

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1135

微分型センサ導入による運動推定精度の向上

佐々修一・永安正彦

柳原正明・下村卓

1991年12月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

## 目 次

1. 序 論 .....	1
2. 問題設定 .....	2
3. 離散時間モデルでの解析 .....	3
3.1 離散時間カルマンフィルタ .....	3
3.2 位置情報と速度情報を用いる場合(ケース2) .....	3
3.3 位置情報と速度情報及び加速度情報を用いる場合(ケース3) .....	5
4. 航空機縦運動の推定 .....	7
4.1 $\{Ax, Az, q, TAS, dh\}$ センサを用いる場合 .....	7
4.2 $\{Ax, Az, q, Dq, TAS, dh\}$ センサを用いる場合 .....	8
4.3 運動推定精度 .....	9
5. 連続時間モデルでの解析 .....	10
5.1 連続時間カルマンフィルタ .....	10
5.2 白色ノイズでの解析 .....	11
5.3 離散時間ノイズの連続時間ノイズでの近似 .....	12
5.4 有色ノイズでの解析 .....	13
5.5 位置情報と速度情報を用いる場合(ケース2) .....	14
5.6 位置情報と速度情報及び加速度情報を用いる場合(ケース3) .....	15
6. 結 言 .....	16
7. 参考文献 .....	16

# 微分型センサ導入による運動推定精度の向上\*

佐々修一\*<sup>1</sup> 永安正彦\*<sup>1</sup>  
柳原正明\*<sup>1</sup> 下村卓\*<sup>1</sup>

## Accuracy Improvement of Linear Estimated Motion Using Differential Type Sensors

Shuichi SASA\*, Masahiko NAGAYASU\*,  
Masaaki YANAGIHARA\* and Takashi SHIMOMURA\*

### ABSTRACT

Linear motion estimation was performed by application of a Kalman filter in conjunction with position, velocity, and acceleration sensors. The relationship between the sensor accuracy and the accuracy of the estimated motion was investigated.

Motion estimation accuracy was evaluated using the Riccati equation covariance matrix obtained from the Kalman filter. The relation between the accuracy of the velocity and acceleration sensors and the motion estimation accuracy was subsequently derived numerically.

The problem was analyzed for both discrete and continuous time systems, with the sensor accuracy that is necessary to attain the specified motion estimation accuracy then being derived.

**Keywords:** Kalman filter, motion estimation, Riccati equation, differential type sensors

### 概 要

直線運動の推定問題に、位置・速度・加速度の情報を用いたカルマンフィルタを適用し運動推定精度とセンサ精度の関係を考察した。

運動推定精度はカルマンフィルタにおけるリカッチ方程式の解で求まる推定誤差共分散行列で評価した。これにより微分型センサ（速度計、加速度計）の精度と運動推定精度の関係を数値的に解析した。

離散時間系、及び連続時間系についてそれぞれ解析を行い、指定した運動推定精度を得るために必要な微分型センサの精度について明らかにした。

### 1. 序 論

筆者らは、航空機飛行試験の能率向上を目的として、動的飛行に基づく航空機特性推算の研究を

進めている<sup>1)</sup>。この手法は、慣性センサ及びその他の情報から航空機運動を推定するとともに、機体の加速度から飛行試験各瞬間に機体に働く空気力を求め、これらから空気力モデルのパラメータ

\* 平成3年9月6日受付 (received 6 September 1991)

\*1 制御部 (Control System Division)

を同定することにより、航空機特性を求めようとするものである。この場合の技術課題としては、高精度の機体運動の推定問題及び機体に働く空気力の推定問題がある。

機体に働く空気力モーメントを求めるためには、角加速度が必要となる。通常角加速度は角速度を数値微分して求めているが、この場合数値微分に伴う誤差が導入される。これを避けるため直接角加速度を計測することが望ましい。

また航空機の運動計測のための慣性センサとしては線加速度計、角速度計、姿勢角計があるが、これに角加速度計も加えることによって、運動推定精度の向上を図ることも期待できる。

本稿は角加速度計の導入による運動推定精度の向上の検討という問題を、ある物理量の計測に当たってその微分型センサが使用できるとした時の推定精度への影響の検討という、より一般的な問題として定式化し解析検討を行ったものである。

即ち直線運動及び回転運動に関して位置、速度、加速度が計測できるものとし、これらの計測量に基づいてカルマンフィルタで運動推定を行った場合に、それぞれのセンサの精度と運動推定精度の関係を離散型及び連続型の場合について明らかにするとともに、航空機縦運動の推定問題に適用し、センサ構成及び精度要求に関する考察を行った。

## 2. 問題設定

運動体の位置を測りたいときに、直接位置を測るだけでなく、速度や加速度が直接計測できれば、位置だけしか計測できない場合に比べて位置を精度よく知ることができる。

一般に運動推定は、位置・速度・姿勢等に行われ、これらの諸量に対応する慣性センサ出力や、他のセンサ出力によっても運動状態は推定される。

しかしセンサ出力には通常、時間的に不規則に変動するランダムノイズと、時間的に変動しないバイアスノイズが含まれていると考えられる。このためこれだけでは正確な運動推定はできない。これに対してこれら複数の観測量を用いて確率論に基づき推定誤差を減らす手法として状態推定理

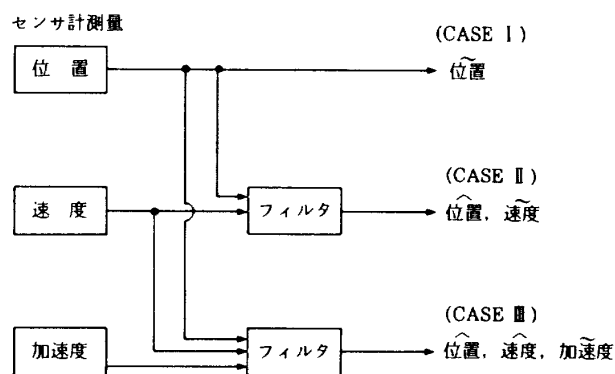


図1 直線運動の推定  
( $\wedge$ : 推定値,  $\sim$ : 計測値)

論及びそれに基づく各種状態推定手法が存在する<sup>2)</sup>。

ここでは状態推定手法としてはカルマンフィルタを用い一次元直線運動について、その位置、速度、加速度等の計測量から運動を推定する問題を考える（回転運動に関しても、姿勢角、角速度、角加速度の計測を考えれば、全く同様の議論が成り立つ）。この時、運動の推定には図1に示す3つの場合が考えられる。即ち

（ケース1）

位置センサ情報のみを用いることにより、位置センサの精度で位置が計測できる。

（センサ2）

位置センサと速度センサの情報を用いることにより、位置の推定を行い、位置センサの精度より高精度な位置情報が得られる。

（ケース3）

位置センサと速度センサ及び加速度センサの情報を用いることにより、位置及び速度の推定を行い、位置・速度センサの精度より高精度な位置・速度情報が得られる。

同図で、 $\wedge$ は推定値を示し、 $\sim$ はセンサによる計測値を示す。このようにセンサ系の構成により運動推定精度が変化するので、センサ系の精度・構成と運動推定精度の関係について検討することにする。

即ちセンサ精度はセンサに含まれるランダムノイズの大きさで決まると考え、その大きさと、カルマンフィルタにおける推定誤差共分散で評価さ

れる運動推定精度との関係について検討する。

注) センサにはバイアスノイズも含まれるが、これらは事前にある程度推定することは可能であるし、またこれらの量そのものを状態量と考えると推定する手法も考えられている<sup>2)</sup>。従ってこれらの推定されたバイアスノイズの大きさを使ってセンサ出力を補正することにして、ここではセンサにはランダムノイズのみが含まれているものとする。

### 3. 離散時間モデルでの解析

実際の運動推定に当たってはデジタル計算機を用いる事を考え、一次元直線運動の離散時間モデルでの推定問題を考える。即ち位置情報と、速度計及び加速度計出力等の微分型センサ計測値を用いて、離散時間カルマンフィルタによる運動状態量の推定について、ケース 1, 2, 3 に示されるセンサ構成の違いによる運動推定精度の比較を行う。

