

高速非構造 CFD ソルバ FaSTAR における新勾配制限関数

菱田学[†], 橋本敦[‡], 村上桂一[‡], 青山剛史[‡]

[†]株式会社 菱友システムズ, [‡]独立行政法人 宇宙航空研究開発機構

A new slope limiter for fast unstructured CFD solver FaSTAR

by

Manabu Hishida, Atsushi Hashimoto, Keiichi Murakami and Takashi Aoyama

ABSTRACT

To achieve second-order spatial accuracy in CFD solver on unstructured grid, reconstruction method such as Green-Gauss method or a least square approximation is used with a slope limiter. However Barth-Jespersen limiter, which is generally applied in the solvers on unstructured grid, has disadvantage for convergence to steady state solution and Venkatakrishnan limiter also has problem that second-order accuracy is lost on irregular grid. In this paper, a new slope limiter is proposed and applied to unstructured fast flow solver FaSTAR to overcome such problems.

1. はじめに

現在、宇宙航空研究開発機構において、航空機風洞模型ひいては実機周りの流れ場を高速に解くことに主眼を置いたソルバ FaSTAR¹⁾の開発が進められている。このソルバは、複雑な形状に対しても自動で高速に格子生成が可能な HexaGrid²⁾との連携を主に想定しているため、ハイブリッド非構造格子に有限体積法を適用したものとなっている。

この FaSTAR のような非構造格子用有限体積法ソルバで空間精度を高次化する際には、密度や圧力など基本変数の空間分布を再構成し、そこから検査体積境界面の流束を評価することになる。通常は、着目している検査体積とその周囲の検査体積における代表点の値を用いて、Green-Gauss 法もしくは最小二乗近似により各検査体積の空間勾配を算出する。そして、検査体積内を線形分布で再構成する手法をとる。しかし、この手法では特に品質の悪い計算格子や空間勾配が急峻な場所において、再構成後の検査体積境界面に極値が生じ、計算不安定を引き起こしてしまう。そのため、算出した空間勾配に制限を施すことになる。

非構造格子用ソルバの勾配制限関数には多くの提案がなされている³⁻⁸⁾が、その中で広く用いられているものとして、Barth-Jespersen⁹⁾、Venkatakrishnan¹⁰⁾の制限関数が挙げられる。ところが、Barth-Jespersen limiter は収束性に問題のあることが知られている。また、Venkatakrishnan limiter は勾配制限の効きを調整するためのパラメタが存在し、その設定には経験を要する。更には本論で述べるように、Venkatakrishnan limiter には、隣り合った検査体積のサイズが大きく異なるような品質の悪い格子で、空間精度が低下するという問題がある。

そこで、品質の悪い格子においても収束性、安定性や精度を出来るだけ損なわず、またパラメタフリーで使い易い新たな勾配制限関数を提案し、FaSTAR への実装をおこなった。そして実装したソルバを Sod 問題と DLR-F6 形状流れ場解析¹¹⁾にて検証した。

2. 現状の勾配制限関数の特徴と問題点

図 1 のような非構造格子検査体積を考える。空間精度を二次に設定するには、検査体積内の物理量を線形分布に再構成することになる。このとき control volume-*i* 中に再構成される基本変数の空間分布 $u_i(\mathbf{r})$ を、

$$u_i(\mathbf{r}) = \bar{u}_i + \Phi_i \nabla u_i \cdot \mathbf{r} \quad (1)$$

と書くことができる。ここで \bar{u}_i は control volume-*i* の代表点における値であり、 ∇u_i は、 \bar{u}_i や \bar{u}_k から Green-Gauss 法もしくは最小二乗近似を用いて評価される基本変数の空間勾配を表す。また、 \mathbf{r} は代表点を原点とした位置ベクトルである。そして、式(1)中の Φ_i が勾配制限関数であり、これにより空間分布の単調性を維持し、計算の安定化を図ることになる。

