

宇宙航空研究開発機構研究開発資料

JAXA Research and Development Memorandum

飛行シミュレーションアルゴリズム

Flight Simulation Algorithm

柳原 正明

YANAGIHARA Masaaki

2021年2月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

目次

記号・添字・略語	2
1. はじめに	4
第1部 地球平面モデル	
2. 地球平面モデル	5
3. 座標系	6
3.1 地表面固定座標系	6
3.2 機体固定座標系	7
3.3 局所水平座標系(NED 座標系)	7
4. 6自由度シミュレーションと3自由度シミュレーション	8
5. 6自由度飛行シミュレーション	9
5.1 航空機ダイナミクスモデル	11
5.1(a) オイラー角版	
(1) 積分	12
(2) 方向余弦	13
(3) 対地状態量	13
(4) 対気状態量	13
(5) 有次元化	15
(6) カ・モーメント	15
(7) 非線形運動方程式	15
5.1(b) クォータニオン版	
(1) 積分	17
(2) 方向余弦	18
(3) 対地状態量	18
(4) 非線形運動方程式	18
5.2 環境モデル	19
(1) 重力モデル	19
(2) 風モデル	19
(3) 大気モデル	19
5.3 機体モデル	19
(1) 空力モデル	19
(2) エンジンモデル	19
6. 3自由度シミュレーション	20
6.1 航空機ダイナミクスモデル	20
(1) 積分	21
(2) 対地状態量(その1)	22
(3) 対気状態量	22
(4) 対地状態量(その2)	23
(5) 方向余弦	25
(6) 対地状態量(その3)	25
(7) 有次元化	25

(8) 力	25
(9) 非線形運動方程式	25
7. シミュレーション初期値の設定	27
7.1 機体状態量からの状態変数初期値の導出	27
7.2 釣り合い計算	28

第2部 地球回転楕円体モデル

8. 地球回転楕円体モデル	29
9. 座標系	30
9.1 ECI (Earth Centered Inertial) 座標系	30
9.2 ECEF (Earth Centered, Earth Fixed) 座標系	30
9.3 局所水平座標系	30
9.4 機体軸系	31
10. 慣性座標系を基準とした運動計算	32
11. 6自由度飛行シミュレーション	33
11.1 航空機ダイナミクスモデル	34
(1) 積分	36
(2) 対地状態量(その1)	36
(3) 方向余弦	36
(4) 対地状態量(その2)	37
(5) 対気状態量	38
(6) 有次元化	39
(7) カ・モーメント	40
(8) 非線形運動方程式	40
11.2 環境モデル	40
(1) 重力モデル	40
(2) 風モデル	41
(3) 大気モデル	41
11.3 機体モデル	41
(1) 空力モデル	41
(2) エンジンモデル	41
12. 3自由度シミュレーション	42
12.1 航空機ダイナミクスモデル	42
(1) 積分	43
(2) 対地状態量(その1)	43
(3) 対気状態量	44
(4) 対地状態量(その2)	45
(5) 方向余弦	46
(6) 対地状態量(その3)	46
(7) 有次元化	47
(8) 力	47
(9) 非線形運動方程式	47

13. シミュレーション初期値の設定	48
13.1 機体状態量からの状態変数初期値の導出	48
13.2 釣合い計算	50
14. おわりに.....	51
謝辞	51
参考文献.....	51
付録1 方向余弦, クォータニオンとオイラー角	52
付録2 局所水平座標, 速度軸と機体軸.....	55
付録3 ECEF座標と経度・緯度・高度	61

飛行シミュレーションアルゴリズム

柳原 正明^{*1}

Flight Simulation Algorithm

YANAGIHARA Masaaki ^{*1}

ABSTRACT

From the initial stage to the final stage of aviation technology development, flight simulation performed by solving the equation of motion with a computer plays an important role. In recent years, general-purpose programs for that purpose have become easily available, but when performing simulations for the purpose of research and development, it is important to fully understand the contents and build the simulation program by oneself. To help in such cases, this memorandum provides a flight simulation algorithm based on a flat earth model such as for aircraft flying short distances, and those based on a spheroidal earth model that targets aircraft flying between continents, space transportation systems, and so on.

Keywords : Flight Simulation, Airplane, Flat Earth Model, Spheroidal Earth Model

概要

航空技術開発の初期段階から最終段階まで、コンピュータにより運動方程式を解くことで行われる飛行シミュレーションが重要な役割を持つ。近年、そのための汎用プログラムが簡単に手に入る時代になっているが、研究開発を目的としてシミュレーションを行う場合には、その内容を十分に理解し、自らシミュレーションプログラムを構築することも重要であると考えられる。本稿は、そのような場合の助けになるよう、近距離飛行を行う旅客機などを対象とした地球平面モデルに基づく飛行シミュレーションと、大陸間飛行を行う航空機や宇宙往還機を対象とした地球回転楕円体モデルに基づく飛行シミュレーションの演算アルゴリズムについて纏めたものである。

^{*} 2020年12月4日受付 (Received December, 4 2020)

^{*1} 航空技術部門 次世代航空イノベーションハブ (Next Generation Aeronautical Innovation Hub Center, Aeronautical Technology Directorate)

