B14 強制変位を受ける薄膜に対する分岐経路追跡手法に関する研究

B14 Study on Path Tracking Method for Bifurcation of Membrane with Enforced Displacement

泉田　啓（京大），渡部　一将（京大・院)
K. Senda (Kyoto Univ.) and K. Watanabe (Kyoto Univ.)

1　はじめに

本研究は，強制変位を受けて分岐を伴いつつ変形する薄膜に対する，分岐経路の追跡手法に関するものである．本研究では経路追跡の際の経路パラメータとして強制変位量を選ぶが，これは実験結果 [3] などと比較を行えるようにするためである．一方，既存の分岐経路追跡アルゴリズム [2] は分岐点近傍の解形状を考察する漸近理論の知見を参考にしているが，漸近理論は荷重を操作する場合についてしか整理されていない．そのため，荷重を操作する系に対する考察結果から，演繹的に強制変位量を操作する系の考察を行っている．また [2] では二重分岐点も観察されているが，二重分岐点については漸近理論が整理されていない．そこで本研究では，分岐後経路追跡アルゴリズム構築に援用するため，強制変位量を操作パラメータとする系に関する漸近理論を，二重分岐点も含めて整理する．具体的には，まず線形化系を用いて操作パラメータの違いによる相違点を明らかにする．つづいて高次項まで含め，存在しうる分岐点の分類を行う．これによって，対象とする系において生じうる分岐点の種類をリスト化でき，分岐経路追跡アルゴリズムの構築に援用することができる．

2　解析対象のモデル化と問題

2.1　解析対象とモデル

2.1.1　解析対象

最終的に数値計算結果を実際の実験結果と比較できるよう，文献 [3] の実験条件を基に解析対象を設定する．

まず，膜は等方弾性体の矩形膜とし，その形状と座標系を Fig. 1 に示す．材質はカプトンを想定し，各物性値を Table 1 に示す．膜の形状などに初期不整はなく，重力のような外力も作用しない，完全系を仮定する．次に境界条件は，膜の左右辺を自由境界とし，下辺を固定境界とする．また上辺も固定した後，x 軸方向に δu_x, y 軸方向に δu_y の一様な強制変位を与える．このとき，はじめに y 軸方向に $\delta u_y = 30.0\times10^{-6}$ [m] の強制変位を与えて膜面を引っ張った後，x 軸方向の変位量 δu_x を変化させ，各 δu_x の値に対する弾性変形を求める静的問題を考える．

2.1.2　有限要素法モデル

上述の解析対象の有限要素モデルについて説明する．形状と物性値は解析対象と同じとする．分割数は (x 方向の分割数) $\times$ (y 方向の分割数)=375 $\times$ 125 を主に用いる．要素種類に関しては ABAQUS が提供しているシェル要素のうち S4R を用いる．境界条件も解析対象と同じとする．これらの各条件の妥当性は，文献 [2] に示されている．なお有限要素解析の際，幾何学的非線形性のみ考慮することとし，材料など他の因子による非線形性は考慮しない．

3　漸近理論

3.1　対象とする式

有限要素モデルに対する非線形支配方程式は，平衡状態として変位 $\boldsymbol{u}$ を与える外力を $\boldsymbol{f}$ と書くと，形式的に

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{f}) \equiv \boldsymbol{0} \tag{1}$$

と書くことができる．この式をもとに特異点近傍での解の漸近的な挙動を考え，特異点の分類を行う．

3.2　経路パラメータの違いによる線形化方程式の相違点

支配方程式を特異点でテイラー展開し，特異点のごく近傍を考えることとして非線形項を無視した線形化方程式を考える．また，経路パラメータが荷重の場合と強制変位量の場合を考え，それらに対応する境界条件として

- 死荷重比例載荷条件
- 強制剪断変位負荷条件

の二つを考える．以下では，得られる方程式の相違点を考察する．

式 (1) を微小増分 $\left(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{f}}\right)$ を用いて線形化すると

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{u}+\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{f}+\tilde{\boldsymbol{f}}\right)\\ &=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{f})+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{u}^T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{f})\,\tilde{\boldsymbol{u}}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{f}^T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{f})\,\tilde{\boldsymbol{f}}+\cdots=\boldsymbol{0} \quad (2)\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{K}(\boldsymbol{u})\,\tilde{\boldsymbol{u}}-\tilde{\boldsymbol{f}}\approx\boldsymbol{0} \quad (3)\end{aligned}$$

が得られる．ここで

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{u}^T}=\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^T,\ \frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{f}^T}=-\boldsymbol{I} \tag{4}$$

であり，$\boldsymbol{K}$ は接線剛性行列である．また，式 (1) を満

たす平衡点のうち，$\boldsymbol{K}$ が特異になる

$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{u}^T}\right) = \det \boldsymbol{K} = 0 \tag{5}$$

を満たす点 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{f})$ を特異点と定義し，$\boldsymbol{K}$ が零固有値を一つ持つ場合を単純特異点，二つ持つ場合を二重特異点と呼ぶ．

3.2.1 荷重パラメータを経路パラメータとする場合

線形方程式 (3) に荷重パラメータを経路パラメータとする場合の境界条件

- 変位境界 Γ_f：固定境界条件
  $\boldsymbol{u}_f \equiv \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^k$，$\boldsymbol{f}_f \in \mathbb{R}^k$
- 力学的境界 Γ_ℓ：死荷重比例載荷条件
  $\boldsymbol{u}_\ell \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{f}_\ell \equiv f\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$
- 力学的境界 Γ_0：自由境界条件
  $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{f}_0 \equiv \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$

を導入する．ただし，$\boldsymbol{p}$ は荷重パターンを決める定ベクトルであり，f が荷重パラメータである．左辺に未知数が，右辺に既知数が来るようにまとめると

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{K}_{f\ell} & \boldsymbol{K}_{f0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{\ell\ell} & \boldsymbol{K}_{\ell 0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{\ell 0}^T & \boldsymbol{K}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{f}}_f \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_\ell \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tilde{f} \tag{6}$$

となる．

式 (5) で与えた特異点の定義から，式 (6) が特異点で評価されているとすると係数行列の行列式が 0 となる．このとき行列の形から

$$\boldsymbol{K}^\ell = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\ell\ell} & \boldsymbol{K}_{\ell 0} \\ \boldsymbol{K}_{\ell 0}^T & \boldsymbol{K}_{00} \end{bmatrix} \tag{7}$$

が特異となることがわかる．

3.2.2 強制変位量を経路パラメータとする場合

続いて線形方程式 (3) に強制変位量を経路パラメータとする場合の境界条件

- 変位境界 Γ_f：固定境界条件
  $\boldsymbol{u}_f \equiv \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^k$，$\boldsymbol{f}_f \in \mathbb{R}^k$
- 変位境界 Γ_d：強制変位境界条件
  $\boldsymbol{u}_d \equiv \delta u_x \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T = \delta u_x \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{f}_d \in \mathbb{R}^m$
- 力学的境界 Γ_0：自由境界条件
  $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{f}_0 \equiv \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$

を導入する．ただし，$\boldsymbol{e}$ は強制変位パターンを定める定ベクトルで，ここでは一様に剪断変位を与えることを表す．左辺に未知数が，右辺に既知数が来るようにまとめると

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{f0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{K}_{d0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{f}}_f \\ \tilde{\boldsymbol{f}}_d \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{fd} \\ \boldsymbol{K}_{dd} \\ \boldsymbol{K}_{d0}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{e} \delta \tilde{u}_x \tag{8}$$

がえられる．

式 (6) に対する特異点と同様，式 (8) の特異点では

$$\det \begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{f0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{K}_{d0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{00} \end{bmatrix} = 0 \tag{9}$$

