相互作用を受ける二次元円形渦対の運動における圧縮性の寄与に関する研究

谷口 伸隆（東大院），鈴木 宏二郎（東大新領域）

The effect of compressibility on the motion of a pair of interacting two-dimensional circular vortices

TANIGUCHI Nobutaka, SUZUKI Kojiro (Univ. of Tokyo)

ABSTRACT

In this paper, the effect of compressibility on the motion of a pair of interacting vortices was investigated by numerical analysis and eigensystem analysis. The numerical calculation showed that both inviscid incompressible and inviscid compressible flows have similar vorticity evolution process. The eigenvalue analysis using Implicitly Restarted Arnoldi Method revealed the characteristic pattern of the density distribution in the case of colliding vortices. The stability condition for thermodynamically nonequilibrium state was applied to understand the behavior of colliding vortices in terms of entropy and eigenmodes.

1　緒言

渦は安定な現象であり，大気や海洋の流れ，渦巻銀河のように自然界に一般的に存在し，鳴門の渦潮，竜巻や台風のような気象災害として実生活に身近なものである．複数の渦が存在すると，渦は相互作用により様々な現象を引き起こすことが知られている．重要な物理現象である乱流は渦のストレッチング効果による小スケールの渦の形成と大スケールから小スケールの渦へのエネルギー伝達により維持されていることが指摘されている [1]．3 次元の渦管の相互作用による渦の再結合現象が知られており，粘性流体，量子力学の超流体，太陽コロナにおける磁気再結合など様々な流体に共通して見られる．渦は現象として広い一般性と関連性を備えており，このような渦の性質の理解を行うことが重要である．

非圧縮性流の渦が相互作用の下で複雑な挙動を取ることは実験的に広く知られており [2]，理論・数値計算の両方の観点から多くの研究が行われてきた [3], [4]．一方で圧縮性流の渦の挙動に対する研究例は少数であるが，直接数値シミュレーションを行った研究では小衝撃波の発生・つなぎ替え速度の低下など非圧縮性流と異なった挙動を取ることが指摘されており [5], [6]，圧縮性が渦の運動に大きく寄与することが示唆されている．渦の相互作用が大きく関連する圧縮性乱流は航空・機械分野で重要な流れであり活発な研究対象となっているが，高レイノルズ数流れであるため多くの計算資源を要し，正確な数値計算が難しい現状にある [7]．このような現象の解明に向けて，渦の運動に作用する圧縮性の基礎的な研究を行うことが必要である．

本研究の目的は相互作用の下で運動する渦に圧縮性がどのように寄与するか明らかにすることである．モデル問題として 2 次元非粘性流中を運動する渦対の挙動を考え，数値計算と線形解析を行うことで議論を行った．第 2,3 章では数値計算により理想流体と圧縮性流体に対する渦対の運動を調べた．前者は渦対の運動に対する計算法である Contour dynamics の手法により，また後者は 4 次精度 CO コンパクト TVD スキームにより行った．第 4 章では圧縮性の寄与を調べるため，Contour dynamics の手法で得た状態を基本状態とした線形方程式の導出と離散化方程式による固有値解析を行なった．渦対の衝突が生じる場合では密度の固有モードに特徴的な反応が見られることを確認した．

2　渦運動の数値計算

2.1　モデル問題の設定

本研究ではモデル問題として，二次元流体中に配置された 2 円形渦の重ね合わせを初期状態とする時間発展を考えた．この円形渦はオイラー方程式の定常解の 1 つであり，渦の内部で一定の渦度 ω_0 を取り，外部では渦度を持たない．半径を a_0 とすると流れ関数 $\psi(x, y)$，圧力 P は次のように表される．

$$\psi(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{\omega_0}{4}r^2 & (r < a_0) \\ -\dfrac{\omega_0}{2}a_0^2 \log\dfrac{r}{a_0} - \dfrac{\omega_0}{4}a_0^2 & (r > a_0) \end{cases} \tag{1}$$

This document is provided by JAXA.

$$P(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\omega_0^2}{8}r^2 & (r < a_0) \\ -\dfrac{\omega_0^2 a_0^4}{8\,r^2} + \dfrac{\omega_0^2}{4}a^2 & (r > a_0) \end{cases} \tag{2}$$

ここで $r = \sqrt{x^2+y^2}$ である．このような円形渦を中心が $(0, d_0/2), (0, -d_0/2)$ になるように配置した (図 1)．渦対は初期条件に依存して衝突する系と衝突せずに一定の距離を保って公転する系の両方が存在する，ここでは次のようにでそれぞれの系の初期条件を設定した．

Case (1)　渦対の衝突が生じる系:
　初期相対距離 $d_0 = 2.0$, 初期渦径 $a_0 = 0.8$

Case (2)　渦対の衝突が生じない系:
　初期相対距離 $d_0 = 3.0$,　初期渦径 $a_0 = 0.8$

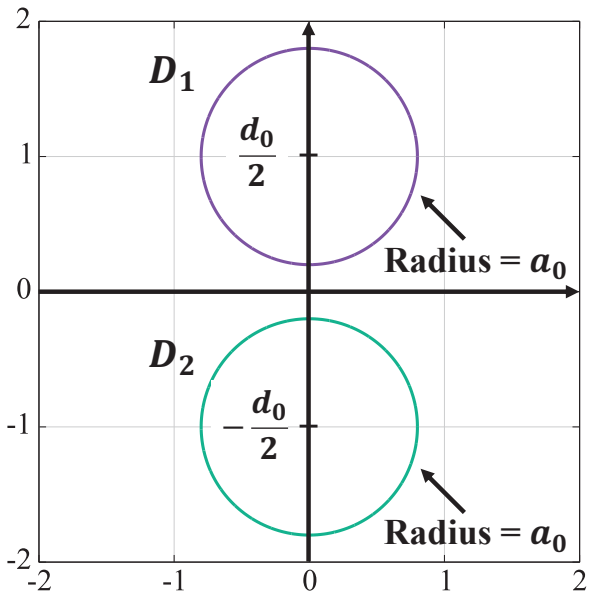

図 1　モデル問題の初期状態として与えた 2 円形渦対 D_1, D_2 の配置と初期相対距離 d_0 と初期渦径 a_0 の定義.