記号

注) 赤字は地球平面モデルの場合、青字は地球回転楕円体モデルの場合

a, b, e	: 地球の赤道半径, 極半径 及び 離心率
C_L, C_D, C_Y	: 揚力, 抗力, 横力 の各空力係数
C_l, C_m, C_n	: ローリング, ピッチング, ヨーイング の各空力モーメント係数
c_s	: 音速
\bar{c}, b, S	: 機体の縦 及び 横・方向基準長, 代表面積 (平均空力翼弦 及び 翼幅, 翼面積)
g	: 重力加速度 (地球平面モデル)
$\mathbf{g}, g_x, g_y, g_z$: 重力(引力+遠心力)加速度ベクトル 及び その局所水平座標成分
$\mathbf{g}', g'_x, g'_y, g'_z$: 重力(遠心力含まず=引力)加速度ベクトル 及び その局所水平座標成分
H	: 機体重心の高度
H_{CG0}	: 地上静止時の機体重心の地面からの高度
H_{RW}	: 滑走路標点の高度
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	: 機体慣性モーメント (機体軸まわり)
I_{yz}, I_{zx}, I_{xy}	: 機体慣性乗積 (機体軸まわり)
L, D	: 揚力, 抗力
L, M, N	: 全外力モーメント (機体重心まわり, 機体軸成分)
L_a, M_a, N_a	: 空力モーメント (機体重心まわり, 機体軸成分)
L_T, M_T, N_T	: エンジンモーメント (機体重心まわり, 機体軸成分)
m	: 機体質量
M	: マッハ数
P, Q, R	: 機体の慣性(対地もしくは対 ECI 座標系)角速度 (機体軸成分)
P_a, Q_a, R_a	: 機体の対気角速度 (機体軸成分)
$\hat{P}_a, \hat{Q}_a, \hat{R}_a$: 機体の対気角速度の無次元化量 (機体軸成分)
P_G, Q_G, R_G	: 機体の対地(対 ECEF 座標系)角速度 (機体軸成分)
P_W, Q_W, R_W	: 風の角速度 (機体軸成分)
q_∞	: 動圧
q_1, q_2, q_3, q_4	: クォータニオン (局所水平座標系もしくは ECI 座標系⇒機体軸系)
T	: 大気温度(静温)
t	: 時間
T_{HB}	: 方向余弦行列 (局所水平座標系 ⇒ 機体軸系)
T_{SB}	: 方向余弦行列 (ECI 座標系 ⇒ 機体軸系)
T_{SH}	: 方向余弦行列 (ECI 座標系 ⇒ 局所水平座標系)
U, V, W	: 機体重心の慣性(対地もしくは対 ECI 座標系)速度 (機体軸成分)
U_a, V_a, W_a	: 機体重心の対気速度 (機体軸成分)
U_{aH}, V_{aH}, W_{aH}	: 機体重心の対気速度 (局所水平座標成分)
$U_{a_{ref}}, V_{a_{ref}}, W_{a_{ref}}$: 機体基準点の対気速度 (機体軸成分)
U_H, V_H, W_H	: 機体重心の慣性(対地もしくは対 ECI 座標系)速度 (局所水平座標成分)
U_{HG}, V_{HG}, W_{HG}	: 機体重心の対地(対 ECEF 座標系)速度 (局所水平座標成分)
U_S, V_S, W_S	: 機体重心の慣性(対 ECI 座標系)速度 (ECI 座標成分)
U_W, V_W, W_W	: 風速 (定常風+突風) (機体軸成分)
U_{WH}, V_{WH}, W_{WH}	: 定常風の風速 (局所水平座標成分)
V_{EAS}	: 等価大気速度の大きさ
V_G, V_G	: 対地速度(ベクトル)とその大きさ
V_S, V_S	: 対 ECI 座標系速度(ベクトル)とその大きさ
V_{TAS}, V_{TAS}	: 真対気速度(ベクトル)とその大きさ
X, Y, Z	: 全外力 (機体軸成分)
x, y, z	: 機体重心の地表面固定座標

X_a, Y_a, Z_a	: 空気力 (機体軸成分)
x_B, y_B, z_B	: 機体軸
x_{CG}, y_{CG}, z_{CG}	: 機体基準点から見た重心位置 (後方, 上方, 右方 正)
x_H, y_H, z_H	: 局所水平座標
x_{HG}, y_{HG}, z_{HG}	: 地表面局所水平座標
x_{HR}, y_{HR}, z_{HR}	: 滑走路 NED 座標
x_R, y_R, z_R	: 滑走路座標
x_S, y_S, z_S	: 機体重心の ECI 座標
X_T, Y_T, Z_T	: エンジン推力 (機体軸成分)
α, β	: 迎角, 横滑り角
$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$: 迎角, 横滑り角変化率の無次元化量
γ, ξ	: (対地)飛行経路角, 方位角
γ_a, ξ_a	: 対気飛行経路角, 方位角
$\delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_t$: エルロン, エレベータ, ラダー, 推力レバーの各角度
Δt	: 数値積分の時間幅
η, λ	: 機体重心の(地理)緯度, 経度
η_0, λ_0	: 地表基準点の(地理)緯度, 経度
μ	: 粘性係数
ν	: 動粘性係数
ρ, ρ_0	: 大気密度, 海面上大気密度
Φ, Θ, Ψ	: オイラー角 (局所水平座標系⇒機体軸系)
Ψ_G	: 地表面固定座標 x 軸の方位角
Ψ_{RW}	: 滑走路方位角
ω	: 地球自転角速度

添字

a	: 空気力, 空力モーメント
a, ref	: 対気状態量(重心), (機体基準点)
c	: 誘導・制御コマンド
err	: 誤差
G	: 対地(対 ECEF 座標系)状態量
H	: 局所水平座標成分
RW	: 滑走路
S	: 対 ECI 座標系状態量 もしくは ECI 座標成分
T	: エンジン推力, モーメント
x, y, z	: x, y, z 軸成分
w	: 風
0	: 初期値 (ρ_0 を除く)
\sim	: 無次元化量

略語

ECEF	: Earth Centered, Earth Fixed (地球中心・地球固定)
ECI	: Earth Centered Inertial (地球中心慣性)
NED	: North-East-Down (北-東-下)

1. はじめに

航空技術開発の初期段階から最終段階まで、コンピュータにより運動方程式を解くことで行われる飛行シミュレーションが重要な役割を持つ。近年は、このような飛行シミュレーションを行うための汎用ツールが簡単に手に入る時代になっているが、研究開発を目的としてシミュレーションを行う場合、計算結果を解析するだけでなく、シミュレーション演算のアルゴリズムを十分に理解し、自らシミュレーションプログラムを構築することも重要である。本稿では、そのような場合の助けになるよう、飛行シミュレーションの演算アルゴリズムについて纏める。

航空機の飛行シミュレーションを行う場合、地球は公転・自転を行っているため、地球に固定された座標系は慣性座標系ではない。また、地球表面は平面ではないため、その曲率も考慮する必要がある。しかし、限られた飛行領域を飛行する航空機では、地表面を平面と近似し、かつ地球の公転・自転を無視し、地表面に固定された座標系を慣性座標系と見なしても、シンプルな演算で、実用上、十分な精度のシミュレーション結果が得られる。

一方、大陸間移動などの長距離飛行、さらには宇宙往還機などのシミュレーションを行う場合には地球平面モデルを用いると誤差が大きく、使用することはできない。これらの用途に使用可能とするには、地球を回転楕円体などでモデル化し、かつ地球の自転を考慮することが必要である。

以上を勘案し、本稿の第1部では、近距離飛行を行う旅客機などを対象とした地球平面モデルに基づく飛行シミュレーションを、第2部では、大陸間横断を行う航空機や宇宙往還機を対象とした地球回転楕円体モデルに基づく飛行シミュレーションを、それぞれ扱う。なお、後者については、旧航空宇宙技術研究所資料 TM-594「宇宙往還機飛行シミュレーションプログラム」(1988年8月)¹⁾の改訂版として纏めたものである。

第1部 地球平面モデル

2. 地球平面モデル

地球平面モデルでは、

- ・ 本来は曲面である地球表面を平面と近似
- ・ 地球の公転及び自転を無視(公転及び自転による地表面の運動を等速直線運動と近似)
 ⇒ 地表面に固定された平面座標系(例えば x 軸を経線, y 軸を緯線に対応)は慣性座標系

運動計算はシンプルであり、近距離かつ短時間の飛行を対象とした飛行シミュレーションには有効。

図2-1に、地球平面モデルのイメージを示す。(曲面を平面に貼り付けたイメージ)

