

ハイブリッド有限要素-波動ベース法に基づいた 音響構造連成解析による音響透過予測

高橋 孝¹, 金田英和², 青山剛史¹

¹宇宙航空研究開発機構 研究開発本部

²計算力学研究センター

Sound Transmission Prediction Using Coupled Vibroacoustic Analysis Based on Hybrid Finite Element - Wave Based Approach

by

Takashi Takahashi (JAXA), Hidekazu Kaneda (RCCM), and Takashi Aoyama (JAXA)

ABSTRACT

Numerical prediction and analysis of the acoustic environment inside of the payload fairing is of crucial importance. The authors have focused on the application of the Wave Based Method (WBM), which is a novel deterministic approach and which has been proposed for numerical predictions up to the mid-frequency range. However, the WBM is only capable of solving models with moderate geometrical complexity for the high computational efficiency. In order to overcome this issue, the hybrid Finite Element - Wave Based approaches have also been proposed. The hybrid approaches combine the advantages of both the WBM and the conventional Finite Element Method (FEM), that is, the high convergence properties of the WBM and no geometrical complexity limitations of the FEM. In this paper, a simple sound transmission model with a structural plate between two anechoic rooms (a source room and a receiving room) is considered, and numerical sound transmission predictions are performed using the 3-dimensional hybrid WB-FE models.

1. はじめに

定常音響（構造連成）問題の数値解析は、一般に、高周波領域には統計的エネルギー解析（Statistical Energy Analysis：以下、SEA）に代表される確率統計的な手法が適用され、一方、低周波領域には有限要素法（Finite Element Method：以下、FEM）あるいは境界要素法のような決定論的な要素ベース手法が適用される。このとき、SEA は、その統計的な性質から、応答のモード密度が高いという仮定が必要となるために高周波領域の解析に限定される。一方、FEM 等の要素ベース手法は、周波数が高くなるほど数値分散誤差（本来連続な支配方程式が離散化されることにより、波の重要な性質である分散関係が正しく表せないこと）を許容範囲に収めるために、空間を十分に細かく離散化する必要がある。これは、計算負荷、および、必要な計算資源の増大に繋がる。さらに、多次元の解析では、メッシュの切り方によって分散誤差に方向依存性も生じるので、単にメッシュを細かく切ることによって全方向に分散誤差を小さくすることも難しい。これらのことから、要素ベース手法は、低周波数における解析に限れているのが現状である。そのため一般に、音響振動解析において高周波側と低周波側の解析法の両方で解析困難な中間周波数領域が存在し、その帯域における解析を行うために様々な手法が提案され、研究されているのが現状である¹⁾。宇宙機においては、この帯域がちょうど搭載機器の固有周波数を含む極めて重要な帯域と一致していると考えられる。そこで、著者らは、この中間周波数領域へ適用可能な解析手法として、間接トレフツ法に基づいた波動ベース法(Wave Based Method)¹⁾（以下、WBM）に着目し、2 次元及び 3 次元の内外部音響構造連成解析に関する研究を進めてきた^{2,3)}。この手法は、支配方程式の同次式を厳密に満たす特異でない基本解（波動関数）の重ね合わせで解を表現するアプローチであり、FEM 等の要素ベース手法で問題となる数値分散誤差を含まないため、小さな自由度のモデルで高精度な予測結果が得られる。したがって、より高い周波数における解析に適用可能であると期待される。

しかし、WBM で扱うことのできる問題領域は、任意の幾何形状（及び、複雑な材料特性）を扱うことのできる FEM と比べると穏やかな形状に限定されていることから、

応用面で問題があった。そこで、数値分散誤差を含まず、かつ、高い収束性を有する WBM の利点と、任意の複雑な幾何形状や材料特性を扱うことのできる既存の FEM の利点を融合したハイブリッド FE-WB 法（以下、単にハイブリッド法と呼ぶこともある）が提案されている^{4,5)}。このハイブリッド法に関する従来の定式化では、両手法でモデル化される領域がいずれも音響領域であったが、本論文では、板構造を介した音響透過問題を考えるために、WBM で音響領域をモデル化し、FEM の 3 次元ソリッド要素で板構造をモデル化する場合のハイブリッド法について定式化を行う。そして、ロケット・フェアリングを通じた音響透過解析の第一段階として、音源室と受音室の間の平板を通じた音響透過問題において、ハイブリッド法によって得られた数値予測を、実験結果や全て WBM で解いた解析結果と比較することによって検証を行う。

2. 解法

定常音響問題に WBM を適用するには、解析領域をいくつかの凸部分領域（以下、WB 部分領域）に分割する必要がある。しかし、FEM の要素のように細かな多くの部分領域を構築してしまうと、計算負荷が増大したり計算精度が悪化するなど、高い収束性を有する WBM の長所が損なわれる。そのため、WBM で扱うことのできる解析領域の形状（あるいは、材料特性）は、比較的穏やかなものに限定される。この問題を克服するためには、任意の幾何形状を扱うことのできる FEM の要素領域を必要最小限利用し、その他の領域を WBM の部分領域でモデル化することによって、両手法の長所を組み合わせる方法が考えられる。このアプローチを実現したものが、ハイブリッド FE-WB 法である。表 1 は、両手法の性質を比較したものである。

これまで提案されてきたハイブリッド法では、FE領域とWB領域のいずれも音響領域と考えて定式化が行われていた。これは、一般に複雑形状の構造FEモデルを音響FE領域で取り囲み、残りの穏やかな幾何形状の音響領域をWBMでモデル化するように汎用的に考えているためである。しかし、例えばハニカム・サンドイッチ平板のように材料特性としては複雑だが表面的な幾何形状が単純な場合でも、必ずしも必要のない音響FE領域で板を取り囲まなければならない