2.2　Contour dynamics の原理

非圧縮性オイラー方程式の弱解の一種として領域 D の内部で渦度が一定値 ω_0 を取り，それ以外では 0 となるような解が存在する．Contour dynamics はこのような解の挙動を常微分方程式に帰着させることで計算する手法である [8]．ここで 2 領域 D_1, D_2 に対して渦度が

$$\omega = \begin{cases} \omega_0 & x \in D_1 \cup D_2 \\ 0 & else \end{cases} \tag{3}$$

であるとする．領域の内部で渦度は一定であるから流れ関数は,

$$\psi(x,t) = -\frac{\omega_0}{2\pi}\int\int_{D_1\cup D_2} \log|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|d\mathbf{x}' \tag{4}$$

として与えられる．流れ関数と速度の関係を用いると，速度場は

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -\frac{\omega_0}{2\pi}\sum_i \int\int_{D_i} \frac{x_2 - x_2'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}d\mathbf{x}' \tag{5}$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_i \int\int_{D_i} \frac{x_1 - x_1'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}d\mathbf{x}' \tag{6}$$

である．部分積分を行い，領域それぞれの境界の閉曲線を正規化された弧長変数 s を用いて $x(t,s), (0 \le s \le 1)$ と媒介変数表示をすると,

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}(t,s) = -\sum_i \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^1 x_1(t,s')\log|\mathbf{x}(t,s)-\mathbf{x}(t,s')|ds'$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t}(t,s) = -\sum_i \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^1 x_2(t,s')\log|\mathbf{x}(t,s)-\mathbf{x}(t,s')|ds'$$

を得る．これを 2,000 点で折れ線近似することで渦の挙動を境界曲線の運動に帰着させ数値積分を行った．

2.3　圧縮性流体に対する数値計算法

基礎方程式として圧縮性流体のオイラー方程式を用いる．

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{i=1,2}\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0 \tag{7}$$

ここで,

$$q = (\rho, \rho u, \rho v, e)^T \tag{8}$$

$$F_i = (\rho u_i, \rho u_1 u_i + \delta_{1i}P, \rho u_2 u_i + \delta_{2i}P, \rho H u_i)^T \tag{9}$$

である，空間方向に次のような 4 次精度 CO コンパクト TVD スキーム [9], [10] を用いた．

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)_l = \frac{1}{\Delta x_i}\left\{(H_i)_{l+\frac{1}{2}} - (H_i)_{l-\frac{1}{2}}\right\} \tag{10}$$

$$(H_i)_{l+\frac{1}{2}} = (H_i)^{(1)}_{l+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}(\Delta\tilde{\tilde{F}}_i^+)_{l-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(\Delta\tilde{\tilde{F}}_i^+)_{l+\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}(\Delta\tilde{\tilde{F}}_i^-)_{l+\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(\Delta\tilde{\tilde{F}}_i^-)_{l+\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$$(H_i)^{(1)}_{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\{(F_i)_l + (F_i)_{l+1}\} - \frac{1}{2}\left\{(\Delta F_i^+)_{l+\frac{1}{2}} - (\Delta F_i^-)_{l+\frac{1}{2}}\right\} \tag{12}$$

ここで,

$$(\Delta\tilde{F}_i^{\pm})_{j+\frac{1}{2}} = minmod\left[(DF_i^{\pm})_{j+\frac{1}{2}}, 4(DF_i^{\pm})_{j-\frac{1}{2}}\right] \tag{13}$$

$$(\Delta\tilde{\tilde{F}}_i^{\pm})_{j+\frac{1}{2}} = minmod\left[(DF_i^{\pm})_{j+\frac{1}{2}}, 4(DF_i^{\pm})_{j+\frac{3}{2}}\right] \tag{14}$$

$$(DF_i^{\pm})_{j+\frac{1}{2}} = (\Delta F_i^{\pm})_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}(\Delta^3\tilde{F}_i^{\pm})_{j+\frac{1}{2}} \tag{15}$$

である．

計算領域は $[-5,5]\times[-5,5]$ とし，400×400 の等間隔直交格子に分割して計算を行なった．時間刻み幅 Δt は音速を c として CFL 条件

$$\Delta t = \frac{CFL}{\max\left(\dfrac{|u|}{\Delta x} + \dfrac{|v|}{\Delta y} + c\sqrt{\dfrac{1}{\Delta x^2} + \dfrac{1}{\Delta y^2}}\right)} \tag{16}$$

This document is provided by JAXA.

で $CFL = 0.1$ とすることで各ステップごとに決定した．時間積分スキームとして 4 次精度 Runge-Kutta 法を用いた．

3 渦対の運動に対する数値計算の結果

理想流体と圧縮性流体のそれぞれに対する渦対の発展を図 2 に示した．このときほぼ同様の渦度発展過程が観察された．一方で

1. 圧縮性流体では理想流体に比較して類似の渦形が遅い時刻に観察され，渦対の発展速度が遅くなる傾向がみられた．
2. 渦の中心付近で渦度が低くなり (領域 a), 圧縮性流体では一体化した渦の"腕"に負の渦度が形成された (領域 b).

