_m^+ \tilde{D}_n^+ = \frac{1}{\pi l} \int_{-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}^+(x, \theta) \sin s_m x \sin n \theta \, dx \, d\theta$$

; ($m, n=0, 1, 2, \dots$)

$$\tilde{A}_p^- \tilde{C}_q^- = \frac{\epsilon_p \epsilon_q}{\pi l} \int_{-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}^-(x, \theta) \cos s_p x \cos q \theta \, dx \, d\theta$$

$$\tilde{B}_p^- \tilde{C}_q^- = \frac{\epsilon_q}{\pi l} \int_{-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}^-(x, \theta) \sin s_p x \cos q \theta \, dx \, d\theta$$

$$\tilde{A}_p^- \tilde{D}_q^- = \frac{\epsilon_p}{\pi l} \int_{-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}^-(x, \theta) \cos s_p x \sin q \theta \, dx \, d\theta$$

$$\tilde{B}_p^- \tilde{D}_q^- = \frac{1}{\pi l} \int_{-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}^-(x, \theta) \sin s_p x \sin q \theta \, dx \, d\theta$$

; ($p, q=0, 1, 2, \dots$)

ただし、

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2}, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \dots = 1 \quad (63)$$

複合円筒殻の両端末、 $x=-l$ および $x=+l$ は、それぞれ一定温度 T_L および T_R に保たれているものとする。解くべき方程式は、式(58)により、次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \theta^2} - F_3 \Phi_0 - F_4 \Phi_1 \\ = -F_5 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{A}_m^+ \cos s_m x + \tilde{B}_m^+ \sin s_m x) \\ \quad \times (\tilde{C}_n^+ \cos n \theta + \tilde{D}_n^+ \sin n \theta) \\ - F_6 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (\tilde{A}_p^- \cos s_p x + \tilde{B}_p^- \sin s_p x) \\ \quad \times (\tilde{C}_q^- \cos q \theta + \tilde{D}_q^- \sin q \theta) \\ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} - G_4 \Phi_1 \\ = -G_5 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{A}_m^+ \cos s_m x + \tilde{B}_m^+ \sin s_m x) \\ \quad \times (\tilde{C}_n^+ \cos n \theta + \tilde{D}_n^+ \sin n \theta) \\ + G_6 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (\tilde{A}_p^- \cos s_p x + \tilde{B}_p^- \sin s_p x) \\ \quad \times (\tilde{C}_q^- \cos q \theta + \tilde{D}_q^- \sin q \theta) \\ ; (\Phi_0 = \Phi_0(x, \theta), \Phi_1 = \Phi_1(x, \theta)) \end{aligned} \right. \quad (64)$$

左右の両端末での境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} T_j(-l, \theta, \zeta_j) &= T_L \quad (= \text{定数}) \\ T_j(+l, \theta, \zeta_j) &= T_R \quad (= \text{定数}) \\ &\quad ; (j=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} (65)$$

これを、式(21)および式(50), (51), (52)を用いて、 $\Phi_0(x, \theta)$ および $\Phi_1(x, \theta)$ で表わすと、次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(-l, \theta) &= T_L (= \text{定数}), \quad \Phi_1(-l, \theta) = 0 \\ \Phi_0(+l, \theta) &= T_R (= \text{定数}), \quad \Phi_1(+l, \theta) = 0 \end{aligned} \right\} (66)$$

式(64)の微分方程式系は変数分離法によって容易に解ける。先ず、第2式の解の一般形 $\Phi_1(x, \theta)$ は、左辺の係数 G_4 が式(54)および式(55)に見られるように常に正であることに留意するならば、次の形で得られる。

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ E_{mn}^+ \cosh \mu_n x + F_{mn}^+ \sinh \mu_n x \right. \\ &\quad + \frac{G_5}{s_m^2 + \mu_n^2} (\tilde{A}_m^+ \cos s_m x + \tilde{B}_m^+ \sin s_m x) \left. \right\} \\ &\quad \times (\tilde{C}_n^+ \cos n\theta + \tilde{D}_n^+ \sin n\theta) \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ E_{pq}^- \cosh \mu_q x + F_{pq}^- \sinh \mu_q x \right. \\ &\quad - \frac{G_6}{s_p^2 + \mu_q^2} (\tilde{A}_p^- \cos s_p x + \tilde{B}_p^- \sin s_p x) \left. \right\} \\ &\quad \times (\tilde{C}_q^- \cos q\theta + \tilde{D}_q^- \sin q\theta) \end{aligned} \quad (67)$$

ただし、

$$\mu_n^2 = G_4 + \frac{n^2}{R^2}, \quad \mu_q^2 = G_4 + \frac{q^2}{R^2} \quad (68)$$

そして、 E_{mn}^+ , F_{mn}^+ および E_{pq}^- , F_{pq}^- は、それぞれ積分定数である。次いで、第1式の解は、左辺の $\Phi_1(x, \theta)$ に、この第2式の解を代入して得られる微分方程式を解けば求まる。この $\Phi_0(x, \theta)$ に関する微分方程式は先の第2式と全く同形で係数 F_3 も常に正である。解 $\Phi_0(x, \theta)$ は、両端末で θ に無関係にそれぞれ一定温度の条件を満足しなければならないことを考慮すると、次の形に書いておくのが便利である。

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, \theta) &= A \cosh \nu_0 x + B \sinh \nu_0 x \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ G_{mn}^+ \cosh \nu_n x + H_{mn}^+ \sinh \nu_n x \right. \\ &\quad + \frac{F_4}{\mu_n^2 - \nu_n^2} (E_{mn}^+ \cosh \mu_n x + F_{mn}^+ \sinh \mu_n x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{s_m^2 + \nu_n^2} \left(\frac{F_4 G_5}{s_m^2 + \mu_n^2} - F_5 \right) (\tilde{A}_m^+ \cos s_m x + \tilde{B}_m^+ \sin s_m x) \left. \right\} \\ &\times (\tilde{C}_n^+ \cos n\theta + \tilde{D}_n^+ \sin n\theta) \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ G_{pq}^- \cosh \nu_q x + H_{pq}^- \sinh \nu_q x \right. \\ &\quad + \frac{F_4}{\mu_q^2 - \nu_q^2} (E_{pq}^- \cosh \mu_q x + F_{pq}^- \sinh \mu_q x) \\ &\quad + \frac{1}{s_p^2 + \nu_q^2} \left(\frac{F_4 G_6}{s_p^2 + \mu_q^2} + F_6 \right) (\tilde{A}_p^- \cos s_p x + \tilde{B}_p^- \sin s_p x) \left. \right\} \\ &\times (\tilde{C}_q^- \cos q\theta + \tilde{D}_q^- \sin q\theta) \end{aligned} \quad (69)$$

ここに、

$$\nu_n^2 = F_3 + \frac{n^2}{R^2}, \quad \nu_q^2 = F_3 + \frac{q^2}{R^2} \quad (70)$$