らない。そこで、3次元内部定常音響構造連成問題において、音響キャビティがWBMでモデル化され、構造がFEMの3次元ソリッド要素でモデル化される場合のハイブリッド法の定式化を行う。また、ハイブリッド法には、直接法と間接法のアプローチが提案されているが、ここでは簡単のため直接法のみを示すことにする。

表1 有限要素法と波動ベース法の比較

	FEM	WBM
連立方程式のサイズ	大きい	小さい
連立方程式を構築する時間	短い	長い
連立方程式を解く時間	中間・長い	短い
数値解の収束性	遅い・中間	速い
適用可能な周波数領域	低い	低い・中間 (・高い)
幾何形状(材料特性)の複雑さ	任意の複雑さに対応	あまり複雑でないものに限定

2.1 幾何モデル

2.1.1 音響キャビティの幾何モデル

図1に、2つの連続するキャビティ $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ から成る内部音響構造連成系の例を示す。各キャビティは、流体で満たされており、異なる境界条件(以下、BC)が課される重なり合わない数種類の境界面(後述)で囲まれている。

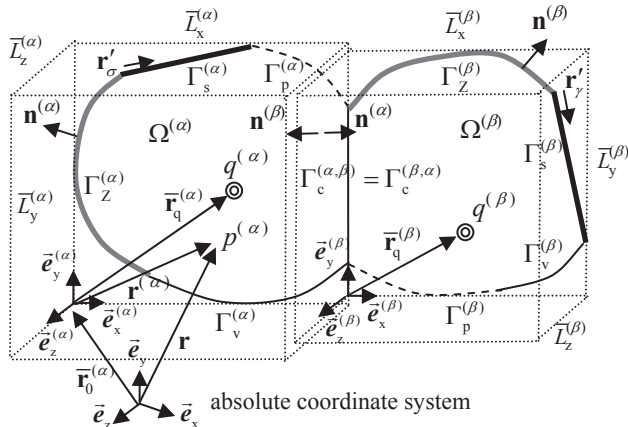


図1 3次元内部音響振動連成モデル

まず、後述するWBMの波動関数の性質から、WBMでモデル化されるキャビティ領域は、重なり合わない n_Ω 個の凸形状のWB部分領域 $\Omega^{(a)}$ ($a = 1, \dots, n_\Omega$)に分割されると一般化する。次に、簡単のため、各WB部分領域は、同じ種類の流体(密度 ρ 、音速 c)で満たされているとし、部分領域の1つ $\Omega^{(a)}$ に着目する。このとき、唯一存在する絶対座標系 $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ とは別に、各 $\Omega^{(a)}$ に部分領域局所座標系 $\{\vec{e}_x^{(a)}, \vec{e}_y^{(a)}, \vec{e}_z^{(a)}\}$ を設定する。

このとき、一般に、空間において同じ位置を示すベクトルの絶対座標系成分(以下、絶対位置座標) \mathbf{r} と、 $\Omega^{(a)}$ における部分領域局所座標系成分(以下、部分領域局所位置座標) $\mathbf{r}^{(a)}$ との間には、次の関係があるとする。

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}_0^{(a)} + \bar{\mathbf{C}}^{(a)} \mathbf{r}^{(a)} \quad (1)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{r}}_0^{(a)}$ は、絶対座標系の原点からみた部分領域局所座標系の原点位置を表す絶対位置座標であり、 $\bar{\mathbf{C}}^{(a)}$ は、それら座標系間の相対姿勢を表す 3×3 正規直交行列である。そして、式(1)を用いて $\mathbf{r}^{(a)}$ から \mathbf{r} へ変換することを、簡単に $\mathbf{r}(\mathbf{r}^{(a)})$ 、またその逆を $\mathbf{r}^{(a)}(\mathbf{r})$ と書く。

また、外部点音源 $q^{(a)}$ (単位体積あたりの音源強さ[1/s])を、 $\Omega^{(a)}$ 内の部分領域局所位置座標 $\bar{\mathbf{r}}_q^{(a)}$ に置く。簡単のため、音源は各部分領域に1つずつ存在するとする。ただし、ここでは定常(周波数)解析を考えているので、この外部励振源は、角周波数 ω の時間調和関数である。そして、 $\Omega^{(a)}$ は、大きさ $\bar{L}_x^{(a)} \times \bar{L}_y^{(a)} \times \bar{L}_z^{(a)}$ を有する直方体領域で外接されるとする。この外接直方体領域は、後に波動関数を定義する際に用いる。

2.1.2 音響境界面の幾何モデル

次に、WB部分領域 $\Omega^{(a)}$ の各境界面を考える。ここでは、例として、事前に圧力値を指定する境界 $\Gamma_p^{(a)}$ (以下、圧力境界面)を考える。その他の種類の音響境界面についても同様で、記号も、ここで用いる添字の p を、法線方向速度境界面 $\Gamma_v^{(a)}$ に対しては v 、法線方向インピーダンス境界面 $\Gamma_z^{(a)}$ に対しては z 、ハイブリッド境界面 $\Gamma_{sh}^{(a)}$ に対しては sh に変えればよい。また、2つの異なる部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ が共有するインターフェイス(以下、I/F)面 $\Gamma_c^{(a,b)}$ においても同様である。

この圧力境界面 $\Gamma_p^{(a)}$ は、一般に、WB部分領域 $\Omega^{(a)}$ の適当な境界面に複数個存在する。その1つを $\Gamma_{pi}^{(a)}$ とし、 $i = 1, \dots, n_p^{(a)}$ だけある、つまり、 $\Gamma^{(a)} = \bigcup_{i=1}^{n_p^{(a)}} \Gamma_{pi}^{(a)}$ と表せる。

