

OK, LES. 乱流噴流の答えを教えて

松山 新吾 (宇宙航空研究開発機構)

OK, LES. Tell Me the Answer for Turbulent Planar Jet

MATSUYAMA Shingo (JAXA)

ABSTRACT

“OK, Google. Tell me what the weather will be like in Tokyo tomorrow.” The Google Assistant tells me, “Clear skies in Tokyo tomorrow.” How nice it would be if the LES could give us the answer (as the results of simulation) for turbulent flowfield with the ease of Google Assistant telling us the weather. Unfortunately, the current LES seems to be difficult for non-professionals to use. In this paper, we will show how the LES can provide a good result for turbulent flowfield with some practical examples of simple turbulent planar jet.

1. はじめに

「OK, Google. (Hey, Siri. もしくは Alexa. に置き換えてもらっても良い) 明日の東京の天気を教えて」と質問をすれば, 「明日の東京の天気は快晴です」と Google アシスタント (Siri, Alexa) は天気を教えてくれる. そのような気楽さで LES が乱流場の答え (解析結果) を教えてくれるならばどんなに素晴らしいことだろうか. Google アシスタントが正確に天気を教えてくれるのと比べると, LES が与えてくれる解析結果は正しい結果なのか不明な場合も多く, 残念ながら現状の LES は玄人でなければ使いこなすことが難しいツールのように思える. そのため, LES 解析をやってみたものの解析結果が実験データと合わなかったりした場合, モデルパラメータを調整する必要がある, とか, より高度な SGS モデルを導入する必要がある, などと根拠もなく締めくくってしまうことが往々にしてあるのではないだろうか. 本稿では, どのようにすれば LES によって乱流場の良い解析結果が得られるか, シンプルな平面乱流噴流を対象として実際の事例を交えながら紹介したい.

2. 解析対象

LES が良い結果を与えているかどうかを判断するためには正しい答えがわからないといけない. ここでは, $Re = 10^4$ の平面乱流噴流に対する DNS の結果を正解として, LES がその結果を再現できるかを試みる. 図 1 に平面乱流噴流の問題設定を示す. 噴流幅を D とし主流方向 (x), 垂直方向 (y), および, スパン方向 (z) に $20D \times 14D \times 4.3D$ の領域 (main zone) を設け, 等間隔メッシュで離散化する. 座標系はノズル出口を $x=0$, ノズル出口中心を $y=z=0$ とする. また, 外部境界での反射による影響が小さくなるように main zone の外側には buffer zone を設けて格子幅を徐々に粗くした. DNS 解析の main zone における格子解像度はコルモゴロフスケールに対して 3 倍程度となる $D/60$ とした. LES 解析の格子解像度はそれより

も 6 倍粗い $D/10$ を基本とした. ただし, ノズル出口近傍では y 方向の格子解像度を $D/15$ とし, 噴流出口の速度プロファイルが滑らかに解像されるようにした (図 2). $x > 5D$ の領域では等間隔メッシュである. 総格子点数は DNS で約 3.1 億点, LES では約 154 万点である. 本稿で示す結果は DNS・LES とともに特に

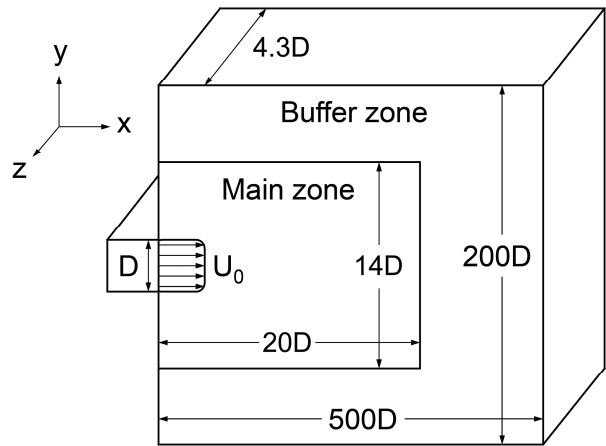


図 1 平面乱流噴流の問題設定

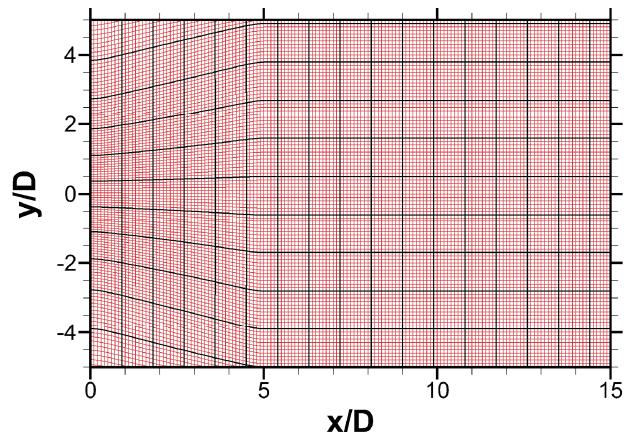


図 2 LES 解析に用いた計算格子 (約 154 万点)

表記が無い限りは上記の解像度の格子を用いた解析結果であり、解像度の異なる格子を用いた場合はその解像度を明記する。その他、噴射条件や境界条件などの細かい設定は参考文献¹⁾を参照していただきたい。

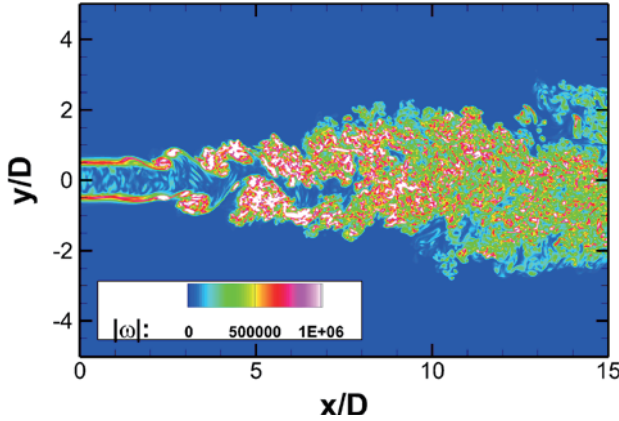


図 3 DNS による解析結果の例. x - y 断面 ($z=0$) における瞬時の渦度分布。

3. 数値解析手法

3.1. DNS 解析

流れ場の支配方程式は三次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式であり、密度・運動量・エネルギー、および、スカラーの保存式を解く。支配方程式は有限体積的手法により離散化し、対流流束を SLAU スキーム²⁾により計算する。空間精度の高次精度化にあたりセル界面での原始変数 (ρ, u, v, w, p, ξ) を以下の 9 次多項式³⁾により再構築⁴⁾する。