以下添字  $n$  はサンプリング番号、 $m$  は計測量、その他の添字は適宜変数の種類等を示す。

まず離散型カルマンフィルタについて説明する。

#### 3.1 離散時間カルマンフィルタ

システムの入力及び出力にランダムノイズが含まれる離散型システムが

$$x_{n+1} = Ax_n + B(u_n + w_n) \quad (3.1.1)$$

$$y_n = Cx_n + v_n \quad (3.1.2)$$

の様な差分方程式で表されるとする。状態量の最適推定値  $\hat{x}_n$  及び推定誤差の共分散行列  $P_n$  は次式より得られる<sup>3)</sup>。

$$\hat{x}_n = \bar{x}_n + P_n C^T V^{-1} (y_n - C\bar{x}_n) \quad (3.1.3)$$

ここで

$$\bar{x}_n = A\hat{x}_{n-1} + Bu_{n-1} \quad (3.1.4)$$

$$P_n = (M_n^{-1} + C^T V^{-1} C)^{-1} \quad (3.1.5)$$

$$M_n = AP_{n-1} A^T + BWB^T \quad (3.1.6)$$

但し  $P_n$  は次式で定義される。

$$P_n \triangleq E[(\hat{x}_n - x_n)(\hat{x}_n - x_n)^T] \quad (3.1.7)$$

ここで、 $[\cdot]$  は期待値を表す。 $M_n$  は予測誤差共分散、 $w_n, v_n, W, V$  はそれぞれプロセスノイズ、観測ノイズ及びそれらの共分散行列を示す。

プロセスノイズ、観測ノイズとも定常な正規性ランダムノイズを仮定する。即ち、 $w_n, v_n$  の実現値は各サンプル時点で共分散  $W, V$  の正規確率分布に従い、異なるサンプリング時点間ではその相関は無いとする。即ち

$$\begin{aligned} E[w_i \cdot w_j] &= W\delta_{ij} \\ E[v_i \cdot v_j] &= V\delta_{ij} \\ E[w_i \cdot v_j] &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

ここで  $\delta_{ij}$  はクロネッカーの  $\delta$  を表す。

以下で、センサ精度とそれを用いた運動推定精度との関係について検討するが、センサ精度はその計測値に含まれるランダムノイズの分散の大きさを評価されると考える。

また状態推定精度は(3.1.5), (3.1.6)式から求められる推定誤差の共分散値により評価されるが、ここでは、十分時間が経過し、フィルタの過渡応答がおわった後の推定誤差共分散を用いることにする。従って(3.1.5), (3.1.6)式の  $n \rightarrow \infty$  の極限として

$$P = (M^{-1} + C^T V^{-1} C)^{-1} \quad (3.1.9)$$

$$M = APA^T + BWB^T \quad (3.1.10)$$

を連立させて解いて求められる  $P$  を用いる。

以下ではセンサシステムの構成を変えた時の、 $W$  及び  $V$  で表されるセンサ精度と、 $P$  で表される運動推定精度との関係について検討する。

#### 3.2 位置情報と速度情報を用いる場合

(ケース 2)

位置  $x$  の計測値  $y_m$  ( $x_m$  とするのが適当だが、観測方程式中の観測量ということで、 $y_m$  と記述する)、及び速度計の計測値  $u_m$  を使って、より精度の良い位置推定値を求めることを考える。

位置  $x$  と速度  $u$  には次の関係がある。

$$\dot{x} = u \quad (3.2.1)$$

計測量にはランダムノイズが含まれていると仮定しているので、真の状態と計測量の間には次の関係がある。

$$u_m = u - w_u \quad (3.2.2)$$

$$y_m = x + v_x \quad (3.2.3)$$

サンプリング周期  $dt$  は運動の変動周期に比べて十分小さく、サンプリング間で速度・ノイズは一定値をとると見なせると仮定すれば、次の離散システムモデルが得られる。

$$x_{n+1} = x_n + (u_{mn} + w_{un}) dt \quad (3.2.4)$$

$$y_{mn} = x_n + v_{xn} \quad (3.2.5)$$

ここで  $w_{un}$ ,  $v_{xn}$  は正規性白色ノイズであり

$$E[w_{ui} \cdot w_{uj}] = W_u \delta_{ij} = \sigma_u^2 \delta_{ij}$$

$$E[v_{xi} \cdot v_{xj}] = V_x \delta_{ij} = \sigma_x^2 \delta_{ij} \quad (3.2.6)$$

$$E[w_{ui} \cdot v_{xj}] = 0$$

とする。

以後計測値に含まれるノイズ以外の確定量は運動推定精度の解析には関係ないので省略する。さらにシステムをノイズの大きさ及びサンプリング時間で無次元化すると次のシステム表現を得る。

$$x_{n+1}^* = x_n^* + w_{un}^* \quad (3.2.7)$$

$$y_{mn}^* = x_n^* + v_{xn}^* \quad (3.2.8)$$

\* は無次元化された変数を示しそれぞれは次式で与えられる。

$$x_n^* = x_n / \sigma_x$$

$$y_{mn}^* = y_{mn} / \sigma_x \quad (3.2.9)$$

$$w_{un}^* = w_{un} dt / \sigma_x$$

$$v_{xn}^* = v_{xn} / \sigma_x$$

上記定義に従えばそれぞれの共分散は以下のようになる。

$$E[w_{ui}^* \cdot w_{uj}^*] = \sigma_u^2 dt^2 / \sigma_x^2 \delta_{ij} = W_u^* \delta_{ij} \quad (3.2.10)$$

$$E[v_{xi}^* \cdot v_{xj}^*] = 1 \delta_{ij}$$

$$E[w_{ui}^* \cdot v_{xj}^*] = 0$$

(3.2.7), (3.2.8) がそれぞれ無次元化されたシステム方程式、観測方程式を示し、 $w_{un}^*$ ,  $v_{xn}^*$  がそれぞれシステムノイズ、観測ノイズを示す。(3.1.9), (3.1.10) 式より速度計を用いた時の位置推定誤差の分散は次式の解となる。

$$f(P_x^*) \triangleq P_x^{*2} + W_u^* P_x^* - W_u^* = 0 \quad (3.2.11)$$

ここで  $P_x^*$  は推定誤差分散の無次元化量を意味し、

$$P_x^* = P_x / V_x \quad (3.2.12)$$

を示す。

(3.2.11) 式は解析的に解けて、2根のうちの意

味のある  $P_x^* > 0$  なる解は次のようになる。

$$P_x^* = \frac{-W_u^* + \sqrt{W_u^{*2} + 4W_u^*}}{2} \quad (3.2.13)$$

(3.2.11) 式より、

$$f(0) = -W_u^* < 0 \quad (3.2.14)$$

$$f(1) = 1 > 0$$

これより、解  $P_x^*$  は

$$0 < P_x^* < 1$$

$$P_x^* \rightarrow 0 \quad (W_u^* \rightarrow 0) \quad (3.2.15)$$

$$P_x^* \rightarrow 1 \quad (W_u^* \rightarrow \infty)$$

となる。特に、

$$W_u^* \ll 1 \quad (3.2.16)$$

の時、(3.2.13) 式で  $W_u^{*2} \ll 4W_u^*$  (よって  $W_u^* \ll 2\sqrt{W_u^*}$ ) より、次式の近似が成り立つ。

$$P_x^* \approx \frac{-W_u^* + 2\sqrt{W_u^*}}{2} \approx \frac{2\sqrt{W_u^*}}{2} = \sqrt{W_u^*} \quad (3.2.17)$$

$W_u^*$  に対する  $P_x^*$  の変化を図 2 に示す。

$W_u^* \ll 1$  で傾きが 1/2 になっており、(3.2.17) の関係が成り立っていることが分かる。

(3.2.15) の  $0 < P_x^* < 1$  の関係により、

$$0 < P_x < V_x \quad (3.2.18)$$

であり、位置推定に速度計計測値を用いてカルマンフィルタを適用すれば、位置の推定精度は用いない場合(ケース 1 の場合に対応)より向上することが分かる。

さらに(3.2.17)の漸近特性より、 $W_u^* \ll 1$ , すなわち  $(\sigma_u dt) / \sigma_x \ll 1$  の場合、位置の推定誤差分散は  $\sqrt{W_u^*}$  に比例し、位置の推定精度は速度計の精度に陽に依存するようになる。ここで  $W_u^* \ll 1$  は  $\sigma_u / (\sigma_x / dt) \ll 1$  とも書ける。位置の数値微分による速度の推定精度は  $\sigma_x / dt$  の 1 次のオーダーの量と考えられる。よって、速度計の精度が位置の数値微分の精度より十分良ければ、位置の推定に速度計の情報を用いることの効果が大きいことを、上記の漸近特性は示している。