また、 A , B そして G_{mn}^+ , H_{mn}^+ および G_{pq}^- , H_{pq}^- は、それぞれ積分定数である。左右の両端末での条件、式(66), を適用すると、式(67)および式(69)の積分定数は、それぞれ次のように定まる。

$$\left. \begin{aligned} E_{mn}^+ &= -\frac{\tilde{A}_m^+ G_5}{s_m^2 + \mu_n^2} \cdot \frac{\cos s_m l}{\cosh \mu_n l} \\ F_{mn}^+ &= -\frac{\tilde{B}_m^+ G_5}{s_m^2 + \mu_n^2} \cdot \frac{\sin s_m l}{\sinh \mu_n l} \\ E_{pq}^- &= \frac{\tilde{A}_p^- G_6}{s_p^2 + \mu_q^2} \cdot \frac{\cos s_p l}{\cosh \mu_q l} \\ F_{pq}^- &= \frac{\tilde{B}_p^- G_6}{s_p^2 + \mu_q^2} \cdot \frac{\sin s_p l}{\sinh \mu_q l} \end{aligned} \right\} (71)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{T_L + T_R}{2 \cosh \nu_0 l}, \quad B = -\frac{T_L - T_R}{2 \sinh \nu_0 l} \\ G_{mn}^+ &= \frac{\tilde{A}_m^+}{s_m^2 + \nu_n^2} \left(\frac{F_4 G_5}{\mu_n^2 - \nu_n^2} - F_5 \right) \frac{\cos s_m l}{\cosh \nu_n l} \\ H_{mn}^+ &= \frac{\tilde{B}_m^+}{s_m^2 + \nu_n^2} \left(\frac{F_4 G_5}{\mu_n^2 - \nu_n^2} - F_5 \right) \frac{\sin s_m l}{\sinh \nu_n l} \\ G_{pq}^- &= -\frac{\tilde{A}_p^-}{s_p^2 + \nu_q^2} \left(\frac{F_4 G_6}{\mu_q^2 - \nu_q^2} + F_6 \right) \frac{\cos s_p l}{\cosh \nu_q l} \\ H_{pq}^- &= -\frac{\tilde{B}_p^-}{s_p^2 + \nu_q^2} \left(\frac{F_4 G_6}{\mu_q^2 - \nu_q^2} + F_6 \right) \frac{\sin s_p l}{\sinh \nu_q l} \end{aligned} \right\} (72)$$

結局、所要の条件を満足する解 $\Phi_1(x, \theta)$ および $\Phi_0(x, \theta)$ として、それぞれ次式を得る。

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, \theta) &= -G_5 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m^2 + \mu_n^2} \left\{ \tilde{A}_m^+ \left(\frac{\cos s_m l}{\cosh \mu_n l} \cosh \mu_n x \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & - \cos s_m x \\ & + \tilde{B}_m^+ \left(\frac{\sin s_m l}{\sinh \mu_n l} \sinh \mu_n x \right. \\ & \left. - \sin s_m x \right) \end{aligned} \right\} \\
 & \times (\tilde{C}_n^+ \cos n\theta + \tilde{D}_n^+ \sin n\theta) \\
 & + G_6 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{s_p^2 + \mu_q^2} \left\{ \tilde{A}_p^- \left(\frac{\cos s_p l}{\cosh \mu_q l} \cosh \mu_q x \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos s_p x \right) \right. \\
 & \left. + \tilde{B}_p^- \left(\frac{\sin s_p l}{\sinh \mu_q l} \sinh \mu_q x \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin s_p x \right) \right\} \\
 & \times (\tilde{C}_q^- \cos q\theta + \tilde{D}_q^- \sin q\theta)
 \end{aligned} \tag{73}$$

$\Phi_0(x, \theta)$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{T_L + T_R}{2 \cosh \nu_0 l} \cosh \nu_0 x - \frac{T_L - T_R}{2 \sinh \nu_0 l} \sinh \nu_0 x \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \tilde{A}_m^+ \left\{ \frac{1}{s_m^2 + \nu_n^2} \left(\frac{F_4 G_5}{\mu_n^2 - \nu_n^2} - F_5 \right) \frac{\cos s_m l}{\cosh \nu_n l} \cosh \nu_n x \right. \right. \\
 & \left. - \frac{F_4}{\mu_n^2 - \nu_n^2} \cdot \frac{G_5}{s_m^2 + \mu_n^2} \cdot \frac{\cos s_m l}{\cosh \mu_n l} \cosh \mu_n x \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{s_m^2 + \nu_n^2} \left(\frac{F_4 G_5}{s_m^2 + \mu_n^2} - F_5 \right) \cos s_m x \right\} \right. \\
 & \left. + \tilde{B}_m^+ \left\{ \frac{1}{s_m^2 + \nu_n^2} \left(\frac{F_4 G_5}{\mu_n^2 - \nu_n^2} - F_5 \right) \frac{\sin s_m l}{\sinh \nu_n l} \sinh \nu_n x \right. \right. \\
 & \left. - \frac{F_4}{\mu_n^2 - \nu_n^2} \cdot \frac{G_5}{s_m^2 + \mu_n^2} \cdot \frac{\sin s_m l}{\sinh \mu_n l} \sinh \mu_n x \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{s_m^2 + \nu_n^2} \left(\frac{F_4 G_5}{s_m^2 + \mu_n^2} - F_5 \right) \sin s_m x \right\} \right\} \\
 & \times (\tilde{C}_n^+ \cos n\theta + \tilde{D}_n^+ \sin n\theta) \\
 & - \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \tilde{A}_p^- \left\{ \frac{1}{s_p^2 + \nu_q^2} \left(\frac{F_4 G_6}{\mu_q^2 - \nu_q^2} + F_6 \right) \frac{\cos s_p l}{\cosh \nu_q l} \cosh \nu_q x \right. \right. \\
 & \left. - \frac{F_4}{\mu_q^2 - \nu_q^2} \cdot \frac{G_6}{s_p^2 + \mu_q^2} \cdot \frac{\cos s_p l}{\cosh \mu_q l} \cosh \mu_q x \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{s_p^2 + \nu_q^2} \left(\frac{F_4 G_6}{s_p^2 + \mu_q^2} + F_6 \right) \cos s_p x \right\} \right. \\
 & \left. + \tilde{B}_p^- \left\{ \frac{1}{s_p^2 + \nu_q^2} \left(\frac{F_4 G_6}{\mu_q^2 - \nu_q^2} + F_6 \right) \frac{\sin s_p l}{\sinh \nu_q l} \sinh \nu_q x \right. \right. \\
 & \left. - \frac{F_4}{\mu_q^2 - \nu_q^2} \cdot \frac{G_6}{s_p^2 + \mu_q^2} \cdot \frac{\sin s_p l}{\sinh \mu_q l} \sinh \mu_q x \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{s_p^2 + \nu_q^2} \left(\frac{F_4 G_6}{s_p^2 + \mu_q^2} + F_6 \right) \sin s_p x \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (\tilde{C}_q^- \cos q\theta + \tilde{D}_q^- \sin q\theta) \\
 & \tag{74}
 \end{aligned}$$