というような差異が観測された．

図 3 に非粘性圧縮性流の渦対の衝突が生じた時刻 $t = 1.5$ における各状態量，また図 4 に一体化した渦対が十分に成長した時刻 $t = 6.1$ における各状態量を示した．状態量の中でエントロピー s は次のように計算され，s/R を可視化した．

$$s = C_v \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R\log\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \tag{17}$$

ここで C_v は定積熱容量であり，R は気体定数である．圧縮性流体では一体化する渦対の"腕"が高密度の領域 (図中 c1) となり，中心付近の渦側面で低密度の領域が形成される (c2) という特徴的な挙動が観察された．この高密度の領域では高いエントロピー密度が見られた (d)．圧力分布は時刻 $t = 1.5$ で渦対が衝突した後，渦対が相互作用により一体化するにつれて滑らかな楕円形の圧力分布 (e) を形成した．

4 線形化方程式の導出と固有値解析

4.1 線形化方程式の導出とその性質

渦対の運動に圧縮性がどのように作用するか考えるため，Contour dynamics に従う理想流体の非定常解

$$\rho = Const., u = \int \frac{\partial\psi}{\partial y} d\mathbf{x}, v = -\int \frac{\partial\psi}{\partial x} d\mathbf{x} \tag{18}$$

を基本状態とする線形方程式を導出し，固有値解析を行うことで圧縮性の寄与を調べた．圧縮性流の基準状態として考えるため，内部エネルギー ρe と圧力 P の間に関係

$$\rho e = \frac{P}{\gamma - 1} \tag{19}$$

が成立すると仮定した．

圧縮性流体の基本流として考えるため，内部エネルギー ρe を熱量的完全気体の状態方程式

$$\rho e = \frac{P}{\gamma - 1} \tag{20}$$

を用いて定義する．圧力はポアソン方程式

$$\Delta P = \rho\nabla\cdot\{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\}$$

を中心差分により離散化し計算領域の端点でディリクレ境界条件 $P = 0$ を課すことにより，共役勾配法を用いて求められた．

変数 $(\rho, u, v, \rho e)$ に対して記述された圧縮性流体のオイラー方程式

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0 \tag{21}$$

$$\partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}P \tag{22}$$

$$\partial_t\rho e + \nabla\cdot(\rho e\mathbf{u}) = -(\nabla\cdot\mathbf{u})P \tag{23}$$

を基礎方程式とする．摂動量

$$\delta z = (\delta\rho, \delta u, \delta v, \delta\rho e) \tag{24}$$

の 2 次以上の微少量を無視し理想流体では速度場の発散が 0 であることを用いれば，

$$\partial_t\delta\rho + (\nabla\cdot\delta\mathbf{u})\rho + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\delta\rho = 0 \tag{25}$$

$$\partial_t\delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\delta\mathbf{u} + (\delta\mathbf{u}\cdot\nabla) - \frac{\gamma-1}{\rho}(\delta\rho\nabla\rho e - \nabla\delta\rho e) = 0 \tag{26}$$

$$\partial_t\delta\rho e + (\mathbf{u}\cdot\nabla\delta\rho e + \delta\mathbf{u}\cdot\nabla\rho e + \gamma(\nabla\cdot\delta\mathbf{u})\rho e + \gamma(\nabla\cdot\mathbf{u})\delta\rho e = 0 \tag{27}$$

を得る．

この方程式の性質を調べるため，ある点 (x, y) における方程式の係数行列を，摂動量に対する空間方向の微分を含む行列 A と含まない行列 B に分け

$$\partial_t\delta z = A\delta z \tag{28}$$

$$\partial_t\delta z = B\delta z \tag{29}$$

のそれぞれの固有値問題を考える．行列 A は作用素のフーリエ変換を行うことで次のような形に表すことができる．

$$A = \begin{pmatrix} i\mu & i\rho k_x & i\rho k_y & 0 \\ 0 & i\mu & 0 & i\frac{\gamma-1}{\rho}k_x \\ 0 & 0 & i\mu & i\frac{\gamma-1}{\rho}k_y \\ 0 & i\gamma\rho e k_x & i\gamma\rho e k_y & i\mu \end{pmatrix} \tag{30}$$

ここで $\mu = k_x u + k_y v$ である．固有値は音速を c として

$$\lambda_A = i\mu, i\left(\mu \pm c\sqrt{k_x^2 + k_y^2}\right) \tag{31}$$

として表される．一方で行列 B は

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma-1}{\rho^2}\partial_x\rho e & \partial_x u & \partial_y u & 0 \\ -\frac{\gamma-1}{\rho^2}\partial_y\rho e & \partial_x v & \partial_y v & 0 \\ 0 & \partial_x\rho e & \partial_y\rho e & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

This document is provided by JAXA.

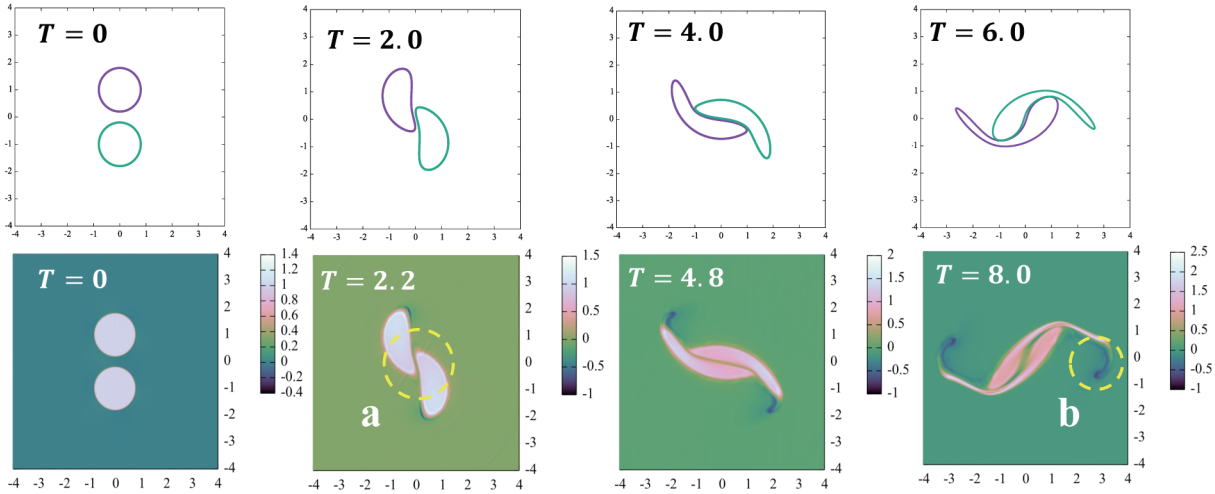

図 2　Contour dynamics で計算を行なった理想流体での渦対の発展 (上列), 圧縮性流体における渦対の発展の渦度分布 (下列).

