

# 斜め平板に衝突する超音速ジェットと発生音響波の 超大規模 LES 解析

野々村 拓, 藤井 孝藏  
宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究所

## Analysis of Flow and Generated Acoustic Fields of a Supersonic Jet Impinging on an Inclined Flat Plate using Very Large-scale Large-Eddy Simulation

by  
Taku Nonomura and Kozo Fujii

### ABSTRACT

In this study, flow and acoustic fields of a supersonic jet impinging on an inclined flat plate are investigated. Compressible Navier-Stokes equations are solved by a high-order shock capturing scheme with two different computational grids for investigating the effects of resolution of turbulent boundary layer. Total numbers of computational grids are 30 million and 700 million where a 700-million computational grid is designed for resolving turbulent boundary layer. From the near-wall structure, streak-like structures are observed in the case with a 700-million computational grid while such structures are not observed in the case with a 30-million computational grid. In spite of the difference in the resolution of turbulent boundary layer, essential flow and acoustic fields do not change for both cases. This indicates that flow and acoustic fields are insensitive to the resolution of turbulent boundary layer.

### 1. はじめに

ロケットの打ち上げ時にロケット噴流から発生する非常に強い音響波はロケットのペイロードである人工衛星や宇宙機に悪影響を及ぼす可能性がある。ロケット噴流からの音響波の予測は経験則<sup>1,2)</sup>とサブスケール試験に頼っており、その精度は十分であるとは言えない。そのため、現状ではこのような音響波に耐えるため、人工衛星や宇宙機には様々な音響試験を行い、大きめのマージンをとって設計をせざるを得ない。

ロケット噴流からの音響波の予測精度を大きく向上させ、かつ音響波を低減できる射場の設計を適切に行うことができれば、人工衛星や宇宙機にかかる音響試験を大幅に減らせる可能性がある。

そこで現在、JAXA/JEDI センターが、数値解析を用いて音響波の予測<sup>3,4)</sup>を行い、音響波の発生が抑えられる射場の提案をしている。彼らの解析は実際の問題を取り扱っており形状複雑性や計算コストの観点から解像度が十分とは言えないが、彼らの解析結果から定性的にどのような音響波が発生するかがわかってきている。一方で、JEDI センターと並列に、我々(ISAS/JAXA)は音響予測モデルを向上させるためにより普遍的な物理現象の議論を行ってきており、超音速自由噴流<sup>5-7)</sup>や単純形状に衝突する噴流<sup>8)</sup>など、単純にモデル化した問題において音響波の高解像度解析を行ってきた。

本発表では、単純形状に衝突する噴流から発生する音響波の解析を議論する。単純形状に衝突する噴流から発生する音響波は大きく分けて 2 つ存在する。一つは、超音速ジェットが平板に垂直に衝突する際に発生するピーク周波数をもったフィードバック音響波<sup>9-11)</sup>である。この音響波は、垂直離着陸機(VTOL,STOL)の離着陸時に発生するものであり、これまでに様々な研究がなされてきた。一方で、ロケット打ち上げ時にも噴流がデフレクターに衝突して音響波が発生しており、低周波のブロードバンドな音響波がみられる。この場合には、発生音響波はマッハ波<sup>12)</sup>のように乱流の大規模構造から発生していると考えられる。

このブロードバンドな音響波に対して、Nonomura らは 3,000~5,000 万点の LES 解析を行い、以下の 3 種類の音響波が発生することを示した<sup>13)</sup>(図 1):

- (i) 主流ジェットから発生するマッハ波
- (ii) 衝突点から発生する音響波

- (iii) 衝突後の超音速流れから発生するマッハ波

この中で音響波(ii)に関しては、その存在も十分に明らかでなく、これまでにモデル化もほとんどされていない。Nonomura ら<sup>13)</sup>はこの音響波は流れの剥離、再付着、衝撃波などによって発生している可能性があるとしている。

彼らの解析では大規模構造を捉えて議論をしているが、壁面乱流境界層を解像できておらず、剥離、再付着の様子を定量的には議論できていない。本発表では、より大規模な計算格子を用いて壁面の乱流境界層を捕えることのできる解析を行うことで、流れ場がどのように変化し、音響波の発生に影響を及ぼすかを明らかにする。また、今後格子解像度の足りない非定常計算をせざるを得ないケースが増えると考えられるが、そのような場合にどのような点に気をつけ議論をするべきかを明らかにしていきたい。