(ii) 半径 (肉厚) 方向の一次元非定常熱伝導問題:

最初, 到る所で一様な一定温度 T_0 に保たれている複合円筒殻 (複合平板) が, 時間 $t = 0$ のとき, 突然, その外表面を時間 t の関数として与えられる温度 $\tilde{T}^+(t)$ の媒体により, 他方, 内表面は一様な一定温度 \tilde{T}_0^- の媒体によって, それぞれ加熱または冷却される場合の各層の過渡的な温度分布を考察する。これらの条件の下では, 熱流は半径 (肉厚) 方向のみの一次元流れとなるから, 解くべき方程式は, 式 (59) から, 次式で与えられる。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (F_1 \Phi_0 + F_2 \Phi_1) + F_3 \Phi_0 + F_4 \Phi_1 = F_5 \tilde{T}^+(t) + F_6 \tilde{T}_0^- \\ \frac{d\Phi_1}{dt} + H_4 \Phi_1 = H_5 \tilde{T}^+(t) - H_6 \tilde{T}_0^- \end{cases}$$

; ($\Phi_0 = \Phi_0(t)$, $\Phi_1 = \Phi_1(t)$, \tilde{T}_0^- は定数) (75)

初期条件は次のように書ける。

$$T_j(\zeta_j, 0) = T_0 (= \text{定数}) \quad ; (j = 1, 2, \dots, N) \tag{76}$$

これは, $\Phi_0(t)$ および $\Phi_1(t)$ を用いれば, 次のように表わせる。

$$\Phi_0(0) = T_0 (= \text{定数}), \quad \Phi_1(0) = 0 \tag{77}$$

式 (75) は, 一階線形常微分方程式であるから, 簡単に解ける。まず, 第 2 式の一般解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(t) & = C_1 e^{-H_4 t} + \frac{H_5}{H_4} \left\{ \tilde{T}^+(t) - \int_0^t e^{-H_4(t-\tau)} \frac{d\tilde{T}^+(\tau)}{d\tau} d\tau \right\} \\
 & - \frac{H_6}{H_4} \tilde{T}_0^-
 \end{aligned} \tag{78}$$

ここに, C_1 は積分定数である。次いで, この解を用いて, 第 1 式の一般解を求めれば, 次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \Phi_0(t) & = C_2 e^{-(F_3/F_1)t} - \frac{C_1 (F_2 H_4 - F_4)}{F_1 H_4 - F_3} e^{-H_4 t} \\
 & + \frac{F_5 H_4 - F_4 H_5}{F_3 H_4} \tilde{T}^+(t) \\
 & - \frac{1}{F_3} \left\{ F_5 - \frac{(F_1 F_4 - F_2 F_3) H_5}{F_1 H_4 - F_3} \right\} \int_0^t e^{-(F_3/F_1)(t-\tau)} \frac{d\tilde{T}^+(\tau)}{d\tau} d\tau \\
 & + \frac{(F_2 H_4 - F_4) H_5}{(F_1 H_4 - F_3) H_4} \int_0^t e^{-H_4(t-\tau)} \frac{d\tilde{T}^+(\tau)}{d\tau} d\tau
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{F_6 H_4 + F_4 H_6}{F_3 H_4} \tilde{T}_0^- \quad (79)$$

ここに、 C_2 は積分定数である。初期条件、式(77),
により式(78)および式(79)に含まれる積分定数 C_1 お
よび C_2 はそれぞれ次のように定まる。

$$C_1 = \frac{1}{H_4} \left\{ -H_5 \tilde{T}^+(0) + H_6 \tilde{T}_0^- \right\} \quad (80)$$

$$C_2 = T_0 - \frac{1}{F_3} \left\{ F_5 - \frac{(F_1 F_4 - F_2 F_3) H_5}{F_1 H_4 - F_3} \right\} \tilde{T}^+(0) \\ - \frac{1}{F_3} \left\{ F_6 + \frac{(F_1 F_4 - F_2 F_3) H_6}{F_1 H_4 - F_3} \right\} \tilde{T}_0^- \quad (81)$$

したがって、与えられた初期条件を満たす解として、
それぞれ次式を得る。

$$\phi_1(t) = \frac{1}{H_4} \left\{ \left[-H_5 \tilde{T}^+(0) + H_6 \tilde{T}_0^- \right] e^{-H_4 t} \right. \\ \left. + H_5 \left\{ \tilde{T}^+(t) - \int_0^t e^{-H_4(t-\tau)} \frac{d\tilde{T}^+(\tau)}{d\tau} d\tau \right\} \right. \\ \left. - H_6 \tilde{T}_0^- \right\} \quad (82)$$

$$\phi_0(t) = \left\{ T_0 - \frac{F_5 H_4 - F_4 H_5}{F_3 H_4} \tilde{T}^+(0) \right. \\ \left. - \frac{F_6 H_4 + F_4 H_6}{F_3 H_4} \tilde{T}_0^- \right\} e^{-(F_3/F_1)t} \\ + \frac{F_2 H_4 - F_4}{(F_1 H_4 - F_3) H_4} \left\{ -H_5 \tilde{T}^+(0) \right. \\ \left. + H_6 \tilde{T}_0^- \right\} \left\{ e^{-(F_3/F_1)t} - e^{-H_4 t} \right\} \\ + \frac{F_5 H_4 - F_4 H_5}{F_3 H_4} \tilde{T}^+(t) \\ - \frac{1}{F_3} \left\{ F_5 - \frac{(F_1 F_4 - F_2 F_3) H_5}{F_1 H_4 - F_3} \right\} \int_0^t e^{-(F_3/F_1)(t-\tau)} \frac{d\tilde{T}^+(\tau)}{d\tau} d\tau \\ + \frac{(F_2 H_4 - F_4) H_5}{(F_1 H_4 - F_3) H_4} \int_0^t e^{-H_4(t-\tau)} \frac{d\tilde{T}^+(\tau)}{d\tau} d\tau \\ + \frac{F_6 H_4 + F_4 H_6}{F_3 H_4} \tilde{T}_0^- \quad (83)$$

ここで、円筒殻(平板)の外表面に接する媒体の
温度 $\tilde{T}^+(t)$ の具体形として、時間 $t=0$ から $t=t_f$ ま
では時間 t の三次式で与えられ、それ以後は一定温
度に保たれる次の形を想定してみる。

$$\tilde{T}^+(t) = \tilde{T}_0^+ + \tilde{T}_1^+ t + \tilde{T}_2^+ t^2 + \tilde{T}_3^+ t^3 \quad (t \leq t_f) \\ \tilde{T}^+(t) = \tilde{T}_4^+ \quad (t > t_f) \quad (84)$$