Barth と Jespersen⁹⁾は、二次元の非構造三角形格子を用いたときの勾配制限関数として、次のような式を提案した。

1. 最初に自身 control volume-*i* と隣接体積 control volume-*k* の代表値から、正方向の最大差 δu^{\max} と負方向の最大差 δu^{\min} を以下の式で算出する。

$$\delta u^{\max} = \max\left(\max_k(\bar{u}_k - \bar{u}_i), 0\right)$$

$$\delta u^{\min} = \min\left(\min_k(\bar{u}_k - \bar{u}_i), 0\right)$$

2. 次に、勾配制限をかけない状態で face-*j* 上の再構成値 u_{ij} を求め、再構成値と代表値の差と、1.で算出した最大差との比 Δ_{ij} をとる。

$$u_{ij} - \bar{u}_i = \nabla u_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i,$$

$$\Delta_{ij} = \frac{\Delta_+}{\Delta_-} = \begin{cases} \frac{\delta u^{\max}}{u_{ij} - \bar{u}_i} & \text{if } u_{ij} - \bar{u}_i > 0 \\ \frac{\delta u^{\min}}{u_{ij} - \bar{u}_i} & \text{if } u_{ij} - \bar{u}_i < 0 \end{cases}$$

3. control volume-*i* を取り囲む各 face-*j* において、次の式で勾配制限関数の候補値 Φ_{ij} を評価する。

$$\Phi_{ij} = \min(1, \Delta_{ij}) \quad (2)$$

4. 最後に、候補値 Φ_{ij} 中の最小値を採用する。

$$\Phi_i = \min_j(\Phi_{ij})$$

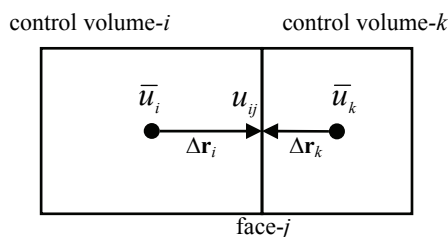


図 1 検査体積と各部記号

これに対して Venkatakrishnan¹⁰⁾は、Barth-Jespersen limiter が一様流中のようなほぼ平坦な空間分布に対しても無駄にかかることによる収束性の悪化を指摘し、勾配制限が必要にならない場所で、空間勾配に対し鈍感になるように改良をおこなった。結果としての関数形は、Barth-Jespersen limiter の手順3を、次の手順に置き換えたものとなる。

3'. 勾配制限関数の候補値 Φ_{ij} を以下の式で評価する。

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\Delta_-} \left\{ \frac{(\Delta_+ + \varepsilon^2)\Delta_- + 2\Delta_-^2\Delta_+}{\Delta_+ + 2\Delta_-^2 + \Delta_-^2\Delta_+ + \varepsilon^2} \right\} \quad (3)$$

ここで $\varepsilon^2 = (\kappa \Delta x)^3$ であり、一様流中のように大きな計算格子を配置した場所で、 Δ_{ij} の値にかかわらず $\Phi_{ij} \approx 1$ となる。また、Barth-Jespersen limiter の収束性の悪さは関数形の微分不連続が原因とする報告¹²⁾もあり、この点から見ても Venkatakrishnan limiter は修正されていると考えることもできる。しかし、勾配制限の効きを左右するパラメータ κ の決定には経験則が必要であり、この値によって収束性や強い衝撃波前後の分布などが変わってしまうという問題を持っている。

さて、この Barth-Jespersen limiter (Venkatakrishnan limiter においても) は、

着目している検査体積の境界面における基本変数の再構成値が、隣接する検査体積の代表値を超えてしまったら、制限をかける

という考え方を基本にしたものである。これを“勾配制限”という観点で読み替えてみると、

Green-Gauss 法や最小二乗近似で評価した基本変数空間勾配が、検査体積境界面にそこへ隣接する検査体積代表値が存在すると仮定して、それと自身の代表点上に存在する代表値を直線で結んで出来上がる勾配を超えたら、制限をかける

となる。これに対して、あくまでも代表点位置を基準に勾配評価の良し悪しを判断する立場を取ると、勾配制限のかけ方として

評価された基本変数空間勾配が、自身と隣接の検査体積代表点同士を結んで出来上がる勾配を超えたら、制限をかける

という考え方を採用することができる。この考え方を定式化すると、Barth-Jespersen limiter の手順2と3を次のように書き換える形になる。

2'. 勾配制限をかけない状態で、隣接検査体積 control volume- k の代表点まで外挿した再構成値 u_{ik} を求め、再構成値と代表値の差と、1.で算出した最大差との比 Δ'_{ij} をとる。

$$u_{ik} - \bar{u}_i = \nabla u_i \cdot (\Delta \mathbf{r}_i - \Delta \mathbf{r}_k) \\ \approx (\nabla u_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i) \times r_{ik}$$