このとき、 $\mathbf{r}_{pi}^{(a)}$ を、境界面 $\Gamma_{pi}^{(a)}$ の境界面局所座標系からみた $\Gamma_{pi}^{(a)}$ 上の境界面局所位置座標として、部分領域 $\Omega^{(a)}$ における部分領域局所位置座標 $\mathbf{r}^{(a)}$ との間に以下の関係があるとする。

$$\mathbf{r}^{(a)} = \bar{\mathbf{r}}_{0pi}^{(a)} + \bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(a)} \mathbf{r}_{pi}^{(a)} \quad (2)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{r}}_{0pi}^{(a)}$ は、 $\Omega^{(a)}$ における部分領域局所座標系の原点からみた $\Gamma_{pi}^{(a)}$ の境界面局所座標系の原点位置を表す部分領域局所位置座標である。そして、式(2)を用いて $\mathbf{r}_{pi}^{(a)}$ から $\mathbf{r}^{(a)}$ へ変換することを、簡単に $\mathbf{r}^{(a)}(\mathbf{r}_{pi}^{(a)})$ 、またその逆を $\mathbf{r}_{pi}^{(a)}(\mathbf{r}^{(a)})$ と書く。さらに、 $\mathbf{r}_{pi}^{(a)}$ から \mathbf{r} へ変換することを $\mathbf{r}(\mathbf{r}_{pi}^{(a)})$ 、その逆を $\mathbf{r}_{pi}^{(a)}(\mathbf{r})$ と書く。

2.1.3 構造の幾何モデル

一方、FEMでモデル化される構造領域 Ω_s (構造FE領域は全体で1つと考える)は、その境界面 Γ_s で囲まれているとする。境界面 Γ_s は、固定条件などのBCが課される面とする。そして、 Ω_s は、重なり合わない n_{se} 個の要素に分割され、その各要素領域を Ω_s^e ($e = 1, \dots, n_{se}$)と置く。そして、各要素において、 n_s^e 個の節点を定義し、領域 Ω_s の離散化における全節点数を n_{sn} と置く。

また、領域 Ω_s の境界面 Γ_s の一部が、音響キャビティのWB部分領域 $\Omega^{(a)}$ と接する場合、その部分は、領域 $\Omega^{(a)}$ にとっての構造境界と考えられる。ここでは、構造FE領域と音響WB領域とのハイブリッド境界面を $\Gamma_{sh}^{(a)}$ と書く。実際には他の境界面と同様に、 $\Gamma_{sh}^{(a)} = \bigcup_{i=1}^{n_{sh}^{(a)}} \Gamma_{shi}^{(a)}$ のように $n_{sh}^{(a)}$ 個の領域から構成されているものとし、領域 $\Omega^{(a)}$ に対して境界面局所座標系も設定する。ただし、このハイブリッド境界面 $\Gamma_{sh}^{(a)}$ は、音響部分領域 $\Omega^{(a)}$ が凸形状である必要性から、音響キャビティを凸形状にするような形状でなければならない。

一方、構造FE領域は、一般に、先に定義した絶対座標系 $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ とは異なる全体座標系で定義される。ここでは、FEMの慣習に合わせて、それをFE全体座標系と呼び、 $\{\vec{e}_{fx}, \vec{e}_{fy}, \vec{e}_{fz}\}$ と書くことによって絶対座標系と区別

する。そして、空間において同じ位置を示すベクトルの絶対位置座標 \mathbf{r} と、FE 全体座標系における成分（以下、FE 全体位置座標） \mathbf{r}_F との間には、次の関係があるとする。

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}_{F0} + \bar{\mathbf{C}}_F \mathbf{r}_F \quad (3)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{r}}_{F0}$ は、絶対座標系の原点からみた FE 全体座標系の原点位置を表す絶対位置座標であり、 $\bar{\mathbf{C}}_F$ は、それら座標系間の相対姿勢を表す 3×3 正規直交行列である。そして、式(3)を用いて \mathbf{r}_F から \mathbf{r} へ変換することを、簡単に $\mathbf{r}(\mathbf{r}_F)$ 、またその逆を $\mathbf{r}_F(\mathbf{r})$ と書くことにする。

さらに、構造自身の境界面 Γ_s に課される BC についても考える必要がある。ここでは、境界面 Γ_s 上の節点に事前に変位が課される（幾何学的 BC）境界面 Γ_{su} と、表面力（音圧）が課される境界面 Γ_{sh} （構造 FE 領域と音響 WB 領域とのハイブリッド面）、つまり、以下を考える。

$$\Gamma_s = \Gamma_{su} \cup \Gamma_{sh} \quad (4)$$

2.2 支配方程式

2.2.1 音響の支配方程式

部分領域 $\Omega^{(a)}$ の絶対位置座標 \mathbf{r} における定常音圧 $p^{(a)}(\mathbf{r})$ は、ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 p^{(a)}(\mathbf{r}) + k^2 p^{(a)}(\mathbf{r}) = -j\rho\omega q^{(a)} \delta(\mathbf{r}^{(a)}, \mathbf{r}_q^{(a)}), \quad \mathbf{r} \in \Omega^{(a)} \quad (5)$$

により支配される。ここで、 $j = \sqrt{-1}$ であり、 $k (= \omega/c)$ は音響波数、 δ はディラックのデルタ関数であり、

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6)$$

と定義される。このとき、 $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ は、それぞれ、 $\bar{\mathbf{e}}_x, \bar{\mathbf{e}}_y, \bar{\mathbf{e}}_z$ 方向の空間偏微分を表す。