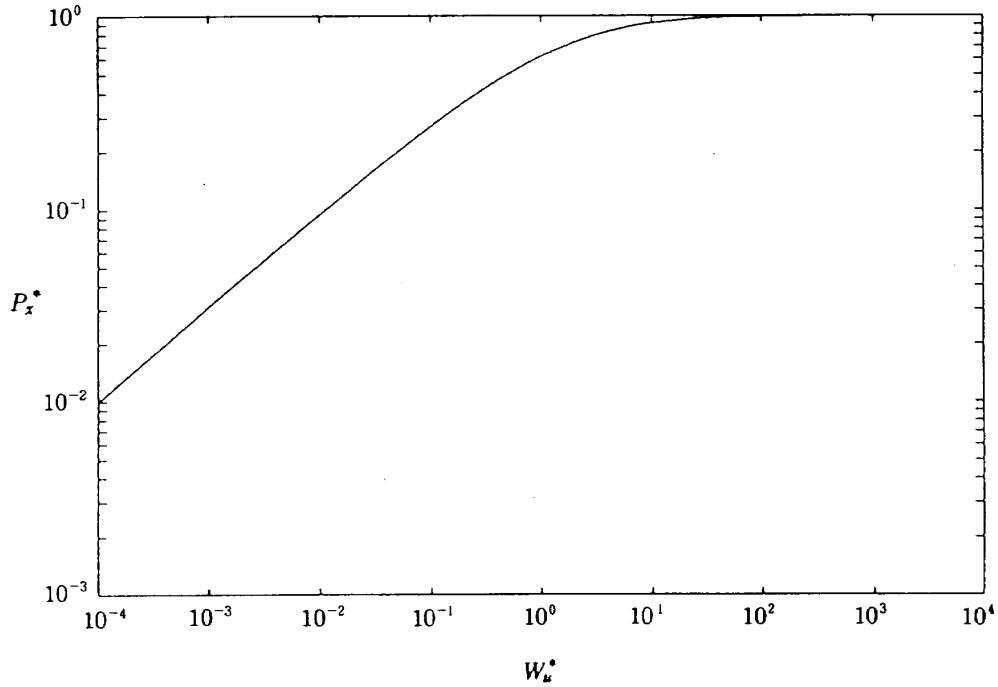


図2 速度計の精度と位置の推定精度の関係

3.3 位置情報と速度情報及び加速度情報を用いる場合 (ケース 3)

この場合、加速度 ( $Du$ ) をシステムへの入力と考え、速度 ( $u$ ) 及び位置 ( $x$ ) を観測量とする。

前と同様に確定入力を省略し、離散システムを作ると次のようになる。

$$X_{n+1} = AX_n + Bw_{Dun} \quad (3.3.1)$$

$$Y_{mn} = CX_n + v_n \quad (3.3.2)$$

ここで

$$X_n = [x_n \ u_n]^T$$

$$Y_{mn} = [x_{mn} \ u_{mn}]^T \quad (3.3.3)$$

$$v_n = [v_{xn} \ v_{un}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ dt \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

を示す。 $w_{Dun}$ ,  $v_{xn}$ ,  $v_{un}$  はそれぞれ加速度、位置、速度計測値に含まれる正規性白色ノイズを表しその統計的性質として次式を仮定する。

$$E[w_{Dui} \cdot w_{Duj}] = \sigma_{Du}^2 \delta_{ij} = W_{Du} \delta_{ij}$$

$$E[v_{xi} \cdot v_{xj}] = \sigma_x^2 \delta_{ij} = V_x \delta_{ij} \quad (3.3.5)$$

$$E[v_{ui} \cdot v_{uj}] = \sigma_u^2 \delta_{ij} = V_u \delta_{ij}$$

また異なる種類のノイズに相互相関はないとする。状態変数をノイズの大きさ、サンプリング周期を用いて正規化し次の無次元化システムを導く。

$$X_{n+1}^* = AX_n^* + Bw_{Dun}^* \quad (3.3.6)$$

$$Y_n^* = CX_n^* + v_n^* \quad (3.3.7)$$

ここで

$$X_n^* = [x_n^* \ u_n^*]^T$$

$$Y_{mn}^* = [x_{mn}^* \ u_{mn}^*]^T \quad (3.3.8)$$

$$v_n^* = [v_{xn}^* \ v_{un}^*]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

\* は無次元化された変数を示しそれぞれの意味は、

$$x_n^* = x_n / \sigma_x$$

$$u_n^* = u_n dt / \sigma_x$$

$$w_{Dun}^* = w_{Dun} dt^2 / \sigma_x \quad (3.3.10)$$

$$v_{xn}^* = v_{xn} / \sigma_x$$

$$v_{un}^* = v_{un} dt / \sigma_x$$

上記定義より、共分散は次式で与えられる。

$$E[w_{Dui}^* \cdot w_{Duj}^*] = W_{Du} dt^4 / V_x \delta_{ij} = W_{Du}^* \delta_{ij}$$

$$E[v_{xi}^* \cdot v_{xj}^*] = V_x / V_x \delta_{ij} = 1 \delta_{ij}$$

$$E[v_{ui}^* \cdot v_{uj}^*] = V_u dt^2 / V_x \delta_{ij} = V_u^* \delta_{ij} \quad (3.3.11)$$

(3.1.9), (3.1.10) 式を用いて、 $x^*$ ,  $u^*$  の推定精度を計算したものが図3, 図4である。ここで

$$P_x^* = P_x / V_x$$

$$P_u^* = P_u dt^2 / V_x \quad (3.3.12)$$

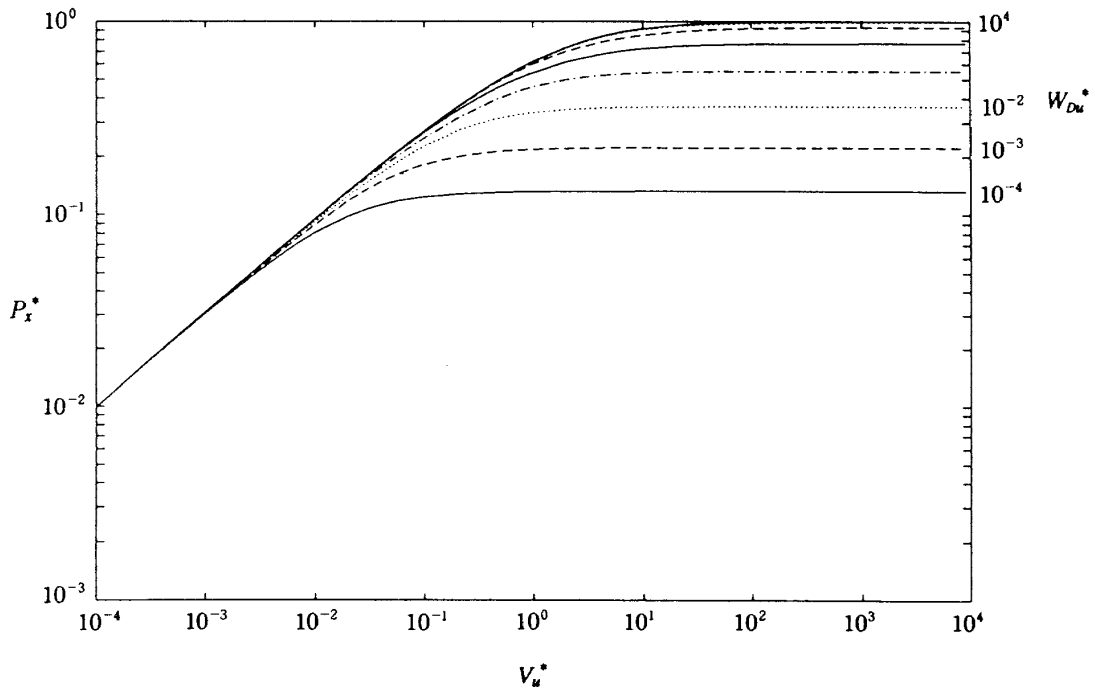


図3 速度計の精度と位置の推定精度の関係  
(加速度計を用いる場合)