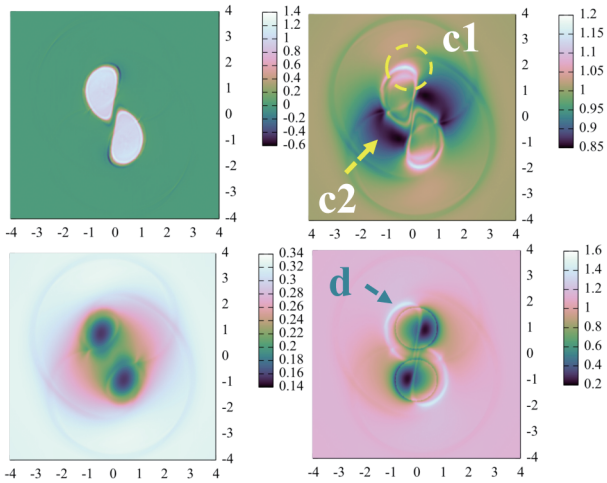

図 3　時刻 $t = 1.5$ における渦度 (左上), 密度 (右上), エントロピー分布 (右下), 圧力分布 (左下) の可視化.

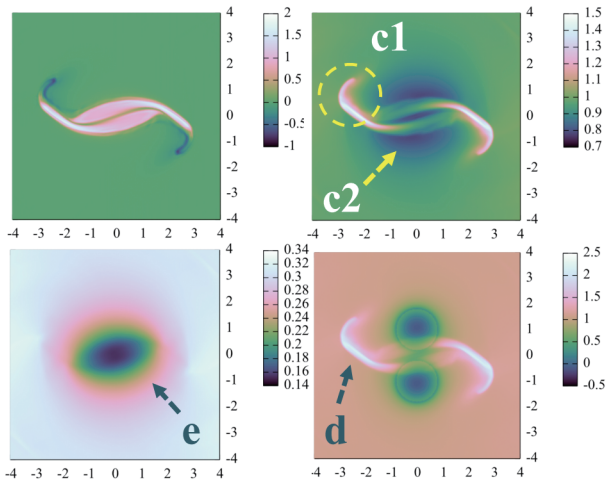

図 4　時刻 $t = 6.1$ における渦度 (左上), 密度 (右上), エントロピー分布 (右下), 圧力分布 (左下) の可視化.

であり，固有値は

$$\lambda_B = 0, \pm\sqrt{\partial_y u \partial_x v - \partial_x u \partial_y v} \tag{33}$$

となる．固有値から行列 A は物理量が波として伝播する性質を反映しており，行列 B は基準として考えている理想流体の速度・圧力場が一様ではない構造を持つことによる摂動量への影響を表すと考えられる．この方程式は圧縮性流体の性質と基準の流れ場の構造の性質を反映しており，圧縮性の寄与を調べるのに適切な式になっていることが分かる．

4.2　離散化方程式の導出

流れ場全体の挙動を調べるため．前節で得た方程式の離散化を行なった．2 次元変数を 1 次元変数に並び替えた変数

$$\xi = (\delta z_{0,0}, \delta z_{0,1}, \cdots, \delta z_{0,N}, \cdots, \delta z_{N,N}) \in \mathbb{R}^{4N\times N} \tag{34}$$

$$\delta z_{i,j} = (\delta\rho, \delta u, \delta v, \delta\rho e)_{i,j} \tag{35}$$

を用い，摂動量に対する偏微分項を 2 次精度の中心差分

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x-\Delta x, y)}{2\Delta x} + o(\Delta x^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y-\Delta y)}{2\Delta y} + o(\Delta y^2)$$

を用いて近似した．係数行列に含まれる基本流の空間微分を伴う項に対しても 2 次精度の中心差分を用いて近似を行った．

計算領域は渦対の運動領域より十分に大きく取り，

This document is provided by JAXA.

境界条件は計算領域の端点でノイマン型の境界条件

$$\partial_t \xi = 0 \tag{36}$$

を課した．このとき次のような離散化方程式を得た．

$$\partial_t \xi = A\xi \tag{37}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|c}
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \\
\vdots & 0 & & & \vdots & \vdots & 0 & & & \vdots & \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \cdots \\
\vdots & & & 0 & \vdots & \vdots & & & 0 & \vdots & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \\
\hline
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & G_x & \ddots & & \vdots & G_y & G & G_{-y} & & \vdots & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots \\
\vdots & & \ddots & G_x & 0 & \vdots & \ddots & G_y & G & G_{-y} & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & \vdots & & & & & \vdots & & & \ddots
\end{array}\right) \tag{38}$$

ここで小行列 $G, G_{\pm x}, G_{\pm y}$ は

$$G_{\pm x} = \begin{pmatrix} \pm\dfrac{u_x}{2\Delta x} & \pm\dfrac{\rho}{2\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\dfrac{u_x}{2\Delta x} & 0 & \pm\dfrac{\gamma-1}{2\rho\Delta x} \\ 0 & 0 & \pm\dfrac{u_x}{2\Delta x} & 0 \\ 0 & \pm\dfrac{\gamma\rho e}{2\Delta x} & 0 & \pm\dfrac{u_x}{2\Delta x} \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$G_{\pm y} = \begin{pmatrix} \pm\dfrac{u_y}{2\Delta y} & 0 & \pm\dfrac{\rho}{2\Delta y} & 0 \\ 0 & \pm\dfrac{u_y}{2\Delta y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\dfrac{u_y}{2\Delta y} & \pm\dfrac{\gamma-1}{2\rho\Delta y} \\ 0 & 0 & \pm\dfrac{u_y}{2\Delta y} & \pm\dfrac{u_y}{2\Delta y} \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\gamma-1}{\rho^2}\partial_x\rho e & -\partial_x u & -\partial_y u & 0 \\ \dfrac{\gamma-1}{\rho^2}\partial_y\rho e & -\partial_x v & -\partial_y v & 0 \\ 0 & -\partial_x\rho e & -\partial_y\rho e & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