ここで、

$$r_{ik} = \frac{|\Delta \mathbf{r}_i| + |\Delta \mathbf{r}_k|}{|\Delta \mathbf{r}_i|} \quad (4)$$

と定義する。

$$\Delta'_{ij} = \frac{\Delta_+}{\Delta_-} = \begin{cases} \frac{\delta u^{\max}}{u_{ik} - \bar{u}_i} & \text{if } u_{ik} - \bar{u}_i > 0 \\ \frac{\delta u^{\min}}{u_{ik} - \bar{u}_i} & \text{if } u_{ik} - \bar{u}_i < 0 \end{cases}$$

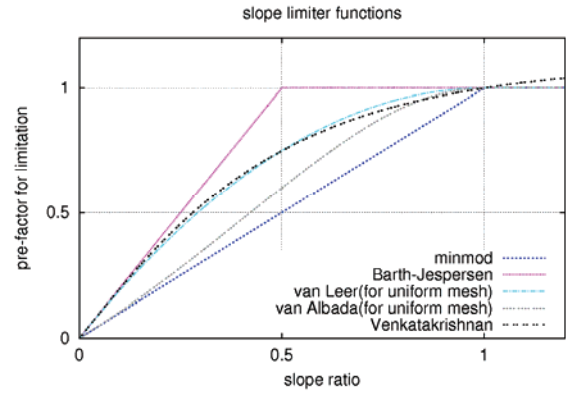


図2 等間隔格子 ($r_{ik} = 2$) における関数形

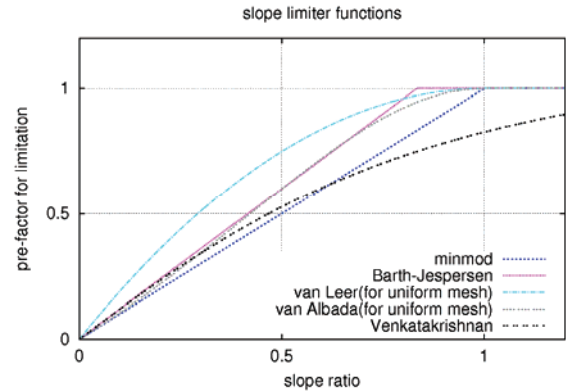


図3 不等間隔格子 ($r_{ik} = 1.2$) における関数形

3". control volume- i を取り囲む各 face- j において、次の式で勾配制限関数の候補値 Φ_{ij} を評価する。

$$\Phi_{ij} = \min(1, \Delta'_{ij}) \quad (5)$$

上式における Δ'_{ij} を slope ratio と呼ぶこととする。定義から、次の関係が成立する。

$$\Delta'_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{r_{ik}} \quad (6)$$

こうして定義した勾配制限関数は、実は構造格子、非構造格子を問わず、よく用いられている minmod limiter に対応する。

ここで、各勾配制限関数の特徴を明らかにするため、Berger 等¹³⁾の手法を参考に横軸に slope ratio Δ'_{ij} 、縦軸に候補値 Φ_{ij} をプロットしたものを図2に示す。図には、

$|\Delta \mathbf{r}_i| = |\Delta \mathbf{r}_k|$ つまり隣接する検査体積のサイズが同程度である場合の勾配制限関数形が示されている。また、比較として van Leer limiter および van Albada limiter の関数形を記載した。

図中 minmod と表記されている分布が式(5)である。同様に式(2)と(6)を用いて Barth-Jespersen limiter を描くと、いわゆる MC limiter に似た特徴を持っていることがわかる。また、式(3)の Venkatakrishnan limiter (ただし、 $\varepsilon^2 = 0$) は、サイズの揃った格子においては van Leer limiter に近い形状となる。

では、隣接する検査体積のサイズが異なる場合は関数形がどう変化するのであろうか。一例として、図3に

$|\Delta r_i| : |\Delta r_k| = 5 : 1$ の場合の関数形を示す。このように隣接する検査体積のサイズが異なると、プロット上では Barth-Jespersen limiter、Venkatakrishnan limiter 共に変形する。そして、このサイズ比では slope ratio が 0.6 を超えたあたりから、Venkatakrishnan limiter は minmod limiter よりも強い勾配制限がかかってしまうことがわかる。このような不等間隔格子への適用における問題に対しては、不等間隔の効果を式(3)に取り込む試み¹⁴⁾がなされているが、この精度低下を念頭に置いているかは不明である。