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}}^L = & \frac{1}{630}u_{i-5} - \frac{41}{2520}u_{i-4} + \frac{199}{2520}u_{i-3} \\ & - \frac{641}{2520}u_{i-2} + \frac{1879}{2520}u_{i-1} + \frac{275}{504}u_i \\ & - \frac{61}{504}u_{i+1} + \frac{11}{504}u_{i+2} - \frac{1}{504}u_{i+3} \end{aligned} \quad (1)$$

また、低マッハ数領域における数値粘性を低減するため、補間した速度成分に対して Thornber らによって提案された修正⁵⁾を加える。

粘性流束は 8 次精度の中心差分法により求める。時間積分には 2 段階 2 次の Runge-Kutta 法を用いる。3 段 3 次の Runge-Kutta 法による解析は 2 段 2 次と同じ結果を与えるため、時間積分法は 2 次精度で十分であると考えられる。

粘性係数はサザラランドの式により評価し、熱伝導係数・拡散係数はプラントル数・シュミット数を 0.72, 1.0 として評価した。

計算領域を 1500 ブロックに分割することにより並列化し、宇宙航空研究開発機構 (JAXA) に設置されている JAXA スーパーコンピュータシステム (JSS2) 上で 188 CPU (6016 コア) を用いて解析を実施した。

3.2. LES 解析

LES 解析に使用される流れ場の支配方程式は空間フィルター操作を施した三次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式であり、密度・運動量・エネルギー、および、スカラーの保存式を解く。空間精度の高次精度化にはいくつかの異なる手法⁴⁾を使用するため、解析結果とともに後述する。SGS モデルには渦粘性型の標準的なモデルとしてスマゴリンスキーモデルを使用するか、SGS モデルを使用しない陰的 LES (ILES) により解析を実施する。その他の手法については DNS 解析と同じ手法を用いる。

4. 解析結果

DNS 解析による解析結果の例として x - y 断面 ($z=0$) における瞬時の渦度分布を図 3 に示す。LES と DNS の比較には、噴流中心 ($y=0$) に沿った平均速度分布、および、rms 変動分布 (いずれもスパン方向について平均をとる) を利用する。平面乱流噴流では噴流中心に沿った速度分布が以下の線形関係式によって表現されることが知られている^{6,7)}。

$$\left\{ \frac{U_0}{U_{cl}(x)} \right\}^2 = C_u \left(\frac{x}{D} - C_{u0} \right) \quad (2)$$

ここで、 U は x 方向速度、 D は噴射ノズル幅である。下付き文字 0, cl は、それぞれ、噴射条件と中心線 ($y=0$) での値を示す。また、 C_{u0} は仮想的な原点を示す。平均速度分布の比較では傾きの大きさ (C_u) と立ち上がりの位置 (C_{u0}) がどのくらい正確に再現できるかが指標となる。また、rms 変動分布の比較では変動の立ち上がり位置、および、そのピーク値が指標となる。

最初に、最もスタンダードなアプローチとして以下のスマゴリンスキーモデル (SMG) による LES 解析の結果を DNS 解析と比較する。

$$\tau_{ij}^{sgs} = -2\nu_t \tilde{\delta}_{ij} + \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk}^{sgs} \quad (3)$$

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 (2\tilde{\delta}_{ij} \tilde{\delta}_{ij})^{1/2} \quad (4)$$

$$\tau_{kk}^{sgs} = 2C_l \Delta^2 (2\tilde{\delta}_{ij} \tilde{\delta}_{ij}) \quad (5)$$

モデルパラメータの値は $C_s = 0.2$, $C_l = 0.0066^8)$ とし、三次精度 MUSCL 法 (M3) により空間高次精度化を行った LES 解析の結果を図 4 に示す。この解析では Thornber らの修正法は使用しない。まず、時間平均速度分布をみると、DNS 解析の結果よりも立ち上がり位置が下流にずれ、線形分布の傾きもかなり大きくなっている。平均速度分布を式 (2) でフィットすると C_u の値は DNS で 0.1502, LES は 0.2173 であった。また、rms 変動分布についても LES の結果は立ち上がりが遅く、そのピーク値は過大評価になっている。三次精度の空間高次精度化と $C_s = 0.2$ というパラメータは実用計算では良く使われるような設定であるが、この結果を見る限り DNS の結果を全く再現出来ていない。

LES の結果が DNS と合わない、さてどうしたものかと、次の手としてやりがちなのはモデルパラメータの値を変化させることではないだろうか. 図 5 にモデルパラメータ C_s の値を変化させて (C_l はそのまま) 解析を行った結果を示す. まず, 平均速度分布について, $C_s = 0.1$ とすると立ち上がりの位置が DNS 解析の結果にかなり近づくものの, 傾きの大きさは改善されない. さらに C_s の値を小さくすると立ち上がり位置はほぼ DNS に一致するがやはり傾きは変わらない. $C_s = 0$ という設定は SGS 項をゼロにする, つまり, SGS モデルを使用しないという計算であり, これはいわゆる陰的 LES (ILES) になる. $C_s = 0$ とした場合に $C_u = 0.2085$ となったが, 依然として DNS との差は大きい. また, rms 分布についても同じように C_s の値を小さくすることで立ち上がり位置は DNS にかなり近づくがピーク値は過大評価のままである.

モデルパラメータを変化させても結果が合わない, さていよいよ困ったな, となると次に打つ手は何があ

るだろうか. ダイナミックスマゴリンスキーモデルを使用するという考えもあるかもしれないが, $C_s = 0$ でも良い結果が得られないとなるとあまり期待は持てないように思われる. 逆カスケードが云々という意見もあるとは思いますが, 平面乱流噴流はともかくとして実用計算で LES 解析を行う場合, C_s が負の値をとると SGS 項が生成項として働くため計算を不安定にする効果が大きく, あまり上手くいかないのではないかと想像する.