と表現され，$G_{\pm x}, G_{\pm y}$ は摂動量に対するそれぞれ x, y 方向の空間微分の係数行列である．

4.3 固有値解析の方法

得られた離散化方程式は非対称な大規模疎行列であり，このような行列の固有値問題に適した Implicitly Restarted Arnoldi Mehod(IRAM) [11] を用いて解析を行なった．Arnoldi 法は Arnoldi 過程によりクリロフ部分空間の正規直交基底の行列 V を生成し，

$$AV_m = V_m H_m + f_m e_m^* \tag{42}$$

とヘッセンベルグ行列 H_m に変換する手法である．行列 A の固有値は行列 H_m の固有値で近似される．IRAM はクリロフ部分空間の次数を固定した上で，各反復のステップに k 本のベクトルを残しシフト付き QR 法を用いることで，Arnoldi 法の問題点である計算メモリの増大を避け効率良く固有値を計算することができる．表 1 に IRAM を用いた複数固有値の計算手法をまとめた．

表 1　IRAM のアルゴリズム

Starting with $v_1 = v/||v||$,
compute an $m = k + p$ step Arnoldi factorization.
$AV_m = V_m H_m + f_m e_m^*$
while Until convergence **do**
　Compute $\sigma(H_m)$ and select p shifts $\mu_1 \cdots \mu_p$
　Set $q = e_m^*$
　for $j = 1, \cdots, p$ **do**
　　Factor $[Q_j, R_j] = qr(J_m - \mu_j E)$
　　$H_m \leftarrow Q_j^* H_m Q_j$
　　$V_m \leftarrow V_m Q_j$
　　$q \leftarrow q^* Q_j$
　end for
　$f_k \leftarrow V_{\cdot,k} H_{k,k+1} + f_m q_k$
　$H_k = H_m(1:k, 1:k), V_k = V_m(\cdot, 1:k)$
　Starting from $AV_k = V_k H_k + f_k e_k^*$,
　compute an p step Arnoldi factorization.
end while

計算領域は $[-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$ とし，これを 50×50 の直交格子に分割して固有値解析を行なった．ここでは

1. 渦対の衝突が生じる初期相対距離 $d_0 = 2.0$, 初期渦径 $a_0 = 0.8$ の時刻 $t = 1.25$ の状態．
2. 渦対の衝突が生じない $d_0 = 3.0$, $a_0 = 0.8$ の時刻 $t = 1.25$ における状態．

のそれぞれに対し Contour dynamics により理想流体として求めた状態量 (図 5) を基準状態として離散化方程式の固有値と固有モードを求めた．

Contour dynamics は速度場 (u, v) を直接計算する手法であり，固有値解析に用いる圧力はポアソン方程式

$$\Delta P = -\rho\nabla\cdot\{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\} \tag{43}$$

を解くことで求める必要がある．ポアソン方程式を 2 次精度中心差分を用いて離散化を行った．

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_i = \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x^2) \tag{44}$$

係数行列である正定対称行列の連立 1 次方程式を CG

This document is provided by JAXA.

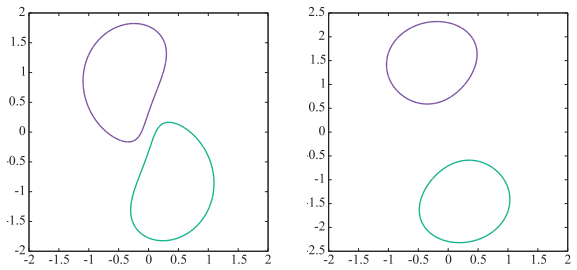

図 5 渦対の衝突が生じる系 (左)，衝突が生じない系 (右) の時刻 $t = 1.25$ における渦の概形．Contour dynamics の手法により理想流体として求めた．

法を用いて解くことで圧力分布を求めた．

4.4 熱力学的な観点を用いた安定性の解析

得られた固有モードの熱力学的な安定性を調べるため，非平衡状態における熱力学・流体力学的安定条件 [12] を局所的に用い各モード毎に適用した．ここで安定性条件は

$$\partial_t \int \left\{ \delta^2(\rho s) - \frac{\rho}{T}(\delta u)^2 \right\} dV \geq 0 \tag{45}$$

として与えられ，熱力学的にみたゆらぎの減衰率を示す．この式で基準となる状態量の時間変化は十分に遅いと仮定する．安定化が行われている領域を調べるため，局所的なゆらぎ ζ を

$$\zeta = \frac{1}{2} \left\{ \delta^2(\rho s) - \frac{\rho}{T}(\delta u)^2 \right\} \tag{46}$$

と表す．この時間微分を関係式 $Tds = de + p(1/\rho)$ を用いて展開すると，

$$\partial_t \zeta = \partial_t \frac{1}{2} \left\{ \delta^2(\rho s) - \frac{\rho}{T}(\delta u)^2 \right\} \tag{47}$$

$$= -\delta \left(\frac{1}{T} \right) \partial_t \delta \rho e - \frac{\rho}{T} \delta u \partial_t \delta u \tag{48}$$

を得る．固有値解析で得られた各モードに対してこの式を適用することで空間のどの領域で安定化が生じているのかを調べた．

4.5 IRAM を用いた固有値の計算の結果

渦対が衝突する系 (初期相対距離 $d_0 = 2.0$) に対して IRAM を用いて固有値計算を行うと，多くの固有値で反復に伴い一定の値に近づく様子が見られたが，いくつかの固有値では絶対値の値が近い固有値と互いに入れ替わるような挙動が観察された．このような挙動は渦対の衝突が生じる系に対してより多くみられた．図 6 にクリロフ部分空間の次数を $m = 20, 30, 40, 50$ とし，絶対値の小さいものからそれぞれ $k = 4, 12, 16, 20$ 個の固有値を求めたときの絶対値を図示した．クリロフ部分空間の次数が低いものでは，$m = 50$ の場合に比べて疎な固有値分布を得たが，得られた近似固有値自体は高い次数の IRAM においても共通して得られた．次数が高くなると，低い次数では得られないより密な固有値分布が得られた．