2.2.2 構造の支配方程式

角周波数 ω の時間依存の調和振動を仮定して、一般の構造の運動を考える。このとき、構造の FE 全体位置座標 \mathbf{r}_F における動的な平衡式は、

$$-\rho_s(\mathbf{r}_F) \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}_F) = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}_F) + \mathbf{b}(\mathbf{r}_F), \quad \mathbf{r}_F \in \Omega_s \quad (7)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_F & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y_F & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z_F \\ \partial/\partial y_F & \partial/\partial x_F & 0 \\ 0 & \partial/\partial z_F & \partial/\partial y_F \\ \partial/\partial z_F & 0 & \partial/\partial x_F \end{bmatrix} \quad (8)$$

と書ける（T は、行列の転置）。ここで、 ρ_s は、構造の体積密度であり、一般には位置の関数である。ここで、 \mathbf{u} は構造変位ベクトルの FE 全体座標系成分、 \mathbf{b} は構造に働く物体力ベクトルの FE 全体座標系成分、 $\boldsymbol{\sigma}$ は対称な応力テンソルの FE 全体座標系成分から抽出した列行列（垂直応力とせん断応力を含む）である。

また、構造に関する応力とひずみの関係式（構成式）は、部材の材料特性に応じて決まる弾性係数行列 \mathbf{D} を用いて、

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}_F) = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}_F), \quad \mathbf{r}_F \in \Omega_s \quad (9)$$

のような線形の形式で与えられているものとする。ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は対称なひずみテンソルの FE 全体座標系成分から抽出した列行列である。

2.3 境界条件

2.3.1 音響境界条件

部分領域 $\Omega^{(a)}$ の音響境界 $\Gamma_a^{(a)}$ は、5 種類の異なる条件が課される境界面から成り、

$$\Gamma_a^{(a)} = \Gamma_p^{(a)} \cup \Gamma_v^{(a)} \cup \Gamma_z^{(a)} \cup \Gamma_{sh}^{(a)} \cup \Gamma_c^{(a)} \quad (10)$$

と書ける。ここで、境界 $\Gamma_p^{(a)}, \Gamma_v^{(a)}, \Gamma_z^{(a)}$ は、それぞれ、以下のように圧力、法線方向速度、法線方向インピーダンスの BC が課される境界面である。

$$p^{(a)}(\mathbf{r}) = \bar{p}^{(a)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_p^{(a)} \quad (11a)$$

$$\mathbf{L}_v^{(a)}[p^{(a)}(\mathbf{r})] = \bar{v}_n^{(a)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_v^{(a)} \quad (11b)$$

$$\mathbf{L}_v^{(a)}[p^{(a)}(\mathbf{r})] = \frac{p^{(a)}(\mathbf{r})}{\bar{Z}_n^{(a)}(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_z^{(a)} \quad (11c)$$

ここで、 $\bar{p}^{(a)}, \bar{v}_n^{(a)}, \bar{Z}_n^{(a)}$ は、それぞれ、事前に与える境界圧力、法線方向速度、法線方向インピーダンスである。また、以下で定義された演算子を用いた。

$$\mathbf{L}_v^{(a)}[\bullet] = \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{n}^{(a)}} = \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(a)T} (\nabla^{(a)} \bullet) \quad (12a)$$

$$\nabla^{(a)} = \left[\frac{\partial}{\partial x^{(a)}} \quad \frac{\partial}{\partial y^{(a)}} \quad \frac{\partial}{\partial z^{(a)}} \right]^T \quad (12b)$$

このとき、 $\partial/\partial x^{(a)}, \partial/\partial y^{(a)}, \partial/\partial z^{(a)}$ は、それぞれ、 $\bar{\mathbf{e}}_x^{(a)}, \bar{\mathbf{e}}_y^{(a)}, \bar{\mathbf{e}}_z^{(a)}$ 方向の空間導関数を表す。そして、 $\mathbf{n}^{(a)}$ は、 $\Gamma_s^{(a)}$ において音響キャビティの外側を正方向として定義された法線ベクトルの部分領域局所座標系成分である。

さらに、境界 $\Gamma_c^{(a)}$ は部分領域 I/F であり、音圧と法線方向速度の連続性が課されなければならないが、一般には数値粘性を導入して安定な解析を可能とするためにインピーダンス連成手法が適用される。また、 $\Gamma_{sh}^{(a)}$ については次節で述べる。

2.3.2 音響領域における構造境界条件

ハイブリッド面 $\Gamma_{sh}^{(a)}$ では、その構造の法線方向の変形速度と、その面に接する流体の法線方向速度が一致する、つまり、以下が成り立たなければならない。

$$\mathbf{L}_v^{(a)}[p^{(a)}(\mathbf{r})] = -j\omega \mathbf{n}_s(\mathbf{r}_F)^T \mathbf{u}(\mathbf{r}_F), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{sh}^{(a)} \quad (13)$$

ここで、 \mathbf{n}_s は、構造の同じ面において定義された $\Gamma_{sh}^{(a)}$ 上の法線ベクトルの FE 全体座標系成分であり、構造の外側を正方向として定義される。

2.3.3 構造境界条件

構造自身の境界面 $\Gamma_s = \Gamma_{su} \cup \Gamma_{sh}$ に課される BC の具体的な課し方については、一般の FEM の定式化と同様である。

2.4 音響問題の波動ベース法によるモデル化

2.4.1 音圧の変数展開

WBM では、部分領域 $\Omega^{(a)}$ の絶対位置座標 \mathbf{r} における音圧 $p^{(a)}(\mathbf{r})$ を、次式のように展開する。

$$p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \approx \hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega^{(\alpha)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n_a^{(\alpha)}} p_i^{(\alpha)} \Phi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) + p_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) \quad (14)$$

