

ISSN 0389-4010  
UDC 53.08:65.012.1

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1055

バイアスエラーを考慮した二次元ベクトル量  
計測における最適観測軸配置について

木村武雄

1990年2月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

## 目

## 次

1. まえがき .....	1
2. 序 論 .....	2
2.1 二次元ベクトル量計測 .....	2
2.2 バイアスエラーを考慮した観測方程式 .....	2
2.3 観測方程式の解 .....	3
2.4 観測系の評価 .....	3
3. 本 論 .....	4
3.1 観測系を等価に保つ変換 .....	4
3.2 最適観測系であるための必要十分条件 .....	7
3.3 最適観測系の一般的性質 .....	8
3.4 最適観測軸配置 .....	9
4. 補 論 .....	11
4.1 最適観測系における観測方程式の解 .....	11
4.2 故障の考慮 .....	13
4.3 配置誤差の考慮 .....	15
4.4 応 用 例 .....	16
5. 結 論 .....	17
6. あとがき .....	18
参考文献 .....	18

# バイアスエラーを考慮した二次元ベクトル量 計測における最適観測軸配置について\*

木 村 武 雄\*\*

## Optimum Orientations of the Observation Axes for 2-Dimensional Vector Sensing under Consideration of Bias Errors

Takeo KIMURA

### ABSTRACT

In the previous investigation it was shown that the determinant of a covariance matrix should be recognized as a reasonable criterion for comparing the quality of observation systems, and the determinant criterion was applied to find the optimum observation systems for 2-dimensional vector sensing in cases where the observation errors were not correlated with each other and were normally distributed with zero means and equal variances.

In the present investigation the determinant method is applied to cases where the observation errors contain not only random errors but also bias errors, provided that the values of these are mutually equal in each measuring instrument.

The general properties of the optimum orientations are also shown. Furthermore the investigation is extended to include cases where some of the measuring instruments are out of order, as well as cases where there are misalignment errors in the configuration of the measuring instruments.

### 1. ま え が き

筆者は以前、「二次元ベクトル量計測の最適観測軸配置について」<sup>6)</sup>と題して報告したことがある。そこでは、観測誤差としてランダムな誤差のみを考慮し、バイアスエラーが含まれている場合については考察しなかった。また、「矢羽根を用いた冗長型気流方向測定装置の最適化と設計のための数値解析について」<sup>7)</sup>において、数値シミュレーションにより、バイアスエラーが部分的に取り除ける観測系が存在することを明らかにした。

本報告では、各観測器にランダムな誤差のみならず、バイアスエラーも付随する場合の二次元ベクトル量計測における観測系を考察し、その一般の性質を明らかにすると共に、その場合の最適な

観測系を見い出すことを試みる。また、その最適観測系がバイアスエラー（観測器毎にバイアスエラーの値が異なる場合はその平均値；詳しくは文献5)の第1章序論の第2項「概説」及び第3項「観測誤差」を参照されたい。以下バイアスエラーに関しては同様に参照されたい）を完全に除去しうることも示す。

なお、本報告の主な新規性は、誤差の評価関数として従来の Trace（トレース）ではなく Det（行列式）を用いていることにある。

記 号

文字の用法の原則

$a, b, c$  : スカラー量

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  : ベクトル量

$A, B, C$  : 行列

演算記号

${}^t\mathbf{a}$  : ベクトル  $\mathbf{a}$  の転置ベクトル

\* 平成元年11月29日受付

\*\* 制御部

${}^tA$  : 行列  $A$  の転置行列  
 $|a|$  : ベクトル  $a$  の大きさ  
 $|A|$  : 行列式  
 $a \cdot b, ab, a^2$  : ベクトルの内積  
 $A \cdot B, AB$  : 行列の積

添字等

$', *$  : 添記号 (例えば  $G', G^*$  など)  
 $i, j, 1, 2, p$  : 添字 (例えば  $\lambda_i, f_i, l_i, m_i, \varepsilon_p$  など)

## 2. 序 論

ここでは、本論に入る前に、本報告の考察対象、主な前提条件、適用範囲、観測系の評価基準などについて述べる。

### 2.1 二次元ベクトル量計測

ベクトル量計測を表す一般式は、

$$\lambda_i = f_i(v) \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2-1)$$

と書かれる。

ここに、

$\lambda_i$  : 観測値  
 $f_i$  : ベクトル  $v$  を変数とするスカラー値関数  
 $v$  : 未知所求ベクトル  
 $i$  : 観測の番号  
 $p$  : 観測の個数

である。

本報告では、関数  $f_i$  について、未知ベクトル  $v$  の各成分の一次結合で表わせる形に限定し、その結合係数は正規化されているものと仮定する。なお、未知所求ベクトル  $v$  については、二次元のベクトルとする。すなわち

$$\lambda_i = f_i \cdot v \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2-2)$$

ただし、

$$|f_i| = 1 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2-3)$$

とする。

ベクトル  $f_i$  の  $X, Y$  成分を本報告では  $l_i, m_i$  と表わすことにする。すなわち

$${}^t f_i = (l_i, m_i) \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2-4)$$

ただし

$$(l_i)^2 + (m_i)^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2-5)$$

とする。また、未知ベクトル  $v$  の各成分は  $x, y$  と

表わすことにする。すなわち

$${}^t v = (x, y) \quad (2-6)$$

従って、(2-2) 式は、(2-4) 及び (2-6) 式を考慮して

$$\lambda_i = l_i \cdot x + m_i \cdot y \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2-7)$$

と表わされる。

### 2.2 バイアスエラーを考慮した観測方程式

バイアスエラーを考慮した場合の観測方程式を次のように設定する。バイアスエラーを  $c \cdot \Delta$  と表わし、(2-7) 式にこのバイアスエラーおよびランダムな観測誤差  $\varepsilon_i$  を付け加え

$$\lambda_i = l_i \cdot x + m_i \cdot y + c \cdot \Delta + \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2-8)$$

とする。

但し

$$(l_i)^2 + (m_i)^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2-9)$$

である。

なお、バイアスエラーを単に  $\Delta$  と表記せず、それに係数  $c$  を付け、 $c \cdot \Delta$  としたのは、単に後の計算の都合のためである。この  $c$  の値は、実は、後に示すように  $c = \sqrt{2}/2$  (3-43 式参照) という一定数にすると都合よいが、この一定数は、どのような値に設定されたとしても、バイアスエラーを求める際、あるいは、観測系を評価する際、何の不都合も生じさせない。

さて、ここに観測誤差  $\varepsilon_i$  は、次の条件を満たすものと仮定する。すなわち

仮定 1

正規分布である。

仮定 2

$$E(\varepsilon_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2-10)$$

仮定 3

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \varepsilon^2 \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots, p) \quad (2-11)$$

ここに、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。

さて、観測方程式 (2-8) を行列表示で示せば、

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

となる。これを行列記号で

$$\lambda = G \cdot \omega + \epsilon \quad (2-13)$$

と略記することとなる。ここで、(2-11)式を考慮することにより

$$E(\epsilon' \epsilon) = \epsilon^2 E(p) = W^{-1} \quad (2-14)$$

を得る。ただし

$\lambda$  : 観測値ベクトル

$G$  : 観測系を意味する行列

$\omega$  : 未知所求ベクトル

$\epsilon$  : 観測誤差ベクトル

$E(p)$  :  $p \times p$  の単位行列

$W$  : 重み行列

である。

以上が本報告の理論の適用範囲を規定するものである。なお、(2-8)式に与えられている  $c \cdot d$  は、ここではバイアスエラーと称しているが、より一般的には、エラーという概念を取り除いて、単にバイアス、ないしは、ある一定数と呼ぶべきものである。そして(2-8)式をそのように解釈して、本理論の適用範囲を考えるべきである(本報告、第4章4節、応用例の4.4.2項参照)。しかし、本報告では、イメージを分かり易くするため、これをバイアスエラーと考え、議論を進めていくことにする。

なお、「バイアスエラーを考慮した3次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について」<sup>5)</sup>でも述べてあるが、観測器毎に異なるバイアスエラーが付随している場合は、その平均値分が本報告でいうバイアスエラーである。また、そのバイアスエラーが時間的に変化してもよいことは言うまでもない。

### 2.3 観測方程式の解

最小二乗法によれば、観測方程式(2-13)の解は、次の様になる。

$$\begin{aligned} \omega &= ({}^t G \cdot W \cdot G)^{-1} \cdot {}^t G \cdot W \cdot \lambda \\ &= ({}^t G \cdot G)^{-1} \cdot {}^t G \cdot \lambda \end{aligned} \quad (2-15)$$

また、この解  $\omega$  の推定誤差の分散共分散行列  $\Sigma$  は

$$\Sigma = ({}^t G \cdot W \cdot G)^{-1} = \epsilon^2 ({}^t G \cdot G)^{-1} \quad (2-16)$$

となる。但し

$$\Sigma = V(\omega) = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{dx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{dy} \\ \sigma_{dx} & \sigma_{dy} & \sigma_d^2 \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