いよいよ打つ手がない, もう仕方がないとほぼ最終手段に近い手としてとる方法は格子解像度を上げることではないだろうか. 図 6 に三次精度 MUSCL 法による ILES で格子解像度を変化させて解析を行った結果を示す. これまでの結果を見る限り, SGS モデルが結果を良くする方向に機能しているようにはみえないため, 以降の解析は ILES により実施する. 基準の格子解像度 ($D/10$) から解像度を上げていくと, 平均速度分布の傾きが小さくなり, rms 変動分布はピーク値

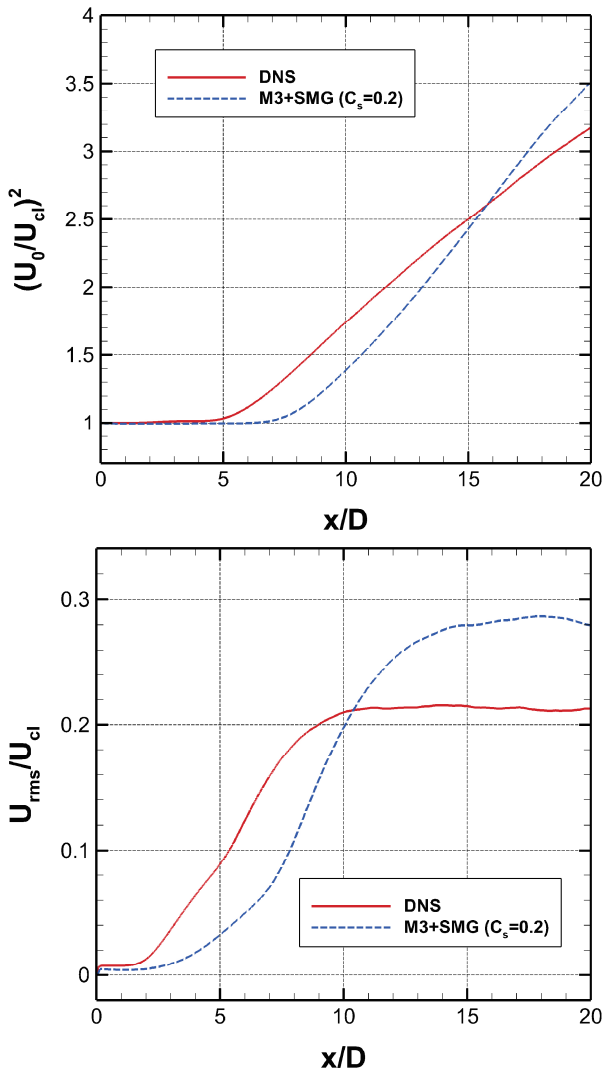


図 4 三次精度 MUSCL 法とスマゴリンスキーモデル ($C_s = 0.2$) による LES の解析結果. 噴流中心に沿った平均速度分布 (上図), および, 速度変動 rms 分布 (下図).

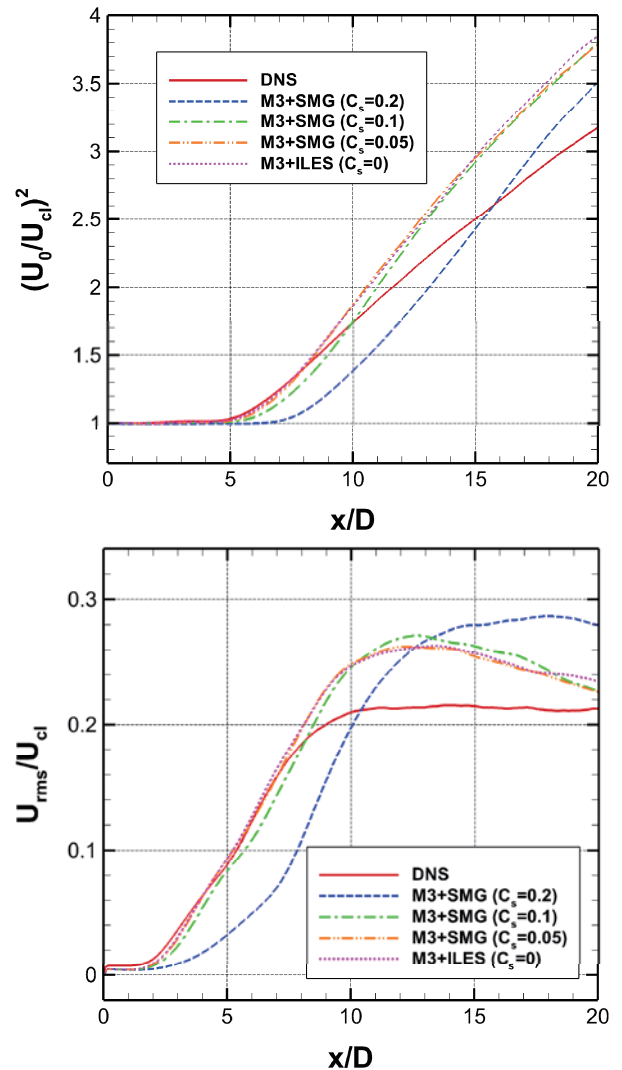


図 5 スマゴリンスキーモデルのモデルパラメータ C_s を変化させた場合の解析結果

が下がり、いずれも DNS 解析の結果に近づいていく。格子解像度を $D/30$ まで上げて解析を行った結果は DNS 解析にかなり近い結果 ($C_u=0.1514$) にはなるものの、分布の傾向に若干の差異があることに加え、 $D/30$ という解像度はほぼ DNS に近いレベルになってしまうため、あまり賢い手とは言えないのではないだろうか。

格子解像度を高くすることで結果が改善される傾向がみられたが、空間解像度の改善は高次精度補間の精度を上げることで実現可能である。実用計算の場合、計算の安定性を重視するあまりどうしても低次の空間補間スキームが使用されがちであるが、著者の経験では衝撃波などの不連続面が無い限り高次精度補間による計算でも安定して解が得られることが多い。というわけで、次の手として高次精度補間による空間解像度の改善を試してみよう。図 7 に、五次 (P5)、七次 (P7)、九次 (P9) の多項式³⁾を用いた補間⁴⁾による ILES の解析結果を示す。この解析では Thornber らの修正法を使用した。格子解像度は $D/10$ のままである。解析結果の比較からいずれの補間スキームによる結果も DNS とかなり良く一致する。平均速度分布の結果をみ

ると、P5 による解析で少しだけ傾きが大きいのが DNS との一致は悪くなく、 C_u の値は 0.1582 (P5)、0.1525 (P7)、0.1478 (P9) となった。rms 変動分布についても立ち上がりの傾向、ピーク値ともに DNS の結果を非常に良く再現出来ている。