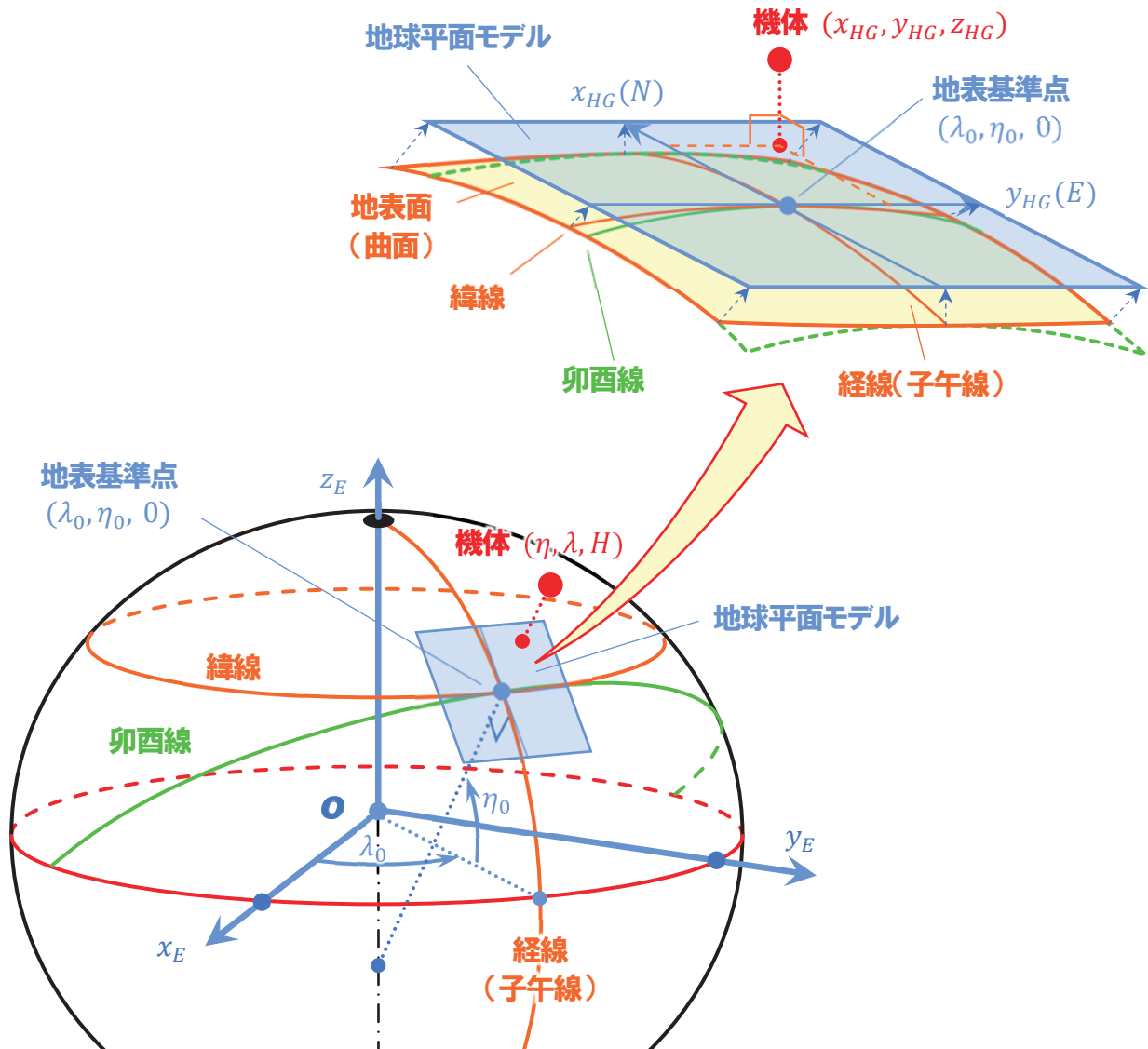


図 2-1 地球平面モデル

3. 座標系

3.1 地表面固定座標系

原点: 地表面上の任意の点, x - y 平面: 地表面内, z 軸: 地表面に鉛直下向き

- ・ 地球の公転・自転を無視 \Rightarrow 地表面は慣性空間に対して固定 \Rightarrow 地表面固定座標系は慣性座標系
- ・ 機体の位置の基準

【例1】 地表面局所水平座標系 $[x_{HG}, y_{HG}, z_{HG}]$ (図 2-1)

原点: 任意の地表基準点, x_{HG} 軸: 北向き(N) (y_{HG} 軸: 東向き(E), z_{HG} 軸: 鉛直下向き(D))

【例2】 滑走路 NED 座標系 $[x_{HR}, y_{HR}, z_{HR}]$ (地表面局所水平座標系の 1 種) (図 3.1-1)

原点: 滑走路基準点, x_{HR} 軸: 北向き(N) (y_{HR} 軸: 東向き(E), z_{HR} 軸: 鉛直下向き(D))

【例3】 滑走路軸 (Runway Axes) $[x_R, y_R, z_R]$ (図 3.1-1)