である。

ここに  $V$  は分散を示す記号である。

### 2.4 観測系の評価

観測系の評価は、次に示す観測効率  $e$  によって決められる。観測効率  $e$  は次のように定義される。

$$\text{観測効率 } e = \text{精度 } h / \text{経費 } g \quad (2-18)$$

ただし

$$\text{精度 } h = \{\text{Det}(\Sigma)\}^{-1/N} \quad (2-19)$$

$\Sigma$  : (2-16)式に示されている。

$N$  : 行列  $\Sigma$  の大きさ。本報告の場合は

$$N=3$$

経費  $g$  : 未知所求量を得るために要する一切の経費

(尚、上式(2-19)は本報告において基本的に重要な定義式であるが、詳細については文献1), 2), 3)を参照されたい。)

この様に定義された観測効率  $e$  について、この値が大きければ大きい程、良い観測系であるとする。

経費  $g$  については、これは実際には非常に複雑な式によってしか表せられないと考えられるが、本報告では観測器の個数  $p$  のみの関数と単純に考える。そして更に、ここでは、経費  $g$  は観測器の個数  $p$  に比例すると仮定する。すなわち、観測器一個当たりの経費を  $\yen$  と表せば

$$g = g(p) = p \yen \quad (2-20)$$

と表される。従って(2-18)式は

$$e = |\Sigma|^{-1/3} / g(p) = |\Sigma|^{-1/3} / p \yen \quad (2-21)$$

となる。

上式(2-21)は観測器の最適な個数を問題にするとき必要になる(4.1.3)を参照のこと)。しかし、本報告では、観測器の最適な個数の問題については、主なテーマとはしない。本報告の主なテーマは、観測器の個数が同じときの観測系同志を比較評価することである。従って、観測器の個数  $p$  が同一という条件下なら、(2-21)式より、観測効率  $e$  は  $\text{Det}(\Sigma)$  のみの値によって決まる。すな

わち,  $\text{Det}(\Sigma)$  の値が小さければ小さい程, 良い観測系である。

そこで, 次に,  $\text{Det}(\Sigma)$  を計算してみる。(2-16) 式より

$$\begin{aligned}\text{Det}(\Sigma) &= \text{Det}\{\epsilon^2({}^tGG)^{-1}\} \\ &= \epsilon^6 / \text{Det}({}^tGG)\end{aligned}\quad (2-22)$$

ここに, (2-12), (2-13) 式に示すように

$$G = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} = (l, m, c) \quad (2-23)$$

ただし

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ l_p \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdot \\ m_p \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c \\ c \\ \cdot \\ c \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

とした。従って

$$\begin{aligned}\text{Det}({}^tGG) &= \text{Det} \begin{bmatrix} {}^t l \\ {}^t m \\ {}^t c \end{bmatrix} [l \ m \ c] \\ &= \text{Det} \begin{bmatrix} l^2 & lm & lc \\ \cdot & m^2 & mc \\ \cdot & \cdot & c^2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2-25)$$

を得る。

観測誤差  $\epsilon$  は偶発誤差と考えているので, 自己以外のどんな量とも相関しない。(2-22) 式における分母  $\text{Det}({}^tGG)$  は観測誤差  $\epsilon$  と無関係なので,  $\text{Det}(\Sigma)$  を最小にするとは

- (1) 分子  $\epsilon^6$  を最小にする。
- (2) 分母  $\text{Det}({}^tGG)$  を最大にする。

の二項の事に他ならない。ここで, (1) 項については観測誤差  $\epsilon$  を小さくすることであり問題はない。(2) 項については (2-25) 式より, この値を最大ににするような  $(l, m)$  つまり観測軸の方向  $(l_i, m_i)$  の組  $(i=1, 2, \dots, p)$  を見つければ, それが最適観測軸配置の解ということになる。

### 3. 本 論

本章では, 主に, 前章で得られた評価方法を基に議論を展開する。すなわち, この評価方法に基

づいて, 最適観測系に限らず観測系全般について成り立つ諸性質, および, 最適観測系に限って成立する諸性質, 更に, 最適観測系の具体解などについて述べる。

#### 3.1 観測系を等価に保つ変換

前章までの結論として, 観測系を行列  $G$  で表すとする観測器の個数を同一とするときの観測系の評価は  $\text{Det}({}^tGG)$  で表され, この行列式の値が大きければ大きい程, 良い観測系であるということができた。そこで本節では, 観測系  $G$  を変換 (再構成) しても観測系の評価の上では等価な変換について述べる。すなわち, ある観測系  $G$  を他の観測系  $G^*$  ( $G^* \neq G$ ) に変換しても, その評価が変わらない変換, つまり  $\text{Det}({}^tGG) = \text{Det}({}^tG^*G^*)$  なる変換  $G \rightarrow G^*$  について考える。

行列式  $\text{Det}({}^tGG)$  を良く観察するならば, 次のような変換  $V$  および  $U$  が解であることが容易に分かる。

##### 3.1.1 左からの変換 $V(p \times p)$

大きさ  $(p \times p)$  の行列  $V$ , ただし,  ${}^tVV = E(p)$  ( $p \times p$  の単位行列) について,  $G$  への左からの変換

$$G^* = VG \quad (3-1)$$

このような変換 ( $G \rightarrow G^*$ ) に対して,  $\text{Det}({}^tGG)$  は不変である。なぜなら

$${}^tG^*G^* = {}^tG{}^tVVG = {}^tGEG = {}^tGG \quad (3-2)$$

従って

$$\text{Det}({}^tG^*G^*) = \text{Det}({}^tGG) \quad (3-3)$$

これは, 行列式  $\text{Det}({}^tGG)$  の変換  $V$  に対する不変性を示している。

このような変換  $V$  の具体例として, 次のようなものがある。

##### (1) 行と行の入れ替え

行列  $G$  は (2-23) 式に示すように,  $p$  行 3 列の行列であるが, この行列の  $i$  行目と  $j$  行目をそっくりそのまま相互に入れ替える変換, 例えば 1 行目と 2 行目を入れ替える変換は次のように表わされる。

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

このような  $V_1$  に対して  $G$  は次のように変換される。

$$G = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} l_2 & m_2 & c \\ l_1 & m_1 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \\ = G^* = V_1 G \quad (3-5)$$

この変換の意味は、観測器同志を相互に入れ替えることである。

## (2) 負変換

行列  $G$  のある行全ての要素にマイナスを付ける変換で、例えば、1 行目の負変換を考えれば、次のように表わされる。

$$V_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

このような  $V_2$  に対して  $G$  は次のように変換される。

$$G = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & -m_1 & -c \\ l_2 & m_2 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \\ = G^* = V_2 G \quad (3-7)$$

しかし、この変換は、第 3 列目の  $c$  をも変換 ( $\rightarrow -c$ ) している。変換が許されるのは第 2 列目までであり、第 3 列目の  $c$  の値は観測方程式(2-8)で示す通り一定値に固定しなければならず、従って、この変換は考察の対象外である。ただし、次のような変換は考慮すべきである。

$$G = \begin{bmatrix} l_1 & m_2 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -l_1 & -m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \\ = G^* \quad (3-8)$$

この変換の物理的意味は、観測軸の向きを逆転することである。しかし、この変換を行うと、特殊な場合を除き行列式の値が変わる。すなわち、観測系の良さが変わる(バイアスエラーを考慮しない場合は、観測軸を逆転しても観測系の良さは変わらない<sup>6)</sup>)。なお、この変換を行っても観測系の良さが変わらない場合については本節の 3.1.3 項で述べる。また、最適観測系における観測軸の逆転については、3.3.2 項に記す。そこでは、観測軸の逆転によって最適観測系でなくなることが示される。

## 3.1.2 右からの変換 $U(3 \times 3)$

大きさ  $(3 \times 3)$  の行列  $U$  (但し、 $(\text{Det } U)^2 = 1$ ) について、 $G$  への右からの変換

$$G' = GU \quad (3-9)$$

このような変換 ( $G \rightarrow G'$ ) に対して、 $\text{Det } ({}^t G G)$  は不変である。なぜなら

$${}^t G' G' = {}^t U {}^t G G U \quad (3-10)$$

従って

$$\text{Det } ({}^t G' G') = \text{Det } ({}^t U {}^t G G U) \\ = (\text{Det } U)^2 \text{Det } ({}^t G G) = \text{Det } ({}^t G G) \quad (3-11)$$

これは、行列式  $\text{Det } ({}^t G G)$  の変換  $U$  に対する不変性を示している。

このような変換の具体例として、次のようなものがある。

## (1) 回転変換

観測系全体をそっくりそのまま、観測軸同志の位置関係は変えずに、平面上を回転させる変換で、たとえば、次のように表わされる。

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha, & \sin \alpha, & 0 \\ -\sin \alpha, & \cos \alpha, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