3. 勾配制限関数の提案

現状の非構造格子用ソルバで利用されている Barth-Jespersen limiter、Venkatakrishnan limiter 共に、前述のような問題を抱えていることがわかった。一方、式(5)の勾配制限関数はいわゆる minmod limiter に相当するため、実際の解析に使用するには数値拡散が強すぎる欠点がある。

そこで、品質の悪い格子においても収束性、安定性や精度を出来るだけ損なわず、また CFD 初心者にも使い易い新たな勾配制限関数を、以下の通り提案する。基本的な考え方は、

- ・ 代表点基準の立場をとり、slope ratio Δ'_{ij} の関数として定義する。
- ・ 非常に不揃いなサイズの格子に対しても、いわゆる二次精度MP拘束条件^{4,15)}を満足する。
- ・ slope ratio > 0 の範囲で滑らかな関数形にする。
- ・ 既存のソルバへ組み込みやすいように、算出手順は Barth-Jespersen limiter と同じにする。
- ・ パラメタフリーとする。

とした。そして、手順 3ⁱⁱ⁾ の式(5)を次のように変更することで、2 種類の関数形として定式化した。

3ⁱⁱⁱ⁾ control volume- i を取り囲む各 face- j において、次の式で勾配制限関数の候補値 Φ_{ij} を評価する。

van Leer-like function

$$\Phi_{ij} = \begin{cases} 0 & \Delta'_{ij} < 0 \\ r_{ik} \Delta'_{ij} \left(1 + \frac{1-r_{ik}}{2} \Delta'_{ij} \right) & 0 \leq \Delta'_{ij} < 1/r_{ik} \\ 1 + \frac{r_{ik}}{2(1-r_{ik})} (1-\Delta'_{ij})^2 & 1/r_{ik} \leq \Delta'_{ij} < 1 \\ 1 & \Delta'_{ij} \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

van Albada-like function

$$\Phi_{ij} = \begin{cases} 0 & \Delta'_{ij} < 0 \\ \Delta'_{ij} \left(1 + \frac{r_{ik}-1}{2} \Delta'_{ij} \right) & 0 \leq \Delta'_{ij} < 1/r_{ik} \\ 1 + \frac{2r_{ik}-1}{2(1-r_{ik})} (1-\Delta'_{ij})^2 & 1/r_{ik} \leq \Delta'_{ij} < 1 \\ 1 & \Delta'_{ij} \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

関数形が区分的になっているのは、 $\Delta'_{ij} = 0$ の位置において minmod limiter に接する (van Albada-like function) もしくは Barth-Jespersen limiter に接する (van Leer-like function)、また $\Delta'_{ij} = 1$ の位置において $\Phi_{ij} = 1$ の線に接するように、二次スプライン曲線で関数形を定義したためである。等間隔格子および不等間隔格子を用いた場合の提案した勾配制限関数形を、他勾配制限関数との比較を含め

て図 4-6 に示す。式(7)、(8)の関数名の由来が、図 4 に現れている。また、隣接検査体積のサイズが様々に異なり Barth-Jespersen limiter と minmod limiter に挟まれた領域、つまり二次精度 MP 拘束条件に対応する領域が変形しても、そこへ適応していることがわかる。