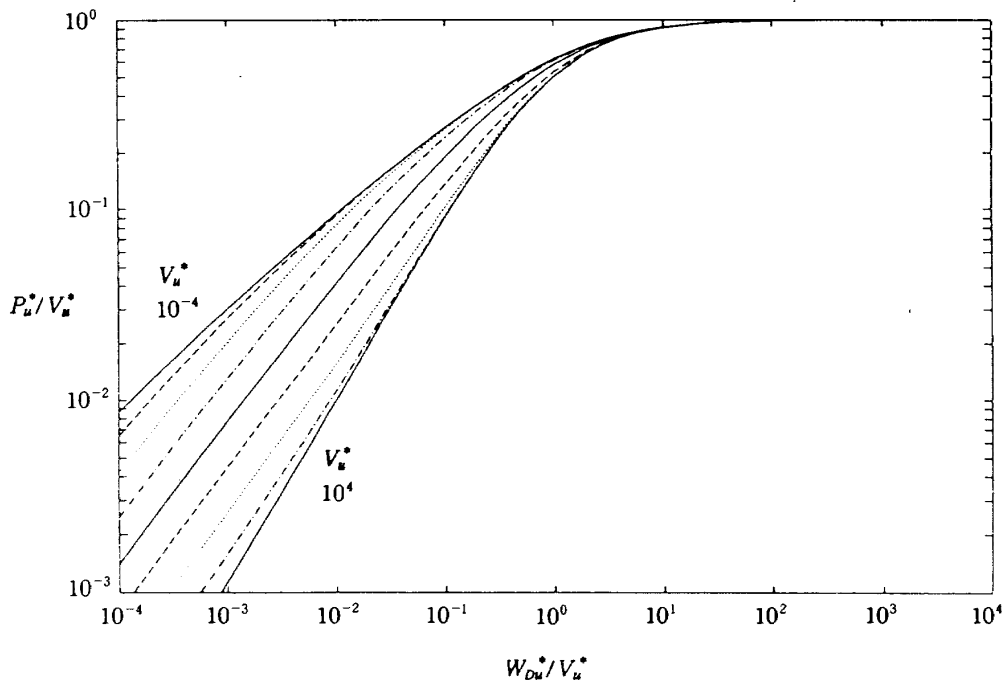


図4 加速度計の精度と速度の推定精度の関係

図3は  $V_u^*$  と  $P_x^*$  の関係を  $W_{Du}^*$  をパラメータにして求めている。 $W_{Du}^* \rightarrow$  大で図2の関係に近づき、加速度情報が無意味になったため、速度情報で位置を推定していることを示す。 $W_{Du}^* \rightarrow$  小で  $P_x^*$  が小さくなるのは加速度計導入の効果を示している。

グラフの平坦部は、速度計の精度が十分でないため、位置の精度が加速度計の精度で決まる領域

を示す。グラフ上で  $V_u^* \rightarrow$  小での  $P_x^*$  の漸近直線と平坦部の交点の  $V_u^*$  よりも小さい  $V_u^*$  では、位置の推定精度は  $V_u^*$  (速度計の精度) で決まり、それより大きい  $V_u^*$  では、 $W_{Du}^*$  (加速度計の精度) で決まるといえる。

$P_x^* = P_x/V_x < 1$  であり、図3の各場合が図2のグラフの下にあることから、{位置, 速度, 加速



度)情報を用いると、{位置, 速度}を用いる場合より、位置推定の精度が向上することが分かる。

図4は速度の推定精度と加速度計の精度の関係を示す。図2と比較するため、 $W_{Du}^*/V_u^*$  ( $=W_{Du}^* dt^2/V_u^*$ ),  $P_u^*/V_u^*$  ( $=P_u/V_u$ )の正規化を行ったものを $V_u^*$ をパラメータにして図示している。これから $V_u^* \rightarrow$ 小では加速度計の精度と速度の推定精度は図2の速度計の精度と位置の推定精度の関係と同じであり、 $V_u^* \rightarrow$ 大では推定精度が向上する事が分かる。

$V_u^* \triangleq V_u dt^2/V_x$ より前者は位置の測定精度が悪い場合であり、後者はよい場合を示しており、位置計測が速度の推定精度に影響していることを示す。

$P_u^*/V_u^*$  ( $=P_u/V_u$ ) < 1より、加速度計を導入する事により、速度の推定精度が向上することが分かる。

$W_{Du}^*$ が十分小さな場合の $P_u^*/V_u^*$ の漸近線と $P_u^*/V_u^* = 1$ との交点(ほぼ $W_{Du}^*/V_u^* = 1$ )より、速度の推定精度に加速度計を用いることの効果が大きいのは、 $W_{Du}^*/V_u^*$  ( $=\sigma_{Du}^2 dt^2/\sigma_u^2$ )  $\ll 1$ の時であることを図4の漸近特性は示している。これは $\sigma_{Du} dt/\sigma_u = \sigma_{Du}/(\sigma_u/dt) \ll 1$ の場合であり、速度計出力の数値微分の精度が $\sigma_u/dt$ のオーダーの量であることから、加速度計の精度が速度計の数値微分の精度より十分良いことに対応している。

#### 4. 航空機縦運動の推定

次に実際の飛行試験を想定し、その場合の運動推定について考える。ここでは、航空機縦対称面内の運動を考える。飛行試験では、機体x軸、z軸方向加速度 ( $A_x, A_z$ ), y軸回りの角速度 ( $q$ ),

同角加速度 ( $Dq$ ), 及び圧力センサ情報として、真対気速度 ( $TAS$ )及び高度変動 ( $dh$ :ある基準高度からの変動)が得られるとして、センサ構成を変えた時の運動推定精度の変化について検討する。以下の解析はすべてシステムを離散化したのち、3.における離散時間モデルでの解析を適用する。

#### 4.1 { $A_x, A_z, q, TAS, dh$ }センサを用いる場合の離散時間モデル

この場合システムを記述する状態方程式は、剛体の運動方程式より、

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_x - g \sin \theta - qw \\ \dot{w} &= A_z + g \cos \theta + qu \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{dh} &= u \sin \theta - w \cos \theta \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

観測方程式は

$$y = \begin{bmatrix} TAS \\ dh \end{bmatrix} \quad (= \sqrt{u^2 + w^2}) \quad (4.1.2)$$

となる。ここで $u, w$ はそれぞれ機体x軸、z軸方向速度を表わす。 $TAS$ は真対気速度を示す。

飛行試験で得られるセンサ出力に、相互に独立なランダムノイズが含まれるとすれば次の関係がある。

$$\begin{aligned} A_x &= A_{xm} + \omega_x \\ A_z &= A_{zm} + \omega_z \\ q &= q_m + \omega_q \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

ここで $A_{xm}, A_{zm}, q_m, \omega_x, \omega_z, \omega_q$ はそれぞれ $A_x, A_z, q$ に対応する計測量及びランダムノイズを表す。

(4.1.1)の微分方程式を釣合状態まわりに線形化すれば、次のノイズと釣合状態からの変動に対応する線形方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \cos \theta_0 \\ 0 & 0 & -g \sin \theta_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_0 & -\cos \theta_0 & u_0 \cos \theta_0 + w_0 \sin \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -w_0 \\ 0 & 1 & u_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_z \\ \omega_q \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

$$y = \begin{bmatrix} u_0/TAS_0 & w_0/TAS_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{TAS} \\ \nu_{dh} \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

ここで $\tilde{\cdot}$ は釣合状態からの変動， $\omega, \nu$ はセンサのランダムノイズを示す。添え字0は釣合状態に置ける定常値を示す。

3.2と同様にして $T$ をサンプリング時間として(4.1.4)，(4.1.5)を離散化すれば次式となる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -g\cos\theta_0 T & 0 \\ 0 & 1 & -g\sin\theta_0 T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_0 T & -\cos\theta_0 T & u_0 \cos\theta_0 T + w_0 \sin\theta_0 T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} T & 0 & -w_0 T \\ 0 & T & u_0 T \\ 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_z \\ \omega_q \end{bmatrix}_n \quad (4.1.6)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{TAS} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} u_0/TAS_0 & w_0/TAS_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} \nu_{TAS} \\ \nu_{dh} \end{bmatrix}_n \quad (4.1.7)$$

#### 4.2 {Ax, Az, q, Dq, TAS, dh}センサを用いる場合

この場合カルマンフィルタにおけるシステムを記述する状態方程式は，剛体の運動方程式より，

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_x - g\sin\theta - qw \\ \dot{w} &= A_z + g\cos\theta + qu \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{q} &= D_q \\ \dot{dh} &= u\sin\theta - w\cos\theta \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

観測方程式は

$$y = \begin{bmatrix} TAS \\ q \\ dh \end{bmatrix} (= \sqrt{u^2 + w^2}) \quad (4.2.2)$$

となる。以下4.1と同様，(4.1.3)，(4.1.4)，(4.1.5)，(4.1.6)，(4.1.7)はそれぞれ以下のようなになる。センサモデルは，

$$\begin{aligned} A_x &= A_{xm} + \omega_x \\ A_z &= A_{zm} + \omega_z \\ D_q &= D_{qm} + \omega_{Dq} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

釣合状態からの変位は，

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{q} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g\cos\theta_0 & -w_0 & 0 \\ 0 & 0 & -g\sin\theta_0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta_0 & -\cos\theta_0 & u_0 \cos\theta_0 + w_0 \sin\theta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{q} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_z \\ \omega_{Dq} \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} u_0/TAS_0 & \omega_0/TAS_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{q} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{TAS} \\ \nu_q \\ \nu_{dh} \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