ここに、 \tilde{T}_0^+ , \tilde{T}_1^+ , \tilde{T}_2^+ , \tilde{T}_3^+ および \tilde{T}_4^+ は定数である。
このとき、式(82)および式(83)に従って $\phi_1(t)$ および
 $\phi_0(t)$ を求めると、次の両式を得る。

$$\phi_1(t) = \frac{H_5}{H_4} \left\{ \left[\tilde{T}_1^+ - \frac{2\tilde{T}_2^+}{H_4} + \frac{6\tilde{T}_3^+}{(H_4)^2} \right] t + \left(\tilde{T}_2^+ - \frac{3\tilde{T}_3^+}{H_4} \right) t^2 \right. \\ \left. + \tilde{T}_3^+ t^3 \right. \\ \left. + \left\{ \tilde{T}_0^+ - \frac{\tilde{T}_1^+}{H_4} + \frac{2\tilde{T}_2^+}{(H_4)^2} - \frac{6\tilde{T}_3^+}{(H_4)^3} - \frac{H_6 \tilde{T}_0^-}{H_5} \right\} (1 - e^{-H_4 t}) \right\} \\ (t \leq t_f)$$

$$\phi_1(t) = \frac{H_5}{H_4} \left\{ \left[\tilde{T}_4^+ - \tilde{T}_0^+ e^{-H_4 t} - \frac{H_6 \tilde{T}_0^-}{H_5} (1 - e^{-H_4 t}) \right. \right. \\ \left. - \frac{\tilde{T}_1^+}{H_4} \left\{ e^{-H_4(t-t_f)} - e^{-H_4 t} \right\} \right. \\ \left. + \frac{2\tilde{T}_2^+}{(H_4)^2} \left\{ (1 - H_4 t_f) e^{-H_4(t-t_f)} - e^{-H_4 t} \right\} \right. \\ \left. - \frac{6\tilde{T}_3^+}{(H_4)^3} \left\{ \left[1 - H_4 t_f + \frac{(H_4)^2}{2} t_f^2 \right] e^{-H_4(t-t_f)} \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-H_4 t} \right] \right\} \\ (t > t_f) \quad (85)$$

$$\phi_0(t) = T_0 e^{-(F_3/F_1)t} \\ + \left(\frac{F_5 H_4 - F_4 H_5}{F_3 H_4} \tilde{T}_0^+ + \frac{F_6 H_4 + F_4 H_6}{F_3 H_4} \tilde{T}_0^- \right) \left(1 - e^{-(F_3/F_1)t} \right) \\ - \frac{F_2 H_4 - F_4}{(F_1 H_4 - F_3) H_4} (H_5 \tilde{T}_0^+ - H_6 \tilde{T}_0^-) \left\{ e^{-(F_3/F_1)t} - e^{-H_4 t} \right\} \\ + \frac{1}{F_3} \left\{ F_5 - \frac{(F_1 F_4 - F_2 F_3) H_5}{F_1 H_4 - F_3} \right\} \left\{ \left[\tilde{T}_1^+ - 2\tilde{T}_2^+ \left(\frac{F_1}{F_3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 6\tilde{T}_3^+ \left(\frac{F_1}{F_3} \right)^2 \right] t + \left[\tilde{T}_2^+ - 3\tilde{T}_3^+ \left(\frac{F_1}{F_3} \right) \right] t^2 + \tilde{T}_3^+ t^3 \right. \\ \left. - \left[\tilde{T}_1^+ \left(\frac{F_1}{F_3} \right) - 2\tilde{T}_2^+ \left(\frac{F_1}{F_3} \right)^2 + 6\tilde{T}_3^+ \left(\frac{F_1}{F_3} \right)^3 \right] \left(1 - e^{-(F_3/F_1)t} \right) \right\} \\ - \frac{(F_2 H_4 - F_4) H_5}{(F_1 H_4 - F_3) H_4} \left\{ \left[\tilde{T}_1^+ - \frac{2\tilde{T}_2^+}{H_4} + \frac{6\tilde{T}_3^+}{(H_4)^2} \right] t \right. \\ \left. + \left[\tilde{T}_2^+ - \frac{3\tilde{T}_3^+}{H_4} \right] t^2 + \tilde{T}_3^+ t^3 \right. \\ \left. - \left[\tilde{T}_1^+ - \frac{2\tilde{T}_2^+}{(H_4)^2} + \frac{6\tilde{T}_3^+}{(H_4)^3} \right] \left(1 - e^{-H_4 t} \right) \right\} \\ (t \leq t_f)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) = & \frac{F_5 H_4 - F_4 H_5}{F_3 H_4} \tilde{T}_4^+ + \frac{F_6 H_4 + F_4 H_6}{F_3 H_4} \tilde{T}_0^- \\ & + \left\{ T_0 - \frac{F_5 H_4 - F_4 H_5}{F_3 H_4} \tilde{T}_0^+ - \frac{F_6 H_4 + F_4 H_6}{F_3 H_4} \tilde{T}_0^- \right\} e^{-(F_3/F_1)t} \\ & - \frac{F_2 H_4 - F_4}{(F_1 H_4 - F_3) H_4} (H_5 \tilde{T}_0^+ - H_6 \tilde{T}_0^-) \left\{ e^{-(F_3/F_1)t} - e^{-H_4 t} \right\} \\ & - \frac{1}{F_3} \left\{ F_5 - \frac{(F_1 F_4 - F_2 F_3) H_5}{F_1 H_4 - F_3} \right\} \left\{ \tilde{T}_1^+ \left(\frac{F_1}{F_3} \right) \left\{ e^{-(F_3/F_1)(t-t_f)} \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{-(F_3/F_1)t} \right\} - 2 \tilde{T}_2^+ \left(\frac{F_1}{F_3} \right)^2 \left\{ \left[1 - \left(\frac{F_3}{F_1} \right) t_f \right] e^{-(F_3/F_1)(t-t_f)} \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{-(F_3/F_1)t} \right\} + 6 \tilde{T}_3^+ \left(\frac{F_1}{F_3} \right)^2 \left\{ \left[1 - \left(\frac{F_3}{F_1} \right) t_f + \frac{1}{2} \left(\frac{F_3}{F_1} \right)^2 t_f^2 \right] \right. \right. \\ & \left. \left. \times e^{-(F_3/F_1)(t-t_f)} - e^{-(F_3/F_1)t} \right\} \right\} \\ & + \frac{(F_2 H_4 - F_4) H_5}{(F_1 H_4 - F_3) H_4} \left[\frac{\tilde{T}_1^+}{H_4} \left\{ e^{-H_4(t-t_f)} - e^{-H_4 t} \right\} \right. \\ & \left. - \frac{2 \tilde{T}_2^+}{(H_4)^2} \left\{ (1 - H_4 t_f) e^{-H_4(t-t_f)} - e^{-H_4 t} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{6 \tilde{T}_3^+}{(H_4)^3} \left\{ \left[1 - H_4 t_f + \frac{(H_4)^2}{2} t_f^2 \right] e^{-H_4(t-t_f)} - e^{-H_4 t} \right\} \right] \end{aligned} \quad (t > t_f) \tag{86}$$