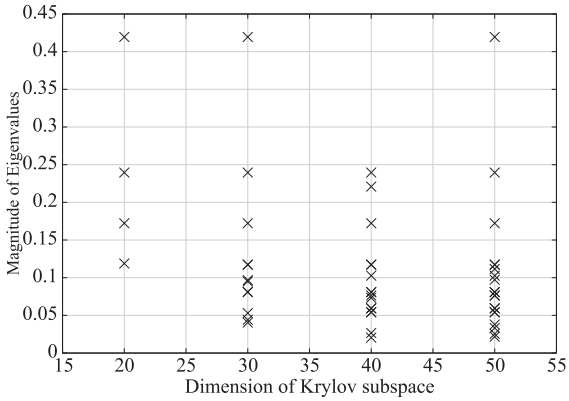

図 6 渦対が衝突する系に対するクリロフ部分空間の次数に対する固有値の絶対値の挙動．

クリロフ部分空間の次数を $m = 50$ とし，絶対値の小さい順から $k = 20$ 個の固有値を求める計算を IRAM を用いて 1,200 ステップ行なった．このときの衝突・非衝突系に対する固有値分布を図 7, 8, 9 に示した．図 7, 9 は時刻 $t = 1, 25$ のそれぞれ衝突，非衝突系に対して，また図 8 は時刻 $t = 2.5$ の衝突系に対する図示である．時刻 $t = 1.25$ において固有値の分布は互いに似通った傾向を示すが，衝突系では非衝突系に比べて固有値の分散が大きく，また実部が負の固有値が多く存在する傾向にあることが観察された．時刻 $t = 2.5$ ではこのような固有値の分布は見られず，規則性が少ない固有値分布が得られた．

時刻 $t = 1.25$ における衝突する系における密度，圧力の固有モードを図 10 に示した．ここでは複数の固有値に対して同一の固有モードが存在しており，これを Type 1-4 として示した．また衝突しない系に対して密度・圧力の固有モードの組を図 11 に可視化し，得られた固有値の絶対値最小から 4 つの固有モードを示した．時刻 $t = 1.25$ の衝突系において複数の固有値に対して図 10 中の Type 1 の固有値モードが対応した (図 7)．密度の固有モードに対して，渦が存在するそれぞれの領域に馬蹄形の反応が見られた．この反応は Type 1,3 では逆位相，Type 2,4 では同位相のものとして観察された．時刻 $t = 2.5$ においては密度の固有モードにこのような反応は見られず，波面状の固有モードが観察された．衝突しない系の密度固有モードに対しても同様の固有モードが観察され，渦それぞれから波状に広がるようなモードが得られた．圧力の固有モードに対しては Type 4 のみが逆位相である，それ以外では全て同位相であった．

This document is provided by JAXA.

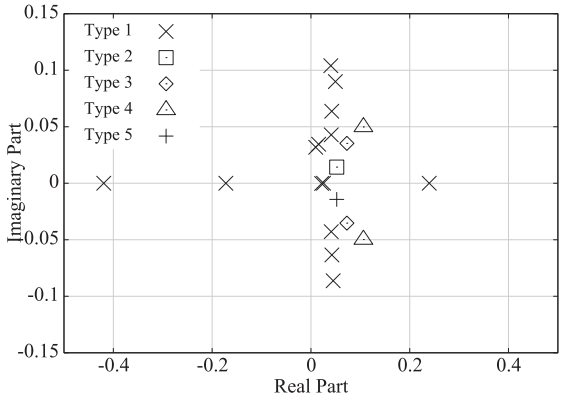

図 7　時刻 t = 1.25 における渦対の衝突が生じる系の絶対値が小さい順に 20 の固有値分布．図中の Type 1, · · · , 4 は図 10 で可視化された密度・圧力の固有モードの組を表し，Type 5 はこの中に該当するものがないことを示している．