ここで、右辺の最初の級数項は、方程式(5)の同次式を厳密に満たす $n_a^{(\alpha)}$ 個の音響波動関数 $\Phi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r}))$ ($i = 1, \dots, n_a^{(\alpha)}$) の重ね合わせを表しており、 $p_i^{(\alpha)}$ (位置の関数でないことに注意) は、各波動関数の寄与分を表す未知の係数である。ただし、波動関数の数 $n_a^{(\alpha)}$ は、物理的な波数や外接矩形領域のサイズに基づいて、無限個から有限個に打ち切られた結果である。以下、 $\Phi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r}))$ などとは、簡単のため単に $\Phi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)})$ や $\Phi_i^{(\alpha)}$ と書く。

WBM では、流体速度ベクトル成分のような 2 次変数の計算は、支配方程式を厳密に満たす圧力展開式(14) (主変数) を事前に直接空間微分した式を用いることができるので、精度低下が生じないことも重要な性質である。

2. 4. 2 音響波動関数の寄与項

実際、式(14)の級数項は、さらに分解され、

$$\sum_{i=1}^{n_a^{(\alpha)}} p_i^{(\alpha)} \Phi_i^{(\alpha)} =$$

$$\sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{A(\alpha)+} \Phi_{ij}^{A(\alpha)+} + \sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{A(\alpha)-} \Phi_{ij}^{A(\alpha)-}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{B(\alpha)+} \Phi_{ij}^{B(\alpha)+} + \sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{B(\alpha)-} \Phi_{ij}^{B(\alpha)-}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{C(\alpha)+} \Phi_{ij}^{C(\alpha)+} + \sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{C(\alpha)-} \Phi_{ij}^{C(\alpha)-} \quad (15)$$

のように定義される。ここで、

$$\Phi_{ij}^{A(\alpha)\pm} = \cos(k_{xi}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{yj}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)})$$

$$\times \exp(-jk_{zij}^{A(\alpha)\pm} z^{(\alpha)}),$$

$$i = 0, \dots, n_{la}^{A(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{ja}^{A(\alpha)} \quad (16a)$$

$$\Phi_{ij}^{B(\alpha)\pm} = \cos(k_{xi}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{zj}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)})$$

$$\times \exp(-jk_{yij}^{B(\alpha)\pm} y^{(\alpha)}),$$

$$i = 0, \dots, n_{la}^{B(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{ja}^{B(\alpha)} \quad (16b)$$

$$\Phi_{ij}^{C(\alpha)\pm} = \cos(k_{yi}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zj}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)})$$

$$\times \exp(-jk_{xij}^{C(\alpha)\pm} x^{(\alpha)}),$$

$$i = 0, \dots, n_{la}^{C(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{ja}^{C(\alpha)} \quad (16c)$$

である (複号同順: 以下、同様)。そして、 $\exp(\bullet)$ は、自然対数の底 e の指数関数を表す。そして、これら波動関数が、方程式(5)の同次式の厳密解であるためには、

$$(k_{xi}^{A(\alpha)})^2 + (k_{yj}^{A(\alpha)})^2 + (k_{zij}^{A(\alpha)\pm})^2 =$$

$$(k_{xi}^{B(\alpha)})^2 + (k_{yij}^{B(\alpha)\pm})^2 + (k_{zj}^{B(\alpha)})^2 =$$

$$(k_{xij}^{C(\alpha)\pm})^2 + (k_{yi}^{C(\alpha)})^2 + (k_{zj}^{C(\alpha)})^2 = k^2 \quad (17)$$

であることが要求される。WBM では、次の波数成分を選択することが提案されている。

$$\mathbf{k}_{ij}^{A(\alpha)\pm} = \begin{bmatrix} k_{xi}^{A(\alpha)} & k_{yj}^{A(\alpha)} & k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} i\pi/L_x^{(\alpha)} \\ j\pi/L_y^{(\alpha)} \\ \pm \sqrt{k^2 - (k_{xi}^{A(\alpha)})^2 - (k_{yj}^{A(\alpha)})^2} \end{bmatrix} \quad (18a)$$

$$\mathbf{k}_{ij}^{B(\alpha)\pm} = \begin{bmatrix} k_{xi}^{B(\alpha)} & k_{yij}^{B(\alpha)\pm} & k_{zj}^{B(\alpha)} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} i\pi/L_x^{(\alpha)} \\ \pm \sqrt{k^2 - (k_{xi}^{B(\alpha)})^2 - (k_{zj}^{B(\alpha)})^2} \\ j\pi/L_z^{(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (18b)$$

$$\mathbf{k}_{ij}^{C(\alpha)\pm} = \begin{bmatrix} k_{xij}^{C(\alpha)\pm} & k_{yi}^{C(\alpha)} & k_{zj}^{C(\alpha)} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \pm \sqrt{k^2 - (k_{xij}^{C(\alpha)\pm})^2 - (k_{zj}^{C(\alpha)})^2} \\ i\pi/L_y^{(\alpha)} \\ j\pi/L_z^{(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (18c)$$

このとき、式(16a-c)の波動関数、及び、その寄与係数を適当に並べて、行行列 $\Phi^{(\alpha)}$ と列行列 $\mathbf{p}^{(\alpha)}$ を定義すれば、式(15)は、次のように簡潔に書ける。

$$\sum_{i=1}^{n_a^{(\alpha)}} p_i^{(\alpha)} \Phi_i^{(\alpha)} = \Phi^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} \quad (19)$$

また、式(16a-c)で定義される波動関数は、後述する WBM のシステム行列の数値的な悪条件を緩和するために実装上はスケールリングする必要がある。また、これら波動関数を用いた展開式が厳密解に収束するための十分条件は、全ての部分領域が凸であるということが示されている。