$t \geq 0$ に対して $\tilde{T}^+(t) = \tilde{T}_0^+$ (=定数) の特別な場合には解は非常に簡単になる。このとき、解 $\Phi_1(t)$ および $\Phi_0(t)$ は、それぞれ式 (85) および式 (86) の第 1 式において、 \tilde{T}_1^+ 、 \tilde{T}_2^+ および \tilde{T}_3^+ をそれぞれ零とすればよく、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) = & \frac{H_5}{H_4} \left(\tilde{T}_0^+ - \frac{H_6}{H_5} \tilde{T}_0^- \right) (1 - e^{-H_4 t}) \tag{87} \\ \Phi_0(t) = & T_0 e^{-(F_3/F_1)t} \\ & + \left(\frac{F_5 H_4 - F_4 H_5}{F_3 H_4} \tilde{T}_0^+ + \frac{F_6 H_4 + F_4 H_6}{F_3 H_4} \tilde{T}_0^- \right) \left\{ 1 - e^{-(F_3/F_1)t} \right\} \\ & - \frac{F_2 H_4 - F_4}{(F_1 H_4 - F_3) H_4} (H_5 \tilde{T}_0^+ - H_6 \tilde{T}_0^-) \left\{ e^{-(F_3/F_1)t} - e^{-H_4 t} \right\} \end{aligned} \tag{88}$$

数値計算の一例として、二層の複合平板（複合円筒殻）の肉厚方向の温度分布を上記の式 (87) および式 (88) を用いて計算した結果を示すことにする。計算に際し、

$$\begin{aligned} h_1 = & 0.03 \text{ m}, \quad h_2 = 0.01 \text{ m}, \quad T_0 = 20^\circ \text{C} \\ \tilde{T}_0^+ = & 880^\circ \text{C}, \quad \tilde{T}_0^- = 20^\circ \text{C} \end{aligned}$$

$$\alpha_c^+ = 35 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad \alpha_c^- = 15 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

とし、第 1 層および第 2 層の材料の物性値は表 1 に示す値を用いた。これらの諸値は、条件、式 (53)、を大略満足するように選んだもので、実在の材料を想定して定めたものではない。数値計算の結果を表 2 に示す。比較のために、付録に示す二層複合平板に対する厳密解から数値計算によって得られた値を併記する。近似解と厳密解との間に良好な一致が認められる。図 2 に時間 t の 6 秒および 60 秒における肉厚方向の温度変化を示す。第 1 層と第 2 層との界面での本近似解による温度勾配の比は、6 秒および 60 秒いずれの経過時間においても 2 : 1 で連続条件

表 1 計算に用いた物性値

物 性 値	第 1 層	第 2 層
熱 伝 導 率 λ (W/m·K)	20	40
比 熱 c (J/kg·K)	1200	920
密 度 ρ (kg/m ³)	144	2770
温度伝播率 a (m ² /s)	157.4×10^{-6}	15.9×10^{-6}

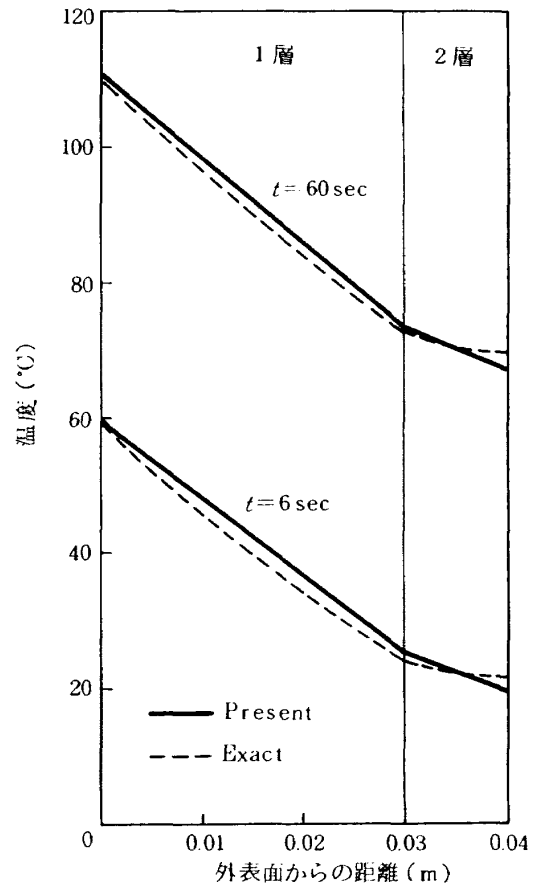


図 2 肉厚方向の温度分布

表2 数値計算の結果

時間 t (s)	温 度 (°C)									
	$T_1 (\zeta_1=+1)$		$T_1 (\zeta_1=0)$		$T_1 (\zeta_1=-1) = T_2 (\zeta_2=+1)$		$T_2 (\zeta_2=0)$		$T_2 (\zeta_2=-1)$	
	Present	Exact	Present	Exact	Present	Exact	Present	Exact	Present	Exact
0	20.0	20.3	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0
2	42.7	45.2	32.2	28.8	21.6	20.7	19.9	20.2	18.1	20.0
4	53.7	54.2	38.6	35.8	23.4	22.4	20.8	21.0	18.3	20.7
6	59.6	59.7	42.4	40.2	25.2	24.2	22.3	22.4	19.5	21.9
8	63.3	63.3	45.2	43.4	27.0	26.0	24.0	24.0	21.0	23.4
10	65.9	66.1	47.4	45.9	28.9	27.9	25.8	25.8	22.7	25.1
20	75.7	75.8	56.9	55.6	38.1	37.1	34.9	34.9	31.8	34.1
40	93.7	93.0	74.8	73.2	56.0	55.0	52.9	52.9	49.7	52.1
60	111.0	109.7	92.2	90.2	73.4	72.4	70.2	70.3	67.1	69.5
120	159.9	156.5	141.1	138.3	122.2	121.5	119.1	119.4	116.0	118.6
240	244.3	237.9	225.5	221.7	206.7	206.6	203.6	204.8	200.4	203.9
480	370.9	360.9	352.1	347.7	333.3	335.3	330.1	333.6	327.0	332.7
960	514.3	502.4	495.5	492.7	476.7	483.4	473.6	482.0	470.4	481.0
1920	609.9	599.5	591.1	592.2	572.3	584.9	569.1	583.8	566.0	582.7
3840	634.1	625.4	615.3	618.7	596.4	612.0	593.3	610.9	590.2	609.8
7680	635.2	626.7	616.4	620.0	597.5	613.4	594.4	612.2	591.3	611.1
15360	635.2	626.7	616.4	620.0	597.5	613.4	594.4	612.2	591.3	611.1