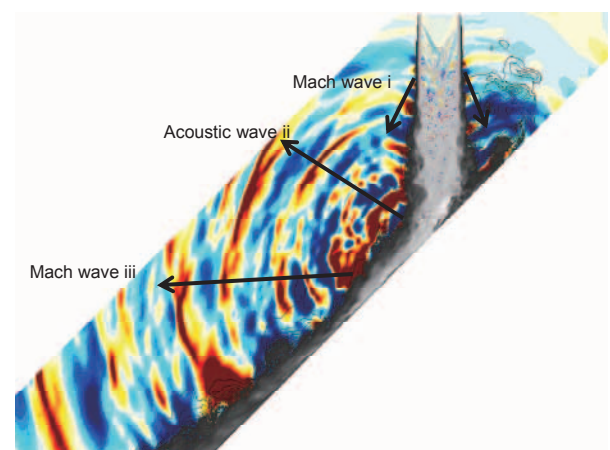


図 1 斜め平板に衝突する超音速噴流から発生する 3 種類の音響波

### 2. 解析条件

本解析では、比熱比  $\gamma=1.4$  の空気を作動流体として扱い、雰囲気の条件を地上での大気に合わせている。

本解析では、適正膨張ジェットを対象としており、ジェットの状態を決めるため、適正膨張マッハ数  $M_J$ 、レイノルズ数  $Re$ 、温度比  $T_{ratio}$  という 3 つのパラメータを用いた。

$M_J$  はチャンパー圧と雰囲気圧から求まる圧力比のみによって決まるパラメータであり、以下のように定義される。

$$M_J = \frac{u_J}{a_J} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left( \left( \frac{p_c}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)} \quad (1)$$

ここで  $J$ ,  $\infty$ ,  $c$  の添え字はそれぞれ適正膨張時の値, 雰囲気での値, チャンバーでの値を示し,  $u$ ,  $p$ ,  $a$  はそれぞれ速度, 圧力, 音速である。

またレイノルズ数  $Re$ , 温度比  $T_{ratio}$  は以下のように定義される。

$$Re = \frac{\rho_J u_J D}{\mu_\infty} \quad (2)$$

$$T_{ratio} = \frac{T_c}{T_\infty} \quad (3)$$

$\rho$ ,  $\mu$ ,  $T$ ,  $D$  はそれぞれ密度, 粘性係数, 温度, ノズル直径 (図 3) である。

本解析では  $M_J=2.0$ ,  $Re=25,000$  とし,  $T_{ratio}=1$  (コールドジェット) のケースを, 過去の研究で用いた 3000 万点の格子および, 7 億点の計算格子で解析した。実際のロケットプルームでは, より高いレイノルズ数であるが, 本研究では, 用いた計算コードと計算資源の制約から低いレイノルズ数  $Re$  を選んでいる。

本解析に用いたジェットプロファイルを図 2 に示す。  $r$  はノズル中心から半径方向の長さを表す。本解析では, 非常に薄い剪断層を与え解析を行った。このように薄い剪断層を用いることで, 擾乱を与えなくとも不安定性を誘起できるため人工的な擾乱は入れていない。

最後に, ノズルと射点のデフレクターを模擬した平板の位置関係を表すパラメータを図 3 に示す。本解析では  $\theta=45^\circ$ ,  $L/D=5$  とした。計算格子のみを変えた 2 つのケースを解析しており, 3000 万点で解析したケースを 30M, 7 億点で解析したケースを 700M と示す。

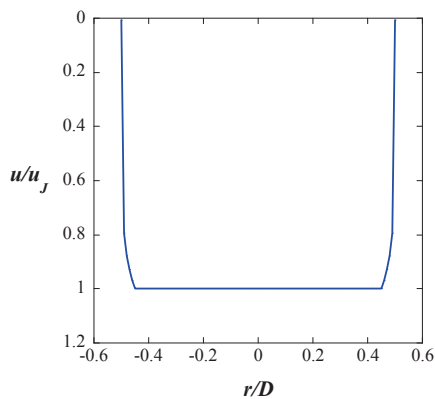


図 2 ノズル出口でのジェット速度分布

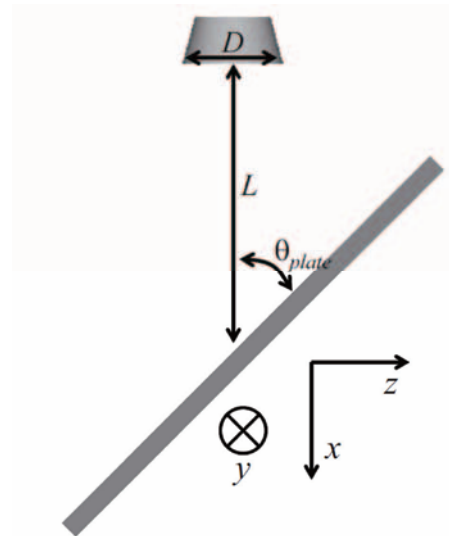


Fig. 3 幾何パラメータの定義

### 3. 解析手法

#### 3.1 計算格子

##### 1. 計算格子

図 4 に計算領域を示す。橙色で示す領域が計算領域であり, その外側に音波の非物理的の反射, 発生を防ぐために, 格子伸張させた Buffer 領域<sup>14)</sup> (Fig. 4 水色) を設けている。

図 5 に計算格子を示す。本解析では平板衝突後の下流 (図 5 左側) へ向かう流れを如何に解像するかがキーポイントとなり, そこに高い格子密度が要求される。

本解析においては, 200~1000zone からなる重合格子を採用し, 各格子間で物理量の内挿を行った。但し, 格子点は 16 点ずつ完全に重なっており内挿による誤差はないものと考えて良い。