離散化システムは

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{q} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -g \cos \theta_0 T & -\omega_0 T & 0 \\ 0 & 1 & -g \sin \theta_0 T & u_0 T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_0 T & -\cos \theta_0 T & u_0 \cos \theta_0 T \\ & & +\omega_0 \sin \theta_0 T & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{q} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_z \\ \omega_q \end{bmatrix}_n \quad (4.2.6)$$

$$\begin{bmatrix} TAS \\ \tilde{q} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0/TAS_0 & \omega_0/TAS_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{q} \\ \tilde{dh} \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} \nu_{TAS} \\ \nu_q \\ \nu_{dh} \end{bmatrix}_n \quad (4.2.7)$$

### 4.3 運動推定精度

4.1節, 4.2節のそれぞれの場合について運動推定の精度を推定誤差定常共分散値で評価した。

釣合状態及び, 設定ノイズ共分散値を表1, 2に示す。

4.1節の場合の推定誤差を表3に示す。

4.2節の場合の推定誤差分散値を図5, 図6に示す。

図5より  $Dq$  (角加速度計) を導入した場合,  $q$  (角速度) の推定値のみが大きく影響を受けることが分かる。

角速度計の精度と角加速度計の精度の関係は3.2節での位置センサの精度と速度センサの精度と速度センサの精度の関係と同じであるため, 3.2節と同様に角速度推定精度と角加速度計の精度を, 角速度計精度  $V_q$  で正規化してグラフにしたものが図6である。これよりこの場合も角速度の推定誤差の分散  $P_q$  と角加速度計のノイズの分散  $W_{Dq}$  (あるいは  $\sigma_{Dq}^2$ ) の関係は3.2節に示した, 位置・速度センサを用いた場合での関係と同様であることが分かる。

表1 釣合状態量

X軸方向速度 $u$	40.0 m/s
Z軸方向速度 $w$	5.0 m/s
姿勢角 $\theta$	0.1 rad

表2 センサノイズ分散値

X軸方向加速度 $A_x$	$1.6 \times 10^{-5}$	$(\text{m/s}^2)^2$
Z軸方向加速度 $A_z$	$1.6 \times 10^{-5}$	$(\text{m/s}^2)^2$
Y軸回り角速度 $q$	$1.0 \times 10^{-4}$	$(\text{rad/s})^2$
真対気速度 $TAS$	$2.25 \times 10^{-2}$	$(\text{m/s})^2$
高度変動 $dh$	$4.0 \times 10^{-2}$	$\text{m}^2$

表3 推定誤差分散  
(角速度計のみ使用の場合)

X軸方向速度 $u$	$4.30 \times 10^{-3}$	$(\text{m/s})^2$
Z軸方向速度 $w$	$2.69 \times 10^{-2}$	$(\text{m/s})^2$
姿勢角 $\theta$	$1.75 \times 10^{-5}$	$\text{rad}^2$
高度変動 $dh$	$7.92 \times 10^{-4}$	$\text{m}^2$

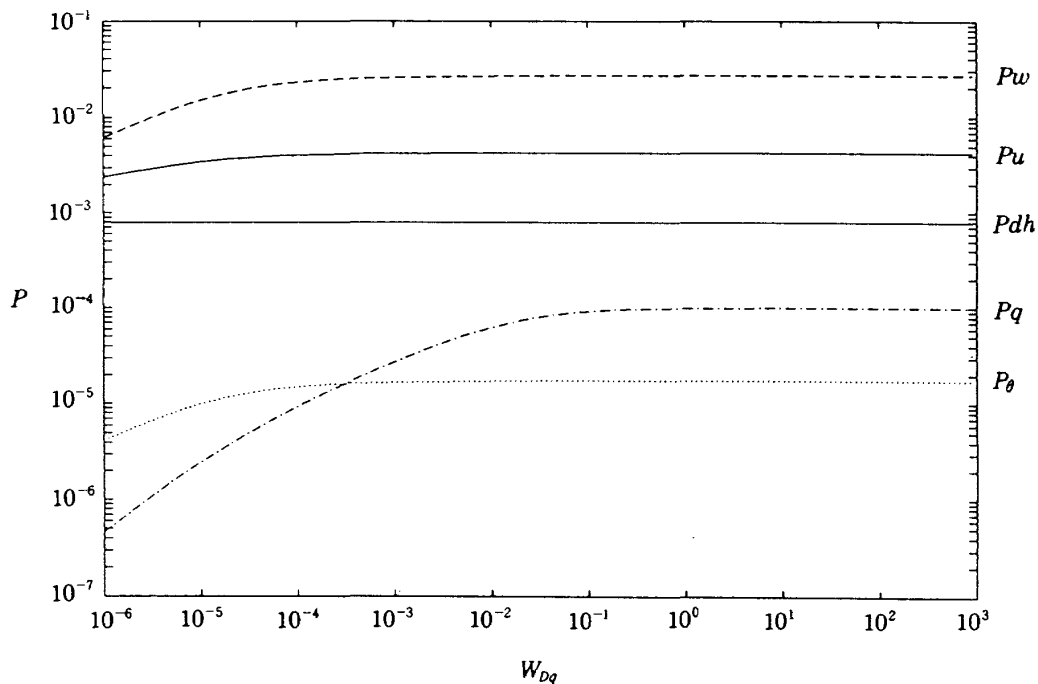


図 5 航空機縦運動の推定精度

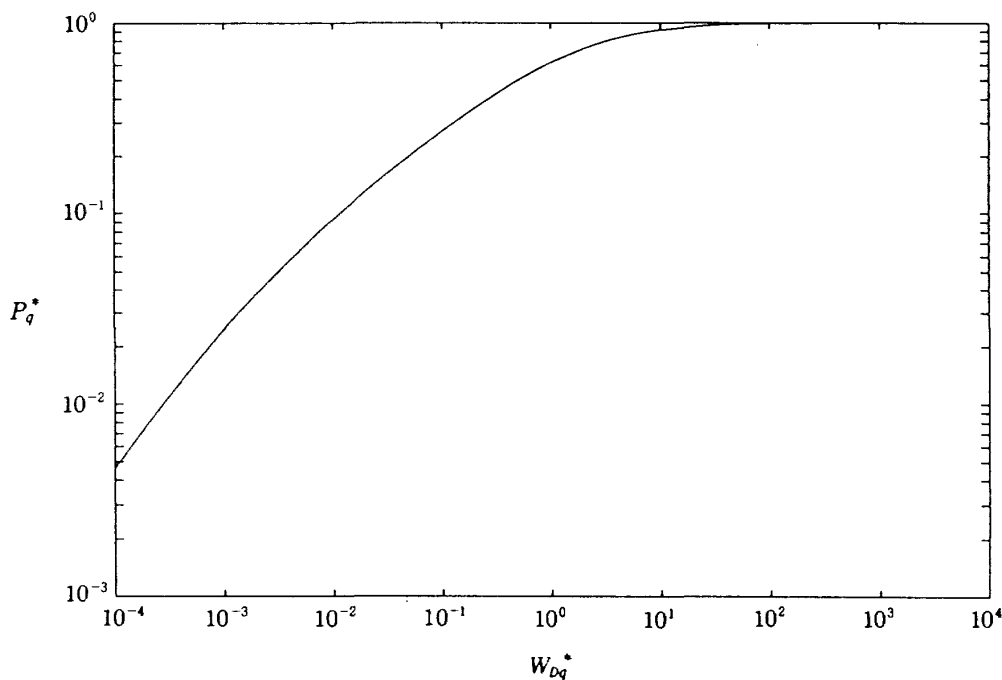


図 6 航空機縦運動の推定における角速度の推定精度

### 5. 連続時間モデルでの解析

ここでは前節とは違って、連続時間システムとして解析を行う。即ちサンプリングされた信号をホールドし連続データと考え、これに連続時間カルマンフィルタを適用する。そのためまず連続時間カルマンフィルタについて説明する。

#### 5.1 連続時間カルマンフィルタ

連続時間カルマンフィルタではシステムを

$$\dot{x} = Ax + Bw \tag{5.1.1}$$

$$y_m = Cx + v \tag{5.1.2}$$

としたとき、状態推定値  $\hat{x}$  と、推定誤差の共分散行列の定常値  $P$  は次式から得られる。

$$\dot{\hat{x}} = Ax + PC^T V^{-1} (y_m - C\hat{x}) \tag{5.1.3}$$

$$0 = AP + PA^T + BWB^T - PC^T V^{-1} CP \quad (5.1.4)$$

ここで  $w, v, W, V$  はそれぞれシステムノイズ, 観測ノイズ及びそれらの共分散行列を示す。添え字  $m$  は観測値を示す。

### 5.2 白色ノイズでの解析

位置及び速度の推定問題に関して連続時間カルマンフィルタを適用する。まずセンサノイズを白色ノイズとして解析を行う。白色ノイズは全ての周波数でパワーが一定であり、全パワーは無限大となり実在しない理想化されたノイズだが、後の有色フィルタでの解析との関連でここで述べる。