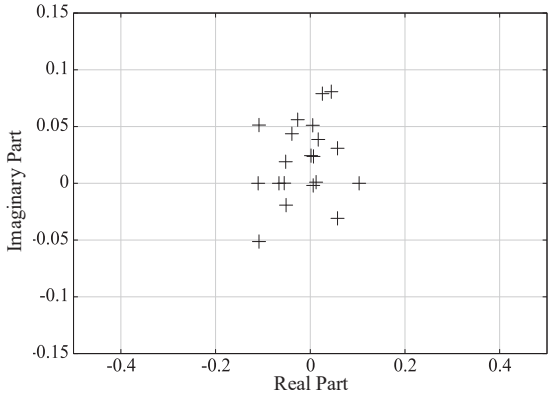

図 8　時刻 t = 2.5 における渦対の衝突が生じる系の絶対値が小さい順に 20 の固有値分布．

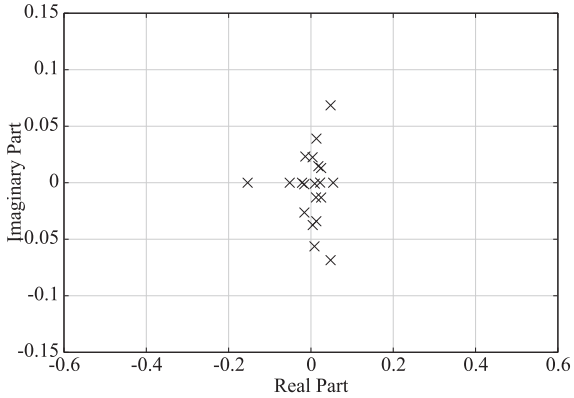

図 9　時刻 t = 1.25 における渦対の衝突が生じない系の絶対値が小さい順に 20 個の固有値分布．

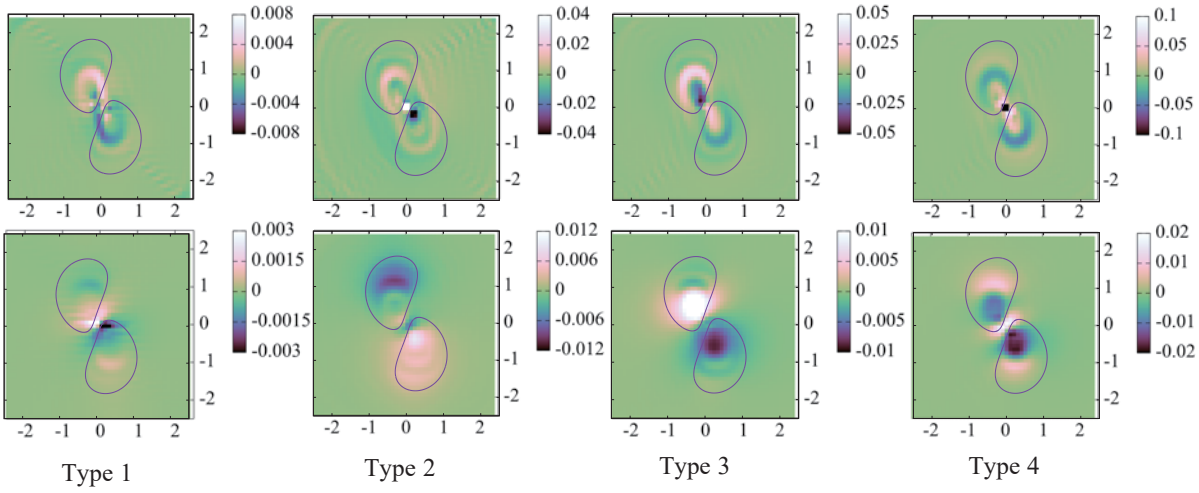

図 10　渦対の衝突が生じる系における密度 (上列)，圧力 (下列) の固有モードの可視化．基準とした理想流体の渦の概形を重ねて描写した．

This document is provided by JAXA.

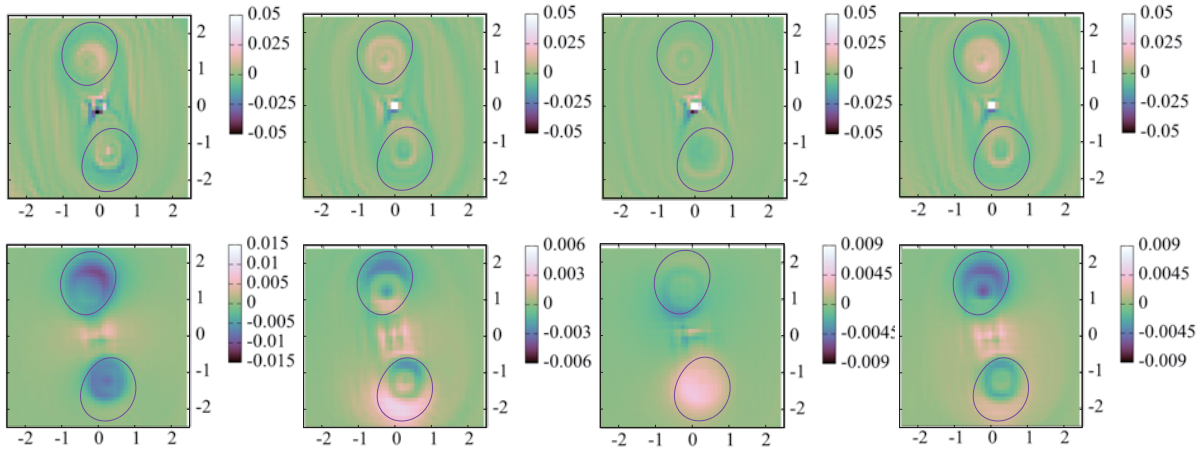

図 11　渦対が衝突しない系における密度 (上列)，圧力 (下列) の固有モードの可視化．得られた固有モードの中で絶対値最小から 4 つのモードを左端から順に並べて示した．基準とした理想流体の渦の概形を重ねて描写した．

4.6　考察

理想流体と圧縮性流体における渦対の運動は渦度においてよく類似した結果を示した．圧力分布は衝突後単一の谷を形成しており，渦対は混じり合わずに一体化して運動し，それに伴い密度，エントロピーの濃淡を形成すると考えられる．

時刻 $t = 1.25$ の衝突系において非衝突系の固有値分布と比較して分散が大きく実部が正の固有値が多く得られたことは，衝突系の方が系として変化が大きいことを反映していると考えられる．時刻 $t = 2.5$ において時刻 $t = 1.25$ で得られた規則的な固有値分布・密度モードにおける馬蹄形の反応が観察されなかったことから，特に密度の挙動において密度濃淡の形成は衝突が生じる時刻 $t = 1.25$ で決定されており，それ以降の時刻では一体化した渦の回転運動の慣性により高密度領域が成長することを示唆すると考えられる．

衝突する系の Type 3 の固有モードに対して局所的にみた熱力学的・流体力学的安定条件 $\partial_t \zeta$ を図 12 に示した．この $\partial_t \zeta$ の挙動は Type 4 で見られたが，その他の固有モードでは見られなかった．この安定条件におけるエントロピーの供給源の候補として，この固有モードで生じるバロクリニック・トルク $\nabla(\delta\rho + \rho) \times \nabla(\delta P + P)$，渦度 $\nabla \times \delta\mathbf{u} = \partial_x \delta v - \partial_y \delta u$ を合わせて図示した．バロクリニック・トルクと渦度はどちらも基準となる渦の根元付近で生じていることが分かる．ここで観察された渦度は根元付近で負の値をとるが，これは非粘性圧縮性流体に対する数値計算で中心付近に渦度が下がる領域が存在する (図 3, 4) 結果に適合していると考えられる．一方で Type 3 で見られた安定化 $\partial_t \xi$ は回転中心から渦の中心にかけて分布しており，バロクリニック・トルク，渦度が生成している領域とはやや異なることが観察された．これは基本状態の回転の影響であると考えられ，実際には渦の根元付近で生じるバロクリニック・トルクによるエントロピー生成の影響が基本状態の回転に伴い渦の中心付近に移送されることで系全体として安定化が行われていると考えられる．

5　結言

今回の研究で圧縮性の作用下での渦対の運動において次のような結論を得た．

1. 非圧縮性非粘性流体と圧縮性非粘性流体は良く類似した渦度の発展過程を取る．圧縮性流体に対しては渦度分布の変化や高密度・高エントロピー領域の形成など理想流体では見られない特徴を有する．
2. 固有値解析を行い渦対が衝突する時刻において密度，圧力に特徴的なモードが存在する．得られた固有モードに対する熱力学的な考察から，圧縮性の作用により渦の根元周辺で渦度変化に伴うエントロピー変化が生じており系全体の安定化に寄与している可能性がある．

本研究は渦の２次元的な挙動を調べたが，多くの興味深い物理現象は３次元空間で生じている．３次元に拡張したときどのような原理により２次元的な運動が変化し，実際の物理現象が生じるのか調べることが今後の研究方向として考えられる．

参考文献

[1] Susumu Goto, Yuta Saito, and Genta Kawahara. Hierarchy of antiparallel vortex tubes in spatially periodic turbulence at high Reynolds numbers. *Physical Review Fluids*, Vol. 2, No. 6, p. 064603,

This document is provided by JAXA.