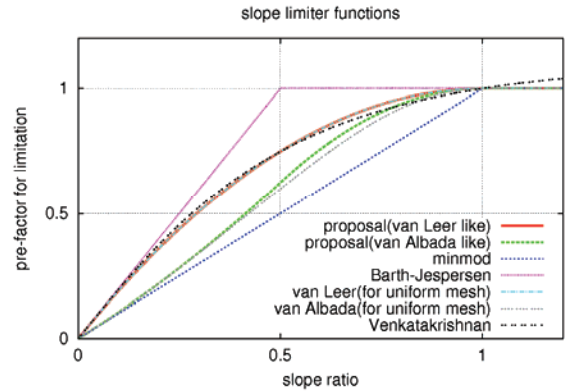


図 4 等間隔格子 ($r_{ik} = 2$) における関数形

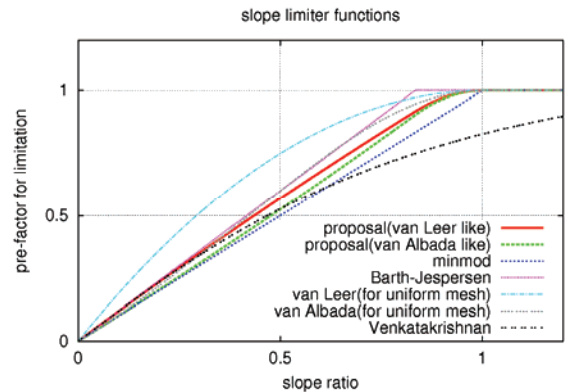


図 5 不等間隔格子 ($r_{ik} = 1.2$) における関数形

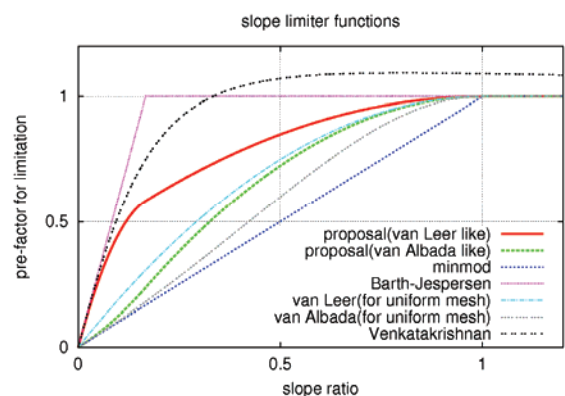


図 6 不等間隔格子 ($r_{ik} = 6$) における関数形

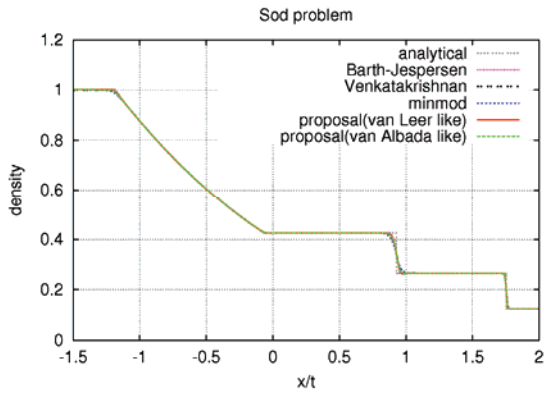


図7 Sod問題密度分布 (等間隔格子)

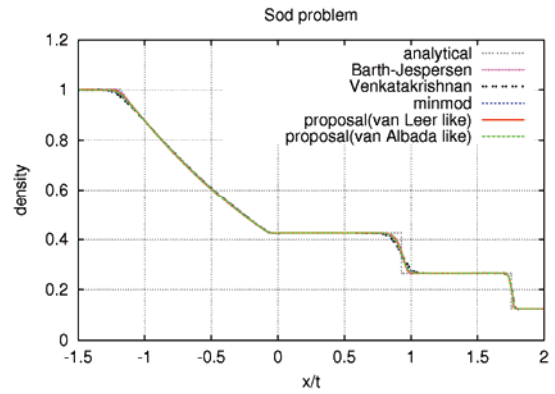


図11 Sod問題密度分布 (不等間隔格子)

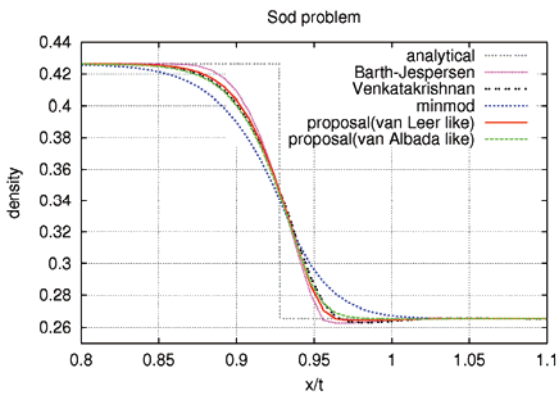


図8 Sod問題密度分布 接触不連続面付近拡大 (等間隔格子)

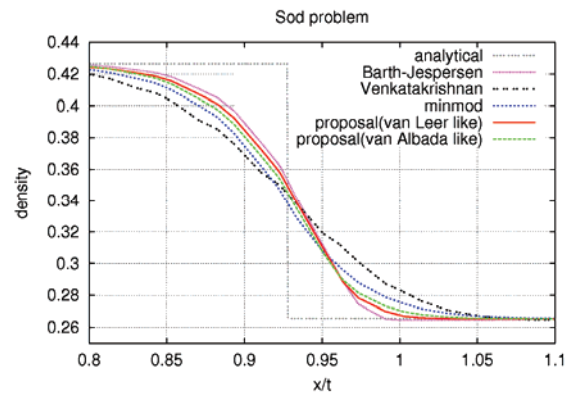


図12 Sod問題密度分布 接触不連続面付近拡大 (不等間隔格子)