2. 4. 3 音源の寄与による特解

一方、式(14)の $\hat{p}^{(\alpha)}$ の右辺第 2 項は、方程式(5)の右辺の外部点音源の寄与を考慮した場合の特解の 1 つを表しており、次のように定義される。

$$p_q^{(\alpha)} = \frac{j\rho\omega Q^{(\alpha)} \exp(-jk\rho_q^{(\alpha)})}{4\pi \rho_q^{(\alpha)}} \quad (20a)$$

$$\rho_q^{(\alpha)} = \|\mathbf{r}^{(\alpha)} - \mathbf{r}_q^{(\alpha)}\| \quad (20b)$$

ここで、 $Q^{(\alpha)}$ は、音源強さ (体積流[m³/s]) であり、次式で定義される。

$$Q^{(\alpha)} = \int_{\Omega^{(\alpha)}} q^{(\alpha)} d\Omega \quad (21)$$

2. 5 構造振動問題の有限要素法によるモデル化

2. 5. 1 構造変位の変数展開

FEM の定式化では、構造領域 Ω_s において、その領域内に含まれる要素 Ω_s^e ($e = 1, \dots, n_{se}$) 内の絶対位置座標 \mathbf{r} における定常変位の FE 全体座標成分 $\mathbf{u}(\mathbf{r}_F(\mathbf{r}))$ が、次式のように要素内で局所的に定義される単純な要素形状関数 N_i^e ($i = 1, \dots, n_s^e$) によって近似的に展開される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_F(\mathbf{r})) \approx \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}_F(\mathbf{r})) = \sum_{i=1}^{n_s^e} N_i^e(\rho(\mathbf{r}_F(\mathbf{r}))) \mathbf{u}_i^e, \quad \mathbf{r}_F \in \Omega_s^e \quad (22)$$

ここで、FE 局所要素位置座標 $\rho(\mathbf{r}_F(\mathbf{r}))$ は、要素領域 Ω_s^e 内の FE 全体位置座標 \mathbf{r}_F に対応する親要素 Ω_{sp}^e 内の点の FE 局所（親）要素座標（自然座標）であり、以下、単に ρ と書く。さらに、 i は、要素 e に属する節点の要素（局所）節点番号であり、 \mathbf{u}^e は、要素 e の要素節点 i の節点変位（自由度）の FE 全体座標系成分 \mathbf{u}_i^e を並べた列行列である。一方、要素節点番号 i は全体節点番号 I とは一般に異なる。また、本論文では、構造要素として四面体要素や六面体要素などのアイソパラメトリック要素を考える。

さらに、この要素形状関数 N_i^e に基づいて、構造領域 Ω_s 全体で定義される全体形状関数 N_I を、定式化における便宜性のために定義できる。この N_I は、全体節点 I に対応する要素 e の要素節点を i として、その要素 e の節点 i における自由度の要素形状関数 N_i^e に等しく、他の全ての要素領域の自由度において 0 である。したがって、変位展開式を、以下のように書くことができる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_F) \approx \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}_F) = \sum_{I=1}^{n_m} N_I(\mathbf{r}_F) \mathbf{u}_I = \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_F) \hat{\mathbf{u}}_F, \quad \mathbf{r}_F \in \Omega_s \quad (23)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{N}}$ は、全体形状関数から成る行列、 $\hat{\mathbf{u}}_F$ は、節点自由度の列行列であり、以下のように定義した。

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_1 \mathbf{I}_3 & \cdots & N_{n_{sn}} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad (24a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T & \cdots & \mathbf{u}_{n_{sn}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (24b)$$

$$\mathbf{u}_I = \begin{bmatrix} u_I & v_I & w_I \end{bmatrix}^T, \quad (24c)$$

このとき、境界上の n_u 個の節点自由度に幾何学的境界条件が課されるとすると、最終的に $n_F = 3n_{sn} - n_u$ 個の節点自由度が未知数として残る。そこで、式(23)において、未知の成分と既知の成分を区別して、 \mathbf{u}_F を未知の節点自由度列行列、 $\hat{\mathbf{u}}_F$ を既知の節点自由度列行列、 $\mathbf{N}(\mathbf{r}_F)$ と $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_F)$ を、それぞれ、 \mathbf{u}_F と $\hat{\mathbf{u}}_F$ に対応する全体形状関数行列とする。

2.6 ハイブリッド法の行列方程式

音響波動関数の寄与分を表す係数列行列 $\mathbf{p}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, \dots, n_\Omega$)、及び、FEM による展開式(22)における未知数である構造の節点自由度 \mathbf{u}_F を決めるために、重み付き残差法を利用する。このとき、FEM では、支配方程式（平衡式）と BC（基本 BC を除く）の両方が近似的に満たされるのに対し、WBM では、BC のみが積分の意味で近似的に満たされるだけで、支配方程式は厳密に満たされている点に大きな違いがある。

2.6.1 音響領域への重み付き残差法の適用

本章では、まず、音響部分領域 $\Omega^{(a)}$ における音響 BC に、重み付き残差法を適用する。ただし、音響 WB 領域と構造 FE 領域との間のハイブリッド面に関しては、FEM による変位展開式(23)が利用される。

重み付き残差式を定式化する前に、まず、事前に与えられた境界値を用いて得られる値と、式(14)で展開した変数を用いたときの計算式との差として定義される音響 BC の残差誤差関数 $R_p^{(\alpha)}(\mathbf{r}), R_v^{(\alpha)}(\mathbf{r}), R_z^{(\alpha)}(\mathbf{r}), R_{sh}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ が、それぞれ、式(11a, b, c)と式(13)の右辺と左辺の差で表わされる。また、部分領域間の連続性に関する誤差関数 $R_{cz}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$