ここに、 $\alpha$  は任意の角度である。

このような変換に対して、観測系の良さは不変である。

## (2) 列と列の入れ替え

行列  $G$  において、第 1 列と第 2 列を入れ替える変換で、次のように表わされる。

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

このような変換  $U_2$  に対し、 $G$  は次のように変換される。

$$G = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & l_1 & c \\ m_2 & l_2 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_p & l_p & c \end{bmatrix} \\ = G' = GU_2 \quad (3-14)$$

この物理的意味は、 $X$  軸と  $Y$  軸を入れ替えること、すなわち鏡映変換である。

### (3) 負変換

行列  $G$  において、第 1 列もしくは第 2 列の全ての要素にマイナスを付ける変換で、例えば、1 列目の負変換は次のように表わされる。

$$U_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

このような変換に対して、行列  $G$  は次のように変換される。

$$G = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -l_1 & m_1 & c \\ -l_2 & m_2 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -l_p & m_p & c \end{bmatrix} \\ = G' = GU_3 \quad (3-16)$$

この物理的意味は、 $X$  軸を逆向きにするということで、前項と同じ鏡映変換である。

### 3.1.3 部分観測系の変換

ここでは、観測系を二つの部分に分けて考え、一方の部分観測系に何らかの変換を施す。そして、そのような変換を行っても観測系の評価の上では不変な観測系を考察する。

いま、二つの観測系  $G_1$  および  $G_2$  があって、両者の共通の部分観測系を  $H_0$  とし、異なる部分の部分観測系をそれぞれ  $H_1$  および  $H_2$  とする。すなわち

$$G_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_0 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} H_2 \\ H_0 \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

とする。このとき、たとえ  $G_1 \neq G_2$  であっても、すなわち、 $H_1 \neq H_2$  であっても

$$\text{Det}({}^tG_1 G_1) = \text{Det}({}^tG_2 G_2) \quad (3-18)$$

であるならば、すなわち

$$\text{Det}({}^tH_1 H_1 + {}^tH_0 H_0) = \text{Det}({}^tH_2 H_2 + {}^tH_0 H_0) \quad (3-19)$$

であるならば、二つの観測系  $G_1$  および  $G_2$  は観測系の評価の上では等価である。

上式 (3-19) を満たす一つの十分条件式として

$${}^tH_1 H_1 = {}^tH_2 H_2 \quad (3-20)$$

がある。以下に (3-20) 式を満たす変換について述べる。

さて、ここで次のような性質を持つ部分観測系を考える。

$${}^tH_1 H_1 = (p_1/2) E(3) \quad (3-21)$$

$p_1$  とは行列  $H_1$  の行の個数

このような部分観測系（実は最適観測系なのであるが）の具体例は後述するように、図-1に示されている。

このような部分観測系に次のような変換  $U$  を施す。

$$H_2 = H_1 U \quad (3-22)$$

ただし

$${}^tU U = E(3) \quad (3-23)$$

そうすると

$$\begin{aligned} {}^tH_2 H_2 &= {}^tU {}^tH_1 H_1 U \\ &= {}^tU (p_1/2) E(3) U \\ &= (p_1/2) E(3) {}^tU U \\ &= (p_1/2) E(3) \\ &= {}^tH_1 H_1 \end{aligned} \quad (3-24)$$

となって、この変換は観測系を等価に保つ。このような変換  $U$  の具体例として、次のようなものがある。

#### (1) 回転変換

これは、良く知られているように

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

と表わされる。この変換は平面上の回転を意味する。従って、次のことが言える。

観測系の中に、図-1に示された観測系が部分的に含まれているとき、その部分観測系を任意に回転させても観測系の良さは変わらない。



## (2) 観測軸の逆転

さて、(3-23)式をみたすもう一つの変換として、次のようなものもある。

$$U_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

この変換は、観測軸を逆転させるものである。従って、ある観測系が図-1に示された観測系を部分的に持つとき、その部分観測系の全ての観測軸を逆転させても、観測系の良さは変わらない。

従って、必然的に(上述の変換の後さらに、(3-15)式で示されるような鏡映変換をX軸およびY軸について行う)、上述の部分観測系以外の全部の観測軸を逆転させても、観測系の良さは変わらない。

## (3) 分解

さて、(3-17)式における $H_1$ を後に3.4節で述べる最適観測系とし、 $H_2$ を同じく3.3.1項で述べる分解された最適観測系の和とすると、このような $H_1, H_2$ は(3-20)式を満たすもので、このような変換すなわち分解を行っても観測系の良さは変わらない。

以上、本節での重要な結論を要約すると

- ① 観測軸を逆向きにすると、特殊な場合を除き、観測系の良さが変わる。
- ② 平面内において、観測系を任意に回転させても観測系の良さは変わらない。
- ③ 観測系を鏡映変換しても、観測系の良さは変わらない。

## 3.2 最適観測系であるための必要十分条件

前節までは、最適な観測系および最適でない観測系両方について成立する事柄を述べたが、本節からは、最適な観測系のみについて成り立つ事項を記す。

## 3.2.1 問題の設定

最適観測系であるためには、既に述べたように、 $\text{Det}(GG)$ を最大ならしめる必要がある。そこで、問題を次のように設定する。すなわち、(2-25)式に従って

$$\text{Det} \begin{bmatrix} l^2 & lm & lc \\ \cdot & m^2 & mc \\ \cdot & \cdot & c^2 \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

を最大にする $(l, m)$ の条件式を求める。

ここに

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ l_p \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdot \\ m_p \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

ただし

$$(l_i)^2 + (m_i)^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (3-29)$$

であるので

$$l^2 + m^2 = \sum_{i=1}^p \{(l_i)^2 + (m_i)^2\} = p \quad (3-30)$$

となることに注意する。

## 3.2.2 最適解であるための必要十分条件

アダマールの不等式により、次のことがいえる。

$$\text{Det} \begin{bmatrix} l^2 & lm & lc \\ \cdot & m^2 & mc \\ \cdot & \cdot & c^2 \end{bmatrix} \leq l^2 m^2 c^2 \quad (3-31)$$

ただし、等号が成り立つのは

$$lm = 0 \quad (3-32)$$

$$lc = 0 \quad (3-33)$$

$$mc = 0 \quad (3-34)$$

のときである。

ところで、(3-30)式の条件下では、(3-31)式における $l^2 m^2$ の値は

$$l^2 m^2 \leq (p/2)^2 \quad (3-35)$$

となる。ここで、等号が成り立つのは

$$l^2 = m^2 \quad (3-36)$$

のときである。

従って、(3-35)式を(3-31)式に代入すれば

$$\text{Det} \begin{bmatrix} l^2 & lm & lc \\ \cdot & m^2 & mc \\ \cdot & \cdot & c^2 \end{bmatrix} \leq (p/2)^2 c^2 \quad (3-37)$$

を得る。この場合、等号が成り立つのは(3-32)、(3-33)、(3-34)、(3-36)式が共に満たされているときである。すなわち、整理すると

条件 1

$$(l_i)^2 + (m_i)^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (3-38)$$

条件 2

$$lm = 0 \quad (3-39)$$

条件 3

$$l^2 = m^2 (= p/2) \quad (3-40)$$

条件 4

$$lc = mc = 0 \quad (3-41)$$

を満たす  $l, m$  がもし存在するならば、それは上述の行列式  $\text{Det}({}^1GG)$  を最大にする最適観測軸配置のひとつである。なお、上記四条件を次のようにまとめることもできる。(2-23) 式で定義された  $G$  について、条件 1 の下に

$${}^1GG = (p/2) E(3) \quad (3-42)$$

となることが、最適観測軸配置であるための必要十分条件である。

ただし

$$c^2 = p/2 \quad (\text{すなわち } c^2 = 1/2) \quad (3-43)$$

とした ( $c$  をこのような値にすると後の計算にも便利である。このことは既に 2.2 節で言及した)。

たとえば、 $p=3$  の場合

$$(l, m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

また、 $p=4$  の場合

$$(l, m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

は上記四条件を全てみたすので最適解の一つである。更に、 $p=5$  の場合

$$l_i = \cos\{2\pi(i-1)/5\} \quad (3-46)$$

$$m_i = \sin\{2\pi(i-1)/5\} \quad (3-47)$$

$$(i=1, 2, \dots, 5)$$

が上記四条件を全てみたすことは容易に確認できる (詳しくは 3.4 節を参照のこと)。

$p \geq 6$  の場合の最適解については、次節に示すように、全ての  $p$  について存在することが分かっている。従って、 $p \geq 3$  なる全ての  $p$  について、上記四条件が、最適観測軸配置であるための必要十分条件である。

ところで、バイアスエラーを考慮しない場合の必要十分条件は、上記四条件のうちの前半の三条

件に一致する<sup>6)</sup>。従って、バイアスエラーを考慮した本報告での最適解は、いうまでもなく、前半の三条件を満たしているので、バイアスエラーを考慮しない場合の最適解でもある。

なお、バイアスエラーを考慮すると必要になる条件 4 によって、バイアスエラー (観測器毎にバイアスエラーの値が異なる場合はその平均値)<sup>5)</sup> が極めて有効に除去できるのであるが、それについては後 (4.1.1 項) に明らかにする。

### 3.2.3 四条件を満たす解の存在について

$p \geq 6$  の場合の解については、次節の最適解同志の和の規則④によって、全ての自然数  $p \geq 6$  について、少なくとも、ひとつの解が存在することを示すことができる。すなわち

$p=6$  の場合

$$6 = 3 + 3$$

従って、④により (次節参照のこと)  $p=3$  のときの最適解 (既述) を二つ合わせたものは  $p=6$  のときの最適解である。

$p=7$  の場合

$$7 = 3 + 4$$

従って、 $p=3$  のときの最適解 (既述) と  $p=4$  のときの最適解 (既述) を合わせたものは  $p=7$  のときの最適解である。以上のことを  $6 = 3 \oplus 3$ ,  $7 = 3 \oplus 4$  と表わすことにする。

以下同様に

$$p=8 = 4 \oplus 4$$

$$p=9 = 3 \oplus 3 \oplus 3$$

$$p=10 = 3 \oplus 3 \oplus 4$$

$$p=11 = 3 \oplus 4 \oplus 4$$

.....