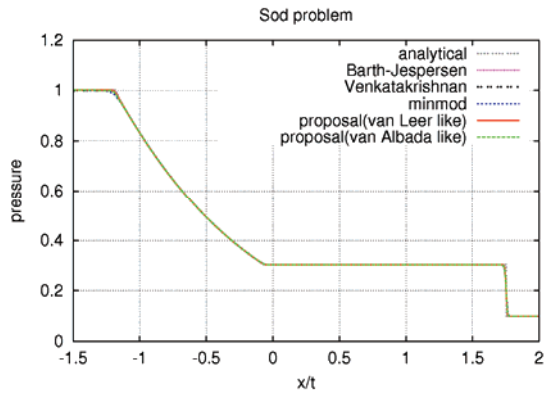


図9 Sod問題圧力分布 (等間隔格子)

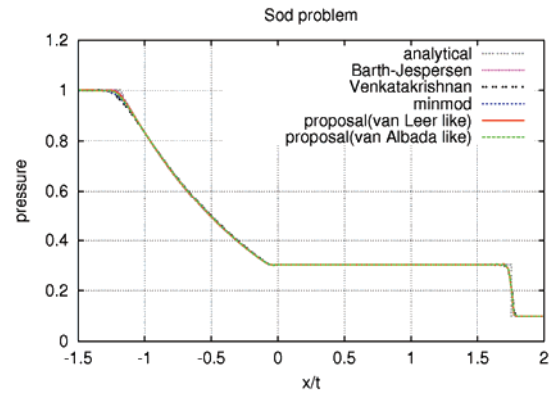


図13 Sod問題圧力分布 (不等間隔格子)

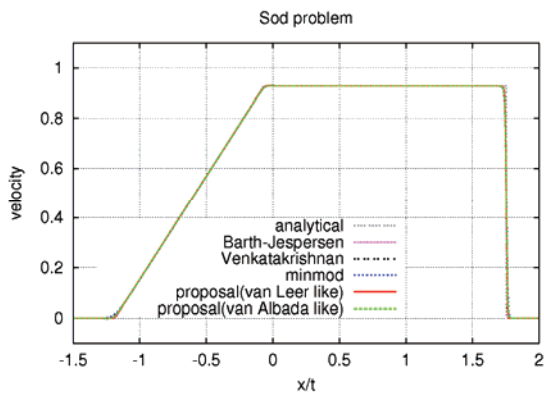


図10 Sod問題速度分布 (等間隔格子)

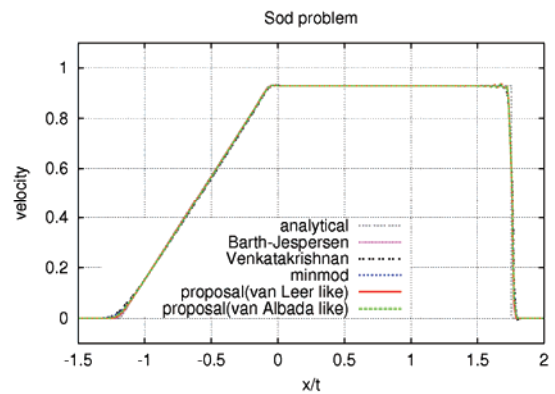


図14 Sod問題速度分布 (不等間隔格子)

4. 勾配制限関数のソルバへの適用と検証

こうして提案した勾配制限関数の有効性を確かめるために、FaSTAR への実装をおこない、Sod 問題と DLR-F6 形状周りの流れ場解析により検証した。

Sod 問題

ソルバの検証問題としてよく取り上げられる Sod 問題を、新勾配制限関数を実装した FaSTAR により計算した。解析手法設定としては、Euler 計算で空間離散化に Roe の FDS を、再構成手法には最小二乗近似を用いた。なお、この問題では、Venkatakrishnan limiter のパラメタ K を 5 と設定している。FaSTAR ではセル中心法を採用しており、前述の検査体積はセルそのものに、代表点はセル中心点に対応する。ここでは、計算格子の不揃いが結果に及ぼす影響に着目して計算をおこなった。

まず基準長さ 1 中に 500 セルを配置した等間隔格子を用いた場合の結果を、図 7~10 に示す。図には、各勾配制限関数を使用した場合の結果と解析解を比較のために重ね描きしてある。等間隔格子では、勾配制限の大小が数値拡散の大小として結果に直接現れていることがわかる。