30M ケース (3000 万点) の計算格子の分布は, ノズルの中心軸方向 ( $x$  方向) に 300 点, 軸から離れる方向に 176 点 (上流側), 373 点 (下流側), ノズルの周方向に 196 点である。700M ケース (7 億点) の計算格子の分布は, ノズルの中心軸方向 ( $x$  方向) に 300 点, 軸から離れる方向に 1051 点 (上流側), 2233 点 (下流側), ノズルの周方向に 1171 点である。

また, ノズルの中心軸近傍 (図 5 Nozzle 中心部分) では, 軸対称格子に比べて少ない格子点数ですむ様に矩形格子を採用した。

渦変動が支配的な領域での格子幅は, 30M が  $6 \times 10^{-2}$  程度, 700M が  $1 \times 10^{-2}$  程度である。音波による圧力変動が支配的な領域での格子幅はどちらのケースも 0.06 程度である。最小格子幅は平板近傍でどちらのケースも  $6 \times 10^{-4}$  である。

700M の格子では剥離再付着を起こす領域での格子幅は壁単位でおおよそ  $(\Delta \xi^+, \Delta \eta^+, \Delta \zeta^+) = (7, 7, 0.3)$  程度としており, 本解析で用いたスキームがこの壁単位を満たす格子で乱流境界層を解像できることを別途確認している。一方で 30M の格子では, この条件をみたすことが出来ず, 乱流境界層は解像できない。Buffer 領域では, 音波が伝播する方向, 渦が流出する方向の各々において, 音波の非物理的の反射, 発生を防ぐために格子伸張を行った。格子伸張の比率は計算領域の境界で 1.03 倍程度とし, 計算領域の境界から離れるにつれて徐々に上げていき, 最終的には 1.2 倍程度になるようにした。この Buffer 領域には 30~50 点程度の格子点を設けている。後述する本解析で用いた高精度スキーム WCNS が 8 点で 1 つの波を捉えることができる (8 point per wave)<sup>15)</sup> ことを考慮すると本解析で解像可能な周波数の上限は, 30M, 700M とともにストローハル数  $St=1.7$

程度（ストローハル数の定義は 5.2 に示す）であると考えられる．また，周波数の下限については時間積分の長さから見積もっており，3.2 で議論する．

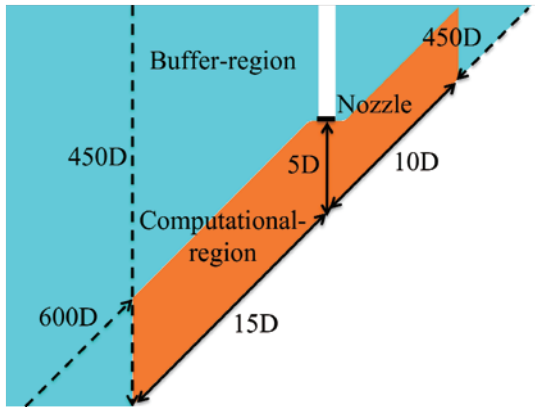
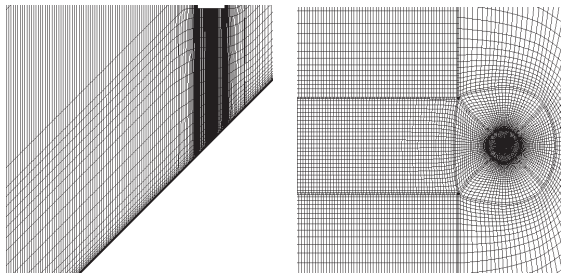


図 4 計算領域



(a) Side-view (b) Top-view  
図 5 計算格子(12 点置き)

### 3. 2 計算スキーム

支配方程式は，ノズル直径，雰囲気密度，雰囲気音速で無次元化した 3 次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式であり，これを一般座標系<sup>16)</sup>で解いた．

対流項の離散化には 7 次精度 WCNS 法を，粘性項の離散化には 6 次精度中心差分を用いた．WCNS 法は Deng<sup>17)</sup>らによって，WENO 法<sup>18)</sup>とコンパクト差分法<sup>19)</sup>の組み合わせとして開発された．オリジナルの WCNS は 5 次精度の定式であったが Nonomura<sup>20)</sup>，Zhang<sup>21)</sup>によって 9 次精度まで拡張されている．Zhang<sup>21)</sup>らの定式化では，非線形重み付き平均で流束を補完するようオリジナルから変更があったが，ここでは Deng，Nonomura<sup>20)</sup>らと同様に非線形重み付き平均で保存量を補間した．WCNS は WENO に比べて解像度が若干高いことに付け加え，一樣流保持<sup>22)</sup>が可能，変数補間が可能，様々な流束評価法が可能といった利点がある．WCNS 内では，7 次精度の重み付き平均および 8 次精度の陽的差分<sup>23)</sup>を用いた．WCNS 内で行う流束評価法には SHUS<sup>24)</sup>を用いている．また，WCNS 内のスムーズインジケータに相対リミッター<sup>25)</sup>を用いて，高周波の波の解像度を上げている．相対リミッターの閾値  $R=5$  とした．