5. LES 解析の結果に対する考察

4 章で実施した一連の LES 解析では、典型的な SGS モデルを使用して粗い格子で解析を行った場合にはダメな結果しか得られず、空間高次精度化を施して SGS モデルを使用しない ILES を実施することで DNS の結果と非常に良く一致する解が得られた。ここでは、なぜそのような結果となったのかについて考察をしてみよう。

5.1. 高次精度 ILES はなぜ DNS と一致するのか

4 章での解析結果から、空間解像度が高ければ (格子解像度を上げるか、空間高次精度スキームの精度を上げる) LES 解析の結果は良くなることは明白である。これはどういう理由によるのかを少し考察してみたい。

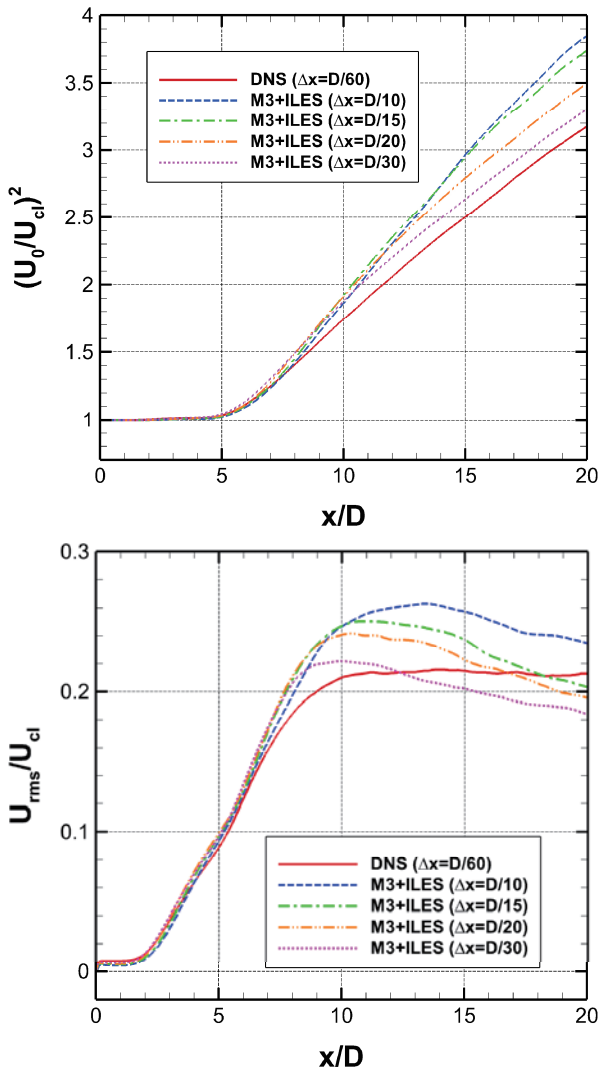


図 6 三次精度 MUSCL 法による ILES で格子解像度を変化させた場合の解析結果

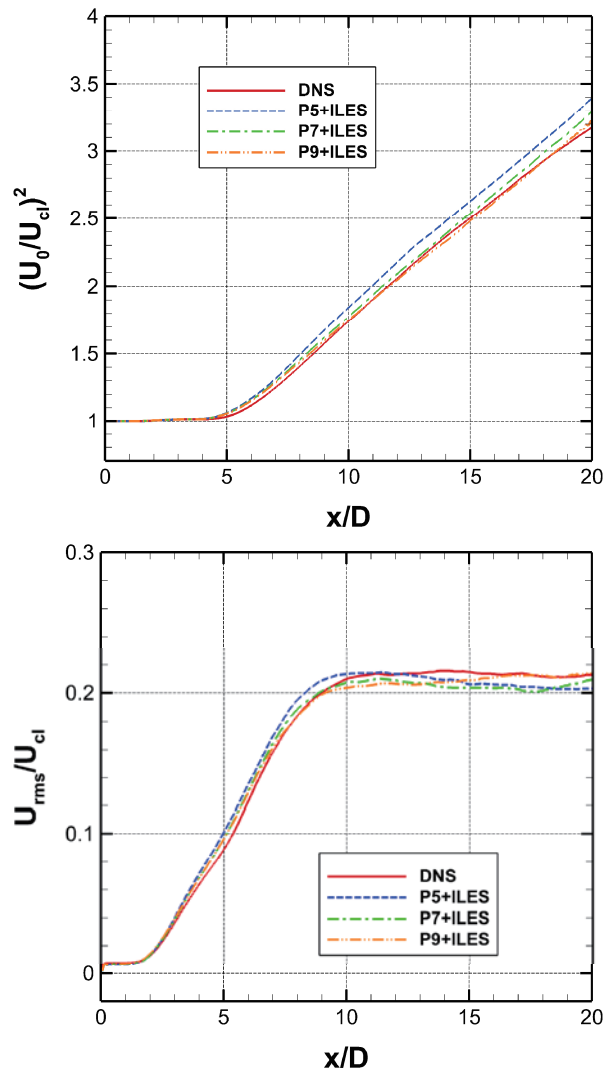


図 7 空間高次精度補間による ILES の解析結果

まず、LES では速度場 \mathbf{u} は空間フィルタリングされた速度成分 $\tilde{\mathbf{u}}$ とサブグリッド変動成分 \mathbf{u}' とに分離される。

$$\mathbf{u}_{\text{LES}} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' = \mathbf{u} \quad (6)$$

本来、LES による速度場の時間平均は

$$\langle \mathbf{u}_{\text{LES}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') dt = \langle \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \rangle \quad (7)$$

とするべきであるが、通常はサブグリッド変動成分 \mathbf{u}' が無視されて

$$\langle \mathbf{u}_{\text{LES}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\mathbf{u}} dt = \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle \quad (8)$$

として処理されるのがほとんどのはずである。一方、DNS による速度場は全ての乱流成分が含まれた

$$\mathbf{u}_{\text{DNS}} = \mathbf{u} \quad (9)$$

であるから、その時間平均は

$$\langle \mathbf{u}_{\text{DNS}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u} dt = \langle \mathbf{u} \rangle \quad (10)$$

となる。LES の空間解像度が十分な場合は \mathbf{u}' の寄与が無視できるほど小さく、実質的に $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle \approx \langle \mathbf{u} \rangle$ となるため DNS と良く一致する。空間高次精度補間による ILES が良い答えを与える理由はこのためであろう。また、三次精度 MUSCL 法による ILES で格子解像度を上げることで結果が改善されたのは $\tilde{\mathbf{u}}$ の寄与分が増加するためであろう。