(ケース2)

位置及び速度の計測値を用いて、位置 ( $x$ ) の推定を行うことを考える。この場合システムは次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= w \\ y_m &= x + v \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

$w, v$  はプロセス, 及び観測ノイズであり, それぞれ白色ノイズなので次式を仮定する。

$$\begin{aligned} E[w(t)w(t+\tau)] &= W_u \delta(\tau) \\ E[v(t)v(t+\tau)] &= V_x \delta(\tau) \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

$W_u, V_x$  は白色ノイズの大きさを表すもので、強度 (intensity) と呼ばれる。離散系でのランダムノイズの分散に対応するものである。この場合 (5.1.4) のリカッチ方程式は

$$-\frac{P_x^2}{V_x} + W_u = 0 \quad (5.2.3)$$

となり,

$$P_x = \sqrt{W_u V_x} \quad (5.2.4)$$

$$\therefore P_x / V_x = \sqrt{W_u / V_x} \quad (5.2.5)$$

よって,  $W_u < V_x$  なら, カルマンフィルタを用いることにより位置の推定精度は位置センサの精度より向上することがわかる。

(ケース3)

位置, 速度及び加速度の計測値を用いて, 位置 ( $x$ ) 及び速度 ( $u$ ) の推定を行うことを考える。この場合システムは次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{u} &= w \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

観測方程式は

$$\begin{aligned} y_{xm} &= x + v_x \\ y_{um} &= u + v_u \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

$w, v_x, v_u$  はプロセス, 及び観測ノイズであり, それぞれ白色ノイズなので次式を仮定する。

$$\begin{aligned} E[w(t)w(t+\tau)] &= W_{Du} \delta(\tau) \\ E[v_x(t)v_x(t+\tau)] &= V_x \delta(\tau) \\ E[v_u(t)v_u(t+\tau)] &= V_u \delta(\tau) \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

この場合 (5.1.4) のリカッチ方程式は推定誤差の共分散行列  $P$  を

$$P = \begin{bmatrix} p_x & p_{xu} \\ p_{xu} & p_u \end{bmatrix}$$

として次の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{aligned} 2p_{xu} - \frac{p_x^2}{V_x} - \frac{p_{xu}^2}{V_u} &= 0 \\ p_u - \frac{p_x p_{xu}}{V_x} - \frac{p_{xu} p_u}{V_u} &= 0 \\ -\frac{p_{xu}^2}{V_x} - \frac{p_u^2}{V_u} + W_{Du} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

上式は解析的に解けて解は次式となる。

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\sqrt{2 \sqrt{\frac{W_{Du}}{V_x} + \frac{W_{Du}}{V_u}}}}{\sqrt{\frac{W_{Du}}{V_x} + \frac{W_{Du}}{V_u}}} \sqrt{V_x W_{Du}} \\ p_u &= \frac{\sqrt{2 \sqrt{\frac{W_{Du}}{V_x} + \frac{W_{Du}}{V_u}}}}{\sqrt{\frac{W_{Du}}{V_x} + \frac{W_{Du}}{V_u}}} W_{Du} \\ p_{xu} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{W_{Du}}{V_x} + \frac{W_{Du}}{V_u}}} W_{Du} \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

(ケース1), (ケース2), (ケース3) の各場合の推定精度をセンサ単体のノイズの大きさで正規化してまとめると表4のようになる。

同表より, 以下のことがわかる。

(1) (ケース2) で  $V_u < V_x$  なら  $P_x < V_x$ 。

$\therefore P_x / V_x$  (ケース1)  $>$   $P_x / V_x$  (ケース2)

即ち位置の推定精度が向上する。

(2) (ケース3) で  $P_x / V_x, P_u / V_u$  とも  $W_{Du}$  に関する単調増加関数になっている。

表 4 センサ構成と運動推定精度

	ケース 1	ケース 2	ケース 3
$\frac{p_x}{V_x}$	1	$\sqrt{\frac{V_u}{V_x}}$	$\frac{\sqrt{2\sqrt{\frac{W_{Du}}{V_x} + \frac{W_{Du}}{V_u}}}}{\sqrt{\frac{W_{Du}}{V_x} + \frac{W_{Du}}{V_u}}} \sqrt{\frac{W_{Du}}{V_x}}$
$\frac{p_u}{V_u}$		1	$\frac{\sqrt{2\sqrt{\frac{W_{Du}}{V_x} + \frac{W_{Du}}{V_u}}}}{\sqrt{\frac{W_{Du}}{V_x} + \frac{W_{Du}}{V_u}}} \frac{W_{Du}}{V_u}$

(3) (a) (ケース 3) で

$$\lim_{W_{Du} \rightarrow \infty} P_x/V_x \rightarrow \sqrt{V_u/V_x}$$

(2)を考慮すれば

$$P_x/V_x (\text{ケース 2}) > P_x/V_x (\text{ケース 3})$$

(b)  $\lim_{W_{Du} \rightarrow \infty} P_u/V_u \rightarrow \sqrt{W_{Du}/V_u}$

よって  $W_{Du} < V_u$  なら

$$P_u/V_u (\text{ケース 2}) > P_u/V_u (\text{ケース 3})$$

(4) (ケース 3) で

$$\lim_{W_{Du} \rightarrow 0} P_x/V_x \rightarrow \sqrt{2} (W_{Du}/V_x)^{1/4}$$

$$\lim_{W_{Du} \rightarrow 0} P_u/V_u \rightarrow \sqrt{2} W_{Du}^{3/4} V_x^{1/4} V_u^{-1}$$

以上より、 $W_{Du} \leq V_u \leq V_x$  とすれば、(ケース 3) の構成が精度の上でいちばんよいことが分かる。

### 5.3 離散時間ノイズの連続時間ノイズでの近似

これまでの連続型カルマンフィルタでの解析では、ノイズは白色と考え、それぞれの強度 (intensity) でその大きさを与えた。この場合ノイズの持つ全パワーは無窮大となる。現実のノイズは有限のパワーの有色ノイズである。よって有色ノイズの周波数特性を与える何らかのフィルタ (shaping filter) を導入しなければならない。ここでは離散時間系での解析との対応をとるため、そこで仮定された離散時間ランダムノイズを連続時間有

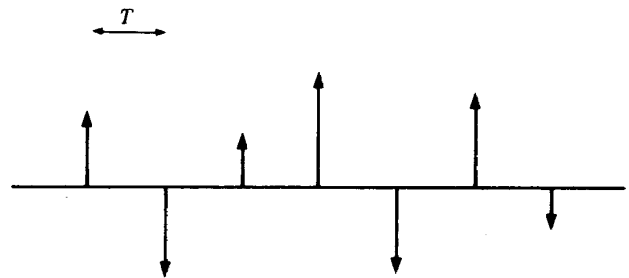


図 7 離散時間ランダムノイズ

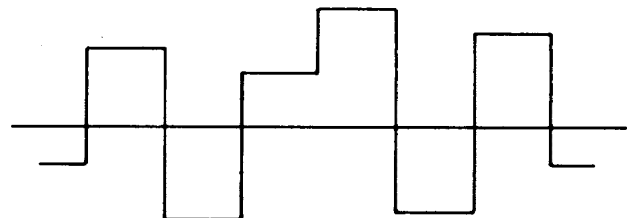


図 8 サンプルホールドされたランダムノイズ

色ノイズで近似する問題を考える。

離散時間系の解析ではノイズはサンプル時点間では一定と考えたので、それぞれ図 7、図 8 のようになる。よって連続系での解析では、図 8 のようなノイズを連続時間ノイズで近似した上で、運動推定精度の解析を行う。

図 8 の自己相関関数は

$$\phi_{xx}(\tau) = \begin{cases} 0 & |\tau| > T \\ \sigma_x^2 (1 - |\tau|/T) & |\tau| < T \end{cases} \quad (5.3.1)$$

となり、図 9 のようになる。 $T$  はサンプリング間隔を示す。ここで自己相関関数は次式で定義され

ているものとする。

$$\phi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t) dt \quad (5.3.2)$$

次に連続時間カルマンフィルタを用いてセンサ精度と運動推定精度の関係を評価するために、図9と相関関数が同じとみなせる信号を生成する成形フィルタを導入する。こうすることで、ここでの問題を正規性白色ノイズを入力とする線形システムの状態推定問題として定式化できる。

図9の自己相関関数を

$$\phi_{xx}'(\tau) = \sigma_x^2 e^{-(2|\tau|/T)} \quad (5.3.3)$$

で近似する(図10)。このようにもとの関数を指数関数で近似するのは、線形フィルタを導く上で必要である。この自己相関関数はもとの関数と $\tau = 0$ での値が等しく、また横軸との囲む面積が等しいという性質を持っている。