このようにして、全ての自然数  $p \geq 6$  は 3, または、4 のいずれかの和で表わされることが分かる。従って、全ての自然数  $p \geq 3$  について、少なくとも一つの最適解が存在することが証明できる。

## 3.3 最適観測系の一般的性質

本節では、最適観測系に限って成立する、一般的性質について述べる。

### 3.3.1 最適解同志の和の規則

前節に述べた四条件の下における最適解同志の

和の規則を次に示す。

観測系  $G_1$  (観測軸の個数  $p_1 \geq 3$ ) が最適解であるための条件式 (3-42) を満たし、且つ、観測系  $G_2$  (観測軸の個数  $p_2 \geq 3$ ) が、同じく条件式 (3-42) を満たすなら、その和、すなわち

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

(観測軸の個数  $p = p_1 + p_2 \geq 6$ )

も、上述の条件式 (3-42) を満たす。このことを、次に明らかにする。

(3-48) 式より

$${}^tGG = {}^tG_1 G_1 + {}^tG_2 G_2 \quad (3-49)$$

$G_1$ ,  $G_2$  が共に (3-42) 式を満たすので

$${}^tG_1 G_1 = (p_1/2) E(3) \quad (3-50)$$

$${}^tG_2 G_2 = (p_2/2) E(3) \quad (3-51)$$

従って、(3-49) 式に (3-50), (3-51) 式を代入して

$$\begin{aligned} {}^tGG &= \{(p_1 + p_2)/2\} E(3) \\ &= (p/2) E(3) \end{aligned} \quad (3-52)$$

を得る。これは、 $G$  が (3-42) 式を満たしていることを示している。従って、上記観測系  $G$  は、最適解の一つである。この意味は

- ④  $p_1$  個からなる最適観測軸配置と  $p_2$  個からなる最適観測軸配置とを任意の位置関係に合わせたものは、 $p_1 + p_2$  個からなる最適観測軸配置の一つである。

ということである。

このことは、必然的に、複合解および基本解の概念を生ずる。すなわち、複合解とは二つ以上の解の結合したものであり、基本解とは他の解の結合によっては表わされない解のことである。なお、後の便宜のため、複合解を、さらに重合解と混合解とに分ける。重合解とは、同一の基本解が複数個重なった複合解のことであり、混合解とは、重合解以外の複合解をいう。

### 3.3.2 観測軸の逆転

いま最適な観測系  $G$  を次のように置く。

$$G = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_j & m_j & c \\ l_{j+1} & m_{j+1} & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 & c_1 \\ F_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (3-53)$$

$G$  は最適観測系なので、(3-42) 式が成り立つ。

すなわち

$$\begin{aligned} {}^tGG &= \begin{bmatrix} {}^tF_1 F_1 + {}^tF_2 F_2 & {}^tF_1 c_1 + {}^tF_2 c_2 \\ \cdot & p/2 \end{bmatrix} \\ &= (p/2) E(3) \end{aligned} \quad (3-54)$$

従って

$${}^tF_1 c_1 + {}^tF_2 c_2 = 0 \quad (3-55)$$

であることに注意する。

ここで、部分的に観測軸を逆転させた観測系を考える。すなわち

$$G' = \begin{bmatrix} -F_1 & c_1 \\ F_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

という観測系を考える。そうすると

$$\begin{aligned} {}^tG' G' &= \begin{bmatrix} {}^tF_1 F_1 + {}^tF_2 F_2 & -{}^tF_1 c_1 + {}^tF_2 c_2 \\ \cdot & p/2 \end{bmatrix} \\ &= (p/2) E(3) \end{aligned} \quad (3-57)$$

ところで、(3-55) 式より

$${}^tF_2 c_2 = -{}^tF_1 c_1 \quad (3-58)$$

従って、(3-57) 式における右上の部分は

$$-{}^tF_1 c_1 + {}^tF_2 c_2 = -2{}^tF_1 c_1 \quad (3-59)$$

となる。ここで、 ${}^tF_1 c_1$  の値は、部分観測系  $F_1$  が最適基本解 ( $p_1 = 4$  の場合を除く。  $p_1 = 4$  の場合は、 $F_1$  が向かい合う 2 本の観測軸のとき  ${}^tF_1 c_1 = 0$  となる) の中の一部分である場合は 0 とならない。つまり

$${}^tF_1 c_1 \neq 0 \quad (3-60)$$

である。ということは、(3-56) 式で示された観測系  $G$  が (3-42) 式を満たさず、この観測系が最適でないことを意味している。従って、次のことが言える。

最適観測系において、それが基本解である場合、全部ではなく部分的に、いくつか観測軸を逆転させると最適観測系でなくなる (ただし、当然のことながら、 $p = 4$  の基本解のときで、向かい合う 2 本の観測軸を互いに逆転させる場合を除く)。

### 3.4 最適観測軸配置

最適観測軸配置を求めるには  $\text{Det}({}^tGG)$  を最大ならしめる  $G$  すなわち  $(l, m)$  つまり、観測軸  $(l_i,$

$m_i$  の組 ( $i=1, 2, \dots, p$ ) を求めればよいことは既に述べた。そして、3.2 節で記した四条件を満たす ( $l, m$ ) がその解であることも述べた。ここでは、その具体解を求める。

条件 1 より

$$l_i = \cos \theta_i, \quad m_i = \sin \theta_i \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (3-61)$$

として良い。

そうすると条件 2 は

$$\sum_{i=1}^p \cos \theta_i \cdot \sin \theta_i = 0 \quad (3-62)$$

となり、条件 3 は

$$\sum_{i=1}^p \cos^2 \theta_i = \sum_{i=1}^p \sin^2 \theta_i \quad (3-63)$$

となり、更に条件 4 は

$$\sum_{i=1}^p \cos \theta_i = 0 \quad (3-64)$$

$$\sum_{i=1}^p \sin \theta_i = 0 \quad (3-65)$$

となる。

(3-62) 式は書き換えると

$$\sum_{i=1}^p \sin (2\theta_i) = 0 \quad (3-66)$$

となり、同じく (3-63) 式は

$$\sum_{i=1}^p \cos^2 \theta_i - \sum_{i=1}^p \sin^2 \theta_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^p \cos (2\theta_i) = 0 \quad (3-67)$$

となる。つまり (3-64), (3-65), (3-66) および (3-67) 式を満たす  $\theta_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) を見つければ、それが最適解ということになる。この解の一つは

$$\theta_i = 2\pi(i-1)/p \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (3-68)$$