原点: 滑走路基準点, x_R 軸: 滑走路方向向き

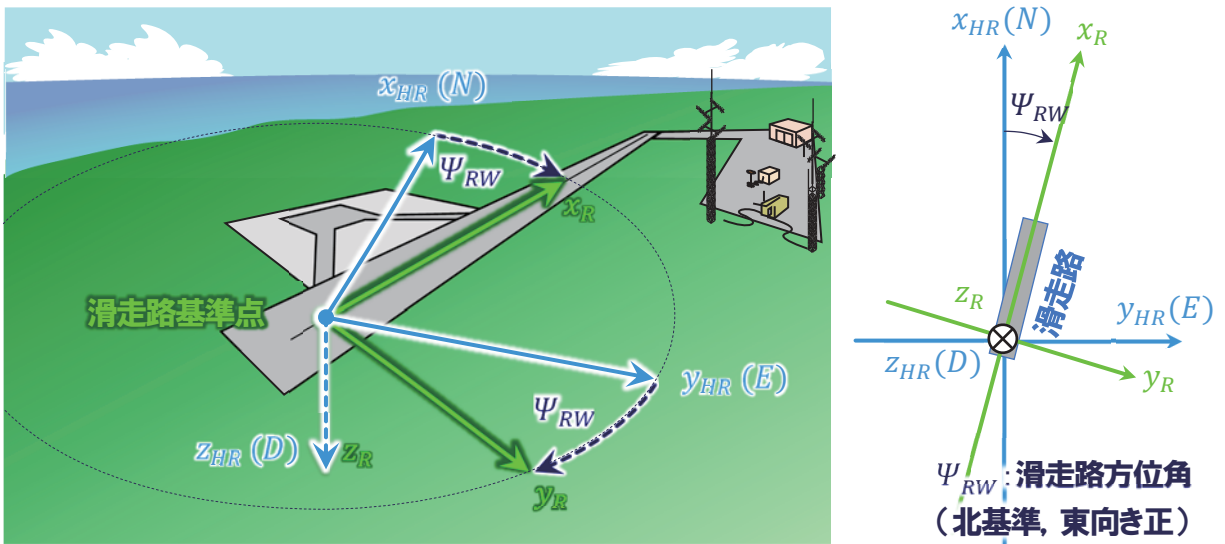


図 3.1-1 滑走路NED座標系と滑走路軸

3.2 機体固定座標系

原点: 機体重心, x - z 平面: 機体対称面, x 軸: 前方向き, y 軸: 右翼方向

- ・ 機体とともに加速並進・回転 \Rightarrow 非慣性座標系
- ・ 機体の速度, 角速度ベクトルの成分表示に使用

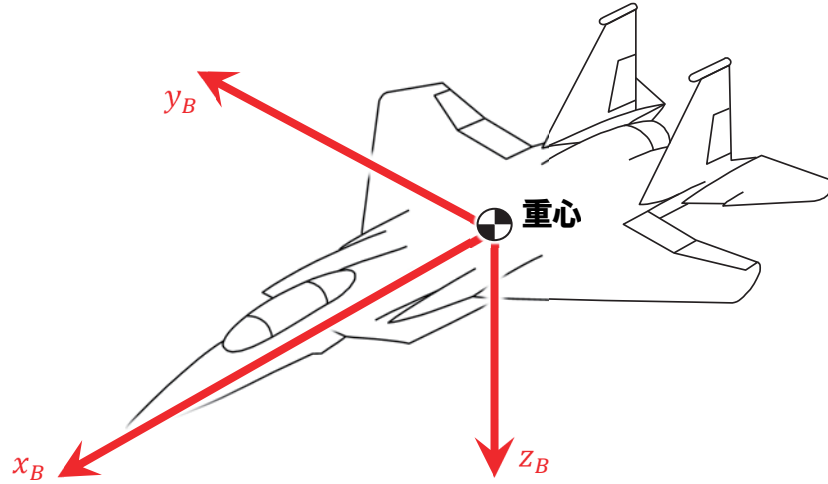


図 3.2-1 機体固定座標系

【例1】機体軸 (Body Axes) [x_B, y_B, z_B] (図 3.2-1)

x 軸: 機体製造時の基準前後軸方向

【例2】安定軸 (Stability Axes)

x 軸: 釣合い飛行(対称飛行)時の速度ベクトル方向 (釣合い飛行から外れた後も, 軸は機体固定)

3.3 局所水平座標系(NED座標系)

原点: 機体重心, x 軸: 北向き(N), y 軸: 東向き(E) (z 軸: 鉛直下向き(D)) (図 3.3-1)

- ・ 機体とともに加速並進 \Rightarrow 非慣性座標系, 回転はせず, 常に N/E/D 方向
- ・ 機体の姿勢の基準

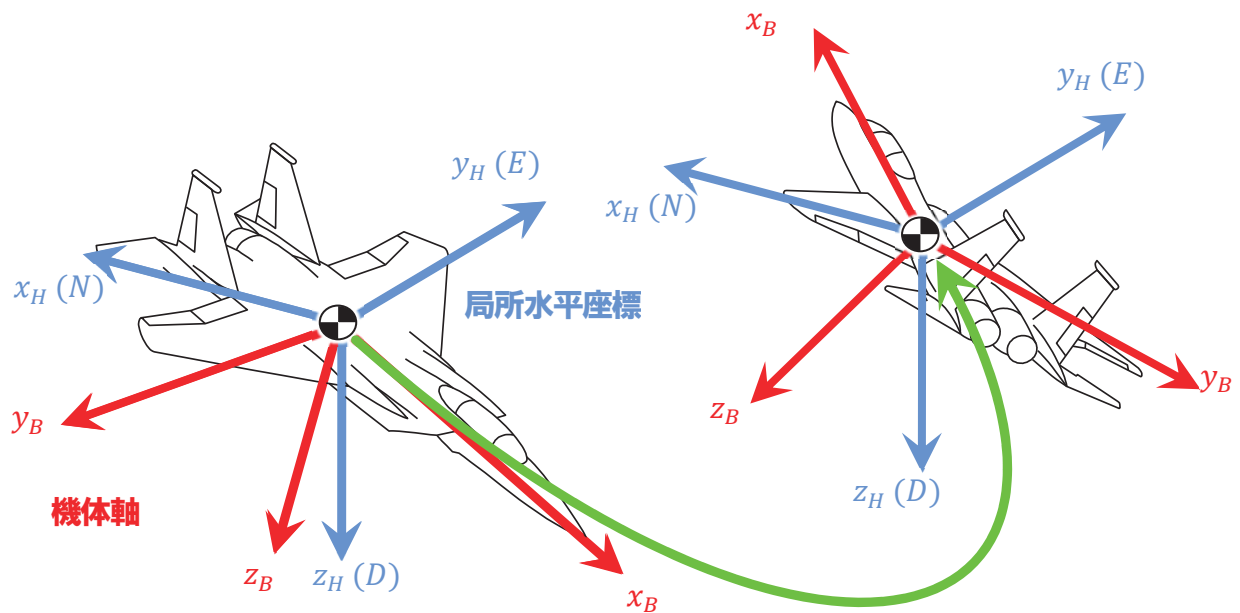


図 3.3-1 局所水平座標系

4. 6自由度シミュレーションと3自由度シミュレーション

6自由度シミュレーションでは、飛行制御を行う際に誘導系と制御系の両方の設計が必要である。設計した誘導制御系の性能が不十分な場合、誘導系と制御系の両方の設計変更が必要のため、作業量は膨大となる。そこで誘導系だけの設計・評価用として、誘導系からの姿勢コマンドは制御系により完全に達成されるものと仮定し、制御系部と機体回転運動を解く運動計算部はスキップした3自由度シミュレーションプログラムを別途作成し、誘導系だけの設計・評価に活用する。この場合の運動計算は回転運動を含まないため、質点の運動方程式となる。3自由度シミュレーションを用いて誘導系だけの設計が完了すれば、続いて制御系の設計を行い、6自由度シミュレーションにより誘導・制御系の総合評価を行う手順となる。このように手順を2段階とすることにより、誘導制御系設計の効率化が実現する。