しかしながら，WCNS は衝撃波捕獲スキームでないコンパクト差分法に比べ 10 倍程度，計算コストが高いことが一般に知られている．そこで本研究では計算速度の向上を狙い以下のような工夫を施している．

WCNS ではセル境界での物理量  $\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$  を求める際，以下のように計算する．

$$\tilde{U}_{j,k}^{(n)} = \left( \frac{1}{\Delta x} \right)^n \sum_{l=0}^{r-1} a_{k,l}^n U_{j-r+k+l} \quad (4)$$

$$\tilde{U}_{j+\frac{1}{2};k}^L = U_j + \sum_{n=1}^{r-1} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^n \left( \frac{1}{n!} \right) \tilde{U}_{j,k}^{(n)} \quad (5)$$

$$IS_{j;k} = \sum_{n=1}^{r-1} \left( \tilde{U}_{j,k}^{(n)} \right)^2 \quad (6)$$

$$IS_{j;k} = \begin{cases} IS_{j;k} & \frac{\max(IS_{j;l})}{\min(IS_{j;l})} > R \\ 0 & \frac{\max(IS_{j;l})}{\min(IS_{j;l})} < R \end{cases} \quad (7)$$

$$\alpha_k = \frac{C_k}{(IS_k + \varepsilon)^p} \quad (8)$$

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^r \alpha_i} \quad (9)$$

$$\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^L = \sum_{k=1}^r w_k \tilde{U}_{j+\frac{1}{2};k}^L \quad (10)$$

ここで， $w_k$  は非線形重みである．非線形重みの計算は特性変数に変換後に行っており，計算コストが非常に高い．しかしながらこの非線形重みが必要になるのは衝撃波や剪断層などの物理変化が大きな領域のみであり，それ以外では最適重みを用いてかまわない．そこで本解析では流体変化が大きい領域を基本変数の 1 つである密度分布から予め求めておき，その部分にのみ上記の非線形重みの計算を行い，計算速度と解像度の向上を実現した．本解析では  $R=5$ ， $e=0.01^{25-26)}$  とし，密度で評価したスムーズインジケータに対し，以下の 2 つの条件を満たす場合のみ特性変数に変換し非線形重みを計算した．

$$\frac{\max(IS_{j;l})}{\min(IS_{j;l})} > R \text{ and } \max(IS_{j;l}) > e \quad (11)$$

このような処理を施すことで，非線形重みを計算する領域が制限され，本解析においては 3 倍以上の計算速度向上が得られている．

LES のサブグリッドスケールモデルには，サブグリッドスケールの乱流渦性を風上差分の数値粘性が補っていると考える MILES 法<sup>27)</sup>を用いた．このため，陽的なサブグリッドスケールは用いていない．このような MILES は WCNS に対して現在基本的な流れを中心に検証が進められている<sup>28)</sup>．

時間積分は 2 次精度後退差分を陰解法および内部反復を用いて計算した．陰解法には FF-SGS<sup>29)</sup>の考えを用いて，陰解法である LU-ADI<sup>30)</sup>の各方向にスペクトル半径で風上化を施した ADI-SGS<sup>31)</sup>陰解法を用いた．内部反復は 3 回とした．時間刻みは 30M，700M に対しそれぞれ 0.005，0.002 とした．これは乱流境界層位置でそれぞれ最大 CFL 数 10，4 程度に一致している．30M の解析では，計 80,000 ステップ，700M の解析では計 200,000 ステップの時間積分を行った．積分時間は無次元時間で 400 となり，本解析で解像可能な周波数の下限は，音波が 40 周期以上積分時間内に含まれていることを考慮してストローハル数  $St=0.02$  程度と見積もられる．境界条件は，流出境界として静圧が静止気体に回復，壁面には滑り無しの条件を用いた．

音圧の評価方法は，計算領域内では圧力変動をそのまま音圧として解析し，遠方場では積分面のデータをフーリエ変換した後，周波数領域でキルヒホフ法<sup>32)</sup>を用いて予測した．積分面は計算領域の外側としており，この場所では近傍場の圧力変動(擬似音波)を拾わない十分に遠方場である．但し，本解析において発生する音波の音圧レベルは非常に高く音波に非線形も含まれると考えられる．キルヒホフ法は音波の非線形性を許容しないため，定量的に正しい音圧分布は得られないと考えられるが，定性的な特性の理解には問題ないと考えそのまま適用した．

4. 流体場の議論  
4. 1 瞬間流体場

図6に瞬間の流体音響場の全体像を示す。流れ場構造(モノトーンの等高線図)から、700Mのほうがより細かい渦スケールまで解けているが、基本的な流れ構造は30M, 700Mで大きく変化がないことがわかる。次に図7に壁から0.014離れた平面でのx方向速度分布を示す。図7より700Mの解析では非常に微細なスケールな乱流構造が捉えられていることがわかる。壁近傍で流れ場構造に伸びた高速領域が見られるが、これは乱流境界層のストリーク構造であると考えられる。30Mの解析では、大きな構造しか捉えられておらず、流れ方向に伸びた高速領域も存在はしているがそのスケールは非常に大きい。