と表わされる (これが解であることは文献6)の付録を参照されたい)。この解を図示すれば、図-1

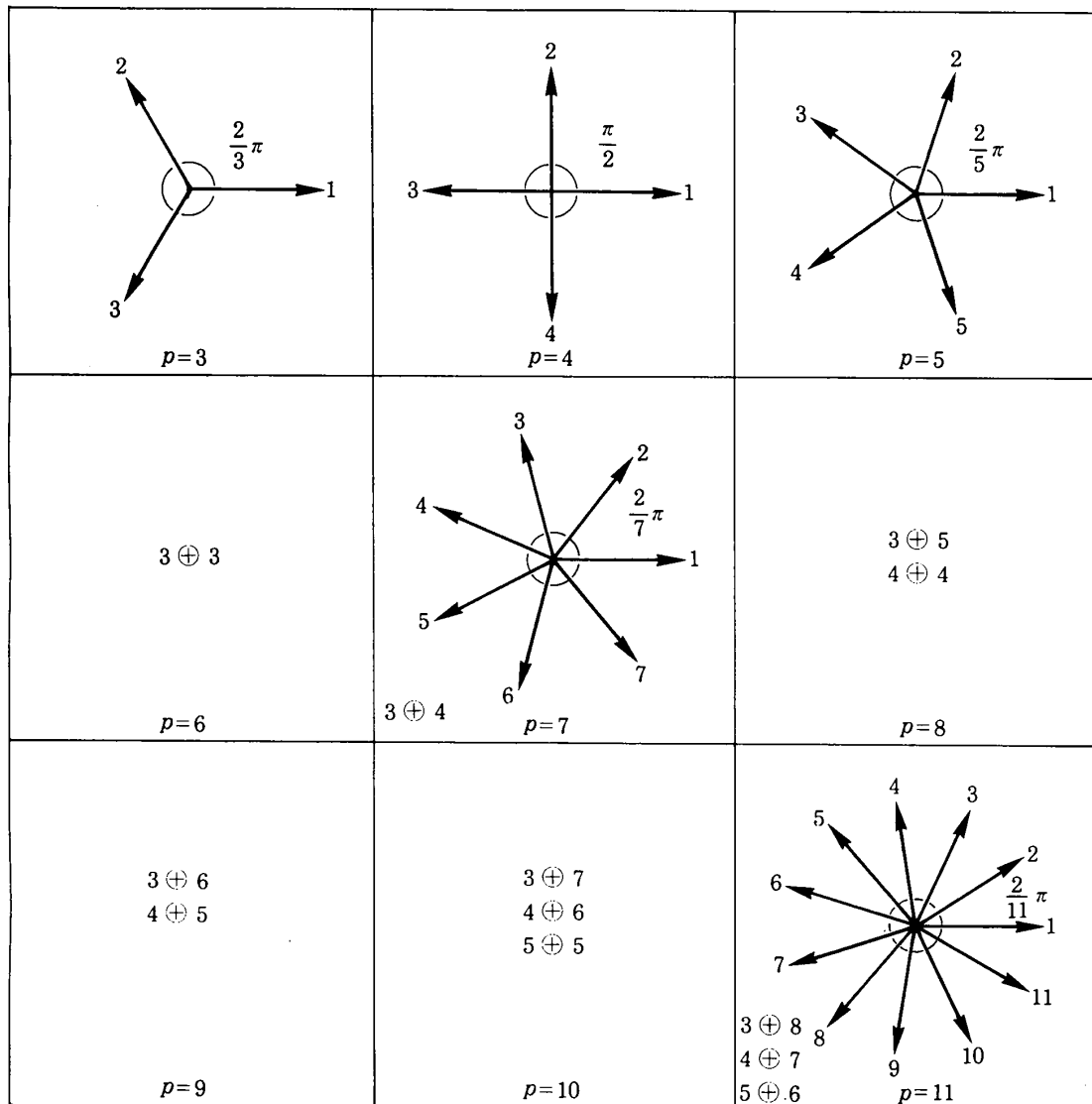


図-1

のようになる。図中、例えば  $p=7$  とは、観測軸の個数が7個のときの最適観測軸配置を意味し、また、 $3\oplus 4$  とは  $p=3$  のときの最適観測軸配置と  $p=4$  のときの最適観測軸配置とを任意の位置関係に合わせた複合解であることを示す。

また、たとえば、 $p=6$  のときの最適観測軸配置は(3-68)式で表わされる形として、図-2(a)に示すものがあるが、これは同図中の1と3と5の観測軸の組が  $p=3$  のときの最適観測軸配置であり、2と4と6の観測軸の組が同じく  $p=3$  のときの最適観測軸配置であって、これは  $p=3$  のときの最適観測軸配置が二つ特殊な位置に重なった重合解であり基本解ではない。

同様に、 $p=8$  のときの最適観測軸配置は(3-68)式で表わされる形として、図-2(b)に示すものがあるが、これは同図中の1と3と5と7の観測軸の組が  $p=4$  のときの最適観測軸配置であり、2と4と6と8の観測軸の組が同じく  $p=4$  のときの最適観測軸配置であって、これは  $p=4$  のときの最適観測軸配置が二つ特殊な位置に重なった重合解であり基本解ではない。

このようなことは  $p$  が素数でないとき ( $p=4$  を除く) に起こる。すなわち、 $p$  が4以外の素数でないときは、必ず重合解が存在する。また、 $p$  が素数、もしくは、4のとき、重合解(混合解ではない)は存在しない。すなわち、混合解か基本解のいずれかである。以上の事柄から

- ⑤ 基本解は、観測軸の個数  $p (\geq 3)$  が素数のとき、および、 $p=4$  のときのみ存在し、そのときの配置形は、360度を  $p$  等分する方向に観測軸を配置する形で、図-1において、 $p=3, 4, 5, 7, 11$  の場合に示されているような形である。観測軸の個数  $p (\geq 3)$  が素数でないとき、および、 $p=4$  でないときは、複合解しか存在しない。

## 4. 補 論

前章では、観測系一般の性質と最適観測系のための性質、および、最適観測系の具体解などを求めたが、本章では、最適観測系を採用した場合、未知所求量等はどのように求められるか、また、故

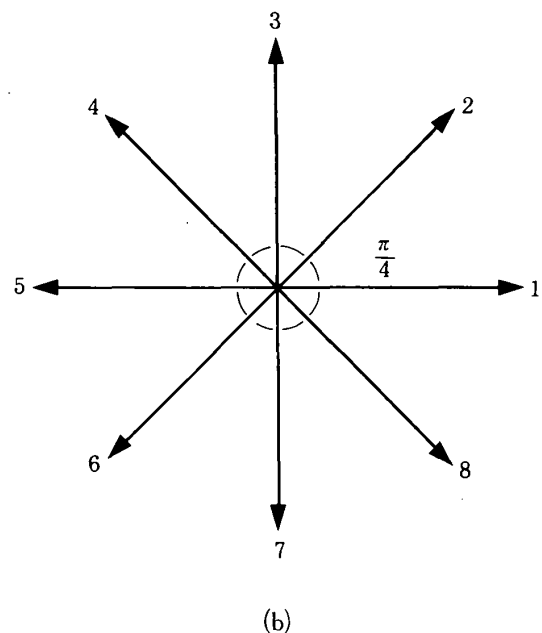
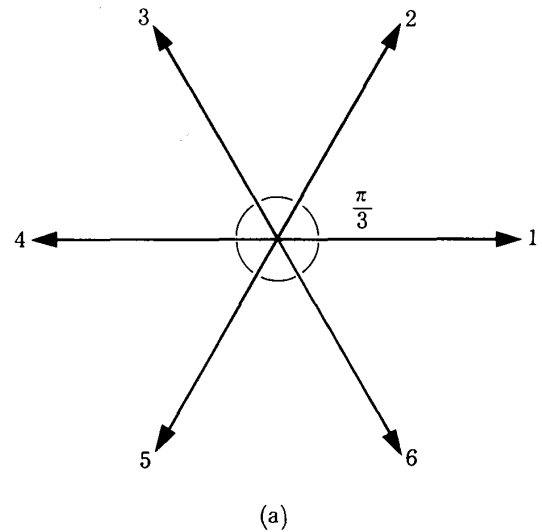


図-2

障があるとき、および、観測器の配置に誤差があるときどうなるか等について述べ、最後に本理論の応用例にも言及する。

### 4.1 最適観測系における観測方程式の解

前節では最適観測系を求めたが、本節では、その最適系によって得られたデータ(観測値)から未知所求量を計算し、さらに、未知所求量の精度および観測効率などについて記述する。

#### 4.1.1 未知所求量の解

未知所求量  $\omega$  の解は既に一般的に(2-15)式によって示されている。ここでは、最適系における解

をより具体的に表す。

(2-15)式をもう一度ここに書き示す。

$$\omega = ({}^tG \cdot G)^{-1} \cdot {}^tG \cdot \lambda \quad (4-1)$$

ここに

$$G = (l \ m \ c) = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

ただし、最適観測系においては 3.2.2 項に示してあるように

$$lm = 0 \quad (4-3)$$

$$l^2 = m^2 = c^2 = p/2 \quad (4-4)$$

$$lc = mc = 0 \quad (4-5)$$

従って、(3-42)式にも示す通り

$${}^tGG = (p/2) E(3) \quad (4-6)$$

であり、ゆえに (4-1) 式は

$$\omega = (2/p) {}^tG \lambda = (2/p) \begin{bmatrix} l \lambda \\ m \lambda \\ c \lambda \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

これが最適観測系における未知所求量の解であり、この式に従って未知所求量を計算できる。また、これに伴う誤差の分散共分散については (2-16) 式により (4-6) 式を考慮して

$$\Sigma = (2\varepsilon^2/p) E(3) \quad (4-8)$$

となる。

なお、次のことに注意すべきである。

観測値  $\lambda$  はバイアスエラーを考慮して

$$\lambda = \lambda_0 + c\Delta \quad (4-9)$$

と表わされ、上式を (4-7) 式に代入して

$$\omega = (2/p) \begin{bmatrix} l \lambda_0 + \Delta \cdot lc \\ m \lambda_0 + \Delta \cdot mc \\ c \lambda_0 + \Delta \cdot c^2 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

となる。

ところが、最適観測系においては (4-5) 式が成り立つので

$$\omega = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \Delta \end{bmatrix} = (2/p) \begin{bmatrix} l \lambda_0 \\ m \lambda_0 \\ c \lambda_0 + \Delta \cdot c^2 \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