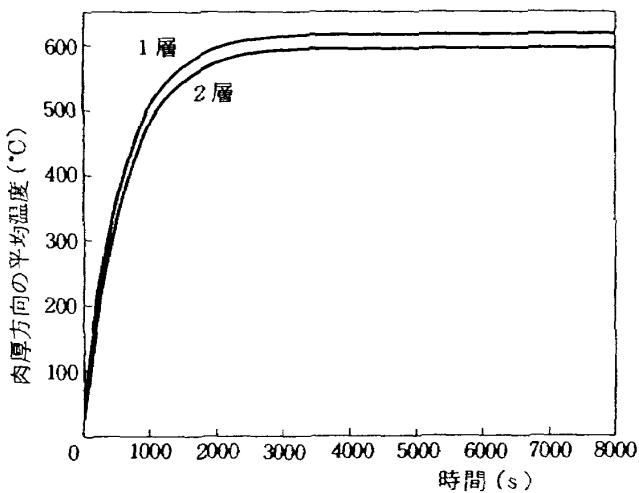


図3 肉厚方向の平均温度の時間的变化

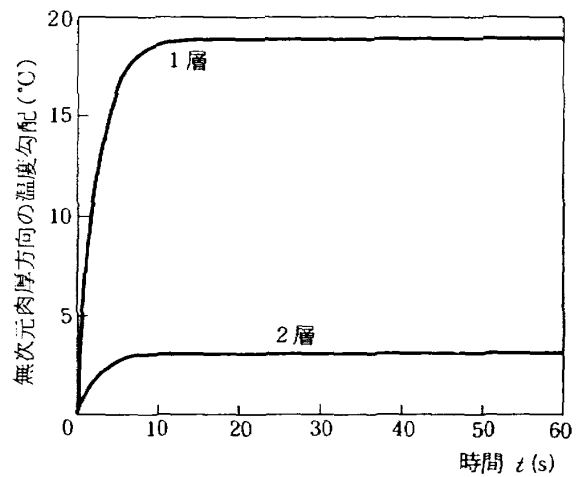


図4 無次元肉厚方向の温度勾配の時間的变化

を満足していることが判る。図3に本近似解において得られた肉厚方向の平均温度 $T_1^{(0)}$ および $T_2^{(0)}$ の時間 t に対する変化の様子を、図4に無次元肉厚方向の温度勾配 $T_1^{(1)}$ および $T_2^{(1)}$ (実次元の肉厚方向温度勾配は $2T_1^{(1)}/h_1$ および $2T_2^{(1)}/h_2$) の時間 t に対する変化の様子を示す。第1層および第2層の平均温度 $T_1^{(0)}$ および $T_2^{(0)}$ は、当然のことながら、いずれも時間の増大にしたがって定常解に接近し、7200秒(2

時間)を経過するとはほぼ完全に定常となる。一方、無次元肉厚方向の温度勾配 $T_1^{(1)}$ および $T_2^{(1)}$ は、時間とともにやはり増大するが、20秒を経過するといずれもほぼ一定値に収束することが判る。

5. 結 言

多層複合円筒殻の熱構造解析をKirchhoff-Loveの仮定に基づく一次近似殻理論を用いて行なうこと

を前提に、その第一段階として、多層複合円筒殻に対する熱伝導の一次近似方程式を導くことを試みた。複合円筒殻の外・内表面では、それらの面に接する媒体との間に Newton の熱伝達の法則に従う熱交換があるものとし、また、隣接する各層の界面では各瞬間において温度と熱流束の連続性が成り立つものとした。本来、三次元的な多層複合円筒殻の熱伝導を支配する方程式が、その近似過程において、殻理論の Kirchhoff-Love の仮定を適用することにより、一次近似方程式として、互いに連成した二つの二次元の偏微分方程式の組に、二次元化された。ごく簡単な数値計算例が示され、近似式が成り立つ条件の下で、厳密解と良い一致を見た。

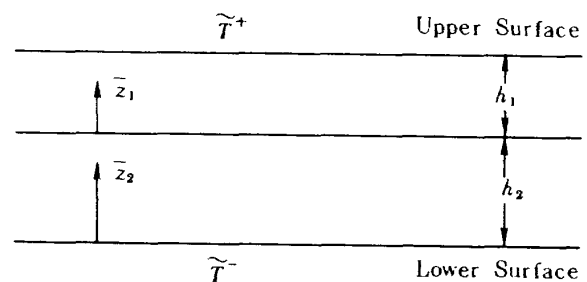
参 考 文 献

- 1) Bolotin, V. V., "Equations for the Non-Stationary Temperature Fields in Thin Shells in the Presence of Sources of Heat," PMM, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 24, No. 2, 1960, pp. 515-519
- 2) Steele, C. R. and Yang, J.-S., "Thermal Stresses in Thin Shells," SUDAAR No. 371, Stanford University, March 1969
- 3) 遠藤修司, "円筒シェル熱変形基礎式について", 航空宇宙技術研究所報告 TR-577, 昭和54年6月
- 4) 遠藤修司, "多層複合円筒殻に対する熱伝導の一次近似方程式", 日本学術会議熱工学研究連絡委員会ほか 第26回日本伝熱シンポジウム講演論文集, Vol. I, 平成元年5月31日, pp. 244-246

付 録

上下表面で熱伝達のある二層複合平板に対する温度分布の厳密解

Harris と Davidson^{付1)}は、上表面において熱伝達による熱交換があり、下表面は断熱されている二層複合平板の温度分布の厳密解を得ている。この問題について、下表面での条件を断熱ではなく上表面と同様に熱伝達による熱交換があるとした場合の解も容易に求まる。ここに、簡単な記述をしておく。



付図1 二層複合平板形状と座標系

最初、到る所で様な一定温度 T_0 に保たれている付図1に示すような二層複合平板が、時刻 $t = 0$ のとき、突然、上表面 $\bar{z}_1 = h_1$ および下表面 $\bar{z}_2 = 0$ において、それぞれ様な一定温度 \bar{T}^+ および \bar{T}^- の媒体により、加熱または冷却される場合、複合平板の熱伝導問題は、付図1の座標系で表わすと、次のように書ける。

熱伝導方程式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1(\bar{\zeta}_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} &= \beta^2 \frac{\partial^2 T_1(\bar{\zeta}_1, \tau_2)}{\partial \bar{\zeta}_1^2} \\ \frac{\partial T_2(\bar{\zeta}_2, \tau_2)}{\partial \tau_2} &= \frac{\partial^2 T_2(\bar{\zeta}_2, \tau_2)}{\partial \bar{\zeta}_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (A1)$$