も同様に定義される。そして、この誤差関数は、 n_Ω 個の音響部分領域に対して導出される。

ここで、従来の FEM と同様に、WBM においても Galerkin 法を適用し、WB 部分領域 $\Omega^{(a)}$ における重み関数 $\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ を、次式のように音響波動関数を用いて定義する。

$$\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \Phi^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(a)}) \tilde{p}^{(\alpha)} \quad (25)$$

このとき、重み付き残差式が、次式で与えられる。

$$-\int_{\Gamma_p^{(a)}} L_v^{(\alpha)} [\tilde{p}^{(\alpha)}] R_p^{(\alpha)} d\Gamma + \int_{\Gamma_v^{(a)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_v^{(\alpha)} d\Gamma + \int_{\Gamma_z^{(a)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_z^{(\alpha)} d\Gamma + \int_{\Gamma_{cz}^{(a)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_{cz}^{(\alpha)} d\Gamma + \int_{\Gamma_{sh}^{(a)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_{sh}^{(\alpha)} d\Gamma = 0 \quad (26)$$

2.6.2 構造領域への重み付き残差法の適用

次に、構造の動的平衡方程式に重み付き残差式を適用する。基本的に、従来の FEM の定式化と同じであるが、構造表面に加わる音圧を考慮する際に、音響波動関数の展開式が適用される点が異なる。

まず、構造領域 Ω_s に対する重み付き残差式は、動的な平衡方程式(7)、及び、重み関数 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}_F) = \mathbf{N}(\mathbf{r}_F) \tilde{\mathbf{u}}_F$ を用いることによって、以下のような弱形式が得られる。

$$-\omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_s} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_{sh}} \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Omega_s} \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (27)$$

このとき、絶対位置座標 \mathbf{r} (FE 全体位置座標 \mathbf{r}_F) における表面力ベクトルの FE 全体座標成分 $\mathbf{t}(\mathbf{r}_F(\mathbf{r}))$ として、音響キャビティから作用する音圧 $p(\mathbf{r})$ によるものを考える。そして、音圧は、式(14)のように音響波動関数を用いて展開できるので、表面力は、以下のように表わせる。

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{r}_F(\mathbf{r})) &= -p(\mathbf{r}) \mathbf{n}_s(\mathbf{r}_F(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{sh} \\ &= -\mathbf{n}_s(\mathbf{r}_F) \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} \left(\Phi^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(a)}) \mathbf{p}^{(\alpha)} + p_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(a)}) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

2.6.3 ハイブリッド法の行列方程式の構築

音響 WB 領域と構造 FE 領域における重み付き残差式(26)と(27)に、変数展開式(14)と(23)を代入して得られた式が任意の $\tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$ と $\tilde{\mathbf{u}}_F$ に対して成り立つことから、それぞれの残差式に対して未知数 \mathbf{w} と \mathbf{u}_F に関する行列方程式が得られる。これらを組み合わせることによって最終的に、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{C}_{sah} \\ \mathbf{j}\omega \mathbf{C}_{sah}^T & \mathbf{A}_a + \mathbf{A}_{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} + \mathbf{f}_h \\ \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_{ph} \end{bmatrix} \quad (29)$$

のような行列方程式が得られる。ここで、行列 \mathbf{Z} と列行列 \mathbf{f} は、純粋な構造 FEM に関する動剛性行列と荷重列行列、 \mathbf{A}_a と \mathbf{f}_p は、純粋な音響 WBM に関する係数列と励振列行列、 \mathbf{O} は、適当なサイズの零行列である。そして、行列 \mathbf{A}_{sh} 、 \mathbf{C}_{sah} 、 \mathbf{f}_h 、及び、 \mathbf{f}_{ph} が、構造 FE 領域と音響 WB 領域が連成することを表わしている。特に、 \mathbf{C}_{sah} と \mathbf{f}_h は、

$$\mathbf{C}_{sah} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{sah}^{(1)} & \cdots & \mathbf{C}_{sah}^{(n_\Omega)} \end{bmatrix} \quad (30a)$$

$$\mathbf{C}_{sah}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n_{sh}^{(a)}} \mathbf{C}_{sahi}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n_{sh}^{(a)}} \int_{\Gamma_{sh}^{(a)}} \mathbf{N}^T \mathbf{n}_s \Phi^{(\alpha)} d\Gamma \quad (30b)$$

$$\mathbf{f}_h = \sum_{\alpha=1}^{n_{\Omega}} \sum_{i=1}^{n_{sh}^{(\alpha)}} \mathbf{f}_{hi}^{(\alpha)} = - \sum_{\alpha=1}^{n_{\Omega}} \sum_{i=1}^{n_{sh}^{(\alpha)}} \int_{\Gamma_{sh}^{(\alpha)}} \mathbf{N}^T \mathbf{n}_s p_q^{(\alpha)} d\Gamma \quad (31)$$

のように構造の形状関数と音響の波動関数の両方が関係し、実際には、FEM の動剛性行列の場合と同様に、要素ごとに計算して効率的に全体行列に加えていくことによって構築する。そして、式(29)は、疎行列と密行列の性質を生かして効率的に解かれる。

3. 数値シミュレーション

前章で定式化したハイブリッド法を実装し、3次元定常音響構造連成解析が可能な数値解析プログラムを作成した。本章では、このプログラムを検証するために、名古屋大学との共同研究において構築した音響透過設備⁶⁾に基づく解析を行う。

図2に、解析した音響透過モデルの概念図を示す。本設備は、壁を吸音材で囲まれた音源室と受音室から成り、それらの部屋の間に弾性板を設置することができる。そして、音源室のスピーカを励振源として音源室に音圧が生じ、その音圧によって弾性板が振動し、さらにその弾性振動によって受音室に音圧が生じる現象を実現できる。