次に基準長さ 1 中に、順に h , $2h$, $10h$, $11h$ 幅の 4 つの格子を 1 組として 100 組、計 400 セルを配置した不等間隔格子を用いた場合の結果を、図 11~14 に示す。基本的には、プロファイルは解析解によく一致しているが、平均的な格子間隔が相対的に大きくなっているため、等間隔格子の結果と比べて数値拡散が大きい。

注目すべきは、図 12 に示された接触不連続面付近の密度分布である。同様の特徴は、衝撃波付近の密度分布や圧力分布においても見られるが、Venkatakrishnan limiter の数値拡散が非常に大きく、minmod limiter の結果よりも解が鈍ってしまっている。この計算では極端に不揃いな格子が用いられており、実際の解析では顕在化しにくいと思われるものの、図 3 において指摘された問題点がはっきりと現れている。

セル節点法を採用した非構造格子用ソルバでは、検査体積の定義方法から $|\Delta \mathbf{r}_i| = |\Delta \mathbf{r}_k|$ となるように境界面を取ることが多いため、実用上は問題が生じないと考えられる。しかし、セル中心法の非構造格子用ソルバにおいては、この結果から Venkatakrishnan limiter の使用には注意を要すると言える。

DLR-F6 形状周りの流れ場解析

実際に FaSTAR が運用される状況での勾配制限関数の解析への影響を見るため、DLR-F6 FX2B 形状¹¹⁾に対して、その周りの流れ場解析をおこなった。

解析手法設定は、RANS 計算、乱流モデルとして生成項を一部修正した Spalart-Allmaras モデル¹⁶⁾を用いた。そして、空間離散化には HLEW scheme^{17,18)}を、再構成手法は weighted Green-Gauss 法を使用した。流れ場の条件としては、 $M=0.75$ 、 $Re=1.5 \times 10^6$ 、迎角 0 度を選んだ。

得られた機体表面圧力係数 C_p 分布を図 15 に、収束過程を示す密度 L2 残差の推移を図 16 に示す。また、表 1 に 10000 iteration 時の代表的な空力係数を示す。今回の計算では、Venkatakrishnan limiter のパラメタ K を 10 に設定したところ、Barth-Jespersen limiter より収束性が悪化してしまった。一方、提案した 2 種類の勾配制限関数のうち、ここでは数値拡散の少ない van Leer-like function を選定したが、収束性は既存の勾配制限関数に比べて良いものとなっている。結果として得られる空力係数については、勾配制限への依存性が幾らか見られる。

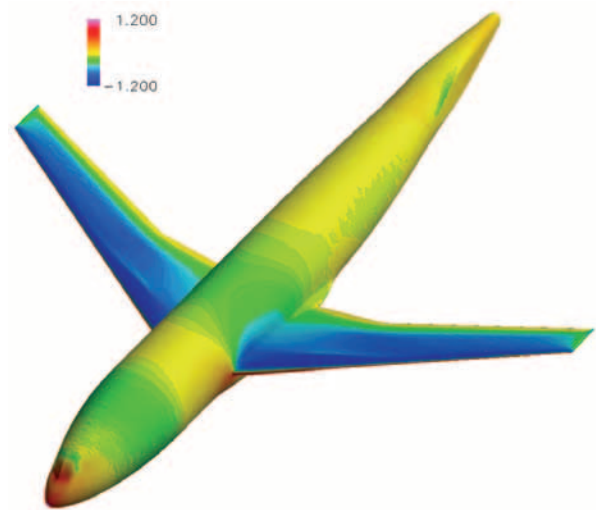


図 15 DLR-F6 FX2B 機体表面 C_p 分布

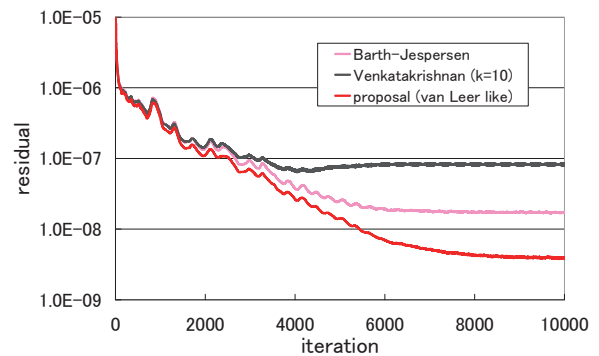


図 16 密度 L2 残差の推移

表 1 空力係数の勾配制限関数依存性

	Barth-Jespersen	Venkatakrishnan ($K=10$)	proposal (van Leer like)
C_L	0.4808	0.4833	0.4849
C_D	0.0302	0.0309	0.0312
C_M	-0.1399	-0.1404	-0.1413