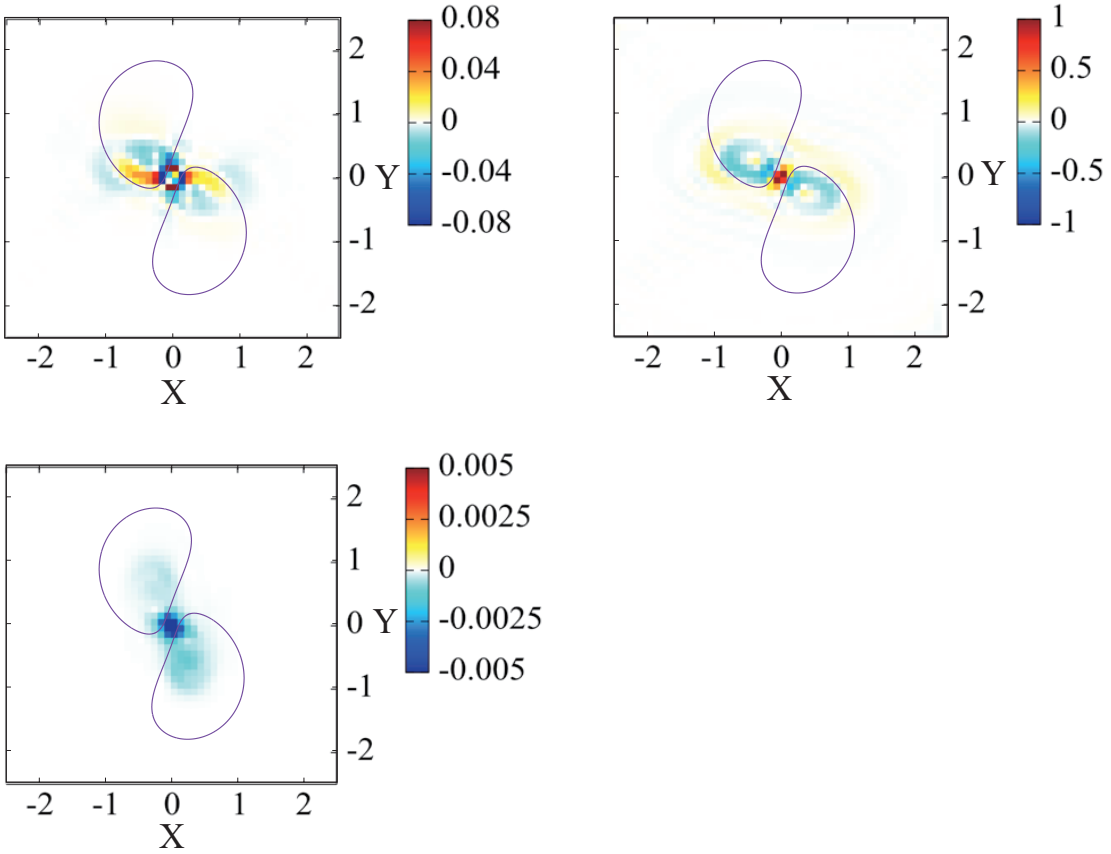

図 12　渦対が衝突する系におけるバロクリニックトルク $\nabla\rho\times\nabla P$ の可視化 (左上)，渦度の可視化 (右上). 図 10 中の Type 3 固有モードにおける $\partial_t\zeta$ の可視化 (左下)．また基準とした理想流体の渦の概形を重ねて示した．

2017.

[2] Dustin Kleckner and William TM Irvine. Creation and dynamics of knotted vortices. *Nature physics*, Vol. 9, No. 4, pp. 253–258, 2013.

[3] Philip G Saffman. A model of vortex reconnection. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 212, pp. 395–402, 1990.

[4] Christian E Laing, Renzo L Ricca, and L Sumners De Witt. Conservation of writhe helicity under anti-parallel reconnection. *Scientific reports*, Vol. 5, p. 9224, 2015.

[5] D Virk, Fazle Hussain, and RM Kerr. Compressible vortex reconnection. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 304, pp. 47–86, 1995.

[6] Bhimsen K Shivamoggi. Vortex stretching and reconnection in a compressible fluid. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Vol. 49, No. 4, p. 483, 2006.

[7] 大宮司久明, 三宅裕, 吉澤徴. 乱流の数値流体力学 モデルと計算法, 1998.

[8] Norman J Zabusky, MH Hughes, and KV Roberts. Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions. *Journal of computational physics*, Vol. 30, No. 1, pp. 96–106, 1979.

[9] H Daiguji, X Yuan, and Satoru Yamamoto. Stabilization of higher-order high resolution schemes for the compressible Navier-Stokes equations. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 1997.

[10] Satoru Yamamoto and H Daiguji. Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *Computers & Fluids*, Vol. 22, No. 2-3, pp. 259–270, 1993.

[11] Zhaojun Bai, James Demmel, Jack Dongarra, Axel Ruhe, and Henk van der Vorst. *Templates for the solution of algebraic eigenvalue problems: a practical guide*. SIAM, 2000.

[12] P Glansdorff, I Prigogine, 松本元, 竹山協三. 構造・安定性・ゆらぎ-その熱力学的理論-. みすず書房, 1977.

This document is provided by JAXA.