では、空間解像度が不十分な場合はどうしたらよいだろうか。単純なアイデアとしては、サブグリッド変動 \mathbf{u}' の効果を統計処理に陽的に取り入れて $\langle \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \rangle$ を評価して DNS と比較することだろう。著者の知る限り、通常の渦粘性モデルで \mathbf{u}' を評価することは容易ではないが、サブグリッド運動エネルギー ($k_{\text{sgs}} = \overline{\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_i} / 2$) や SGS 応力 ($\tau_{ij}^{\text{sgs}} = \overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j} - \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_j$) の輸送方程式⁹⁾を解くモデルなど、サブグリッド変動成分を陽的に定義できる手法がカギではないかと著者は考えている。

また、LES の比較対象が DNS である場合には、DNS の速度場に空間フィルタリングを施して

$$\overline{\mathbf{u}_{\text{DNS}}} = \tilde{\mathbf{u}} \quad (11)$$

を求め、式 (8) による $\langle \mathbf{u}_{\text{LES}} \rangle$ と $\langle \overline{\mathbf{u}_{\text{DNS}}} \rangle$ の比較を行うべきであろう。しかしながら、DNS との比較ならばともかく、実験データなどに空間フィルタリングを施すのは容易ではないので、実際の LES でこのようなアプローチをとることは現実的には難しいだろう。

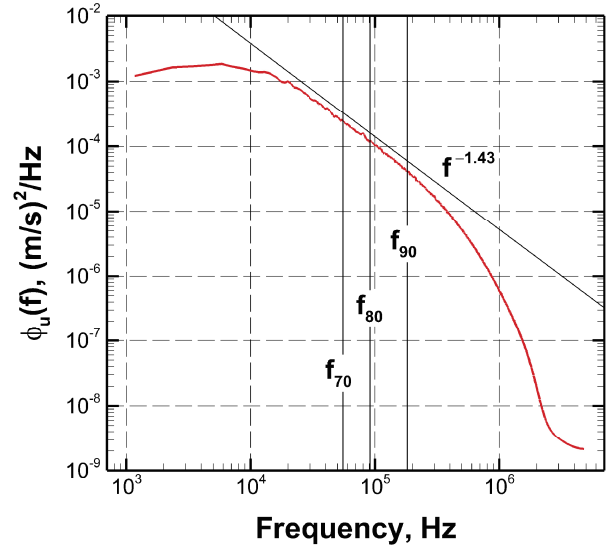


図 8 DNS による速度場から得られたパワースペクトル密度 ($x/D = 11$)

5.2. 空間解像度が十分であるとはどういうことか

さて、前述の考察では空間解像度が十分ならば $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle \approx \langle \mathbf{u} \rangle$ となるため LES は DNS と一致する、という主張をしたが、空間解像度が十分であるかどうかをどのように判断すべきだろうか。次にこの点についても考察をしたい。図 8 に DNS による速度場 \mathbf{u} から得られた、噴流中心 $y=0$, $x/D=11$ における (スパン方向に平均操作をした) パワースペクトル密度を示す。まず、慣性小領域の傾きは $-5/3$ ではなく -1.43 となっているが、これは Sadeghi らの研究¹⁰⁾によると $Re = 10^4$ 程度の噴流中心におけるスペクトルの傾きは $-5/3$ よりも大きな値となる報告がされており、本解析の結果はその報告と一致する。図 8 には $f^{-1.43}$ だけでなく、周波数 f までのエネルギーが全体の何 % に相当するかという指標、

$$\frac{\int_0^f \phi_u(f') df'}{\int_0^\infty \phi_u(f') df'} \quad (12)$$

により、70, 80, 90% となる周波数に対応した直線 (それぞれ、 f_{70} , f_{80} , f_{90} とラベル) をプロットする。これらのプロットから粘性散逸領域が始まる約 200 kHz までに全体の 90% のエネルギーが含まれていることがわかる。

では、良い結果を与えた高次精度補間 (P5, P7, P9) による ILES とダメな結果を与えた三次精度 MUSCL 法 (M3) による ILES のパワースペクトル密度はどのようになるだろうか。その結果を図 9 に示す。まず、高次精度補間による ILES のパワースペクトル密度は空間精度が高くなるにつれて解像度が上がり、スペクトルの減衰が始まる周波数はより高周波の領域へシフトする。また、ILES では DNS にみられる粘性散逸領域に相当する周波数領域を解像することが出来ていないため、数値粘性による散逸でスペクトルが急激に減衰している。最も精度の低い P5 でも全体の 80% 程度が、P9 では全体の 90% 近くのエネギーを含む周

波数までの慣性小領域が解像されている。DNS と一致しない結果を与えた三次精度 MUSCL 法による ILES のパワースペクトル密度では全体の 70% のエネルギーが含まれる周波数よりもかなり低い周波数で減衰が始まっており、低周波のエネルギーもオーバーシュート気味な高い傾向を示している。この結果から、空間解像度が十分であるとは、乱流エネルギーの 80% 程度を含んだ周波数領域までを解像していること、ということになる。

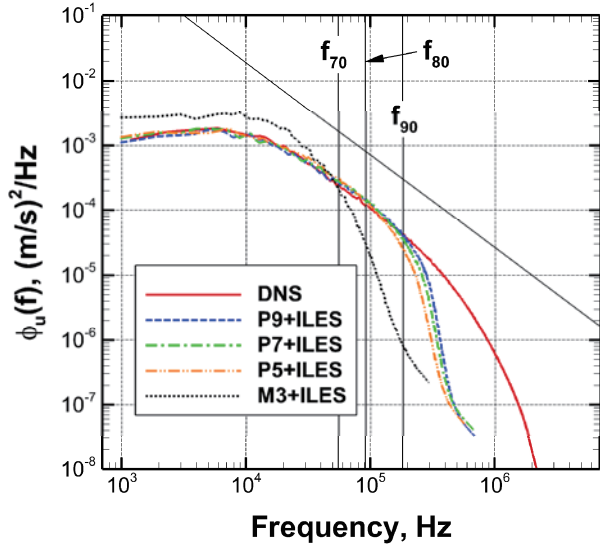


図 9 ILES による速度場から得られたパワースペクトル密度 ($x/D = 11$)

今回の比較では正解である DNS のスペクトルが利用可能であるため、全体の 80% のエネルギーが含まれる周波数領域を判断できたが、多くの場合はそのようなリファレンスが無い場合が多い。その場合にはどうするかであるが、計算対象の流れ場のレイノルズ数からモデルスペクトル¹¹⁾を計算することで 80% までのエネルギーが含まれる周波数を評価することが可能である。あとは LES によって得られたスペクトルからどの周波数まで解像できているかを把握し、解像度が十分であるかを判断することが出来るはずである。