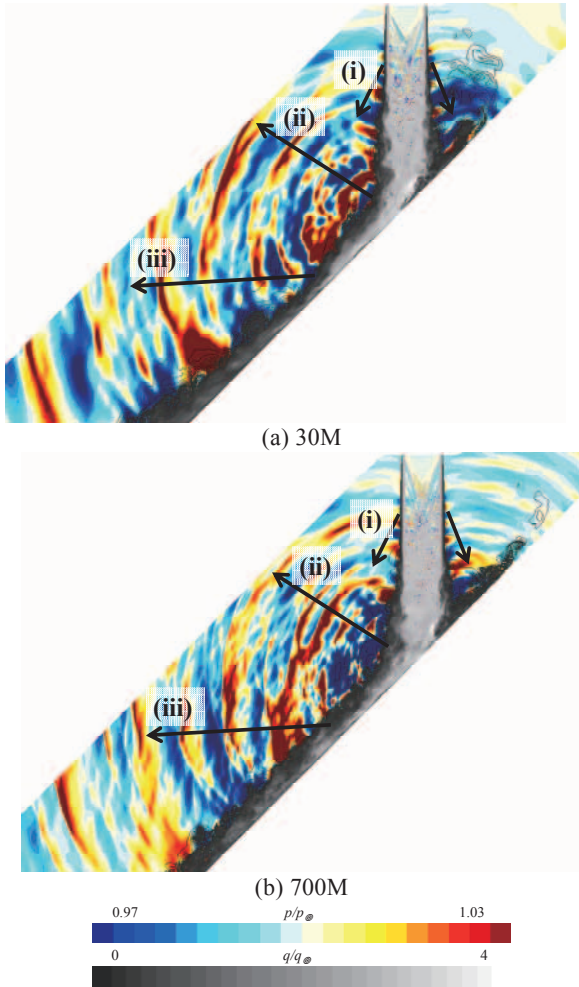


図6 瞬間流体音響場

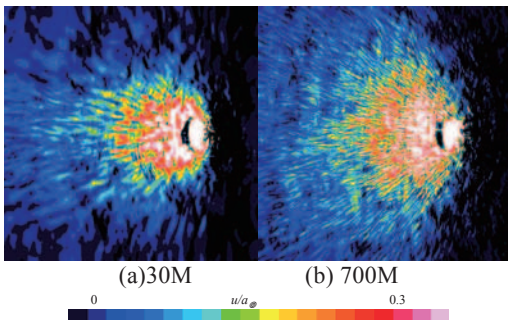


図7 瞬間の壁面近傍のx方向速度分布(上面図)

4. 2. 平均流れ場

平均のx方向速度分布を図8に示す。マッハ波はおおよそ超音速領域から発生するが、本解析で得られた超音速領域は30M, 700Mともにほぼ同程度である。平均流れ場か

ら計算した壁面近傍のオイルフローイメージ図および平均圧力分布図を図9に示す。衝突点付近の平均流れ場は30Mおよび700Mのどちらのケースもほぼ同じである。これらのことから前述の壁近傍の微細なスケールの乱流構造は全体の流れ場にほとんど影響を及ぼさないことがわかった。

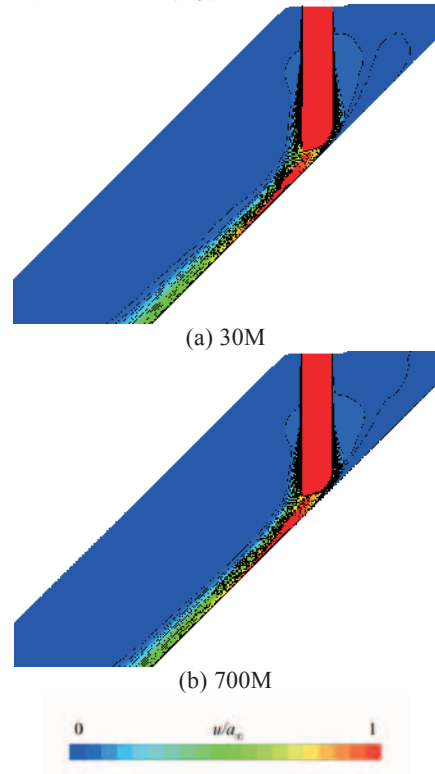


図8 平均x方向速度分布

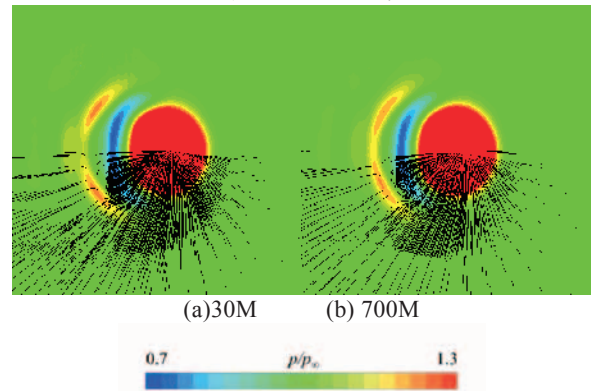


図9 平均流れ場からのオイルフローイメージ図および平均圧力分布図

5. 音響場の議論

5. 1. 瞬間音響場

図6の流体音響場のカラーの等高線より、30M, 700Mのどちらのケースでも、Nonomuraらが示したようにマッハ波(i)、音響波(ii)、マッハ波(iii)の3種類の音響波が観測された。付け加えて700Mのほうがより高周波の音響波をはっきりととらえていることがわかる。これらの高周波の音響波はより微細なスケールの流れ場構造から発生していると考えられる。