であるが，行列の形からこれは

$$\det \boldsymbol{K}_{00} = 0 \tag{10}$$

と等価である．ただし，式 (8) の特異性については，注意が必要である．それは，右辺のベクトルが無限大の成分を持つように発散する場合であり，このときも解が発散しうる．しかし，式 (8) では右辺の行列はすべて接線剛性行列の一部分であり，それが無限大に発散することはない．結局，強制変位量を経路パラメータとする場合，式 (10) により特異点が求まる．

3.2.3 二つの系の相違点

以上により，経路パラメータとして荷重を選ぶ場合と強制変位量を選ぶ場合では，特異性を考える行列が異なる．荷重の場合は死荷重比例載荷境界も含む

$$\boldsymbol{K}^\ell = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\ell\ell} & \boldsymbol{K}_{\ell 0} \\ \boldsymbol{K}_{0\ell} & \boldsymbol{K}_{00} \end{bmatrix} \tag{11}$$

が，強制変位の場合は強制変位境界を含まない自由境界のみの

$$\boldsymbol{K}_{00} \tag{12}$$

がそれぞれ対象となる．本研究では強制変位量を経路パラメータとして選ぶので，$\boldsymbol{K}_{00}$ を対象として固有値解析を行い，ゼロ固有値に対応する固有モードを座屈モードと呼ぶ．

3.3 非線形項まで含めた漸近理論

強制変位量を経路パラメータとする系に対して非線形項まで含めて漸近理論を整理する．基本的な式展開はすべて，文献 [1] と同様である．

3.3.1 単純特異点

まず，単純特異点を仮定し，分岐方程式を導出する．3.2.2 節の考察から，以下の議論は式 (10) が満たされる点において展開される．

境界条件をみたす非線形方程式 (1) を形式的に書くと

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_f, \boldsymbol{u}_d(\delta u_x), \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{f}_f, \boldsymbol{f}_d, \boldsymbol{f}_0) \equiv \boldsymbol{0} \tag{13}$$

となる．この方程式について，増分 $(\tilde{\boldsymbol{u}}_f, \tilde{\boldsymbol{u}}_d(\delta\tilde{u}_x), \tilde{\boldsymbol{u}}_0, \tilde{\boldsymbol{f}}_f, \tilde{\boldsymbol{f}}_d, \tilde{\boldsymbol{f}}_0)$ に対する方程式

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{u}}_f, \tilde{\boldsymbol{u}}_d(\delta\tilde{u}_x), \tilde{\boldsymbol{u}}_0, \tilde{\boldsymbol{f}}_f, \tilde{\boldsymbol{f}}_d, \tilde{\boldsymbol{f}}_0) \equiv \\ &\quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_f + \tilde{\boldsymbol{u}}_f, \boldsymbol{u}_d(\delta u_x) + \tilde{\boldsymbol{u}}_d(\delta\tilde{u}_x), \boldsymbol{u}_0 + \tilde{\boldsymbol{u}}_0, \boldsymbol{f}_f + \tilde{\boldsymbol{f}}_f, \boldsymbol{f}_d + \tilde{\boldsymbol{f}}_d, \boldsymbol{f}_0 + \tilde{\boldsymbol{f}}_0) \\ &\qquad - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_f, \boldsymbol{u}_d(\delta u_x), \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{f}_f, \boldsymbol{f}_d, \boldsymbol{f}_0) = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{14}$$

を定義する．これを増分方程式と呼ぶ．

漸近理論では，変位増分のうち行列 $\boldsymbol{K}_{00}$ の座屈モードに対応するモード座標 α_c と，経路パラメータ $\delta\tilde{u}_x$ の関係を表す「分岐方程式」を導出し，それに基づいて特異点の分類を行う．分岐方程式を導出する操作は「Lyapunov-Schmidt 簡約」と呼ばれるもので，まず増分方程式を $\boldsymbol{K}_{00}$ の固有ベクトルで座標変換し，$\boldsymbol{K}_{00}$ の零空間と列空間それぞれで成立する式に分解する．その後，列空間内で成立する式に陰関数定理を適用することで，変数を α_c と $\delta\tilde{u}_x$ のみに簡約化する．

変位増分 $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$ を $\boldsymbol{K}_{00}$ の正規化固有ベクトル $\boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{\phi}_2, \cdots, \boldsymbol{\phi}_n$ を用いて

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_0 = \alpha_c \boldsymbol{\phi}_c + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i = \alpha_c \boldsymbol{\phi}_c + \boldsymbol{\phi}' \tag{15}$$

とモード表現し，増分方程式の三次項の一部までに対

して Lyapunov-Schmidt 簡約を行うと

$$
\begin{aligned}
&S(\alpha_c, \delta\tilde{u}_x) \\
&\quad = A_{01}\ \delta\tilde{u}_x + A_{20}\ \alpha_c^2 + A_{11}\ \alpha_c\delta\tilde{u}_x \\
&\qquad + A_{02}\ \delta\tilde{u}_x^2 + A_{30}\ \alpha_c^3 + (h.o.t.) = 0
\end{aligned} \tag{16}
$$

が得られる．ただし，各係数は

$$
\begin{cases}
A_{01} = \boldsymbol{\phi}_c^T \dot{\boldsymbol{F}}_0 \boldsymbol{e} \\
A_{20} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_c^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{\phi}_c) \\
A_{11} = \boldsymbol{\phi}_c^T \dot{\boldsymbol{F}}_0'(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\phi}_c) + \boldsymbol{\phi}_c^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{g}) \\
A_{02} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_c^T \ddot{\boldsymbol{F}}_0(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) + \boldsymbol{\phi}_c^T \dot{\boldsymbol{F}}_0'(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{g}) + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_c^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}) \\
A_{30} = \boldsymbol{\phi}_c^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{h}) + \dfrac{1}{6}\boldsymbol{\phi}_c^T \boldsymbol{F}_0'''(\boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{\phi}_c)
\end{cases} \tag{17}
$$

である．ここで，$\boldsymbol{F}_0$ は $\boldsymbol{F}$ のうち自由境界に関する部分を表す．また，$\dot{\boldsymbol{F}}, \boldsymbol{F}'$ などは，それぞれ

$$
\dot{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial \boldsymbol{F}_f}{\partial \boldsymbol{u}_d^T},\ \boldsymbol{F}' = \frac{\partial \boldsymbol{F}_f}{\partial \boldsymbol{u}_0^T},\ \boldsymbol{F}''(\tilde{\boldsymbol{u}}_0, \tilde{\boldsymbol{u}}_0) = \tilde{\boldsymbol{u}}_0^T \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{u}_0 \partial \boldsymbol{u}_0^T} \tilde{\boldsymbol{u}}_0 \tag{18}
$$

を意味する．$\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ は

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\phi}' = \delta\tilde{u}_x \boldsymbol{g} + \alpha_c^2 \boldsymbol{h} + (h.o.t.) \\
&\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{K}_{00}^{\dagger} \boldsymbol{\omega} \dot{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{e},\ \boldsymbol{h} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_{00}^{\dagger} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{F}''(\boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{\phi}_c)
\end{aligned} \tag{19}
$$

を意味し，$\boldsymbol{\omega}$ は $\boldsymbol{K}_{00}$ の列空間への射影行列，$\boldsymbol{K}_{00}^{\dagger}$ は $\boldsymbol{K}_{00}$ の列空間内のベクトルについて逆に解くための一般化逆行列である．また，分岐方程式中の各係数の右下の添え字は，一つ目が α_c，二つ目が $\delta\tilde{u}_x$ の次数を表す．これが，強制変位を経路パラメータとする系における，二次項と三次項の一部 (α_c^3) に関する分岐方程式である．