となり  $x, y$  においては、バイアスエラー  $c\Delta$  の影響が完全に除去される<sup>5)</sup>。このことは、まえがき、及び 3.2.2 項のところで既に言及した。

このことについて、もう少し説明を加えれば、図-1 の最適観測系のうち  $p=4$  の場合を取り上げると分かり易い。すなわち、いま、未知所求量  $x, y$  が実は共に 0 と仮定する。このとき、各観測軸の出力が最終的には電圧で測られるとして、いずれの出力も共に 0 ではなく 5 ボルトとする。そうすると、最尤法または最小二乗法によって、あるいは直感でも分かることであるが (左右上下の値が相殺され)、これらの出力から未知所求量  $x, y$  を解くと、 $x=y=0$  が得られる。これは真値である。ところが、バイアスエラーを考慮しない場合の観測系・同図  $p=4$  における観測軸 1 および 2 だけの系・の場合、観測軸 1, 2 共 5 ボルトの出力であると、 $x=y=5$  (ボルト) となって、上記の系のように  $x=y=0$  とはならず、バイアスエラーを分別除去できない訳である。逆に、本報告の最適観測系ではバイアスエラーを完全に分離除去できるということである。

では、ここで言うバイアスエラーの具体的な形は何か、と言え、電源電圧の変動によるゼロ点の移動とか、電磁干渉等によるノイズの同時付加などが考えられる。従って、上記のような最適観測系を編成すれば、これらのアクシデントに強い観測系ができる可能性がある。

#### 4.1.2 精 度

前節で誤差の分散共分散を求めてあるので、精度  $h$  は (2-19) 式に従って簡単に求まる。(2-19) 式を次に再び掲げる。

$$h = \{\text{Det}(\Sigma)\}^{-1/3} \quad (4-12)$$

従って上式に (4-8) 式を代入すれば

$$h = \{(2\varepsilon^2/p)^3\}^{-1/3} = p/(2\varepsilon^2) \quad (4-13)$$

となる。これは、精度  $h$  が観測器の個数  $p$  に比例することを示している。

#### 4.1.3 観測効率

観測効率  $e$  は (2-18), (2-20) 式から

$$e = h/p\% \quad (4-14)$$

と表わされる。

特に観測軸の個数  $p$  のときの観測効率を  $e(p)$  と表わせば、上式に (4-13) 式を代入することにより

$$e(p) = p/(2\varepsilon^2 p\%) = 1/(2\varepsilon^2 \%) \quad (4-15)$$

となる。本報告の場合、 $\%$  の値は  $p$  によらず一定

と考えているので、観測効率 $e(p)$ は観測器の個数 $p$ に無関係となる。言い換えれば、 $p_1$ 個の観測軸よりなる最適観測軸配置も、 $p_2$  ( $p_2 \neq p_1$ ) 個の観測軸よりなる最適観測軸配置も、その観測効率は同じである。

本節での重要な結論は次の通りである。

- ⑥ 最適観測系においては、バイアスエラー（各観測器毎にバイアスエラーの値が異なる場合はその平均値分）<sup>5)</sup>を完全に除去できる。
- ⑦ 最適観測系より得られる未知所求量の精度は、観測器の個数に比例する。また、最適観測系においては、観測効率は、観測器の個数によらず、同一である。

#### 4.2 故障の考慮

冗長型観測系においては、いくつかの観測器が故障しても、その故障観測器が摘出できさえすれば

- (1) 故障観測器のデータを除外する（正常な観測器の位置はそのまま）。
- (2) 故障観測器を除外して、残った正常な観測器を最適観測系に再編成する。

等の方法により精度を向上させることができる。たとえば、図-1に示す $p=5$ の場合において番号4の観測器が故障した場合、その故障観測器のデータを用いず、残りの1, 2, 3, 5の観測器より得られるデータから未知所求量を求めるというのが上記(1)の方法である。また、(2)の方法とは残りの正常な4個の観測器1, 2, 3, 5を図-1に示す $p=4$ の場合の最適系に編成しなおして、それより得られるデータを基に未知所求量を求めるという方法である。

言うまでもなく(2)の方法の方が精度が良くなるけれども再編成の手間がかかる。本報告では、(1)の場合の未知所求量の解とその精度および観測効率について述べる。

観測軸の数 $p$ の観測系を $G^p$ とし、そのうち、 $n$ 個故障した場合の、故障した部分を $H^n$ 、故障してない部分を $H^{p-n}$ と表わす。そうすると

$$G^p = \begin{bmatrix} H^n \\ H^{p-n} \end{bmatrix} \quad p-n \geq 3 \quad (4-16)$$

と表わされる。

また、故障した観測器のデータを用いないということは

$$H^n = O \quad (n \times 3 \text{ の零行列}) \quad (4-17)$$

とおくことに他ならない。

このようにしたときの観測系を

$$G^{p-n} = \begin{bmatrix} O(n \times 3) \\ H^{p-n} \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

と記すことにする。

このとき、未知所求量 $\omega$ および、その分散共分散 $\Sigma$ は(2-15)式および(2-16)式により

$$\omega = ({}^t G^{p-n} G^{p-n})^{-1} {}^t G^{p-n} \lambda \quad (4-19)$$

$$\Sigma = \varepsilon^2 ({}^t G^{p-n} G^{p-n})^{-1} \quad (4-20)$$

となる。

上記の二式の要である $({}^t G^{p-n} G^{p-n})^{-1}$ の部分は、次のように計算することができる。

定義式(4-18)より、(4-16)式を考慮して

$$\begin{aligned} {}^t G^{p-n} G^{p-n} &= {}^t H^{p-n} H^{p-n} \\ &= {}^t G^p G^p - {}^t H^n H^n \end{aligned} \quad (4-21)$$

となる。

観測系 $G^p$ を最適系と仮定すると、上式(4-21)は(4-9)式により

$${}^t G^{p-n} G^{p-n} = (p/2) E(3) - {}^t H^n H^n \quad (4-22)$$

を得、公式{正則行列 $A(p \times p)$ ,  $B(q \times q)$ , 行列 $U(p \times p)$ ,  $V(q \times q)$ に対して $(A + UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U (B^{-1} + V A^{-1} U)^{-1} V A^{-1}$ }より

$$\begin{aligned} ({}^t G^{p-n} G^{p-n})^{-1} &= (2/p) E(3) \\ &\quad + (2/p) {}^t H^n \{ E(n) - (2/p) H^n {}^t H^n \}^{-1} H^n \\ &\quad \times H^n (2/p) \end{aligned} \quad (4-23)$$

を得る。

また、{正則行列 $A(p \times q)$ ,  $B(q \times p)$ に対して $|E(p) + AB| = |E(q) + BA|$ }より、(4-22)式は

$$|{}^t G^{p-n} G^{p-n}| = (p/2)^3 |E(n) - (2/p) H^n {}^t H^n| \quad (4-24)$$

となる。

##### 4.2.1 1個故障の場合

これは上述した諸式における $n$ の値が $n=1$ の場合で、 $i$ 番の観測器が故障したとすれば(4-16)式における $H^n$ は

$$H^1 = (l_i, m_i, c) \quad (4-25)$$

と表わされ、更に、これを

$$(l_i, m_i, c) = {}^t h_i \quad (4-26)$$

と置く。そうすると、(4-23)式は

$$\begin{aligned} ({}^t G^{p-n} G^{p-n}) &= (2/p) E(3) \\ &+ (2/p) h_i \{1 - (2/p)(3/2)\}^{-1} {}^t h_i (2/p) \\ &= (2/p) E(3) + (2/p) \{2/(p-3)\} h_i {}^t h_i \end{aligned} \quad (4-27)$$

となる。

ここに、(4-26)式により

$$h_i {}^t h_i = \begin{bmatrix} (l_i)^2 & l_i m_i & c l_i \\ \cdot & (m_i)^2 & c m_i \\ \cdot & \cdot & c^2 \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

また、(4-24)式および(4-25)式より

$$|{}^t G^{p-1} G^{p-1}| = (p/2)^3 \{1 - (3/p)\} \quad (4-29)$$

を得る。

この式(4-29)の特徴は、観測器の番号  $i$  がとれてしまっていることである。つまり、観測器によらず一定ということである。

#### (1) 未知所求量 $\omega$

未知所求量  $\omega$  は、(4-19)式に(4-27)式を代入して得られる。すなわち

$$\omega = (2/p) \{E(3) + 2 h_i {}^t h_i / (p-3)\} {}^t G^{p-1} \lambda \quad (4-30)$$