ただし、

付1) Harris, R. S., Jr. and Davidson, J. R., "An Analysis of Exact and Approximate Equations for the Temperature Distribution in an Insulated Thick Skin Subjected to Aerodynamic Heating," NASA TN D-519, National Aeronautics and Space Administration, 1961

$$\left. \begin{aligned} \bar{\zeta}_j &= \frac{\bar{z}_j}{h_j} \quad (j=1, 2) \\ \tau_2 &= \frac{a_2 t}{h_2^2} = \frac{\lambda_2 t}{c_2 \rho_2 h_2^2}, \quad \beta^2 = \frac{\lambda_1 c_2 \rho_2 h_2^2}{\lambda_2 c_1 \rho_1 h_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (A2)$$

境界条件：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_1}{h_1} \frac{\partial T_1}{\partial \bar{\zeta}_1}(1, \tau_2) &= \alpha_c^+ \{ \tilde{T}^+ - T_1(1, \tau_2) \} \\ \frac{\lambda_1}{h_1} \frac{\partial T_1}{\partial \bar{\zeta}_1}(0, \tau_2) &= \frac{\lambda_2}{h_2} \frac{\partial T_2}{\partial \bar{\zeta}_2}(1, \tau_2) \\ T_1(0, \tau_2) &= T_2(1, \tau_2) \\ \frac{\lambda_2}{h_2} \frac{\partial T_2}{\partial \bar{\zeta}_2}(0, \tau_2) &= -\alpha_c^- \{ \tilde{T}^- - T_2(0, \tau_2) \} \end{aligned} \right\} \quad (A3)$$

初期条件：

$$T_j(\bar{\zeta}_j, 0) = T_0 \quad ; \quad (j=1, 2) \quad (A4)$$

Laplace 変換を行なえば、像空間における問題は次のように表わされる。

熱伝導方程式：

$$\left. \begin{aligned} s \theta_1(\bar{\zeta}_1, s) - T_0 &= \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_1(\bar{\zeta}_1, s)}{\partial \bar{\zeta}_1^2} \\ s \theta_2(\bar{\zeta}_2, s) - T_0 &= \frac{\partial^2 \theta_2(\bar{\zeta}_2, s)}{\partial \bar{\zeta}_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (A5)$$

ここに、 $\theta_1(\bar{\zeta}_1, s)$ および $\theta_2(\bar{\zeta}_2, s)$ は、それぞれ関数 $T_1(\bar{\zeta}_1, \tau_2)$ および $T_2(\bar{\zeta}_2, \tau_2)$ の Laplace 像関数であり、 s は変換のパラメータである。

境界条件：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_1}{h_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\zeta}_1}(1, s) &= \alpha_c^+ \left\{ \frac{\tilde{T}^+}{s} - \theta_1(1, s) \right\} \\ \frac{\lambda_1}{h_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\zeta}_1}(0, s) &= \frac{\lambda_2}{h_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\zeta}_2}(1, s) \\ \theta_1(0, s) &= \theta_2(1, s) \\ \frac{\lambda_2}{h_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\zeta}_2}(0, s) &= -\alpha_c^- \left\{ \frac{\tilde{T}^-}{s} - \theta_2(0, s) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (A6)$$

与えられた初期条件、式(A4)、は像方程式に入っているため、自動的に考慮されている。

$\bar{\zeta}_1$ および $\bar{\zeta}_2$ についての常微分方程式、式(A5)、の解はそれぞれ次の形に書ける。

$$\theta_1(\bar{\zeta}_1, s) = A_1 \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \bar{\zeta}_1 + A_2 \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \bar{\zeta}_1 + \frac{T_0}{s}$$

$$\theta_2(\bar{\zeta}_2, s) = B_1 \sinh \sqrt{s} \bar{\zeta}_2 + B_2 \cosh \sqrt{s} \bar{\zeta}_2 + \frac{T_0}{s} \quad (A7)$$

ここに、 A_1, A_2 および B_1, B_2 は任意定数で、境界条件、式(A6)、を適用することにより次のように決定される。

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\beta \xi}{s E(s)} \left\{ B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) (B^- \cosh \sqrt{s} + \sqrt{s} \sinh \sqrt{s}) \right. \\ &\quad \left. - B^- (\tilde{T}^- - T_0) \left(B^+ \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} + \frac{\sqrt{s}}{\beta} \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right) \right\} \\ A_2 &= \frac{1}{s E(s)} \left\{ B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) (B^- \sinh \sqrt{s} + \sqrt{s} \cosh \sqrt{s}) \right. \\ &\quad \left. + \beta \xi B^- (\tilde{T}^- - T_0) \left(B^+ \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{s}}{\beta} \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{B^-}{s E(s)} \left\{ B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) - (\tilde{T}^- - T_0) G(s) \right\}$$

$$B_2 = \frac{1}{s E(s)} \left\{ B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) \sqrt{s} + B^- (\tilde{T}^- - T_0) F(s) \right\} \quad (A8)$$

ただし、

$$B^+ = \frac{\alpha_c^+ h_1}{\lambda_1}, \quad B^- = \frac{\alpha_c^- h_2}{\lambda_2}, \quad \xi = \frac{\lambda_2 h_1}{\lambda_1 h_2} \quad (A9)$$

そして、

$$\begin{aligned} E(s) &= \beta \xi \left(B^+ \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{s}}{\beta} \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right) (B^- \cosh \sqrt{s} + \sqrt{s} \sinh \sqrt{s}) \\ &\quad + \left(B^+ \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{s}}{\beta} \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right) (B^- \sinh \sqrt{s} + \sqrt{s} \cosh \sqrt{s}) \\ F(s) &= \beta \xi \left(B^+ \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} + \frac{\sqrt{s}}{\beta} \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right) \cosh \sqrt{s} \\ &\quad + \left(B^+ \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} + \frac{\sqrt{s}}{\beta} \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right) \sinh \sqrt{s} \\ G(s) &= \beta \xi \left(B^+ \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} + \frac{\sqrt{s}}{\beta} \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right) \sinh \sqrt{s} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \left(B^+ \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} + \frac{\sqrt{s}}{\beta} \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right) \cosh \sqrt{s} \\ & \end{aligned} \right\} \quad (A10)$$