3.3.2 多重 (二重) 特異点の場合

二重特異点が生じる場合の分岐方程式を導出する．議論展開は単純特異点の場合と同様であるが，差が生じるのは行列 $\boldsymbol{K}_{00}$ が二つの 0 固有値を持つことにより，それぞれに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{\phi}_{c2}$ と書くことにして

$$
\boldsymbol{K}_{00}\boldsymbol{\phi}_{c1} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{K}_{00}\boldsymbol{\phi}_{c2} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{\phi}_{c2} = 0 \tag{20}
$$

が成立する点である．ここで三つ目の式は，行列 $\boldsymbol{K}_{00}$ が対称行列であることから $\boldsymbol{\phi}_{c1}$ と $\boldsymbol{\phi}_{c2}$ を直交するように選べることによって成立する．

上記のベクトルを用いて，増分ベクトル $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$ を

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{u}}_0 &= \alpha_{c1}\boldsymbol{\phi}_{c1} + \alpha_{c2}\boldsymbol{\phi}_{c2} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i \\
&= \alpha_{c1}\boldsymbol{\phi}_{c1} + \alpha_{c2}\boldsymbol{\phi}_{c2} + \boldsymbol{\phi}'
\end{aligned} \tag{21}
$$

とモード表現する．増分方程式の三次項までに対して，まず一つ目の座屈モード $\boldsymbol{\phi}_{c1}$ 方向において Lyapunov-Schmidt 簡約を行うと

$$
\begin{aligned}
&S1(\alpha_{c1}, \alpha_{c2}, \delta\tilde{u}_x) \\
&\quad = A_{001}^1\ \delta\tilde{u}_x + A_{200}^1\ \alpha_{c1}^2 + A_{110}^1\ \alpha_{c1}\alpha_{c2} \\
&\qquad + A_{020}^1\ \alpha_{c2}^2 + A_{101}^1\ \alpha_{c1}\delta\tilde{u}_x + A_{011}^1\ \alpha_{c2}\delta\tilde{u}_x \\
&\qquad + A_{002}^1\ \delta\tilde{u}_x^2 + A_{300}^1\ \alpha_{c1}^3 + A_{210}^1\ \alpha_{c1}^2\alpha_{c2} \\
&\qquad + A_{120}^1\ \alpha_{c1}\alpha_{c2}^2 + A_{030}^1\ \alpha_{c2}^3 + (h.o.t.) = 0
\end{aligned} \tag{22}
$$

が得られる．ただし，各係数は

$$
\begin{cases}
A_{001}^1 = \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \dot{\boldsymbol{F}}_0 \boldsymbol{e}, \\
A_{200}^1 = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{\phi}_{c1}), \\
A_{110}^1 = \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{\phi}_{c2}), \\
A_{020}^1 = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_{c2}, \boldsymbol{\phi}_{c2}), \\
A_{101}^1 = \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \dot{\boldsymbol{F}}_0'(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\phi}_{c1}), \\
A_{011}^1 = \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_{c2}, \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \dot{\boldsymbol{F}}_0'(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\phi}_{c2}), \\
A_{002}^1 = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \dot{\boldsymbol{F}}_0'(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{g}) \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_{c1}^T \ddot{\boldsymbol{F}}_0(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}), \\
A_{300}^1 = \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{h}) + \dfrac{1}{6}\boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0'''(\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{\phi}_{c1}), \\
A_{210}^1 = \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_{c2}, \boldsymbol{h}) \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0'''(\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{\phi}_{c2}), \\
A_{120}^1 = \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_{c2}, \boldsymbol{k}) \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0'''(\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{\phi}_{c2}, \boldsymbol{\phi}_{c2}), \\
A_{030}^1 = \boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_{c2}, \boldsymbol{r}) + \dfrac{1}{6}\boldsymbol{\phi}_{c1}^T \boldsymbol{F}_0'''(\boldsymbol{\phi}_{c2}, \boldsymbol{\phi}_{c2}, \boldsymbol{\phi}_{c2})
\end{cases} \tag{23}
$$

であり，右下の添え字は，一つ目が α_{c1}，二つ目が α_{c2}，三つ目が $\delta\tilde{u}_x$ の次数を，右肩の添え字は一つ目の座屈モード $\boldsymbol{\phi}_{c1}$ 方向における式であることを表す．また $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}$ は

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\phi}' = \delta\tilde{u}_x \boldsymbol{g} + \alpha_{c1}^2 \boldsymbol{h} + \alpha_{c1}\alpha_{c2} \boldsymbol{k} + \alpha_{c2}^2 \boldsymbol{r} + (h.o.t.) \\
&\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{K}_{00}^{\dagger} \boldsymbol{\omega} \dot{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{e},\ \boldsymbol{h} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_{00}^{\dagger} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{F}''(\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{\phi}_{c1}), \\
&\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{K}_{00}^{\dagger} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{F}''(\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{\phi}_{c2}),\ \boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_{00}^{\dagger} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{F}''(\boldsymbol{\phi}_{c2}, \boldsymbol{\phi}_{c2})
\end{aligned} \tag{24}
$$

を満たす．

二つ目の座屈モード $\boldsymbol{\phi}_{c2}$ 方向においても同様な手順をとることで，もう一つの分岐方程式が得られる．これは，各係数において $\boldsymbol{\phi}_{c1}^T \to \boldsymbol{\phi}_{c2}^T$ と書き換えることで形式的に得られ，これら S_1, S_2 を連立することで特異点近傍での解 $(\alpha_{c1}, \alpha_{c2}, \delta\tilde{u}_x)$ の挙動を考えることができる．すなわち

$$
\begin{cases}
S_1(\alpha_{c1}, \alpha_{c2}, \delta\tilde{u}_x) = 0 \\
S_2(\alpha_{c1}, \alpha_{c2}, \delta\tilde{u}_x) = 0
\end{cases} \tag{25}
$$

が，強制変位を経路パラメータとする系の特異点における，二次項と三次項の一部に関する分岐方程式である．

3.4 分岐方程式に基づく特異点の分類

導出した分岐方程式を用いて，生じうる特異点を分類する．

3.4.1 単純特異点

単純特異点の分岐方程式 (16) について，各係数がそれぞれ有限の大きさの値を持つかどうかによって特異点を分類し，近傍の経路形状や各経路の安定性を考察する．分類を行った結果を Table 2 に示す．

■極限点 分岐方程式の各係数が「$A_{01} \neq 0, A_{20} \neq 0, A_{02} = A_{30} = 0$」となるとき，Fig. 2 のような形状となり，これを極限点と呼ぶ．このとき，分岐方程式は漸近的に

$$
S(\alpha_c, \delta\tilde{u}_x) \sim A_{01}\delta\tilde{u}_x + A_{20}\alpha_c^2 = 0 \tag{26}
$$

となる．この式から，特異点近傍に

$$\delta\tilde{u}_x = -\frac{A_{20}}{A_{01}}\alpha_c^2 + O(\alpha_c^3) \tag{27}$$

と表される解曲線が存在し，これを α 経路と呼ぶ．

また，式 (19) から

$$\boldsymbol{\phi}' = -\frac{A_{20}}{A_{01}}\alpha_c^2\boldsymbol{g} + O(\alpha_c^3) \tag{28}$$

となるので

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_0 = \alpha_c\boldsymbol{\phi}_c - \frac{A_{20}}{A_{01}}\alpha_c^2\boldsymbol{g} + O(\alpha_c^3) \tag{29}$$

と表すことができる．

最後に，特異点の近傍において，座屈モード $\boldsymbol{\phi}_c$ とそれに対応する固有値 λ_c を，α_c をパラメータとして $(\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c), \lambda_c(\alpha_c))$ と書くことにし，次の線形化固有値問題を考える．

$$\begin{gathered}\boldsymbol{K}_{00}(\alpha_c)\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c) = \lambda_c(\alpha_c)\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)\\ \boldsymbol{\phi}_c(0) = \boldsymbol{\phi}_c,\ \lambda_c(0) = \lambda_c = 0,\ \boldsymbol{K}_{00}(\alpha_c) = \boldsymbol{F}_0'(\alpha_c)\end{gathered} \tag{30}$$