5. 結論

非構造格子用ソルバに用いられる代表的な勾配制限関数 Barth-Jespersen limiter と Venkatakrishnan limiter についてそれぞれが持つ問題点を調べ、それらを改善した新しい勾配制限関数を提案した。そして、高速ソルバ FaSTAR へ実装し検証問題を解くことで、その有効性を確認することができた。

参考文献

- 1) 橋本敦, 村上桂一, 青山剛史, 菱田学, 大野真司, 坂下雅秀, ラフルバウルス, 佐藤幸男, “高速流体ソルバ FaSTAR の開発,” 第 42 回流体力学/ANSS 2010 講演集 (2010)
- 2) 岩宮敏幸, P.R. Lahur, “直交格子に基づく流体および構造解析用の自動格子生成法,” 日本機械学会誌, Vol.111, No.1074, p.445 (2008)
- 3) K. Michalak and C. Ollivier-Gooch, “Limiters for Unstructured Higher-Order Accurate Solutions of the Euler Equations,” AIAA Forty-Sixth Aerospace Sciences Meeting (2008)
- 4) M.E. Hubbard, “Multidimensional slope limiters for MUSCL-type finite volume schemes on unstructured grids,” J. Comput. Phys., 155, pp.54- 74 (1999)

- 5) J.C. Mandal and J. Subramanian, "On the link between weighted least-squares and limiters used in higher-order reconstructions for finite volume computations of hyperbolic equations," *Applied Numerical Mathematics*, Vol.58, 5, pp.705-725 (2008)
- 6) S. Kim, B. Makarov, and D. Caraeni, "A Multi-Dimensional Linear Reconstruction Scheme for Arbitrary Unstructured Grids," AIAA 2003-3990 (2003)
- 7) M. Yang and Z.J. Wang, "A Parameter-Free Generalized Moment Limiter for High-Order Methods on Unstructured Grids," AIAA 2009-605 (2009)
- 8) J. Park, S. Yoon and C. Kim, "Multi-dimensional Limiting Process on Triangular and Tetrahedral Meshes," AIAA 2009-3986 (2009)
- 9) T.J. Barth and D.C. Jespersen, "The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes," AIAA-89-0366 (1989)
- 10) V. Venkatakrishnan, "Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters," *J. Comput. Phys.*, 118, pp. 120-130 (1995)
- 11) A.J. Scalfani, J.C. Vassberg, N.A. Harrison, M.A. DeHaan, C.L. Rumsey, S.M. Rivers and J.H. Morrison, "Drag Predictions for the DLR-F6 Wing/Body and DPW Wing Using CFL3D and OVERFLOW on an Overset Mesh," AIAA 2007- 257 (2007)
- 12) K. Michalak and C. Ollivier-Gooch, "Differentiability of Slope Limiters on Unstructured Grids," *Proc. of the 14th Annual Conf. of the CFD Soc. of Canada* (2006)
- 13) M. Berger, M.J. Aftosmis and S.M. Murman, "Analysis of Slope Limiters on Irregular Grids," *NAS Technical Report NAS-05-007* (2005)
- 14) A.W. Cary, A.J. Dorgan and M. Mani, "Towards accurate flow predictions using unstructured meshes," AIAA 2009-3650 (2009)
- 15) T. Buffard and S. Clain, "Monoslope and Multislope MUSCL Methods for unstructured meshes," http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/32/36/91/PDF/buffard_clain.pdf
- 16) K. Yamamoto, K. Tanaka and M. Murayama, "Computational Results using UPACS & TAS," 4th AIAA CFD Drag Prediction Workshop (2009)
- 17) S. Obayashi and Y. Wada, "Practical Formulation of a Positively Conservative Scheme," *AIAA J.*, Vol.32, No.5, pp.1093-1095 (1994)
- 18) S. Obayashi and G.P. Guruswamy, "Convergence Acceleration of a Navier-Stokes Solver for Efficient Static Aeroelastic Computations," *AIAA J.*, Vol.33, No.6, pp.1134-1141 (1995)