$\tau = 0$ での値が等しいという性質は、信号の平均パワーが等しいことを意味する。

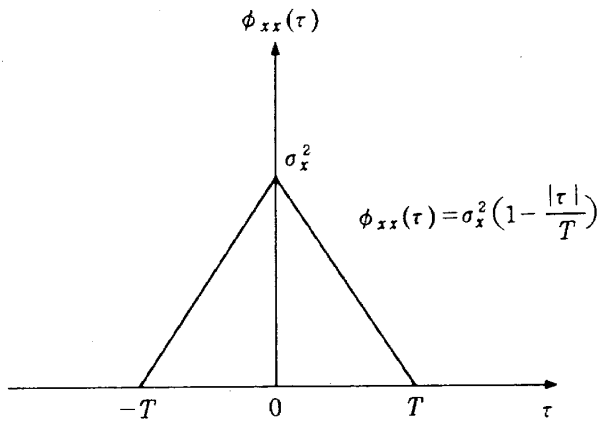


図9 サンプルホールドされたランダムノイズの自己相関関数

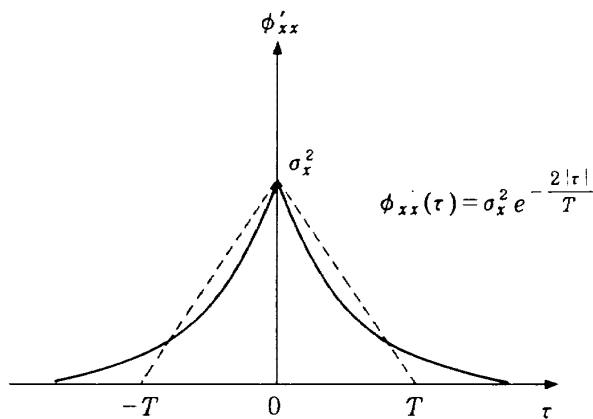


図10 自己相関関数とその近似

信号のパワースペクトラムは

$$\Phi_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.3.4)$$

より、

$$\Phi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau) d\tau \quad (5.3.5)$$

となるので、自己相関関数と横軸の囲む面積が等しいという性質は、パワースペクトラムの周波数0における値を保存していることを意味する。

このような自己相関関数を持つ信号を発生する線形フィルタは次のようにして求まる。自己相関関数のフーリエ変換がパワースペクトラムであるという性質を利用すると、上記の近似自己相関関数を有する信号のパワースペクトラムは次のようになる。

$$\Phi_{xx}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}'(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (5.3.6)$$

$$= \frac{T\sigma_x^2}{1-(T/2)^2 s^2} \quad s=j\omega \quad (5.3.7)$$

よってこれは強さ(intensity)1の正規性白色ノイズを次の線形フィルタ(成形フィルタ)を通した信号のパワー分布に等しい。

$$G(s) = \frac{\sqrt{T}\sigma_x}{1+(T/2)s} \quad (5.3.8)$$

即ちこのような成形フィルタを導入することによって図9の自己相関関数を持つ信号が近似できたことになる。

以上のことは、もとの信号の自己相関関数(5.3.1)のフーリエ変換(パワースペクトラム)

$$T\sigma_x^2 \left[ \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right]^2 \quad (5.3.9)$$

を(5.3.8)は

$$T\sigma_x^2 \frac{1}{1+(\omega T/2)^2} \quad (5.3.10)$$

で近似していることに相当する(図11, 図12)。

### 5.4 有色ノイズでの解析

ここでは、センサに含まれるノイズが有限帯域の有色ノイズの場合を考える。即ちシステムをランダムノイズを入力とする次式の線形連続システムとする。

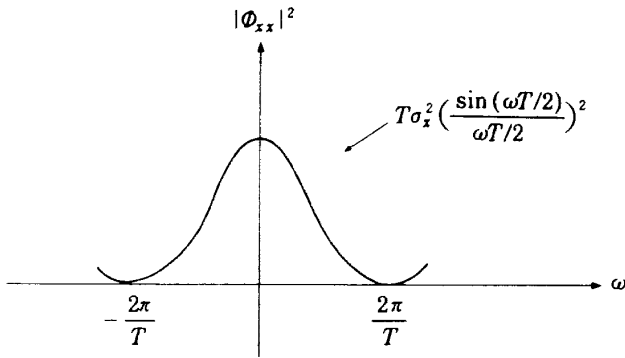


図11 サンプルホールドされたランダムノイズのパワースペクトラム

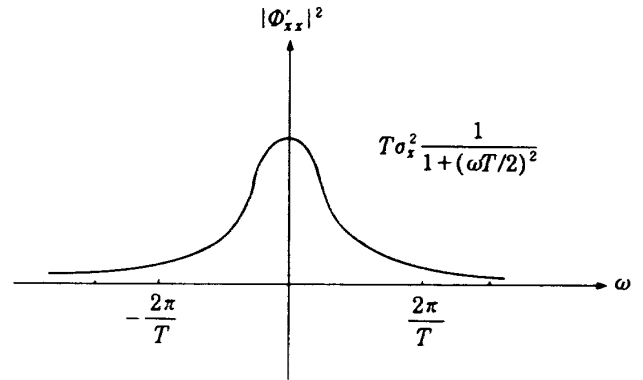


図12 近似された自己相関関数に基づくパワースペクトラム

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw \\ y &= Cx + v \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

ただし  $w, v$  は白色ノイズではない。このときそれらの自己相関関数を利用して、成形フィルタを導入することによって、次に示すような拡張線形システムが導ける。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw \\ \dot{w} &= A'w + B'r \\ \dot{v} &= A''v + B''s \\ y &= Cx + v \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

ここで  $A', B', A'', B''$  は成形フィルタに対応するシステム行列である。 $r, s$  は正規性白色ノイズとなる。

この場合観測方程式に含まれる  $v$  が白色ノイズではないので、これを除くため、あらたに

$$\tilde{y} = \dot{y} - A''y = [CA - A''C]x + CBw + B''s \quad (5.4.3)$$

を観測量と考えれば次のシステムが得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}r \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}s \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

但し

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A' \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B' \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [(CA - A''C) \quad CB] \quad \tilde{D} = B''$$

となり、通常の連続時間カルマンフィルタが適用可能なシステムとなり、 $\tilde{x}$  ( $x$  も含む) の推定精度が評価可能となる<sup>4)</sup>。

以下ではセンサシステムの構成を変えたときの

運動推定精度について検討する。

### 5.5 位置情報と速度情報を用いる場合

(ケース2)

離散時間系のノイズとして、式(3.1.8)と同様にして次のような正規性白色ノイズを仮定する。

$$\begin{aligned} E[w_{ui} \cdot w_{uj}] &= \sigma_u^2 \delta_{ij} \quad (\sigma_u^2 = W_u) \\ E[v_{xi} \cdot v_{xj}] &= \sigma_x^2 \delta_{ij} \quad (\sigma_x^2 = V_x) \\ E[w_{ui} \cdot v_{xj}] &= 0 \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

これらに対しては5.3で示したように次の成形フィルタが対応する。

$$G1(s) = \frac{\sqrt{T}\sigma_u}{1+(T/2)s}, \quad G2(s) = \frac{\sqrt{T}\sigma_x}{1+(T/2)s} \quad (5.5.2)$$

これらを用いて5.4と同様にして拡張システムを作れば次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ w_u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2/T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sigma_u/\sqrt{T} \end{bmatrix} r \\ \tilde{y} &= [2/T \quad 1] \begin{bmatrix} x \\ w_u \end{bmatrix} + 2(\sigma_x/\sqrt{T})s \\ &= [2/T \quad 1] \begin{bmatrix} x \\ w_u \end{bmatrix} + s' \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

但し

$$\begin{aligned} E[r(t)r(t+\tau)] &= 1\delta(\tau) \\ E[s(t)s(t+\tau)] &= 1\delta(\tau) \\ E[s'(t)s'(t+\tau)] &= 4(\sigma_x^2/T)\delta(\tau) \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