単純特異点を考えているので，特異点近傍のある区間 I_δ において $\dim\ker(\boldsymbol{K}_{00}(\alpha_c) - \lambda_c(\alpha_c)\boldsymbol{I}) = 1$, $\alpha_c \in I_\delta$ が成り立つことを仮定する．

式 (30) の両辺を α_c で微分し，$\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)^T$ を両辺に左からかけると

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)^T\frac{d\boldsymbol{K}_{00}(\alpha_c)}{d\alpha_c}\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c) + \boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)^T\boldsymbol{K}_{00}(\alpha_c)\frac{d\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)}{d\alpha_c}\\ &\quad = \frac{d\lambda_c(\alpha_c)}{d\alpha_c}\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)^T\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c) + \lambda_c(\alpha_c)\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)^T\frac{d\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)}{d\alpha_c}\end{aligned} \tag{31}$$

となる．この式の左辺第二項は，$\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)$ が $\boldsymbol{K}_{00}(\alpha_c)$ の左右両方の固有ベクトルであることから右辺第二項と打ち消しあって消える．また，右辺第一項は $\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)^T\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c) = 1$ であることから，結局

$$\frac{d\lambda_c(\alpha_c)}{d\alpha_c} = \boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)^T\frac{d\boldsymbol{K}_{00}(\alpha_c)}{d\alpha_c}\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c) \tag{32}$$

が得られる．この式を $\alpha_c = 0$ で評価できれば，特異点における固有値の符号の変化を考えることができる．そこで，$\frac{d\boldsymbol{K}_{00}(\alpha_c)}{d\alpha_c}$ の $\alpha_c = 0$ における微分係数を計算すると

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\boldsymbol{K}_{00}(\alpha_c)}{d\alpha_c}\right|_{\alpha_c=0} &= \boldsymbol{F}_0''(\alpha_c)\left.\frac{d\tilde{\boldsymbol{u}}_0(\alpha_c)}{d\alpha_c}\right|_{\alpha_c=0}\\ &\quad + \dot{\boldsymbol{F}}_0{}'(\alpha_c)\frac{d\tilde{\boldsymbol{u}}_d}{d\delta\tilde{u}_x}\left.\frac{d\delta\tilde{u}_x(\alpha_c)}{d\alpha_c}\right|_{\alpha_c=0}\end{aligned} \tag{33}$$

となる．式 (27) と式 (29) を用いて各項の微分係数を計算すると

$$\left.\frac{d\tilde{\boldsymbol{u}}_0(\alpha_c)}{d\alpha_c}\right|_{\alpha_c=0} = \boldsymbol{\phi}_c,\ \frac{d\tilde{\boldsymbol{u}}_d}{d\delta\tilde{u}_x} = \boldsymbol{e},\ \left.\frac{\delta\tilde{u}_x(\alpha_c)}{d\alpha_c}\right|_{\alpha_c=0} = 0 \tag{34}$$

が得られる．したがって，式 (33) は

$$\left.\frac{d\boldsymbol{K}_{00}(\alpha_c)}{d\alpha_c}\right|_{\alpha_c=0} = \boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_c, \cdot) \tag{35}$$

となる．もともと考えていた式 (32) を $\alpha_c = 0$ で評価し，上式を代入すれば

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\lambda_c(\alpha_c)}{d\alpha_c}\right|_{\alpha_c=0} &= \boldsymbol{\phi}_c^T(\boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_c,\cdot))\boldsymbol{\phi}_c\\ &= \boldsymbol{\phi}_c^T\boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_c,\boldsymbol{\phi}_c) = 2A_{20} \neq 0\end{aligned} \tag{36}$$

となる．二段目については，係数 (17) および極限点の仮定 $A_{20} \neq 0$ を用いた．

以上から，極限点において

$$\lambda_c = 0\ ,\ \frac{d\lambda_c}{d\alpha_c} \neq 0 \tag{37}$$

が成立することがわかった．これは λ_c が，そして λ_c のみが極限点において符号を変えることを意味する．これが極限点の持つ性質であり，極限点の前後で安定性は反転する．

■非対称分岐点　分岐方程式の各係数が「$A_{01} = A_{30} = 0$ で，$A_{20} \cdot A_{02} \leq 0$ (どちらかは非 0)」となるとき，Fig. 4 のような形状となり，これを非対称分岐点と呼ぶ．$A_{20} \neq 0, A_{11} \neq 0, A_{02} \neq 0$ が最も一般的であり，他は全てその特殊な場合と考えることができるので，それらの係数はすべて非零として考える．ただし，$A_{20} \cdot A_{02} < 0$．このとき分岐方程式は，漸近的に

$$S(\alpha_c, \delta\tilde{u}_x) \sim A_{20}\alpha_c^2 + A_{11}\alpha_c\delta\tilde{u}_x + A_{02}\delta\tilde{u}_x^2 = 0 \tag{38}$$

となる．これを α_c について解くと，$A_{20} \cdot A_{02} < 0$ より

$$\alpha_c^{\pm} = \frac{-A_{11} \pm \sqrt{A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02}}}{2A_{20}}\delta\tilde{u}_x + O(\delta\tilde{u}_x^2) \tag{39}$$

となる．この式から，非対称分岐点近傍に二つの直線があって非対称分岐点で交わる．それらをそれぞれ $+, -$ 経路と呼び，特異点の近傍で $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$ の具体的な形は

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_0^{\pm} = \alpha_c^{\pm}\boldsymbol{\phi}_c + \delta\tilde{u}_x\boldsymbol{g} + O(\delta\tilde{u}_x^2) \tag{40}$$

のようになる．ただし，$\alpha_c^{\pm}$ は式 (39) で示したものである．

ここで，$+, -$ 経路と呼んでいる二つの直線経路については注意が必要である．便宜上経路と呼んではいるが，これは必ずしも各直線が「つながった」経路であるという意味ではない．すなわち，経路パラメータ δu_x を変えつつ経路追跡を行うとき，特異点に到達した後，どの経路をたどるかは定まらない．ただし，系に不整が入ると交錯する二本の直線にはならず，特異点近傍を通るが，交わることのない二本の曲線に分離する．

つづいて各経路の安定性を解析する．極限点の場合に行った安定性の解析手法は他の特異点に対しても適用でき，従って同様な手順によって

$$\lambda^{\pm}(0) = 0,\ \frac{d\lambda_c^{+}(0)}{d\delta\tilde{u}_x}\cdot\frac{d\lambda_c^{-}(0)}{d\delta\tilde{u}_x} = -(A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02}) < 0 \tag{41}$$

が得られる．この結果から，非対称分岐点において + 経路と − 経路のどちらかが安定から不安定に変わると同時に他方は不安定から安定にかわることがわかる．これは，“*Poincaré* の安定性の変換” と呼ばれ，これによって非対称分岐は “トランスクリティカル分岐” とも呼ばれる．

■対称分岐点　分岐方程式の各係数が「$A_{11} \neq 0, A_{30} \neq 0, A_{01} = A_{20} = A_{02} = 0$」となるとき，Fig. 3 のような形状となり，これを対称分岐点と呼ぶ．このとき，分岐方程式は

$$S(\alpha_c, \delta\tilde{u}_x) \sim A_{11}\alpha_c\delta\tilde{u}_x + A_{30}\alpha_c^3 = 0 \tag{42}$$

となる．したがって，$S(\alpha_c, \delta\tilde{u}_x)$ の解の組は

$$\alpha_c \simeq 0,\ \delta\tilde{u}_x^\alpha = -\frac{A_{30}}{A_{11}}\alpha_c^2 + O(\alpha_c^3) \tag{43}$$