図 4-1 に6自由度シミュレーションと3自由度シミュレーションのイメージを示す。

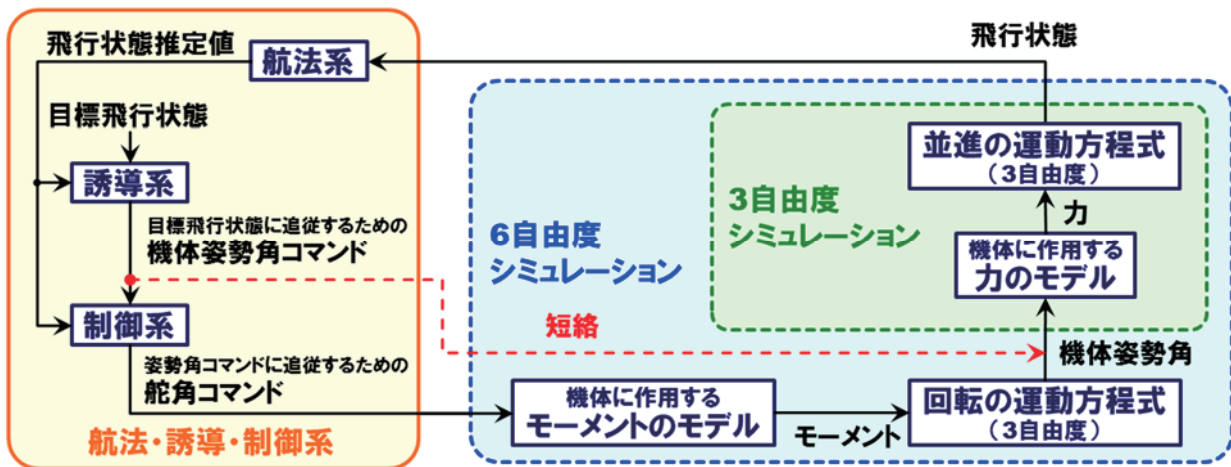
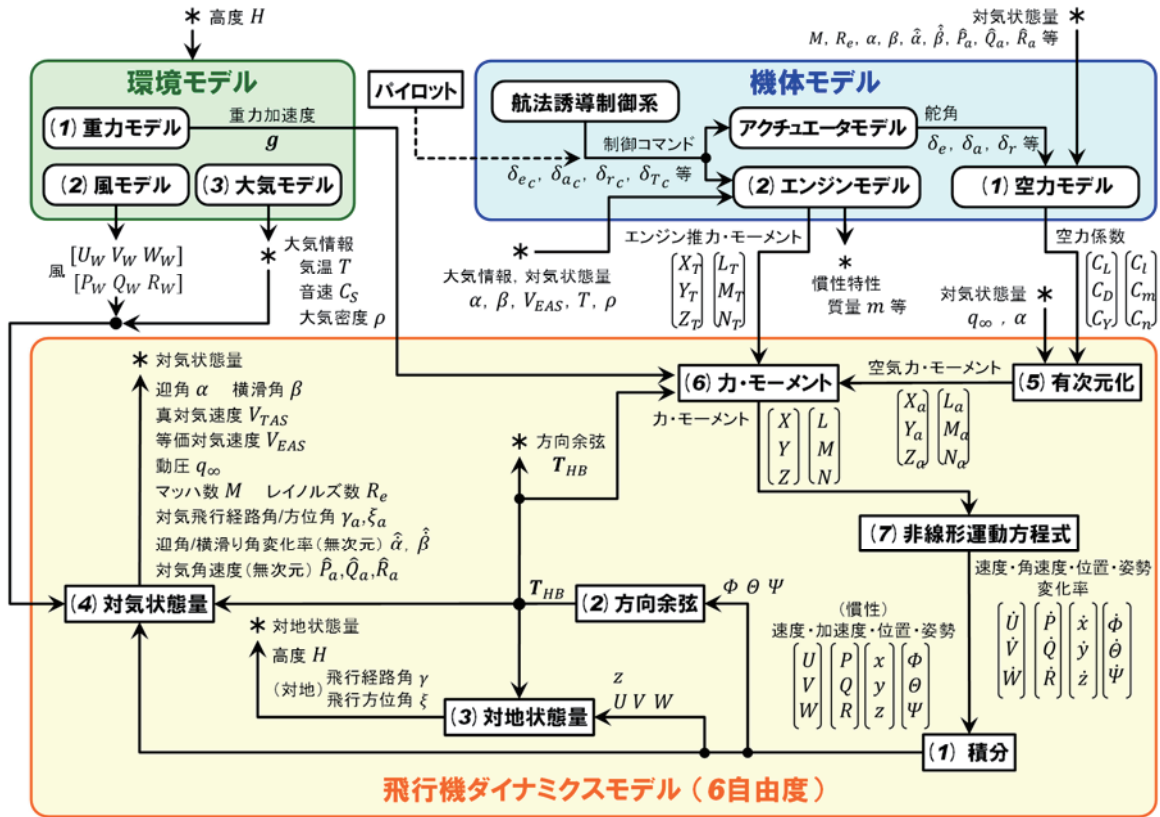


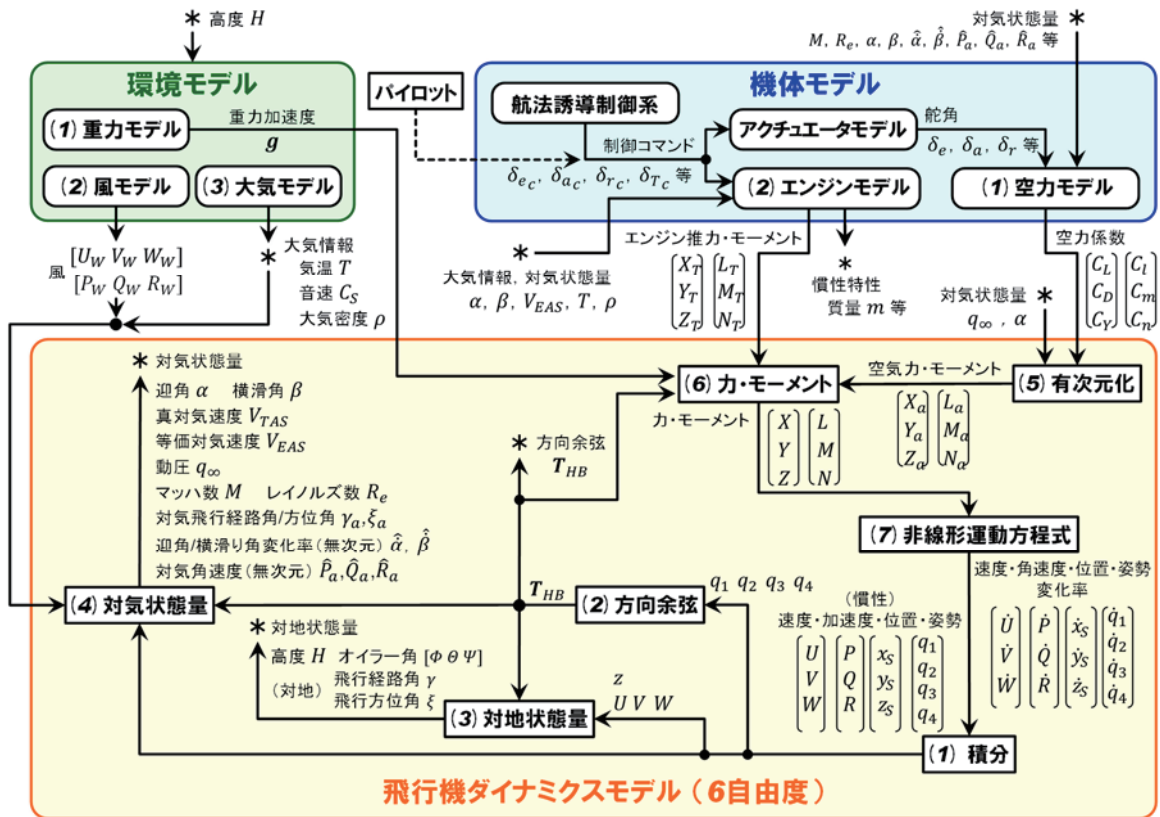
図 4-1 6自由度シミュレーションと3自由度シミュレーションのイメージ

5. 6自由度飛行シミュレーション

6自由度シミュレーションの流れを図 5-1に示す。



(a) オイラー角版



(b) クォータニオン版

図 5-1 6自由度シミュレーションの流れ

(a)図では「機体ダイナミクスモデル」において、機体姿勢を表す変数としてオイラー角(ϕ, θ, ψ)を用いているが、オイラー角は、 $\theta = \pm 90[\text{deg}]$ が特異点になるという問題がある。旅客機やジェネラルアビエーションを扱う限り、通常の飛行では局所水平座標系に対して $\theta = \pm 90[\text{deg}]$ にはならないため問題ないが、戦闘機やアクロバット機を対象とする場合や、第2部の地球回転楕円体モデルによる解析では、 θ が $\pm 90[\text{deg}]$ あるいはそれに近い値をとることが十分にあり得るため、(b)図に示すように、特異点を持たないクォータニオンを用いたダイナミクスを用意する。