5. 2. 平均音響場

図10にオーバーオール音圧レベル(OASPL)を示す。30Mと700Mは基本的にはほぼ同じであることが分かる。すなわち、壁面の乱流境界層を解像するか否かは、流れ場から発生する音響波の放射特性にあまり影響しないことがわかった。詳細に音圧レベルを見比べると、700Mの音圧

レベルのほうがマッハ波(iii)および音響波(ii)による影響がよりはっきりとしていることがわかる。これは解像度の向上によるものであると期待される。また音源の位置は700Mのほうが若干ながらより上流側に存在している。

次にオクターブバンド音圧レベルを図 11 に示す。図 11 からオクターブバンドの音圧レベルも 30M および 700M で変化がないことがわかった。どちらのケースも, Nonomura らが指摘した通り, 低周波でマッハ波(iii)が発生し, 高周波になると音響波(ii), およびマッハ波(i)が観測されるようになった。

最後に, 対称面での遠方場での音圧レベルを平板からの角度の関数としてしめたもの(指向性)を図 12 に示す。衝突点 $(x, y, z)=(5, 0, 0)$ を中心に 20D, 50D, 100D の距離で指向性を調べている。図 12 より, 30M と 700M で大きな差異は見られず, その音圧レベルの差は 2-3dB 以内であることがわかる。一方で, 最大音圧となる角度を見ていくと, 700M のマッハ波(iii)は 30M のそれより大きな角度で最大値をとり, 700M の音響波(ii)は 30M のそれより小さな角度で指向性に影響を及ぼしている。すなわち格子解像度を変化させることで, 基本的には同様の流体音響場が得られるが, 音響波の放射角度などが若干変化することがわかった。今後このような変化が流体場のどのような変化で起きているのか議論していきたい。