となる．この式から，対称分岐点近傍に一つの直線と一つの二次曲線があって，対称分岐点で交わることがわかる．直線経路を δ 経路，曲線経路を α 経路と呼ぶ．

δ 経路において，変位増分 $\tilde{\boldsymbol{u}}_0^\delta$ は

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_0^\delta = \delta\tilde{u}_x\boldsymbol{g} + O(\delta\tilde{u}_x^2) \tag{44}$$

のように $\delta\tilde{u}_x$ を用いて表すことができ，また α 経路においては

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_0^\alpha = \alpha_c\boldsymbol{\phi}_c + \alpha_c^2\left[\boldsymbol{h} - \frac{A_{30}}{A_{11}}\boldsymbol{g}\right] + O(\alpha_c^3) \tag{45}$$

と表すことができる．

続いて各経路の安定性を解析する．まず，δ 経路については

$$\lambda_c^\delta(0) = 0,\ \frac{d\lambda_c^\delta(0)}{d\delta\tilde{u}_x} = A_{11} \neq 0 \tag{46}$$

が得られる．これにより，δ 経路では特異点で安定性が反転することがわかる．

次に，α 経路については

$$\lambda_c^\alpha(0) = 0,\ \frac{d\lambda_c^\alpha(0)}{d\alpha_c} = A_{20} = 0 \tag{47}$$

が得られる．この結果から，α 経路の安定性の変化を考察するには固有値をさらにもう一回微分したものを考える必要がある．

固有値問題の両辺を α_c で二回微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c^2}\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c) + 2\frac{d\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c}\frac{d\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c} + \boldsymbol{K}_{00}^\alpha(\alpha_c)\frac{d^2\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c^2} \\
&= \frac{d^2\lambda_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c^2}\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c) + 2\frac{d\lambda_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c}\frac{d\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c} + \lambda_c^\alpha(\alpha_c)\frac{d^2\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c^2}
\end{aligned} \tag{48}$$

となる．これの両辺に左から $\boldsymbol{\phi}_c(\alpha_c)^T$ を作用させると，各辺第三項が等しくなって打ち消しあう．また，右辺第二項は

$$2\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)^T\frac{d\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c} = \frac{d}{d\alpha_c}\left(\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)^T\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)\right) = 0 \tag{49}$$

となって消えるので，結局

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\lambda_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c^2} &= \boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)^T\frac{d^2\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c^2}\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c) \\
&\quad + 2\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)^T\frac{d\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c}\frac{d\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c}
\end{aligned} \tag{50}$$

が得られる．

固有値問題の両辺を一回微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c}\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c) + \boldsymbol{K}_{00}^\alpha(\alpha_c)\frac{d\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c} \\
&= \frac{d\lambda_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c}\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c) + \lambda_c^\alpha(\alpha_c)\frac{d\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c}
\end{aligned} \tag{51}$$

となる．これを $\alpha_c = 0$ で評価すると，式 (47) から左辺だけが残って

$$\frac{d\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(0)}{d\alpha_c}\boldsymbol{\phi}_c + \boldsymbol{K}_{00}^\alpha(0)\frac{d\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(0)}{d\alpha_c} = 0 \tag{52}$$

となる．$\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(0)$ の列空間に射影する射影行列 $\boldsymbol{\omega}$ とその空間内のベクトルを逆に解く行列 $\boldsymbol{K}_{00}^\dagger$ を用いて

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\omega}\frac{d\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(0)}{d\alpha_c}\boldsymbol{\phi}_c + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(0)\frac{d\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(0)}{d\alpha_c} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{d\boldsymbol{\phi}_c^\alpha(0)}{d\alpha_c} = -\boldsymbol{K}_{00}^\dagger\boldsymbol{\omega}\frac{d\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(0)}{d\alpha_c}\boldsymbol{\phi}_c \\
&\qquad = -\boldsymbol{K}_{00}^\dagger\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{\phi}_c) = 2\boldsymbol{h}
\end{aligned} \tag{53}$$

となる．ただし，式 (19) を用いた．

また，

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c^2} =& \boldsymbol{F}_0'''(\alpha_c)\frac{d\tilde{\boldsymbol{u}}_0^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c}\frac{d\tilde{\boldsymbol{u}}_0^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c} \\
&+ \boldsymbol{F}_0''(\alpha_c)\frac{d^2\boldsymbol{u}_0^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c^2} \\
&+ 2\dot{\boldsymbol{F}}_0''(\alpha_c)\boldsymbol{e}\frac{d\delta\tilde{u}_x^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c}\frac{d\tilde{\boldsymbol{u}}_0^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c} \\
&+ \dot{\boldsymbol{F}}_0'(\alpha_c)\boldsymbol{e}\frac{d^2\delta\tilde{u}_x^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c^2} \\
&+ \ddot{\boldsymbol{F}}_0'(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}, \cdot)\left(\frac{d\delta\tilde{u}_x^\alpha(\alpha_c)}{d\alpha_c}\right)^2
\end{aligned} \tag{54}$$

を式 (43)，(45) を用いて $\alpha_c = 0$ で評価すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\boldsymbol{K}_{00}^\alpha(0)}{d\alpha_c^2} &= \boldsymbol{F}_0'''(\boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{\phi}_c, \cdot) + 2\boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{h}, \cdot) \\
&\quad - \frac{2A_{30}}{A_{11}}\boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{g}, \cdot) - \frac{2A_{30}}{A_{11}}\dot{\boldsymbol{F}}_0'(\boldsymbol{e}, \cdot)
\end{aligned} \tag{55}$$

が得られる．

式 (50) を $\alpha_c = 0$ で評価したものに式 (53) と (54) を代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\lambda_c^\alpha(0)}{d\alpha_c^2} &= \boldsymbol{\phi}_c^T\boldsymbol{F}_0'''(\boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{\phi}_c) + 2\boldsymbol{\phi}_c^T\boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\phi}_c) \\
&\quad - \frac{2A_{30}}{A_{11}}\boldsymbol{\phi}_c^T\boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_c) - \frac{2A_{30}}{A_{11}}\boldsymbol{\phi}_c^T\dot{\boldsymbol{F}}_0'(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\phi}_c) \\
&\quad + 4\boldsymbol{\phi}_c^T\boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{h}) \\
&= \boldsymbol{\phi}_c^T\boldsymbol{F}_0'''(\boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{\phi}_c, \boldsymbol{\phi}_c) + 6\boldsymbol{\phi}_c^T\boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\phi}_c) \\
&\quad - \frac{2A_{30}}{A_{11}}\left(\boldsymbol{\phi}_c^T\boldsymbol{F}_0''(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_c) + \boldsymbol{\phi}_c^T\dot{\boldsymbol{F}}_0'(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\phi}_c)\right) \\
&= 6A_{30} - 2A_{30} = 4A_{30} \neq 0
\end{aligned} \tag{56}$$

が得られ，対称分岐点近傍において A_{30} が正であれば α 経路は安定，負であれば不安定であることがわかる．また，式 (43) と式 (46) を用いると

$$4A_{30} = -2\frac{d^2\delta\tilde{u}_x^{\alpha}(0)}{d\alpha_c^2}\cdot\frac{d\lambda_c^{\delta}(0)}{d\delta\tilde{u}_x} \tag{57}$$

と書くことができる．この式から，分岐図を描いた際の α 経路が上か下どちらに凸であるかと，δ 経路の安定性がどのように変化するかとを関係づけることができる．例えば，Fig. 3 のような形状で $\delta\tilde{u}_x < 0$ の領域で δ 経路が安定ならば，α 経路は安定である．