どちらの版も、アルゴリズムは、「航空機ダイナミクスモデル」、「環境モデル」及び「機体モデル」から構成される。各構成要素ブロック中の(数字)は、本章各節の項番号と対応している。

「航空機ダイナミクスモデル」は、「機体モデル」から出力される外力及びモーメントと「環境モデル」から出力される重力を合成し、機体に作用する全外力とモーメントを算出する。そして、この全外力とモーメントを入力として一般的な剛体の6自由度運動を慣性座標系を基準として解くものであり、運動方程式自体は航空機に限らず汎用的なものである。

「環境モデル」は、大気モデル、風モデル及び重力モデルより構成され、いずれも航空機重心の高度を入力として、重力加速度や大気密度などの各種の環境パラメータを出力する。

「機体モデル」は、シミュレーションの対象とする機体に応じてモデルを作成し、空力6分力係数、エンジン推力・モーメント及び慣性特性(質量、慣性モーメント、慣性乗積、重心位置)を出力する。

以下、5.1節～5.3節に、これら3つの構成要素について、詳細に述べる。

5.1 航空機ダイナミクスモデル

5.1(a) オイラー角版

状態変数として、以下の12個の対慣性座標変数を設定する。

- ・ 速度 $\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$: 機体重心の慣性(対地)速度 (機体軸成分)
- ・ 角速度 $\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$: 機体の慣性(対地)角速度 (機体軸成分)
- ・ 位置 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$: 機体重心の慣性座標系(地表面固定座標系)での座標
- ・ 姿勢 $\begin{bmatrix} \Phi \\ \theta \\ \Psi \end{bmatrix}$: 局所水平座標系から機体軸へのオイラー角

図 5.1-1 に、各状態変数のイメージを示す。

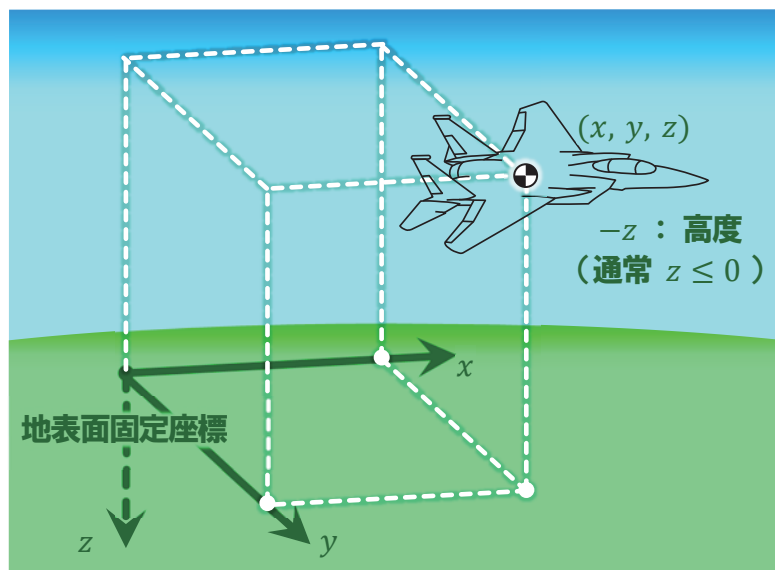
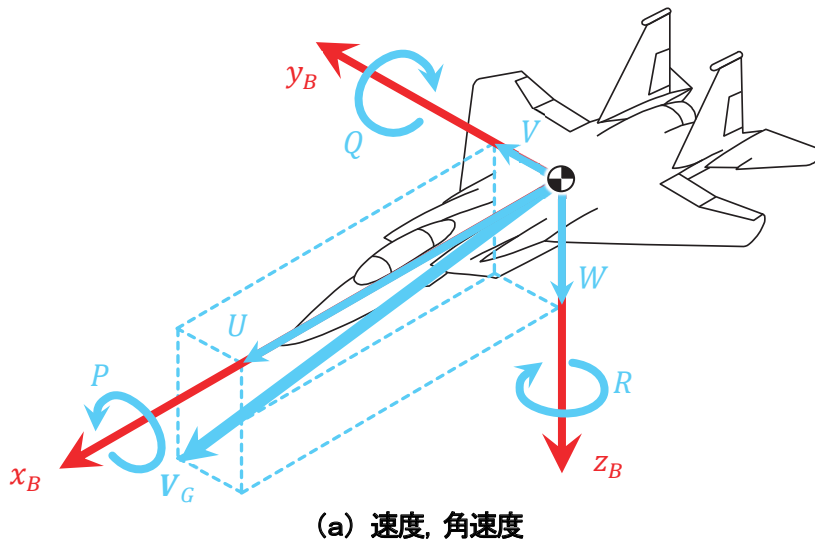


図 5.1-1 6自由度シミュレーションの状態変数(続く)