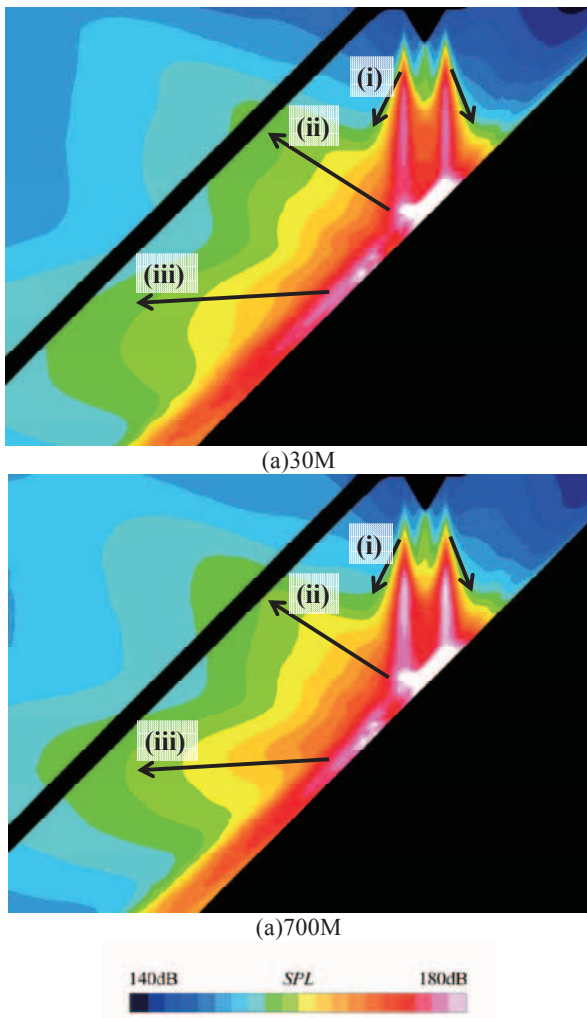


図 10 OASPL 分布

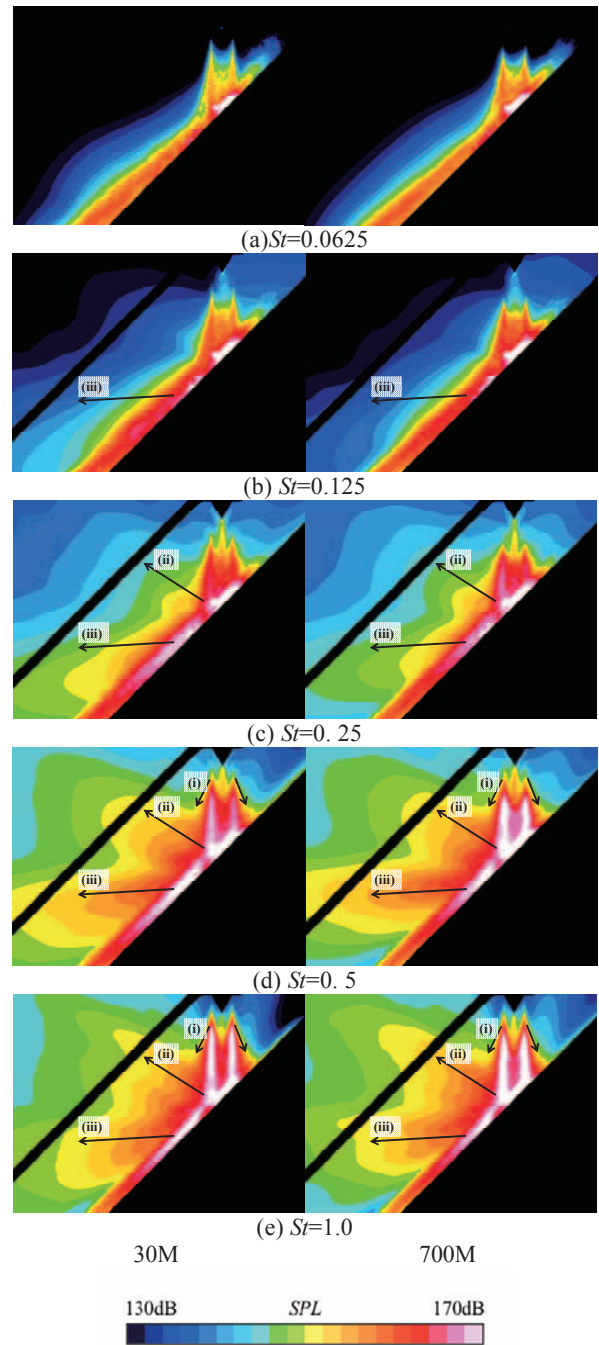


図 11 オクターブバンド音圧分布

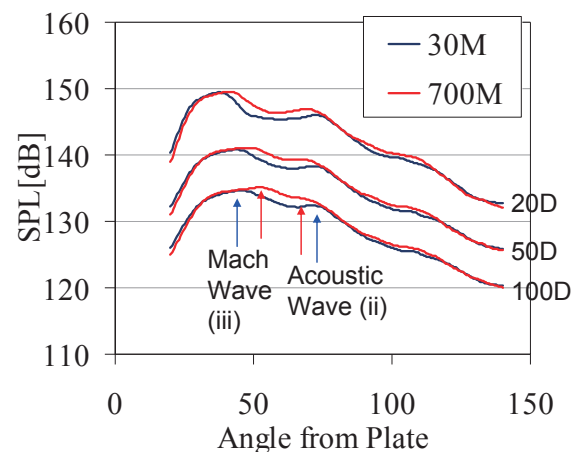


図 12 指向性

## 6. 結論

3000万点と7億点の格子を用いて、斜め平板にポテンシャルコア内で衝突する超音速噴流の解析を行った。7億点の格子を用いることで乱流境界層に存在するストリークと思われる構造が解像できた。しかしながら、乱流境界層を解像しても、基本的な流れ場音響場にはほとんど変化がなかった。言い換えれば、乱流境界層を解像するか否かは本解析で扱った流体場音響場に対しては感度があまりないということである。本解析のように乱流の大規模構造から発生する音響場は、乱流境界層の微細な構造にあまり影響を受けないといえる。ただし音響波の指向性や音源位置の若干の違いはみられたため、今後解析を進めて、この違いと乱流境界層の解像度の関係を調べていきたい。

## 謝辞

本研究での数値解析は JAXA・JSS の特別利用を用いて行われた。ここに記して謝意を表す。7億点の計算格子作成には東京大学大学院修士課程の後藤氏(現トヨタ自動車)および JAXA・JEDI センターの協力を得た。計算コードの大規模並列化の一部を JAXA 坂下氏に行っていたいただいた。JAXA・JEDI センターの堤氏、福田氏には解析結果に関して様々な意見を頂いた。協力をいただいた方々に深く感謝する。