■変曲点　分岐方程式の各係数が「$A_{01} \neq 0, A_{30} \neq 0, A_{11} = A_{20} = A_{02} = 0$」となるとき，Fig. 5 のようになり，これを変曲点と呼ぶ．このとき，分岐方程式は

$$S(\alpha_c, \delta\tilde{u}_x) \sim A_{01}\delta\tilde{u}_x + A_{30}\alpha_c^3 = 0 \tag{58}$$

となる．この式から，特異点近傍に

$$\delta\tilde{u}_x = -\frac{A_{30}}{A_{01}}\alpha_c^3 + O(\alpha_c^4) \tag{59}$$

と表される解曲線が存在し，これを α 経路と呼ぶ．この経路上の変位増分は

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_0 = \alpha_c\boldsymbol{\phi}_c + \alpha_c^2\boldsymbol{h} - \frac{A_{30}}{A_{01}}\alpha_c^3\boldsymbol{g} + O(\alpha_c^4) \tag{60}$$

となる．

変曲点近傍の α 経路の安定性を解析すると

$$\lambda_c = 0\ ,\ \frac{d\lambda_c}{d\alpha_c} = 2A_{20} = 0 \tag{61}$$

が得られる．さらに対称分岐点の α 経路の場合と同様な議論によって

$$\frac{d^2\lambda_c}{d\alpha_c^2} = 6A_{30} \neq 0 \tag{62}$$

となる．したがって，A_{30} が正であれば α 経路は安定，負であれば不安定であり，Fig. 5 のような形状であれば経路は常に安定である．

3.4.2　二重特異点

二重特異点については，Fig. 6，Fig. 7 に示す二つの特異点について考察を行う．

■三本の経路への対称分岐　分岐方程式の各係数が

$$\begin{cases} A_{200}^1 \neq 0,\ A_{020}^1 \neq 0,\ A_{200}^1\cdot A_{020}^1 < 0 \\ A_{101}^2 \neq 0,\ A_{300}^2 \neq 0,\ A_{120}^2 \neq 0, \\ \quad A_{101}^2\cdot A_{300}^2 < 0,\ A_{101}^2\cdot A_{120}^2 < 0 \end{cases} \tag{63}$$

のようになるとき，分岐方程式は

$$\begin{cases} S_1 \sim A_{200}^1\alpha_{c1}^2 + A_{020}^1\alpha_{c2}^2 = 0 \\ S_2 \sim A_{101}^2\alpha_{c1}\delta\tilde{u}_x + A_{300}^2\alpha_{c1}^3 + A_{120}^2\alpha_{c1}\alpha_{c2}^2 = 0 \end{cases} \tag{64}$$

となり，近傍に三本の分岐後経路が存在する特異点となる．この式の解をプロットすると Fig. 6 が得られる．ここで，二つの分岐方程式 S_1 と S_2 は等価であるので，各係数の添え字は入れ替えても定性的には同じ結果が得られることに注意する．

連立方程式 (64) から，特異点近傍に

$$\alpha_{c1} = \alpha_{c2} = 0 \tag{65}$$

$$\alpha_{c2} = \mu\alpha_{c1},\ \delta\tilde{u}_x = -\frac{1}{A_{101}^2}\left(A_{300}^2 + \mu^2A_{120}^2\right)\alpha_{c1}^2 \tag{66}$$

$$\alpha_{c2} = -\mu\alpha_{c1},\ \delta\tilde{u}_x = -\frac{1}{A_{101}^2}\left(A_{300}^2 + \mu^2A_{120}^2\right)\alpha_{c1}^2 \tag{67}$$

という三つの経路があり，これらを順に δ 経路，$\alpha+$ 経路，$\alpha-$ 経路と呼ぶ．ただし，

$$\mu = \sqrt{-\frac{A_{200}^1}{A_{020}^1}}. \tag{68}$$

δ 経路について，この経路上の変位増分 $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$ は $\delta\tilde{u}_x$ をパラメータとして

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_0 = \delta\tilde{u}_x\boldsymbol{g} + O(\delta\tilde{u}_x^2) \tag{69}$$

と書くことができる．これは Fig. 6 中の直線に相当する．また $\alpha\pm$ 各経路上の変位増分 $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$ は，α_{c1} をパラメータとして

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}_0^{\pm} &= \alpha_{c1}\left(\boldsymbol{\phi}_{c1} \pm \mu\boldsymbol{\phi}_{c2}\right) \\ &\quad + \alpha_{c1}^2\left(-\frac{1}{A_{101}^2}\left(A_{300}^2 + \mu^2A_{120}^2\right)\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h} \pm \mu\boldsymbol{k} + \mu^2\boldsymbol{r}\right) \\ &\quad + O(\alpha_{c1}^3)\end{aligned} \tag{70}$$

と書くことができ，これは，Fig. 6 中の二本の曲線に相当する．

各経路の安定性を考える．このとき，単純特異点の時とは異なり，その経路が $(\alpha_{c1}, \alpha_{c2}, \delta\tilde{u}_x)$ 空間内でどの方向をむいているかに注意して，固有値問題を考える必要がある．そこでパラメータ θ を用い，固有値問題を

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{K}_{00}\left(\boldsymbol{\phi}_{c1} + \tan\theta\cdot\boldsymbol{\phi}_{c2}\right) \\ &\quad = \lambda_{c1}\boldsymbol{\phi}_{c1} + \lambda_{c2}\tan\theta\cdot\boldsymbol{\phi}_{c2}\end{aligned} \tag{71}$$

と定式化する．その上で，δ 経路ならば任意の $\theta \in (0,\pi/2), (\pi/2,\pi)$，$\alpha\pm$ 経路ならば $\tan\theta = \pm\mu$ を満たす θ に対して単純特異点の場合と同様な解析を行えばよい．また，$\theta = 0, \pi/2$ の時はそれぞれ $\boldsymbol{\phi}_{c1}, \boldsymbol{\phi}_{c2}$ を $\boldsymbol{\phi}_c$ とみなして単純特異点の場合と全く同様に考察できる．

上記に基づき計算を行うと，δ 経路では特異点で

$$\begin{aligned}&\lambda_{c1}^{\delta}(0) = \lambda_{c2}^{\delta}(0) = 0,\ \frac{d\lambda_{c1}(0)}{d\delta\tilde{u}_x} = A_{101}^1 + \tan\theta A_{011}^1 = 0, \\ &\frac{d\lambda_{c2}(0)}{d\delta\tilde{u}_x} = \frac{1}{\tan\theta}A_{101}^2 + A_{011}^2 = \frac{1}{\tan\theta}A_{101}^2 \neq 0\end{aligned} \tag{72}$$

が得られる．したがって δ 経路においては少なくとも一つの固有値の符号が変化し，安定性が反転する．

一方，$\alpha\pm$ 経路では

$$\begin{aligned}&\lambda_{c1}^{\delta}(0) = \lambda_{c2}^{\delta}(0) = 0, \\ &\frac{d\lambda_{c1}^{\pm}}{d\alpha_{c1}} = 2A_{200}^1 \pm 2\mu A_{110}^1 + 2\mu^2A_{020}^1 = 0, \\ &\frac{\lambda_{c2}^{\pm}}{d\alpha_{c1}} = \pm\frac{1}{\mu}2A_{200}^1 + 2A_{110}^1 \pm 2\mu A_{020}^1 = 0\end{aligned} \tag{73}$$