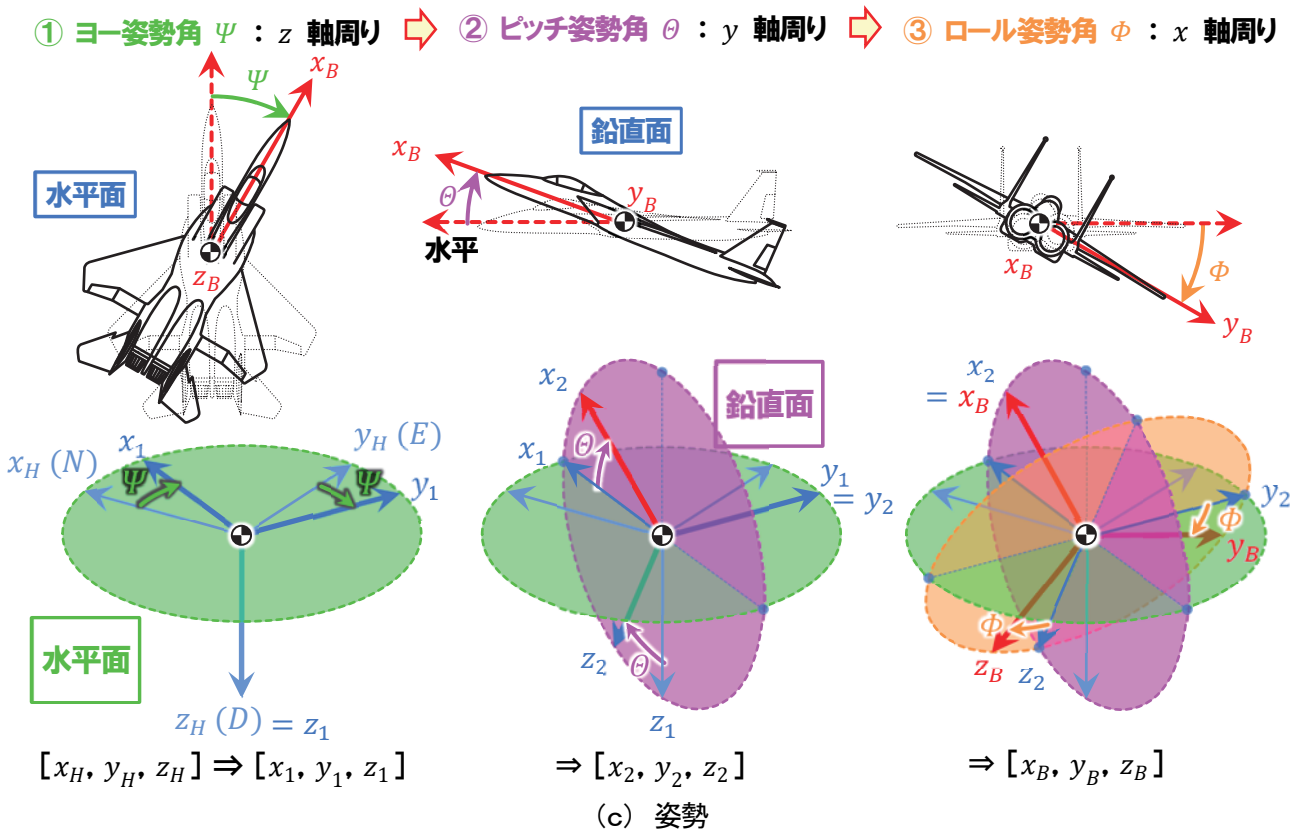


図 5.1-1 6自由度シミュレーションの状態変数(続き)

「機体モデル」及び「環境モデル」から出力される情報を元に機体に作用する力及びモーメントを求め、それらを運動方程式に代入することによって状態変数の時間変化率を計算し、それを数値積分することによって状態変数の更新値を求める。こうして得られた12個の状態変数より、対地状態量、対気状態量などの必要情報を求める。以下、図(a)の各演算モジュールについて述べる。各モジュールの入力を赤字、出力を青字で示す。

(1) 積分

時間をカウントアップし、更新後の時間における状態変数の値を、運動方程式より出力される状態変数の変化率を数値積分することにより求める。

時間

$$t = t + \Delta t \tag{5.1-1}$$

機体重心の慣性(対地)速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} dt \tag{5.1-2}$$

機体の慣性(対地)角速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} dt \tag{5.1-3}$$

機体重心の地表面固定座標

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} dt \tag{5.1-4}$$

局所水平座標系から機体軸へのオイラー角

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} dt \quad (5.1-5)$$

ただし、7.1節に示すように、演算ループの初回のみ、積分演算は行わず、時間及び12個の状態変数に初期値を出力する。

(2) 方向余弦

方向余弦行列, 局所水平座標系 \Rightarrow 機体軸系

$$T_{HB} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (5.1-6)$$

(3) 対地状態量

高度

$$H = -z \quad (5.1-7)$$

ここで、高度 H を用いて[環境モデル]([重力モデル], [風モデル] 及び [大気モデル])を実行する。

機体重心の対地速度 (局所水平座標成分)

$$\begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix} = T_{HB}^T \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (5.1-8)$$

飛行経路角, 飛行方位角

$$\gamma = \tan^{-1} \left(-W_H / \sqrt{U_H^2 + V_H^2} \right) \quad (-\pi/2 \leq \gamma \leq +\pi/2) \quad (5.1-9)$$

$$\xi = \tan^{-1}(V_H / U_H) \quad (-\pi < \xi \leq +\pi) \quad (5.1-10)$$

(4) 対気状態量

まず、迎角及び横滑り角を求める。

機体重心の対気速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} U_a \\ V_a \\ W_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_w \\ V_w \\ W_w \end{bmatrix} \quad (5.1-11)$$

機体の対気角速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} P_a \\ Q_a \\ R_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_w \\ Q_w \\ R_w \end{bmatrix} \quad (5.1-12)$$

迎角及び横滑り角は、機体の回転運動の影響によって局所的に誘導される速度のため、機体上の場所によって異なる。機体の重心位置は飛行毎に、さらには燃料消費により飛行中にも変わるので、空力特性を表現するために必要な迎角及び横滑り角は、重心ではなく、機体上に固定の機体基準点を設け、その点での値として定義される。これを求めるため、まず機体基準点の対気速度を求め、それより迎角及び横滑り角を求める。

機体基準点の対気速度（機体軸成分）

$$\begin{bmatrix} U_{a_{ref}} \\ V_{a_{ref}} \\ W_{a_{ref}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_a + R_a y_{CG} + Q_a z_{CG} \\ V_a - P_a z_{CG} + R_a x_{CG} \\ W_a - Q_a x_{CG} - P_a y_{CG} \end{bmatrix} \quad (5.1-13)$$

ここで, $[x_{CG}, y_{CG}, z_{CG}]$ は機体基準点から見た重心位置（後方, 上方, 右方 正）

真対気速度

$$V_{TAS} = \sqrt{U_{a_{ref}}^2 + V_{a_{ref}}^2 + W_{a_{ref}}^2} \quad (5.1-14)$$

迎角

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{W_{a_{ref}}}{U_{a_{ref}}} \right) \quad (5.1-15)$$

横滑り角

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{V_{a_{ref}}}{V_{TAS}} \right) \quad (5.1-16)$$

次に, 環境モデルから出力される大気情報を用いて, 真対気速度に係るパラメータを求める.