## 参考文献

- Eldred, S., "Acoustic Loads Generated by Propulsion System," NASA SP-8072, 1971.
- Varnier, J., "Experimental Study and Simulation of Rocket Engine Freejet Noise," AIAA Journal, Vol. 39, No. 10, 2001, pp. 1851-1859
- Tsutsumi, S., Fukuda, K., Takaki, R., Shima, E., Fujii, K., and Ui, K., "Numerical Study on Acoustic Radiation for Designing Launch-pad of Advanced Solid Rocket," AIAA Paper 2008-5148, 2008.
- Tsutsumi, S., Shimizu, T., Takaki, R., Shima, E., Fujii, K., and Arita, M., "Numerical Study of Pressure Waves Generated by H-IIA Launch Vehicle at Lift-off," Asian Joint Conference on Propulsion and Power 2008, 2008.
- Nonomura, T., "Characteristics of Acoustic Waves Generated by Flow Instability of Supersonic Jets," Doctor thesis, University of Tokyo, 2008.
- Nonomura, T. and Fujii, K., "Mach number and Temperature Effects on Mach Wave Emission from Supersonic Jets," AIAA Paper 2008-6587, 2008.
- Nonomura, T. and Fujii, K., "Computational Analysis of Characteristics of Mach Wave Sources in Supersonic Freejet," AIAA Paper 2009-0016, 2009.
- Nonomura, T., Goto, Y. and Fujii, K., "Acoustic Waves from a Supersonic Jet Impinging on an Inclined Flat Plate," AIAA Paper 2010-476, 2010. Submitted to International Journal of Aeroacoustics.
- Alvi, F. S. and Iyer, K. G., "Mean And Unsteady Flowfield Properties of Supersonic Impinging Jets with Lift Plates," AIAA Paper 1999-1829, 1999.
- Krothapalli, A., Rajakuperan, E., Alvi, F., and Lourenco, L., "Flow Field and Noise Characteristics of a Supersonic Impinging Jet," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 392, 1999, pp. 155-181.
- Powell, A., "The Sound-Producing Oscillations of Round Underexpanded Jets Impinging on Normal Plates," Journal of Acoustic Society of America, Vol. 83, No. 2, 1988, pp. 515-533.
- Krothapalli, A., Arakeri, V., and Greska, B., "Mach Wave Radiation: A Review and an Extension," AIAA Paper 2003-1200, 2003.
- Nonomura T., Goto, Y., Fujii K., "Acoustic Waves from a Supersonic Jet Impinging on an Inclined Flat Plate," AIAA Paper 2010-476, 2010.
- T, Colonius, S. K. Lele and P. Moin, "Boundary Condition for Direct Computation of Aerodynamics Sound Generation," AIAA Journal, vol. 31, No. 9, 1993.
- Nonomura, T. and Fujii, K., "Development of Optimized WCNS and Evaluation of Resolution of the Optimized WCNS and High order WCNS" Proceedings of International Conference on Computational Methods 2007, 2007.
- 藤井孝藏, "流体力学の数値計算法", 東京大学出版会(1994).
- Deng, X. G. and Zhang, H., "Developing high-order weighted compact nonlinear schemes," Journal of Computational Physics, 165, 2000, pp.22-44.
- Jiang, G.-S. and Shu, C.-W., "Efficient implementation of weighted ENO schemes", Journal of Computational Physics, **126**, 1996, pp. 200-212.
- Lele, S. K., "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution," Journal of Computational Physics, 103, 1992, pp. 16-42.
- Nonomura, T., Iizuka, N. and Fujii, K., 2007, "Increasing Order of Accuracy of Weighted Compact Non-Linear Scheme." AIAA Paper 2007-0468(2007).
- Zhang, S., Jiang, S. and Shu, C.-W., "Development of nonlinear weighted compact scheme with increasingly higher order accuracy," Journal of Computational Physics, 227, 2008, pp. 7294-7321.
- Nonomura, T., Iizuka, N., and Fujii, K., "Freestream and Vortex Preservation Properties of High-order WENO and WCNS on Curvilinear Grids," Computers & Fluids, Vol. 39, No. 2, 2010, pp. 197-214.
- Nonomura, T. and Fujii, K., "Effects of Difference Scheme Type in High-order Weighted Compact Nonlinear Schemes," Journal of Computational Physics, Vol. 228, 2009, pp. 3533-3539.
- Shima E. and Jounouchi T., "Role of CFD in Aeronautical Engineering (No14) -AUSM type Upwind Schemes-," Proceedings of the 14th NAL Symposium on Aircraft Computational Aerodynamics, 1997, pp. 7-12.
- Taylor, E. M., Wu, M. and Martin, M. P., "Optimization of nonlinear error for weighted essentially non-oscillatory methods in direct numerical simulations of compressible turbulence," Journal of Computational Physics, 223, 2007, pp.384-397.
- Visbal, M. R., and Gaitonde, D. V. "Shock Capturing Using Compact-Differencing-Based Methods," AIAA Paper 2005-1265(2005).
- Boris, J. P., Grinstein, F. F., Oran, E.S. and Kolbe, R. J., "New Insights into Large Eddy Simulation," Fluid Dynamics Research, Vol. 10, 1992, pp. 199-288.
- Ishiko, K., Ohnishi, N and Sawada, K., 2007, "Implicit LES of Compressible Turbulent Flow" AIAA paper 2007-920, 2007.
- Fujii, K., "Efficiency Improvement of Unified Implicit Relaxation/Time Integration Algorithms" AIAA Journal, Vol.37, No. 1, 1999, pp. 125-128.
- Fujii, K. and Obayashi, S., "Practical Applications of New LU-ADI Scheme for the Three-Dimensional Navier-Stokes Computation of Transonic Viscous FLOws" AIAA paper 86-0513, 1986.
- 藤井, "有限体積法の最前線-高速気流計算法の最近の動向", 日本計算工学会誌, 第3巻, 第3号, pp. 158-166.
- Pan, F.L., Uzun, A. and Lyrintzis, A. S., "Refraction Corrections for Surface Integral Methods in Jet Aeroacoustics," AIAA paper 2004-2873, 2004.