が得られる．さらに，固有値の二階微分を考えると

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\lambda_{c1}(0)}{d\alpha_{c1}^2} &= 6A_{300}^1 \pm 6\mu A_{210}^1 + 6\mu^2 A_{120}^1 \pm 6\mu^3 A_{030}^1 \\
&\mp 2\mu \frac{A_{011}^1}{A_{101}^2}\left(A_{300}^2 + \mu^2 A_{120}^2\right) \\
&- 2\frac{A_{101}^1}{A_{101}^2}\left(A_{300}^2 + \mu^2 A_{120}^2\right) = 0 \\
\pm\mu\frac{d^2\lambda_{c2}(0)}{d\alpha_{c1}^2} &= 6A_{300}^2 \pm 6\mu A_{210}^2 + 6\mu^2 A_{120}^2 \pm 6\mu^3 A_{030}^2 \\
&\mp 2\mu \frac{A_{011}^2}{A_{101}^2}\left(A_{300}^2 + \mu^2 A_{120}^2\right) \\
&- 2\left(A_{300}^2 + \mu^2 A_{120}^2\right) = 4\left(A_{300}^2 + \mu^2 A_{120}^2\right)
\end{aligned} \tag{74}
$$

となる．したがって，$\alpha\pm$ 経路の安定性は，$A_{300}^2 + \mu^2 A_{120}^2$ が正なら安定，負なら不安定である．

■不加算無限個の経路への対称分岐　分岐方程式の各係数が

$$
\begin{cases}
A_{101}^1 & \neq 0,\ A_{300}^1 \neq 0,\ A_{120}^1 \neq 0, \\
 & A_{101}^1 \cdot A_{300}^1 < 0,\ A_{101}^1 \cdot A_{120}^1 < 0 \\
A_{011}^2 & = A_{101}^1,\ A_{210}^2 = A_{300}^1,\ A_{030}^2 = A_{120}^1
\end{cases} \tag{75}
$$

となるとき，分岐方程式は

$$
\begin{cases}
S_1 \sim \alpha_{c1}\left(A_{101}^1 \delta\tilde{u}_x + A_{300}^1 \alpha_{c1}^2 + A_{120}^1 \alpha_{c2}^2\right) = 0 \\
S_2 \sim \alpha_{c2}\left(A_{101}^1 \delta\tilde{u}_x + A_{300}^1 \alpha_{c1}^2 + A_{120}^1 \alpha_{c2}^2\right) = 0
\end{cases} \tag{76}
$$

となる．この点は，近傍に不加算無限個の分岐後経路が存在する特異点である．この式の解をプロットしたのが Fig. 7 であり，無限個の隣り合う経路が存在することによって，おわんの様になっていることがわかる．

特異点近傍の解を式で表現すると，直線をなす

$$\alpha_{c1} = \alpha_{c2} = 0 \tag{77}$$

と曲面をなす

$$\delta\tilde{u}_x = -\frac{1}{A_{101}^1}\left(A_{300}^1 \alpha_{c1}^2 + A_{120}^1 \alpha_{c2}^2\right) \tag{78}$$

が得られる．これらをそれぞれ δ 経路，α^∂ 経路と呼ぶ．

続いて各経路の安定性を考えるが，δ 経路に関しては前項の δ 経路と同様な式展開となり，したがって安定性が反転することが直ちにわかる．

一方 α^∂ 経路について，この経路は面をなしているので，δ 経路と同様に任意の $\theta \in (0, \pi/2), (\pi/2, \pi)$ を用いて解析する．まず，$\boldsymbol{\phi}_{c1} + \tan\theta \cdot \boldsymbol{\phi}_{c2}$ 方向において $\delta\tilde{u}_x, \tilde{\boldsymbol{u}}_0$ はそれぞれ

$$\delta\tilde{u}_x = -\frac{1}{A_{101}^1}\left(A_{300}^1 + \tan^2\theta A_{120}^1\right)\alpha_{c1}^2 \tag{79}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{u}}_0^{\pm} &= \alpha_{c1}\left(\boldsymbol{\phi}_{c1} + \tan\theta \cdot \boldsymbol{\phi}_{c2}\right) \\
&+ \alpha_{c1}^2\left(-\frac{1}{A_{101}^2}\left(A_{300}^2 + \tan^2\theta \cdot A_{120}^2\right)\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h}\right. \\
&\left. + \tan\theta \cdot \boldsymbol{k} + \tan^2\theta \cdot \boldsymbol{r}\right) + O(\alpha_{c1}^3)
\end{aligned} \tag{80}
$$

と書くことができる．この経路において固有値問題 (71) を用いてその変化率を計算すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\lambda_{c1}^\partial}{d\alpha_{c1}} = 2A_{200}^1 + 2\tan\theta \cdot A_{110}^1 + 2\tan^2\theta \cdot A_{020}^1 = 0, \\
&\frac{\lambda_{c2}^\partial}{d\alpha_{c1}} = \frac{1}{\tan\theta} 2A_{200}^1 + 2A_{110}^1 + 2\tan\theta \cdot A_{020}^1 = 0
\end{aligned} \tag{81}
$$

となる．したがって任意の $\theta \in (0, \pi/2), (\pi/2, \pi)$ に対して常に，特異点で安定性が変化しない．また，$\theta = 0, \pi/2$ のときはそれぞれ $\delta\tilde{u}_x = -\frac{A_{300}^1}{A_{101}^1}\alpha_{c1}^2, \delta\tilde{u}_x = -\frac{A_{120}^1}{A_{101}^1}\alpha_{c2}^1$ となって単純特異点の対称分岐点と同様に評価ができる．さらに固有値の二階微分は，式 (74) において $\pm\mu$ を $\tan\theta$ に置き換えることで形式的に導くことができ，その結果 α^∂ 経路の安定性は，$A_{300}^1 + \tan^2\theta A_{120}^1, A_{210}^2 + \tan^2\theta A_{030}^2$ がともに正なら安定，一方でも負なら不安定であることがわかる．

4　得られている分岐点との対応

文献 [2] によって，これまでにいくつかの特異点が得られている．それらの特異点と，ここまでで行った特異点の分類の結果との対応関係を考察しておく．

4.1　単純特異点

確認されている単純特異点は以下の二つである．

- $\delta u_x = 60.90 \times 10^{-6}$，Fig. 9
- $\delta u_x = 80.48 \times 10^{-6}$，Fig. 10

これらはどちらも，もとの経路が不安定化したのち遠くの平衡点へと飛び移っている．これらを，

$$\alpha_c\left(\delta\tilde{u}_x + \alpha_c^2 - \alpha_c^4\right) = 0 \tag{82}$$

により説明する．ここまでの議論に用いた分岐方程式は三次項までしか含んでおらず，そのままでは各経路の安定性などを議論することはできない．そこで，「高次項まで用いて説明される分岐形状は，局所的に低次項までの分岐方程式を用いて説明できる」ことを仮定する．

まず，式 (82) の解曲線をプロットすると Fig. 8 のようになる．この図のうちまずは原点近傍に注目することとし，α_c^5 の項を落とすと式は

$$\alpha_c\left(\delta\tilde{u}_x + \alpha_c^2\right) \approx 0 \tag{83}$$

となる．これは，分岐方程式において

$$S = A_{11}\alpha_c\delta\tilde{u}_x + A_{30}\alpha_c^3 = 0,\ A_{11}, A_{30} > 0 \tag{84}$$

に相当し，対称分岐点を表す式である．この式の解をプロットすると，Fig. 3 を上下反転させた形が得られる．対称分岐点に関する漸近理論の知見を用いると，直線経路が安定 → 不安定となるならば，曲線経路は常に不安定であることがわかる．

続いて極小点近傍に注目する．式 (82) の $\alpha_c > 0$ にある極小点は簡単な計算から $(\alpha_c, \delta\tilde{u}_x) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4})$ であり，原点をこの点に平行移動すると

$$\left(\alpha_c - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\delta\tilde{u}_x + \frac{1}{2} - 2\alpha_c^2 + 2\sqrt{2}\alpha_c^3 - \alpha_c^4\right) = 0 \tag{85}$$

となる．この式についても，平行移動した原点近傍で $\delta\tilde{u}_x, \alpha_c \ll 1$ とすると

$$\delta\tilde{u}_x - 2\alpha_c^2 \approx 0 \tag{86}$$

となり，これは分岐方程式において

$$S = A_{01}\delta\tilde{u}_x + A_{20}\alpha_c^2 = 0,\ A_{01} > 0, A_{20} < 0 \quad (87)$$