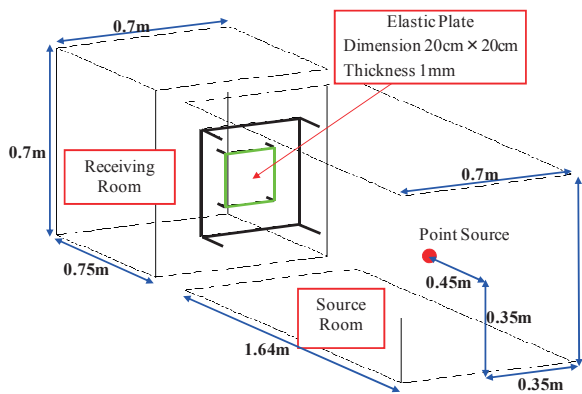


図2 音響透過実験設備の概念図

数値解析では、音源室と受音室のキャビティを音響 WB 領域とし、試験体である弾性板を構造 FE 領域として扱う。ここでは、弾性板として 1[mm]厚のアルミ板 (AL1050: 体積密度 2,705 [kg/m³], ヤング率 6.9×10¹⁰ [N/m²], ポアソン比 0.33) を考え、モデル化には、せん断ロックを避けるために 20 節点ソリッド要素 (2 次要素) を利用した。そして、板厚方向を 4 分割し、全体で 3,600 要素、17,949 節点とした。また、音響 WB 領域は、部屋の連結部のくびれを考慮し、各部屋を 2 個の凸部分領域に分割することにより計 4 個の凸部分領域とした。

図3は、ハイブリッド法に基づく解析で得られた透過損失(TL)と、実験値、及び、板と音響キャビティともに WBM で解いた結果³⁾ (均質な薄肉平板であれば、構造も WBM で解くことができる) との比較である。全て WBM で解いたほうが数値分散誤差がないために精度が高いことは明らかであるが、アルミ板を FE 領域として扱っても、ある程度の細かい要素分割を用いれば、良い一致を示すことが分かる。したがって、ハニカム構造など WBM では扱えない構造の場合でも、必要最小限として構造部分を FE 領域とすれば、ハイブリッド法を用いてある程度精度の良い結果が得られると期待できる。

4. 結論

定常音響構造連成問題に関して、低周波から中間周波数領域までの解析に高いポテンシャルを有する WBM に焦点

を当て、複雑な幾何形状 (及び、複雑な材料特性) を扱うことのできる FEM とのハイブリッド法について考えた。そして、板構造を介した音響透過問題を扱うために、WBM で音響領域をモデル化し、FEM の 3 次元ソリッド要素で板構造をモデル化する場合のハイブリッド法について定式化を行った。さらに、ロケットフェアリングを通じた音響透過解析の第一段階として、音源室と受音室の間の平板を通じた音響透過解析を行い、ハイブリッド法で得られた透過損失の数値解析結果と、実験値、及び、板と音響キャビティを全て WBM で解いた数値解析結果が良い一致を示した。

今後は、ハニカム・サンドイッチ板を介した音響透過に関して、音響透過損失を計算し、実験データと比較することによって、ハイブリッド法の検証を進める予定である。

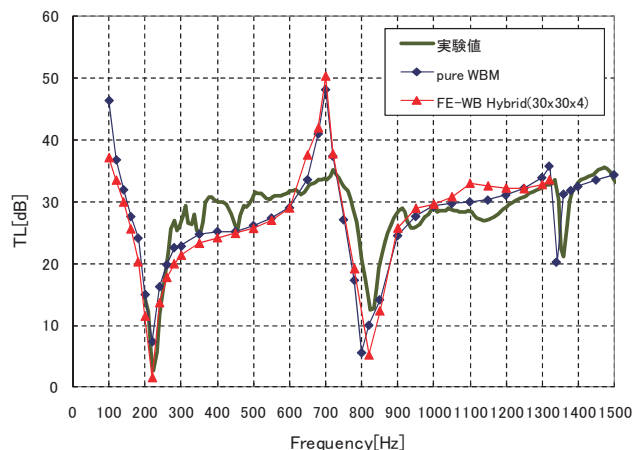


図3 透過損失の比較

謝辞

共同研究において、数値解析検証用の音響透過実験設備の構築、及び、実験を行って頂いた名古屋大学大学院 工学研究科 航空宇宙工学専攻の中村佳朗教授、森 浩一講師、村橋慶紀氏、カイロ大学のモハメド・カリル・イブラヒム准教授に感謝いたします。

参考文献

- 1) W. Desmet, *A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis*, Ph.D thesis, Katholieke Universiteit Leuven (1998).
- 2) T. Takahashi, K. Murakami, and T. Aoyama, "Study on Interior and Exterior Vibroacoustic Analysis for Launch Sites and Spacecraft", ISMA2008 Int. Conf. on Noise and Vibration Engineering, Leuven, 15-17 September 2008.
- 3) T. Takahashi, T. Aoyama, H. Kaneda, B. Pluymers, and W. Desmet, "Sound transmission predictions using the wave based method for three dimensional coupled vibroacoustic analysis", 17th Int. Congress on Sound and Vibration (ICSV17), Cairo, Egypt, 18-22 July 2010.
- 4) W. Desmet, B. Van Hal, P. Sas, and D. Vandepitte, "A computationally efficient prediction technique for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems", *Advances in Engineering Software*, 33, Elsevier 2002, 527 - 540.
- 5) B. Van Hal, W. Desmet, and D. Vandepitte, "Hybrid finite element - wave based method for steady-state interior structural-acoustic problems", *Computers & Structures*, 83, 167-180, (2005).
- 6) 森 浩一, 村橋慶紀, 中村佳朗, 高橋 孝, 村上桂一, 青山剛史, 橋本 敦, 複合的構造を有する材料の平面音波透過特性に関する基礎実験, 第 41 回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2009, 2009 年 6 月.