5.3. SGS モデルは何をしているか

4 章での結果を見る限り、SGS モデルが結果を良くする方向に機能しているようにはみえない。では、一体、SGS モデルはどのような役割を果たしているのだろうか。字面の通りに考えると、SGS モデルの役割はまさに格子で解像されないサブグリッドスケールの乱流をモデリングするものである。しかし、この説明はいささか漠然としていて、最初の内は何がモデリングされているのか著者自身も今ひとつよく分かっていなかった。ここでは、同じような疑問を感じている読者に向けて SGS モデルの役割について著者の理解を元に説明を試みたい。

式 (6) で説明したように LES では速度場が格子スケール成分とサブグリッドスケール成分に分離される。この基本に従い、格子スケールとサブグリッドスケール

ルに分離された流体の運動エネルギーの輸送方程式により SGS モデルの果たす役割について説明をする。まず、格子スケール速度成分による流体の運動エネルギー ($\tilde{k} = \tilde{u}_i \tilde{u}_i / 2$) の輸送方程式はフィルタ操作を施した運動量保存則に \tilde{u}_i を乗じることで求められる¹²⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{k} \tilde{u}_j)}_{\text{advection}} + \underbrace{\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{p} \tilde{u}_j)}_{\text{press. diff.}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right)}_{\text{visc. diff.}} \\ + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{u}_j)}_{\text{SGS diff.}} \end{aligned} \quad (13)$$

$$= \underbrace{\tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{production}} - \underbrace{\nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{visc. diss.}} + \underbrace{\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{S}_{ij}}_{\text{SGS diss.}}$$

式 (13) の左辺、第 2~5 項は運動エネルギーをある位置から別の位置へ輸送する効果を表し、右辺にまとめた 3 つの項が生成・消失項になっている。

サブグリッドスケール速度成分による流体の運動エネルギー ($k_{\text{sgs}} = \overline{u'_i u'_i} / 2$) の輸送方程式は通常の運動量保存則からフィルタ操作を施した運動量保存則を減じて、さらに u'_i を乗じることで求められる¹²⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (k_{\text{sgs}} \tilde{u}_j)}_{\text{advection}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_i} \tilde{u}_j)}_{\text{turb. transport}} \\ + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{p} \tilde{u}_j - \bar{p} \tilde{u}_j)}_{\text{press. diff.}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial x_j} \right)}_{\text{visc. diff.}} \end{aligned} \quad (14)$$

$$- \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{u}_j)}_{\text{SGS diff.}}$$

$$= -\underbrace{\nu \left(\frac{\partial \overline{u_i} \partial \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{visc. diss.}} - \underbrace{\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{S}_{ij}}_{\text{SGS diss.}}$$

この式についても、左辺の第 2~6 項は運動エネルギーをある位置から別の位置へ輸送する効果を表し、右辺にまとめた 2 項は生成・消失項である。式 (13) と (14) を比較すると、右辺にある最終項の SGS dissipation 項は同じ形をしているが、これは格子スケール (GS) とサブグリッドスケール (SGS) 間で運動エネルギーのやり取りを担う項になっている。 $\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{S}_{ij}$ が負であれば GS から SGS へ運動エネルギーが移動し (カスケード)、正であれば SGS から GS へ運動エネルギーが移動する (逆カスケード)。最もポピュラーなスマゴリンスキーモデルの場合¹³⁾,

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{S}_{ij} &= -2\nu_t \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij} \\ &= -2(C_s \Delta)^2 (2\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij})^{1/2} \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij} < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

であり $\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{S}_{ij}$ は常に負となるため、SGS モデルがや

っていることは GS から SGS へ運動エネルギーを移動させているだけである。ダイナミクスマゴリンスキーモデルの場合もクリッピングを行っている場合は同じであろう。そして、モデル係数 C_s は GS から SGS へのエネルギー移動量の大きさをコントロールしているだけであり、全速度成分 $u = \bar{u} + u'$ において \bar{u} と u' の分配比率を変化させているに過ぎない。 C_s を大きくすれば SGS へのエネルギー移動量が増加して \bar{u} の割合が小さくなるだけである。以上の説明は直感的に過ぎる感があるので、もう少し LES 的な説明をしておくと、SGS モデルは高周波の微細な乱流成分を空間フィルタによりカットオフして GS から取り除くローパスフィルタとして機能しているだけであり、 C_s はフィルタのサイズを調整しているに過ぎないのである。

そのような見方で 4 章における SGS モデルを用いた LES の解析結果 (図 5) を分析してみよう。 C_s を小さくすることで結果が DNS に近づいていくが、これは GS から SGS へのエネルギー移動が小さくなり \bar{u} の割合が増えて $\langle \bar{u} \rangle \approx \langle u \rangle$ に近づいた結果だろう。 $C_s = 0$ の場合は SGS モデルによる GS から SGS へのエネルギー移動は 0 になるが、この時には数値粘性がローパスフィルタとして機能していることになる。また、 $C_s = 0$ と $C_s = 0.05$ の結果を比較するとほとんど差がないことから判断すると $C_s = 0.1$ 未満では SGS モデルはローパスフィルタとして機能しておらず、数値粘性に取って代わられているようである。

5.4. SGS モデルを使用すべきか

本解析では SGS モデルを使用しない ILES の方が DNS と良く一致する結果となった。では、その結果でもっていかなる場合も SGS モデルは使用する必要がないと結論付けて良いものだろうか。その答えは SGS モデルにどのような役割を期待しているかに尽きる。一般的なマゴリンスキーモデルでは SGS モデルは GS から SGS へエネルギーを移動させる効果、つまり、高周波の乱流成分をカットオフするローパスフィルタとしてしか機能していない。したがって、ローパスフィルタの機能だけを期待するのであれば ILES でも十分にその機能を果たしており、SGS モデルを使用する必要はないだろう。例外として、空間高次精度補間により ILES を行った場合に数値的な振動・不安定が問題になるような場合、安定性を向上させる目的で小さな C_s で SGS モデルを使用することはアリかもしれない。若干、興味本位なところはあるが、実際にどうなるかやってみよう。図 10 に空間 9 次精度補間の LES にマゴリンスキーモデルを使用して C_s を変化した場合の解析結果 (時間平均速度、rms 変動、パワースペクトル密度) を示す。時間平均速度と rms 変動分布から、DNS と良い一致が得られるのは $C_s = 0.05$ までであり、それ以上は空間 9 次精度の良さが損なわれる。また、速度変動のパワースペクトル密度から、 C_s の値を大きくするに当たってスペクトルの減衰が始まる周波数が低周波領域へシフトしていくことがわかる。やはり、乱流エネルギーの 80% 程度を含んだ周波数領域までを解像しているのは $C_s = 0.05$ ま