に相当する．これは極限点であり，極限点においては経路の安定性は必ず入れ替わることがわかっているので，この点を超えると経路は再び安定となる．

以上から，はじめ Fig. 8 の直線経路の $\delta\tilde{u}_x < 0$ の部分をたどると，原点で不安定対称分岐を起こし，一つの不安定直線経路と一つの不安定曲線経路に分岐する．その後，不安定曲線経路をたどると極限点に到達し，安定性が変化して経路は再び安定となる．現在の分岐経路追跡アルゴリズムでは，不安定な経路は追跡が難しいため，この経路を追跡すると Fig. 8 に矢印で示したような飛び移りが起きることになる．

4.2 二重特異点

経路パラメータが $\delta u_x = 31.68 \times 10^{-6}$ という値をとる時，Fig. 11 に示すような分岐図が得られている[2]．漸近理論で分類した特異点のうち Fig. 6 で示したものがこれに相当すると考えられ，主経路である安定な直線経路をたどってきた後特異点において直線経路が不安定化し，そこでの座屈モード方向に二つの安定な曲線経路が現れることが確認されている．

5 おわりに

本研究では，分岐経路追跡アルゴリズムの構築に援用すべく，漸近理論の整理を行った．まずは線形化系により経路パラメータの違いにより生じる差異を考察し，特異性の判定に用いるべき接線剛性行列を明らかにした．その後さらに高次の項まで含めて考察を行い，単純特異点及び二重特異点について，存在しうる特異点をいくつか分類した．その際二重特異点に関する分岐方程式を導出し，それを用いた経路の安定性の考察方法も提案した．さらに，先行研究で確認されていた特異点が整理した漸近理論で説明できることを示し，分岐経路追跡アルゴリズム構築に対する漸近理論の知見の有用性を示した．

参考文献

[1] H. Fujii and M. Yamaguti, "Structure of Singularities and Its Numerical Realization in Nonlinear Elasticity," *Journal of Mathematics of Kyoto University*, Vol. 20, No. 3, 1980, pp. 489–590.

[2] K. Senda, M. Petrovic and K. Nakanishi, "Wrinkle Generation without Bifurcation in a Shear-Enforced Rectangular Membrane with Free Boundaries," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 52, No. 4, 2015, pp. 1057–1073.

[3] Y. W. Wong and S. Pellegrino, "Wrinkled Membranes, Part I," *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 1, No. 1, 2006, pp. 3–25.

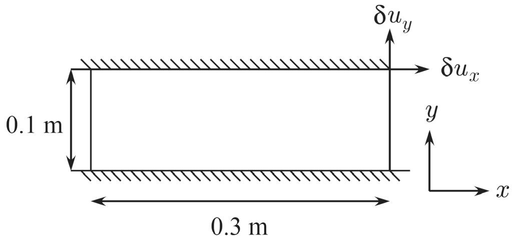

Fig. 1 矩形剪断モデル

Table 1 対象とする矩形膜の諸元

膜厚	12.5×10^{-6} [m]
ヤング率	3.0 [GPa]
ポアソン比	0.3

Table 2 分岐形状の分類

極限点 Fig. 2	$A_{01} \neq 0, A_{20} \neq 0$ $A_{02} = A_{30} = 0$
変曲点 Fig. 5	$A_{01} \neq 0, A_{30} \neq 0$ $A_{20} = A_{02} = 0$
対称分岐 Fig. 3	$A_{11} \neq 0, A_{30} \neq 0$ $A_{01} = A_{20} = A_{02} = 0$
非対称分岐 Fig. 4	$A_{01} = A_{30} = 0$ $A_{20} \cdot A_{02} \leq 0$ (どちらかは非 0)

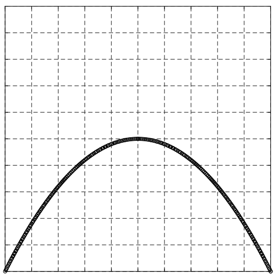

Fig. 2 極限点

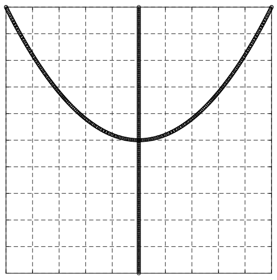

Fig. 3 対称分岐

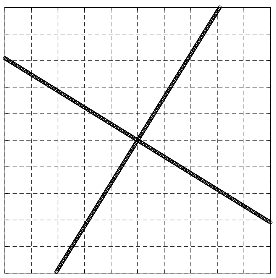

Fig. 4 非対称分岐

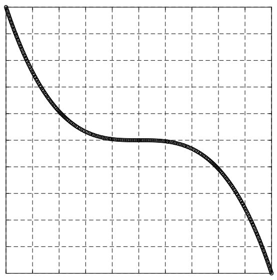

Fig. 5 変曲点

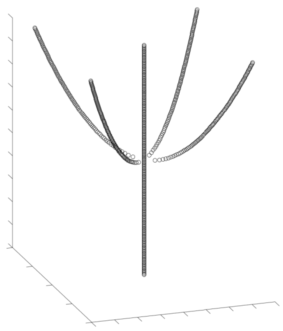

Fig. 6　分岐方程式 (64) をもとに描いた分岐図

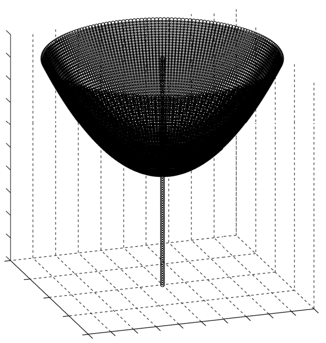

Fig. 7　分岐方程式 (76) をもとに描いた分岐図

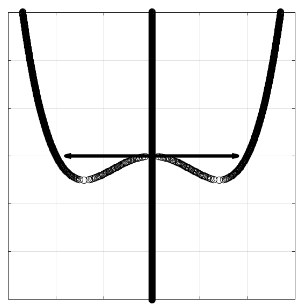

Fig. 8　式 (82) をもとに描いた分岐図

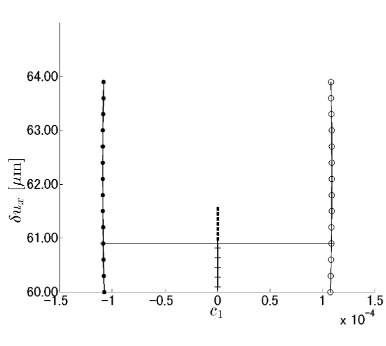

Fig. 9　$\delta u_x = 60.90 \times 10^{-6}$ の分岐図 [2]

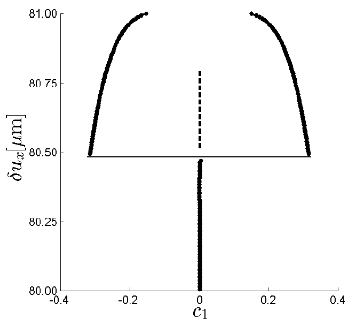

Fig. 10　$\delta u_x = 80.48 \times 10^{-6}$ の分岐図 [2]

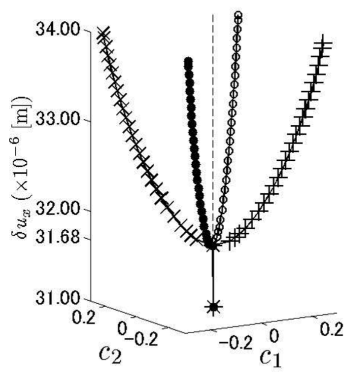

Fig. 11　$\delta u_x = 31.68 \times 10^{-6}$ の分岐図 [2]