よって、変換された問題の解は、次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(\bar{\zeta}_1, s) &= \frac{1}{sE(s)} \{ p_1(\bar{\zeta}_1, s) + p_2(\bar{\zeta}_1, s) + T_0 E(s) \} \\ \theta_2(\bar{\zeta}_2, s) &= \frac{1}{sE(s)} \{ p_3(\bar{\zeta}_2, s) + p_4(\bar{\zeta}_2, s) + T_0 E(s) \} \end{aligned} \right\} \quad (A11)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} p_1(\bar{\zeta}_1, s) &= \beta \xi \left\{ B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) (B^- \cosh \sqrt{s} + \sqrt{s} \sinh \sqrt{s}) \right. \\ & \quad \left. - B^- (\tilde{T}^- - T_0) \left(B^+ \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} + \frac{\sqrt{s}}{\beta} \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right) \right\} \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \bar{\zeta}_1 \\ p_2(\bar{\zeta}_1, s) &= \left\{ B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) (B^- \sinh \sqrt{s} + \sqrt{s} \cosh \sqrt{s}) \right. \\ & \quad \left. + \beta \zeta B^- (\tilde{T}^- - T_0) \left(B^+ \sinh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\sqrt{s}}{\beta} \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \right) \right\} \cosh \frac{\sqrt{s}}{\beta} \bar{\zeta}_1 \\ p_3(\bar{\zeta}_2, s) &= B^- \{ B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) - (\tilde{T}^- - T_0) G(s) \} \sinh \sqrt{s} \bar{\zeta}_2 \\ p_4(\bar{\zeta}_2, s) &= \{ B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) \sqrt{s} \\ & \quad + B^- (\tilde{T}^- - T_0) F(s) \} \cosh \sqrt{s} \bar{\zeta}_2 \end{aligned} \right\} \quad (A12)$$

式(A11)で与えられる $\theta_1(\bar{\zeta}_1, s)$ および $\theta_2(\bar{\zeta}_2, s)$ は、いずれも $s=0$ と $s=-r_n^2$ ($n=1, 2, \dots$) に単極をもつ。ただし、 r_n は $E(s)=0$ より次の方程式(特性方程式)の零を除く根である。

$$\begin{aligned} & \beta \xi \left(B^+ \sin \frac{r_n}{\beta} + \frac{r_n}{\beta} \cos \frac{r_n}{\beta} \right) (B^- \cos r_n - r_n \sin r_n) \\ & + \left(B^+ \cos \frac{r_n}{\beta} - \frac{r_n}{\beta} \sin \frac{r_n}{\beta} \right) (B^- \sin r_n + r_n \cos r_n) = 0 \end{aligned} \quad (A13)$$

したがって、 $\theta_1(\bar{\zeta}_1, s)$ および $\theta_2(\bar{\zeta}_2, s)$ の原関数は、留数計算法により、それぞれ次のように求まる。ただし、' は s で微分する記号である。

$$\left. \begin{aligned} T_1(\bar{\zeta}_1, \tau_2) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \theta_1(\bar{\zeta}_1, s) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p_1(\bar{\zeta}_1, s) + p_2(\bar{\zeta}_1, s) + T_0 E(s)}{\{sE(s)\}'} e^{s\tau_2} \right]_{s=-r_n^2} \\ & = \frac{\xi B^+ B^- (\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-)}{B^+ (1+B^-) + \xi B^- (1+B^+)} \bar{\zeta}_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{B^+ (1+B^-) \tilde{T}^+ + \xi B^- (1+B^+) \tilde{T}^-}{B^+ (1+B^-) + \xi B^- (1+B^+)} \\ & + \beta \xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_n} \left\{ B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) (B^- \cos r_n - r_n \sin r_n) \right. \\ & \quad \left. - B^- (\tilde{T}^- - T_0) \left(B^+ \cos \frac{r_n}{\beta} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{r_n}{\beta} \sin \frac{r_n}{\beta} \right) \right\} e^{-r_n^2 \tau_2} \sin \frac{r_n}{\beta} \bar{\zeta}_1 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_n} \left\{ B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) (B^- \sin r_n + r_n \cos r_n) \right. \\ & \quad \left. + \beta \xi B^- (\tilde{T}^- - T_0) \left(B^+ \sin \frac{r_n}{\beta} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{r_n}{\beta} \cos \frac{r_n}{\beta} \right) \right\} e^{-r_n^2 \tau_2} \cos \frac{r_n}{\beta} \bar{\zeta}_1 \\ T_2(\bar{\zeta}_2, \tau_2) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \theta_2(\bar{\zeta}_2, s) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p_3(\bar{\zeta}_2, s) + p_4(\bar{\zeta}_2, s) + T_0 E(s)}{\{sE(s)\}'} e^{s\tau_2} \right]_{s=-r_n^2} \\ & = \frac{B^+ B^- (\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-)}{B^+ (1+B^-) + \xi B^- (1+B^+)} \bar{\zeta}_2 \\ & + \frac{B^+ \tilde{T}^+ + B^- \{ \xi + B^+ (1+\xi) \} \tilde{T}^-}{B^+ (1+B^-) + \xi B^- (1+B^+)} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^-}{K_n} \left\{ B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) \right. \\ & \quad \left. + (\tilde{T}^- - T_0) \left\{ \beta \xi \left(B^+ \sin \frac{r_n}{\beta} + \frac{r_n}{\beta} \cos \frac{r_n}{\beta} \right) \sin r_n \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(B^+ \cos \frac{r_n}{\beta} - \frac{r_n}{\beta} \sin \frac{r_n}{\beta} \right) \cos r_n \right\} \right\} e^{-r_n^2 \tau_2} \sin r_n \bar{\zeta}_2 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_n} \left\{ r_n B^+ (\tilde{T}^+ - T_0) \right. \\ & \quad \left. + B^- (\tilde{T}^- - T_0) \left\{ \beta \xi \left(B^+ \sin \frac{r_n}{\beta} + \frac{r_n}{\beta} \cos \frac{r_n}{\beta} \right) \cos r_n \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(B^+ \cos \frac{r_n}{\beta} - \frac{r_n}{\beta} \sin \frac{r_n}{\beta} \right) \sin r_n \right\} \right\} \\ & \quad \times e^{-r_n^2 \tau_2} \cos r_n \bar{\zeta}_2 \end{aligned} \right\} \quad (A14)$$

ここに、

$$K_n = \frac{r_n}{2} \left[\beta \xi \left\{ \frac{1}{\beta} (1+B^+) \cos \frac{r_n}{\beta} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r_n}{\beta^2} \sin \frac{r_n}{\beta} \right\} (B^- \cos r_n - r_n \sin r_n) \right]$$

式(A14)において、 $B^- = 0$ とおけば、下表面が断熱の場合の Harris らの解に完全に一致する。

$$\begin{aligned}
 & -\{(1+B^-)\sin \tau_n + \tau_n \cos \tau_n\} \left(B^+ \sin \frac{\tau_n}{\beta} + \frac{\tau_n}{\beta} \cos \frac{\tau_n}{\beta} \right) \\
 & - \left\{ \frac{1}{\beta} (1+B^+) \sin \frac{\tau_n}{\beta} + \frac{\tau_n}{\beta^2} \cos \frac{\tau_n}{\beta} \right\} (B^- \sin \tau_n + \tau_n \cos \tau_n) \\
 & + \{(1+B^-)\cos \tau_n - \tau_n \sin \tau_n\} \left(B^+ \cos \frac{\tau_n}{\beta} - \frac{\tau_n}{\beta} \sin \frac{\tau_n}{\beta} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad (A15)
 \end{aligned}$$

航空宇宙技術研究所報告1049号

平成元年12月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7-44-1
電話 三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山5-6-17

Printed in Japan