でであり、 $C_s = 0.1$ では低周波領域のエネルギーが増加してしまっている。

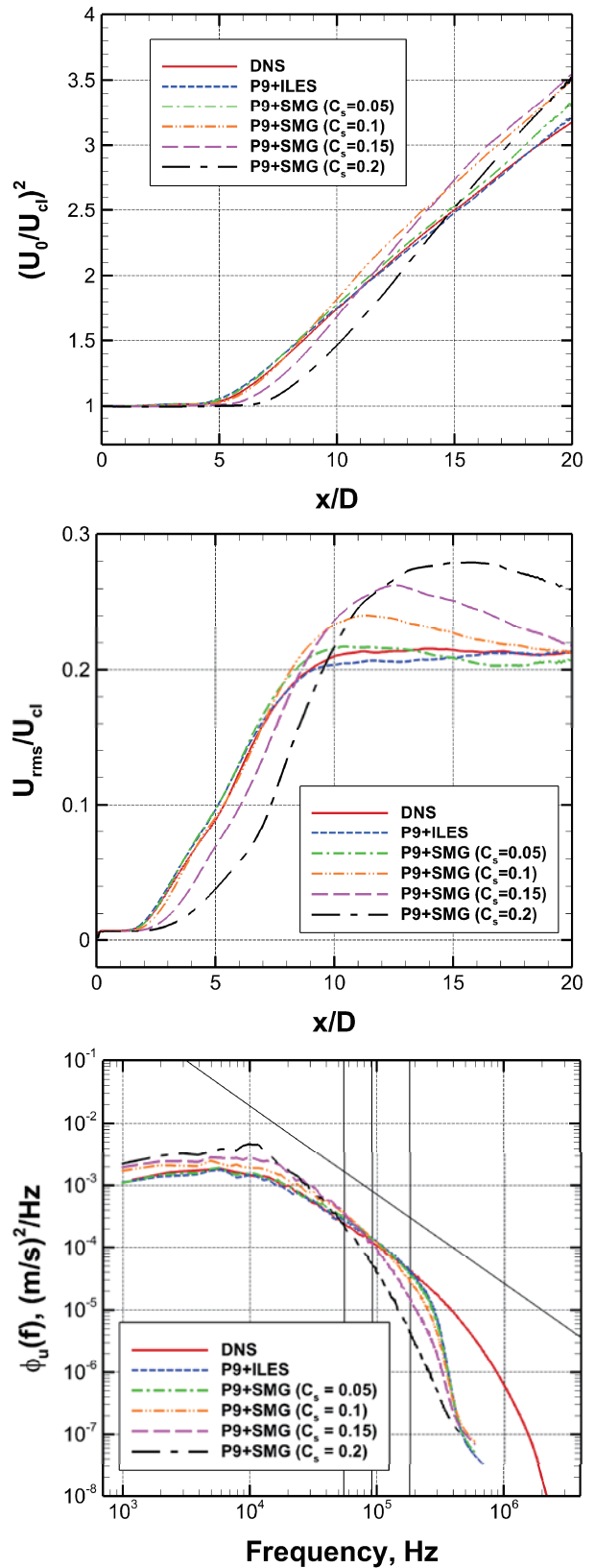


図 10 空間 9 次精度補間 + マゴリンスキーモデルによる LES で C_s を変化した場合の解析結果

SGS モデルにローパスフィルタ以外の明確な役割を果たしてもらいたい場合はどうすれば良いだろうか。例えば、逆カスケードのような現象が重要な役割を果たす流れ場を解析の対象としているならばスマゴリンスキーモデルは用をなさず、SGS から GS へのエネルギー移動が再現できるモデル、ダイナミックスマゴリンスキーモデルや SGS エネルギーの輸送方程式を解く一方程式モデルなどを使用しなければならないだろう。また、5.1 節で考察したように、空間解像度が十分でない場合には \tilde{u} のみで良い結果が得られないので、サブグリッド速度成分を含めた $\tilde{u} + u'$ を評価できるようにすることがカギと考える。著者の知る限り、 u' を陽的に計算できる SGS モデル¹⁴⁾は一般的ではないが、一方程式モデルや SGS 応力輸送方程式モデルで得られる k_{sgs} や τ_{ij}^{sgs} から u' を計算できるようになれば空間解像度が不十分な場合でも良い結果が得られるようになる可能性があるのではないだろうか。

ローパスフィルタ以外の機能を実現する SGS モデルを使いこなすことは LES の初心者には難しいかもしれない。LES が誰にでも使いやすい普遍的なツールとなるためには、そのあたりの使いやすさを追求した新たな SGS モデルが必要ではないだろうか。

5.5. ラージエディとは

LES, ラージエディシミュレーション, のラージエディとはまさしく大きな渦のことを示す言葉である。最後に、そのラージエディとはどのようなものか、LES により捉えられる渦のイメージについて考えてみよう。LES で計算される渦は小さな渦が平均化されて大きな渦に置き換えられるようなイメージを持っている読者はいないだろうか。著者自身もそのようなイメージを持っていた時期があるが、これは明確な間違いである。LES では空間平均操作を行うのではなく、空間フィルタリングを行うことでフィルタサイズ以下の渦を分離するのである。したがってフィルタ幅以上の渦は基本的にそのまま（厳密にはそうではないが）格子上で捉えられるのである。大小のスケールの渦が混在する流れ場から小さな渦のみがなくなるようなイメージが正しい¹⁵⁾。

では、その様な認識で LES による渦と DNS による渦を比べてみよう。図 11 に LES によって得られた瞬時の渦度場と DNS による渦度場を比較した結果を示す。良い結果が得られた P9+ILES による渦度は DNS による渦度を少しぼかしたような瞬時場になっている。それ以外の結果 (M3+SMG, M3+ILES) は DNS と一致しない結果を与える場合の解析例であるが、DNS には存在しないような大きな渦が形成されている。これは、本来、フィルタサイズ以上の渦は格子上でそのまま捉えられるという LES の性質から外れており、フィルタサイズ以上の渦も影響を受けて変化してしまっていることを意味する。読者によっては M3+SMG および M3+ILES による渦度の方を LES らしいと感じるかもしれないが、LES による正しい渦のイメージは P9+ILES のような少しボケたような渦度分布なのである。