となる。

#### (2) 精度 $h$

精度  $h$  は(2-19)式により与えられている。 $p$  個の観測器のうち、観測器  $i$  を用いないときの精度を  $h(p)_i$  と表わせば、(2-19)式に、(4-20)式および(4-29)式を代入して(ただし、 $n=1$ とする)

$$h(p)_i = \varepsilon^{-2} (p/2) \{(p-3)/p\}^{1/3}$$

を得る。

上式より分かることは、この場合の精度  $h(p)_i$  は観測器  $i$  によらないということである。

#### (3) 観測効率

観測効率  $e$  については(2-18)式に示されている。特に、 $p$  個の観測軸よりなる最適観測軸配置において、観測軸  $i$  が故障した場合の観測効率を  $e(p)_i$  と表わせば(2-20)式に注意して、(4-31)式より

$$e(p)_i = \{(p-2)/p\}^{1/3} / (2\varepsilon^2 \mp) \quad (4-32)$$

となる。

この式(4-32)は  $p$  が増大するにつれて、 $e(p)_i$  も増大することを示している。つまり、観測軸の個

数  $p$  が大きければ大きい程、一個故障の場合の観測効率は良くなっていくことを示している。また、観測効率  $e(p)_i$  が、故障観測軸  $i$  によらないことは、精度  $h(p)_i$  の場合と同様である。

#### 4.2.2 2個故障の場合

2個故障の場合とは、 $n=2$  の場合のことで、 $i$  番および  $j$  番の観測器が故障したとすれば、(4-16)式等における  $H^n$  は

$$H^2 = \begin{bmatrix} l_i, m_i, c \\ l_j, m_j, c \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

と表わされる。

従って、ベクトル  $(l_i, m_i)$  と  $(l_j, m_j)$  とのなす角を  $\theta_{ij}$  とすると、(4-8)式に注意して

$$H^2 {}^t H^2 = \begin{bmatrix} 1+1/2, \cos\theta_{ij}+1/2 \\ \cdot, 1+1/2 \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

を得る。従って、(4-23)式の逆行列の部分は、上式(4-34)を考慮して

$$\begin{aligned} E(2) - (2/p) H^2 {}^t H^2 \\ = \begin{bmatrix} 1-3/p, -(2/p)\cos\theta_{ij}-1/p \\ \cdot, 1-3/p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-35)$$

となり、更に

$$\alpha = 1-3/p \quad (4-36)$$

$$\beta = -(2/p)\cos\theta_{ij}-1/p \quad (4-37)$$

と置くと

$$\begin{aligned} \{E(2) - (2/p) H^2 {}^t H^2\} \\ = \begin{bmatrix} \alpha/(\alpha^2-\beta^2), -\beta/(\alpha^2-\beta^2) \\ \cdot, \alpha/(\alpha^2-\beta^2) \end{bmatrix} = M \end{aligned} \quad (4-38)$$

となる。

従って、(4-23)式および(4-38)式を考慮して

$$({}^t G^{p-2} G^{p-2})^{-1} = (2/p) \{E(3) + (2/p) {}^t H^2 M H^2\} \quad (4-39)$$

を得る。

また、(4-24)式および(4-34)式より

$$\begin{aligned} |{}^t G^{p-2} G^{p-2}| &= (p/2)^3 \{[(p-3)/p]^2 \\ &- \{1/p + (2/p)\cos\theta_{ij}\}^2\} \end{aligned} \quad (4-40)$$

を得る。

#### (1) 未知所求量 $\omega$

未知所求量  $\omega$  は、(4-19)式に(4-39)式を代入して



$$\omega = (2/p)\{E(3) + (2/p)^4 H^2 M H^2\}^4 G^{p-2} \lambda \quad (4-41)$$

となる。

#### (2) 精度

$p$ 個の観測軸のうち、観測軸  $ij$  を用いないときの精度を  $h(p)_{ij}$  と表せば、(2-19)式より(4-20), (4-40)式を考慮して

$$h(p)_{ij} = \epsilon^{-2} (p/2) \{(1-3/p)^2 - (2/p)^2 (\cos \theta_{ij} + 1/2)^2\}^{1/3} \quad (4-42)$$

となる。

#### (3) 観測効率

$p$ 個の観測軸よりなる最適観測軸配置において、観測軸  $i$  および  $j$  が故障した場合の観測効率を  $e(p)_{ij}$  と表せば(2-18), (2-20)式および(4-42)式により

$$e(p)_{ij} = h(p)_{ij} / p \nexists \\ = \{(1-3/p)^2 - (2/p)^2 (\cos \theta_{ij} + 1/2)^2\}^{1/3} / (2\epsilon^2 \nexists) \quad (4-43)$$

となる。

この式(4-43)は、 $p$ が増大するにつれて観測効率  $e(p)_{ij}$  も増大することを示している。

### 4.3 配置誤差の考慮

#### 4.3.1 配置誤差

通常の観測方程式は(2-8)式に示すように

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_p \end{bmatrix} \quad (4-44)$$

と表わされる。

ここに  $\epsilon_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) は観測機器に起きる観測誤差と考える。ただし

$$E(\epsilon_i \epsilon_j) = \epsilon^2 \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots, p) \quad (4-45)$$

とした(2-11)式)。言うまでもなく、上式には配置誤差は含まれていない。

観測器の位置は、この場合、観測軸の方向を表わす  $(l_i, m_i)$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) によって示されているので、配置誤差を考慮するには、上記の  $(l_i, m_i)$  を次のように変換して考えればよい。

$$l_i \rightarrow l_i + \delta_{li} \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (4-46)$$

$$m_i \rightarrow m_i + \delta_{mi} \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (4-47)$$

ここに、 $\delta_{li}, \delta_{mi}$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) はそれぞれ、観測軸の取付方向の誤差の  $x, y$  成分である。ただし、それらは互いに無相関で、誤差の程度は等しいものとする。すなわち

$$E(\delta_{li} \cdot \delta_{lj}) = \delta^2 \cdot \delta_{ij} \quad (4-48)$$

$$E(\delta_{mi} \cdot \delta_{mj}) = \delta^2 \cdot \delta_{ij} \quad (4-49)$$

$$E(\delta_{li} \cdot \delta_{mj}) = 0 \quad (i, j=1, 2, \dots, p) \quad (4-50)$$

とする。

#### 4.3.2 配置誤差を考慮した観測方程式

配置誤差を考慮した観測方程式は(4-1)式における  $(l_i, m_i)$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) に(4-46), (4-47)式に示すような変換を行ったものである。つまり

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + \delta_{l1} & m_1 + \delta_{m1} & c \\ l_2 + \delta_{l2} & m_2 + \delta_{m2} & c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p + \delta_{lp} & m_p + \delta_{mp} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_p \end{bmatrix} \quad (4-51)$$

となる。上式を書き換えて誤差の部分をもとめれば

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \cdot \delta_{l1} + y \cdot \delta_{m1} + \epsilon_1 \\ x \cdot \delta_{l2} + y \cdot \delta_{m2} + \epsilon_2 \\ \vdots \\ x \cdot \delta_{lp} + y \cdot \delta_{mp} + \epsilon_p \end{bmatrix} \quad (4-52)$$

となる。そこで、まとめられた誤差の部分を

$$\epsilon'_i = x \cdot \delta_{li} + y \cdot \delta_{mi} + \epsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (4-53)$$

と記すことにする。そうすると(4-52)式は

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \\ \vdots \\ \epsilon'_p \end{bmatrix} \quad (4-54)$$

と書き表される。ここに、誤差  $\epsilon'_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) は (4-45), (4-48), (4-49) および (4-50) 式より

$$\begin{aligned} E(\epsilon'_i \epsilon'_j) &= (x^2 \delta^2 + y^2 \delta^2 + \epsilon^2) \delta_{ij} \\ &= (v^2 \delta^2 + \epsilon^2) \delta_{ij} \quad (4-55) \\ &\quad (i, j=1, 2, \dots, p) \end{aligned}$$

ただし

$$x^2 + y^2 = v^2 \quad (4-56)$$

とした。さて

$$\epsilon' = (v^2 \delta^2 + \epsilon^2)^{1/2} \quad (4-57)$$

と置けば、(4-54) 式は

$$\begin{aligned} E(\epsilon'_i \epsilon'_j) &= (\epsilon')^2 \delta_{ij} \quad (4-58) \\ &\quad (i, j=1, 2, \dots, p) \end{aligned}$$

となる。従って、配置誤差を考慮した場合の観測方程式は (4-54) 式で表わされ、この式は観測誤差のみを考慮した観測方程式 (2-8) と誤差の大きさが多少異なるだけで、本質的に異なるところはない。つまり、(4-54) 式から出発して得られる諸結論も (2-8) 式から出発して得られる諸結論も全く同一になる。すなわち

- ⑧ 配置誤差を考慮しても、上述した諸結論は変わらない。

#### 4.4 応 用 例

本節では、今まで述べてきた理論の具体的な応用例について記す。

##### 4.4.1 光線方向検出器

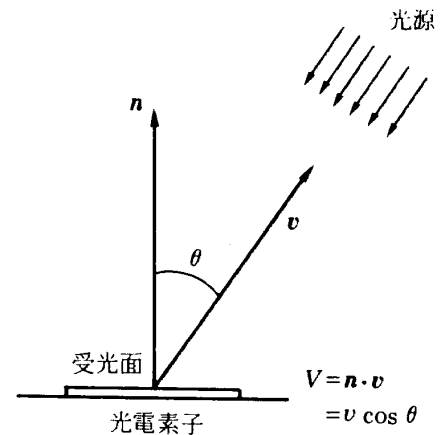
これは、複数個の光電素子を立体的に配置し、各素子からの出力を活用して、光源の方向を検出する装置である。この装置は精度はそれ程望めないが、簡易に広域の測定が出来る特徴がある。ここでは、話を簡単にするため、次に出て来るベクトルは、全て、ある二次元平面の中にあるものとする。