(5.5.3), (5.5.4) のシステムに連続型カルマンフ



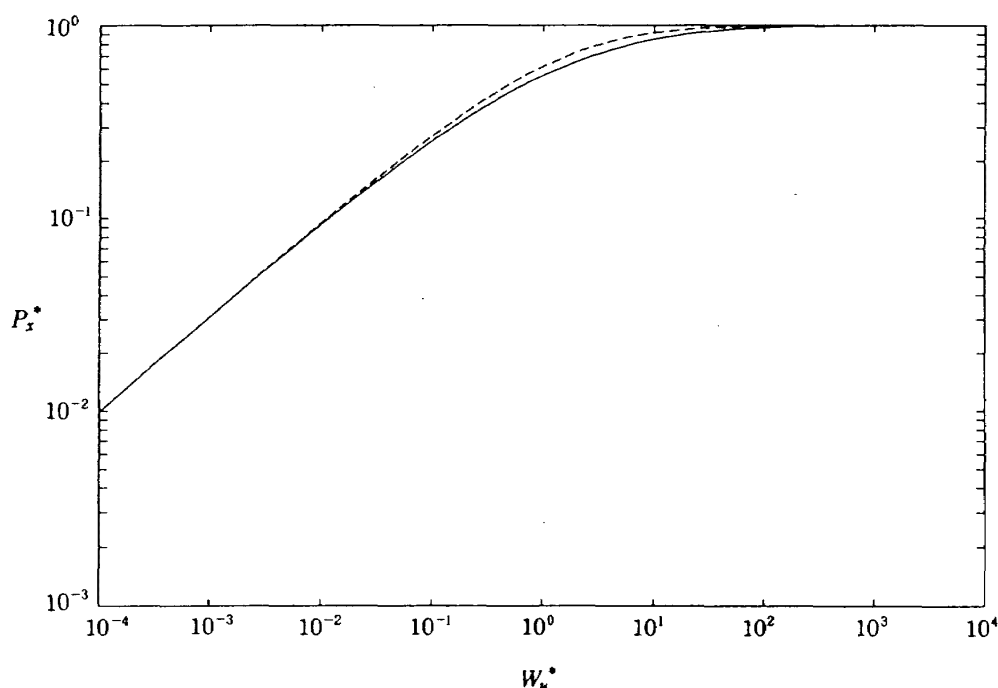


図13 速度計の精度と位置の推定精度の関係  
 —— 連続系 ----- 離散系

フィルタを適用し、その運動推定精度を式(5.1.4)の解として求まる定常共分散行列により評価する。

以上の準備のもとに、 $T=0.1$ で運動推定精度を計算したのが図13である。ここで各変数は図2の場合と同様に位置計測値に含まれるノイズの分散  $V_x$  で正規化したものである。

同図で点線は離散系として解析した図2の結果を示すが、これより連続系での解析結果がよく離散系での解析結果を近似していることが分かり、速度計の精度とそれを用いて推定される位置の推定精度には3.2と同様の関係があることが分かる。

### 5.6 位置情報と速度情報及び角加速度情報を用いる場合(ケース3)

前節と同様に確定入力のない場合で解析を行う。この時ノイズを  $w_{Du}$  (加速度),  $v_x$  (位置),  $v_u$  (速度計) とすれば、システム及び観測方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{u} &= w_{Du} \\ y &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

前節と同様に離散系から連続系への変換のために以下の成形フィルタを導入する。ここで、 $r$ ,

$s_1, s_2$  はそれぞれ強さ (intensity) 1 の正規性白色ノイズである。

$$\begin{aligned} \dot{w}_{Du} &= -(2/T)w_{Du} + 2(\sigma_{Du}/\sqrt{T})r \\ \dot{v}_x &= -(2/T)v_x + 2(\sigma_x/\sqrt{T})s_1 \\ \dot{v}_u &= -(2/T)v_u + 2(\sigma_u/\sqrt{T})s_2 \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

5.5と同様にして拡張システムは次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ u \\ w_{Du} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2/T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ w_{Du} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(\sigma_{Du}/\sqrt{T}) \end{bmatrix} r \\ \bar{y} &= \begin{bmatrix} 2/T & 1 & 0 \\ 0 & 2/T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ w_{Du} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 2(\sigma_x/\sqrt{T}) & 0 \\ 0 & 2(\sigma_u/\sqrt{T}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

以上の準備のもとに、5.1に示した手法で  $T=0.1$  で運動推定精度を計算したのが図14である。ここで各変数は図3の場合と同様に  $V_x, T$  で正規化したものである。

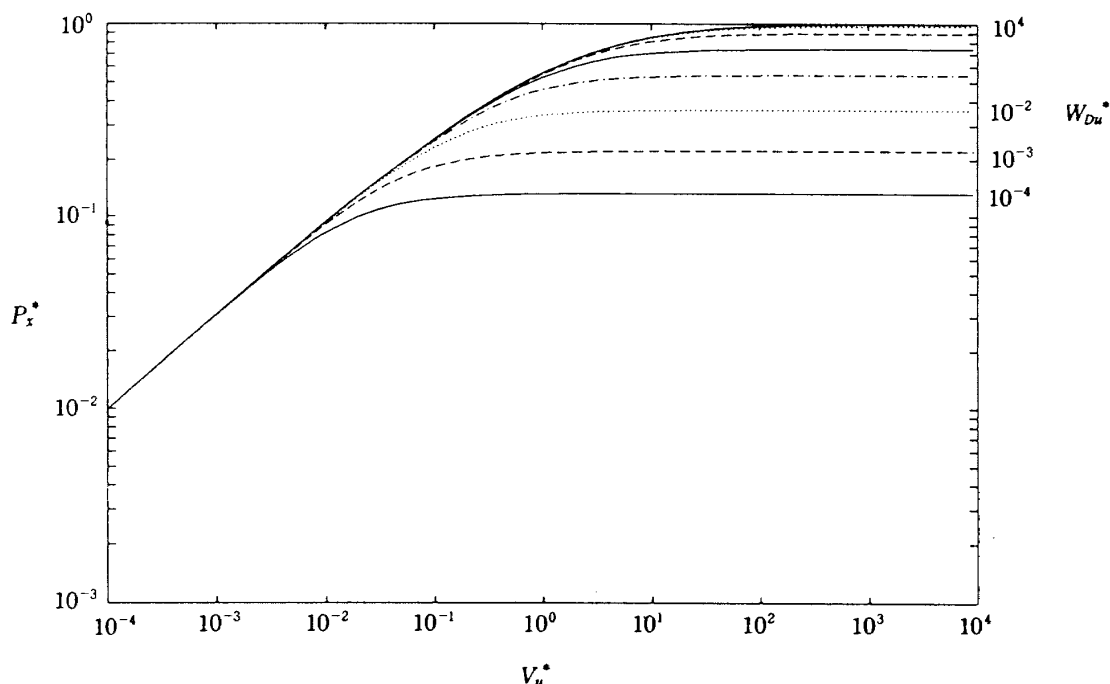


図14 速度計の精度と位置の推定精度の関係  
(加速度計を用いる場合、連続系での解析)

これより連続系での解析結果と離散系での解析結果がよく対応していることが分かり、加速度計の精度とそれを用いて推定される位置及び速度の推定精度には3.3項で述べたものと同様の関係があることが分かる。

## 6. おわりに

航空機の飛行試験データ解析のために角加速度計が開発された。同角加速度計は、空気力モデルのパラメータ同定のための空気力モーメント計測に用いられる他、運動の推定のために通常用いられる位置・速度計測用センサとともに用いることにより、推定精度の向上を図ることができると考えられる。

本稿では、後者の運動推定問題を、位置・速度・加速度計を用いての運動推定問題として一般化し、各センサの計測精度と、運動推定精度の関係を解析的に明らかにすることによって、センサに要求される精度決定のための目安を与えた。

それによれば、運動推定精度は、位置・速度・加速度それぞれの相対的な計測精度の関係で決まると言える。加速度計導入の効果に関して言えば、位置及び速度の計測精度との比較で、加速度計の計測精度が相対的に良ければ、位置・速度の推定

に加速度計情報は有効であるが、加速度計の精度が相対的に悪ければ、位置・速度の推定精度は、位置・速度の計測精度で決まり、加速度計情報は役立たないことが分かった。

また航空機の姿勢角の推定のために従来の角速度計の他、新たに微分センサとして角加速度計を用いる場合の運動推定精度について数値例に基づき検討し、角加速度計の導入の効果を定量的に明らかにした。

## 7. 参考文献

- 1) 永安・柳原・佐々：“航空機における非線形特性とその同定”，計測と制御，Vol.25, No. 7, (1986), pp.647-654.
- 2) J. A. Mulder, H. L. Jonker, J. J. Horsten：“ANALYSIS OF AIRCRAFT PERFORMANCE, STABILITY AND CONTROL MEASUREMENT”，AGARD LS-104, (1979), pp.51-587.
- 3) 有本：“カルマン・フィルター”，産業図書，(1978), pp.67-73.
- 4) A. E. Bryson：“Applied Optimal Control”，Hemisphere, (1975), pp.405-407.

---

## 航空宇宙技術研究所報告1135号

平成3年12月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1  
電話三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川2-27-12

---