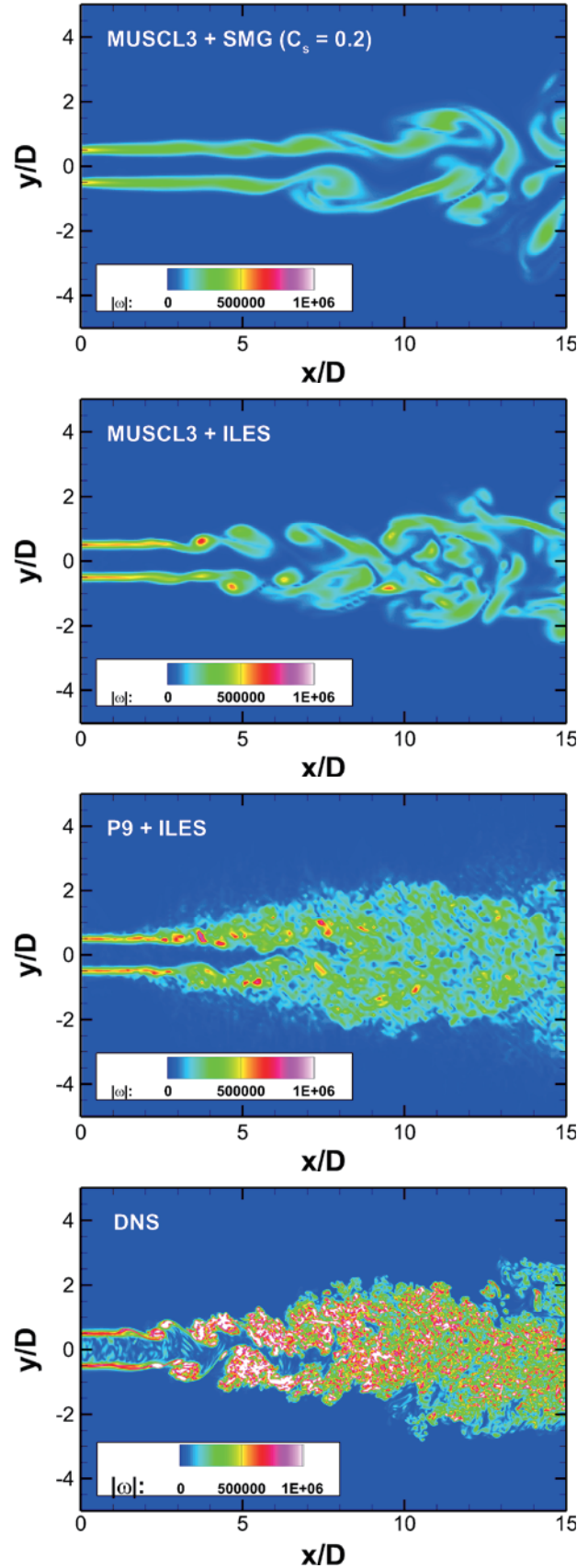


図 11 LES (M3+SMG, M3+ILES, P9+ILES) および DNS によって得られた x - y 断面 ($z=0$) における瞬時の渦度分布

6. まとめ

現状の LES は格子解像度や空間高次精度スキーム、SGS モデルにより解析結果が劇的に変化し、玄人でなければ使いこなすことが難しいツールのように思える。本稿では、どのようにすれば LES によって乱流場の良い解析結果が得られるか、シンプルな平面乱流噴流を対象として実際の事例を交えながら紹介した。通常、LES ではフィルタリングされた速度場 \tilde{u} のみで時間平均などの統計処理が行われて DNS や実験データと比較されることが多い。そのような場合、LES が良い結果を与えるためには、サブグリッド変動成分 u' が無視できるようなレベルまで空間解像度を高める、具体的には乱流エネルギーの 80% まで解像する必要があることを示した。一方で u' を陽的に評価することができれば $\tilde{u} + u'$ を用いた統計処理を行うことが可能になり、空間解像度が不十分な場合であっても LES が良い結果を与える可能性があることにも触れた。使い勝手の良い、普遍的な LES 解析を実現するためには、そのようなアプローチを検討する必要があると著者は考える。

謝辞

本研究では数値計算を実行するにあたって、宇宙航空研究開発機構スーパーコンピュータ「JSS2」を用いた。ここに記して関係者各位に謝意を表す。

参考文献

- (1) 松山, 平面乱流噴流のレイノルズ数依存性に関する DNS, 日本流体力学学会年会 2018 講演論文集, 2018.
- (2) Shima, E., and Kitamura, K., *AIAA J.* 49, (2011), pp.1693–1709.
- (3) Gerolymos, G. A., Senechal, D., and Vallet, I., *J. Comput. Phys.* 228, (2009), pp.8481–8524.
- (4) Matsuyama, S., *Computers & Fluids* 91, (2014), pp.130–143.
- (5) Thornber, B., Mosedale, A., Drikakis, D., Youngs, D., and Williams, R. J. R., *J. Comput. Phys.* 227, (2008), pp.4873–4894.
- (6) Stanley, S. A., Sarkar, S., and Mellado, J. P., *J. Fluid Mech.*, Vol.450, (2002), pp.377–407.
- (7) Deo, R. C., Mi, J., and Nathan, G. J., *Physics of Fluids* 20, (2008), 075108.
- (8) Zang, T. A., et al., *Physics of Fluids A* 4, (1992), pp.127–140.
- (9) 松山, SGS 応力輸送方程式型の LES モデリングに向けた平面乱流噴流 DNS データによるアプリオリテスト, 日本流体力学学会年会 2019 講演論文集, 2019.
- (10) Sadeghi, H., Lavoie, P., and Pollard, A., *Journal of Turbulence* 15, (2014), pp.335–349.
- (11) Pope, S. B., *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, pp.232–234, 2000.
- (12) Sagaut, P., *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*, Third Edition, Springer, pp.52–54, 2004.
- (13) Pope, S. B., *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, pp.587, 2000.
- (14) Sagaut, P., *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*, Third Edition, Springer, Section 7.7, 2004.
- (15) 笠木ほか, 乱流工学ハンドブック, 朝倉書店, 13.1 節, 2009.