さて、光電素子の受光面の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とし、素子から光源へ向かうベクトルを  $\mathbf{v}$  とする。ただし、ベクトル  $\mathbf{v}$  の絶対値  $v$  は光線の強さを示すものとする。このとき、光電素子の出力を  $V$  とすると

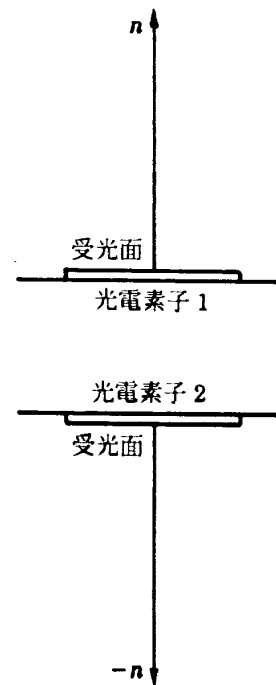
$$V = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (4-59)$$

と表わされる (図-3(a) 参照)。

つぎに、受光面の法線ベクトルが互いに逆向き



(a)



(b)

図-3

の2個の光電素子一対について考える (図-3(b) 参照)。表側の素子の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とし、その出力を  $V_1$  とする。従って、裏側の素子の法線ベクトルは  $-\mathbf{n}$  となり、又、その出力を  $V_2$  とする。このとき、次式が成り立つ。

$$V_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (4-60)$$

$$= 0 \quad (\pi/2 \leq \theta \leq \pi) \quad (4-61)$$

$$V_2 = 0 \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (4-62)$$

$$= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \quad (\pi/2 \leq \theta \leq \pi) \quad (4-63)$$

従って

$$V_1 - V_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (4-64)$$

となる。ここに

$V_1 - V_2$  : 出力電圧差

$n$  : 光電素子の受光面の法線

$v$  : 光線ベクトル

である。

上式(4-64)は紛れもなく二次元ベクトル量計測を示す。すなわち、本報告の(2-2)式に対応させれば

$V_1 - V_2 \rightarrow \lambda_i$  (観測値)

$n \rightarrow f_i$  (観測軸)

$v \rightarrow v$  (未知所求量)

となる。上式(4-64)にバイアスエラーを加えれば、本理論の適用範囲を示す(2-8)式と一致することは言うまでもない。

#### 4.4.2 風速ベクトルの測定

「非対称楔型ヨーメータによる3次元流中の速度ベクトルおよび静圧の測定」<sup>8)</sup>において、プローブの2つの圧力孔が検出する圧力の差( $\Delta P = P_A - P_B$ )とプローブの回転角 $\phi$ との間には次のような関係式が成り立つ(文字の用法が上記文献<sup>8)</sup>とは多少異なることに注意)。

$$\Delta P = a_0 + a_1 \cos \phi + b_1 \sin \phi \quad (4-65)$$

ただし

$$a_0 = q(A_{00} + A_{10}r + A_{20}r^2) \quad (4-66)$$

$$a_1 = q(A_{11}r + A_{21}r^2 + A_{31}r^3) \cos \phi_0 \quad (4-67)$$

$$b_1 = q(A_{11}r + A_{21}r^2 + A_{31}r^3) \sin \phi_0 \quad (4-68)$$

ここに、係数 $A_{mn}$ は既知とする。最終的な未知量は $q, r, \phi_0$ である。

観測系の評価に関する理論<sup>2)</sup>によれば、 $q, r, \phi_0$ を最適に求めることは、 $a_0, a_1, b_1$ を最適に求めることと同じなので、本報告の理論が適用できる。すなわち、本理論の適用範囲を示す(2-8)式と上式(4-65)とを対応させれば

$\Delta P \rightarrow \lambda_i$  (観測値)

$a_0 \rightarrow c \cdot d$  (未知量の一つ)

$a_1 \rightarrow x$  (未知量の一つ)

$b_1 \rightarrow y$  (未知量の一つ)

$\cos \phi \rightarrow l_i$  (観測軸のX成分)

$\sin \phi \rightarrow m_i$  (観測軸のY成分)

となり、全く一致することが分かる。つまり、本報告で示す最適な配置(これは、言うまでもなく、

図-1に示す配置である)にセンサの位置 $\phi$ (プローブの回転角)を合わせ、そのときの観測値 $\Delta P$ を測定し、これらのデータから、本報告で述べた式(4-7)に従って、 $a_0, a_1, b_1$ を求める。これによって、最終的には $q, r, \phi_0$ を計算することができる。 $a_0, a_1, b_1$ から $q, r, \phi_0$ を求める計算式は上記文献<sup>8)</sup>を参考にすれば、すぐに導ける。なお、本報告では、上記 $a_0$ に相当する部分をバイアスエラーと称したが、この具体例では、エラーという概念は含まれない。それでも良いことは既に2.2節の終わりで述べた。ただこの場合、バイアスに相当する $a_0$ 以外に真のバイアスエラーが付随したときは、無論、その区別は出来ず、 $a_0$ の中に組み込まれてしまうことになる。

## 5. 結 論

本報告で述べられている主な事柄を箇条書きにまとめると、次のようになる。

本報告で考察した観測系について

- ① 観測軸を逆向きにすると、特殊な場合を除き観測系の良さが変わる。
- ② 平面内において、観測系を任意に回転させても観測系の良さは変わらない。
- ③ 観測系を鏡映変換しても、観測系の良さは変わらない。
- ④  $p_1$ 個からなる最適観測軸配置と $p_2$ 個からなる最適観測軸配置とを任意の位置関係に合わせたものは、 $p_1 + p_2$ 個の場合の最適観測軸配置である。
- ⑤ 360度を $p(\geq 3)$ 等分する方向に向く $p$ 個の観測軸の組は、観測軸が $p$ 個の場合の最適観測軸配置の一つである。
- ⑥ 最適観測系においては、バイアスエラー(各観測器毎にバイアスエラーの値が異なる場合はその平均値分)を完全に除去できる。
- ⑦ 最適観測系より得られる未知所求量の精度は、観測器の個数に比例する。また、最適観測系においては、観測効率は観測器の個数によらず同一である。
- ⑧ 配置誤差を考慮しても、上述の諸結論に変更はない。

## 6. あとがき

バイアスエラーを考慮した二次元ベクトル量計測は、既に報告したバイアスエラーを考慮した三次元ベクトル量計測の基礎をなしているので、本報告の内容は、バイアスエラーを考慮したベクトル量計測の本質的理解に役立つと考えられる。

また、本文で述べたように、観測系の編成の仕方によってはバイアスエラー（各観測器毎にバイアスエラーの値が異なる場合はその平均値分）を完全に除去することが可能で、なおかつ最適系にしようということは注目すべき事柄である。従って、バイアスエラーが無いと考えられる系についても、バイアスエラーを考慮しない最適観測軸配置より、本報告のバイアスエラーを考慮した最適観測軸配置にしておく方が無難であろうと思われる。

このように、平面上に万遍なく観測網を張ることによって、偏り誤差（バイアスエラー）を取り除けることは興味深い。

なお、バイアスエラーを考慮した二次元ベクトル量計測の応用に関しては、終わりの方で、二つの具体例について簡単に触れたが、その詳細、もしくは、それ以外の適用例等については、後日、稿を改めて報告したいと思う。

## 参 考 文 献

- 1) 木村武雄：最良の観測系について，日本統計学会誌，2 巻 1 号(1971)．
- 2) 木村武雄：観測系の評価に関するひとつの数学的理論，航技研報告 TR-301 (1972)．
- 3) 木村武雄：最適の測定系について，第12回 SICE, No.3509（昭和48年）．
- 4) 木村武雄：3 次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について，航技研報告 TM-367 (1978)．
- 5) 木村武雄：バイアスエラーを考慮した 3 次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について，航技研報告 TR-600 (1980)．
- 6) 木村武雄：二次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について，航技研資料 TM-547 (1985)．
- 7) 木村武雄，滝沢 実，内田忠夫：矢羽根を用いた冗長型気流方向測定装置の最適化と設計のための数値解析について，航技研資料 TM-571 (1987)．
- 8) 中谷輝臣，遠藤 浩：非対称楔型ヨーメータによる 3 次元流中の速度ベクトルおよび静圧の測定，航技研報告 TR-594 (1979)．

---

## 航空宇宙技術研究所報告1055号

平成2年2月発行

発行所 航空宇宙技術研究所

東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1

電話三鷹(0422) 47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社三興印刷

東京都新宿区西早稲田 2-1-18

---

**Printed in Japan**