マッハ数

$$M = \frac{V_{TAS}}{c_s} \quad (5.1-17)$$

レイノルズ数

$$Re = \frac{V_{TAS} \cdot l}{\nu} \left(= \frac{\rho \cdot V_{TAS} \cdot l}{\mu} \right) \quad (5.1-18)$$

ここで, l は特性長さ

動圧

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho V_{TAS}^2 \quad (5.1-19)$$

等価対気速度

$$V_{EAS} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} V_{TAS} \quad (5.1-20)$$

対気飛行経路角, 方位角

$$\begin{bmatrix} U_{a_H} \\ V_{a_H} \\ W_{a_H} \end{bmatrix} = T_{HB}^T \begin{bmatrix} U_{a_{ref}} \\ V_{a_{ref}} \\ W_{a_{ref}} \end{bmatrix} \quad (5.1-21)$$

$$\gamma_a = \sin^{-1} \left(\frac{-W_{a_H}}{V_{a_H}} \right) \quad (-\pi/2 \leq \gamma_a \leq +\pi/2) \quad (5.1-22)$$

$$\xi_a = \tan^{-1} \left(\frac{V_{a_H}}{U_{a_H}} \right) \quad (-\pi < \xi_a \leq +\pi) \quad (5.1-23)$$

最後に、空力モデルの入力となる迎角及び横滑り角変化率と、対気角速度の無次元化量を求める。

迎角, 横滑り角変化率無次元量

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} / \left(\frac{2V_{TAS}}{\bar{c}} \right) \\ \dot{\beta} / \left(\frac{2V_{TAS}}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (5.1-24)$$

ここで、 $\hat{\alpha}$ 及び $\hat{\beta}$ は、 α 及び β を数値微分することにより求める。

対気角速度無次元量（機体軸成分）

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_a \\ \hat{Q}_a \\ \hat{R}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_a / \left(\frac{2V_{TAS}}{b} \right) \\ Q_a / \left(\frac{2V_{TAS}}{\bar{c}} \right) \\ R_a / \left(\frac{2V_{TAS}}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (5.1-25)$$

ここで、[機体モデル]を実行し、空力6分力係数、エンジン推力・モーメント及び慣性特性(質量, 慣性モーメント, 慣性乗積, 重心位置)を求める。

(5) 有次元化

機体モデルから出力される空力6分力係数を、上で求めた動圧を用いて有次元化した上で、機体軸成分に変換する。

揚力, 抗力, 横力

$$\begin{bmatrix} L \\ D \\ Y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_L q_\infty S \\ C_D q_\infty S \\ C_Y q_\infty S \end{bmatrix} \quad (5.1-26)$$

空気力（機体軸成分）

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha L - \cos \alpha D \\ Y_a \\ -\cos \alpha L + \sin \alpha D \end{bmatrix} \quad (5.1-27)$$

空気モーメント（機体重心まわり, 機体軸成分）

$$\begin{bmatrix} L_a \\ M_a \\ N_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_l q_\infty S b \\ C_m q_\infty S \bar{c} \\ C_n q_\infty S b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -z_{CG} & -y_{CG} \\ z_{CG} & 0 & -x_{CG} \\ y_{CG} & x_{CG} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} \quad (5.1-28)$$

(6) カ・モーメント

機体にかかる全ての力とモーメントを求め、機体軸系で出力する。

全外力（機体軸成分）

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} + \mathbf{T}_{HB} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (5.1-29)$$

全外力モーメント（機体重心まわり, 機体軸成分）

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a \\ M_a \\ N_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{bmatrix} \quad (5.1-30)$$

(7) 非線形運動方程式

状態変数の変化率を運動方程式に従い求める。

機体重心の慣性(対地)速度の変化率 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X/m \\ Y/m \\ Z/m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} QW - RV \\ RU - PW \\ PV - QU \end{bmatrix} \quad (5.1-31)$$

機体の慣性(対地)角速度の変化率 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_{zz}L + I_{zx}N - (I_{zz}^2 - I_{yy}I_{zz} + I_{zx}^2)QR + I_{zx}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})PQ}{I_{xx}I_{zz} - I_{zx}^2} \\ \frac{M + (I_{zz} - I_{xx})RP + I_{zx}(R^2 - P^2)}{I_{yy}} \\ \frac{I_{zx}L + I_{xx}N + (I_{xx}^2 - I_{xx}I_{yy} + I_{zx}^2)PQ - I_{zx}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})QR}{I_{xx}I_{zz} - I_{zx}^2} \end{bmatrix} \quad (5.1-32)$$

機体重心の地表面固定座標の変化率 (地表面固定座標成分)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{HB}^T \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (5.1-33)$$

局所水平座標系から機体軸へのオイラー角の変化率

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (5.1-34)$$

5.1 (b) クォータニオン版

状態変数として、オイラー角版の12個の変数の内、オイラー角の代わりにクォータニオンを用いる。

- ・ 速度 $\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$: 機体重心の慣性(対地)速度 (機体軸成分)
- ・ 角速度 $\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$: 機体の慣性(対地)角速度 (機体軸成分)
- ・ 位置 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$: 機体重心の慣性座標系(地表面固定座標系)での座標
- ・ 姿勢 $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$: 局所水平座標系から機体軸へのクォータニオン

図 5.1-2 に、クォータニオンのイメージを示す。クォータニオンについては、付録1「方向余弦, クォータニオンとオイラー角」も参照のこと。

(a_1, a_2, a_3) : 回転軸ベクトル(局所水平座標成分)
 (単位ベクトル $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$)

θ : 回転角

$$\begin{cases} q_1 = a_1 \sin(\theta/2) \\ q_2 = a_2 \sin(\theta/2) \\ q_3 = a_3 \sin(\theta/2) \\ q_4 = \cos(\theta/2) \end{cases}$$

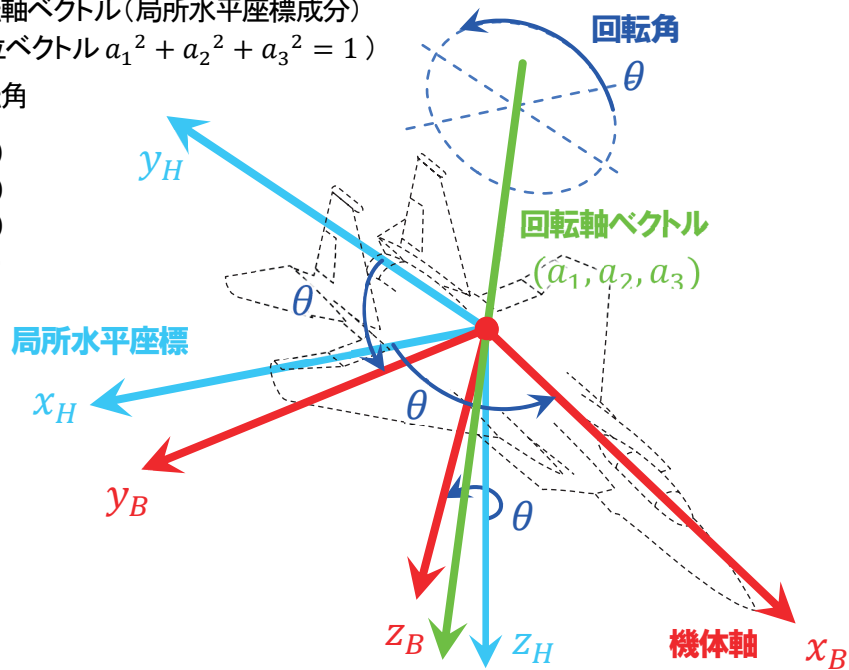


図 5.1-2 6自由度シミュレーションの状態変数(クォータニオン)

図5-1 (b)の各演算モジュールの内、オイラー角版と異なる箇所のみ以下に記載する。

(1) 積分

時間をカウントアップし、更新後の時間における状態変数の値を、運動方程式より出力される状態変数の変化率を数値積分することにより求める。

時間

$$t = t + \Delta t \tag{5.1-1再}$$

機体重心の慣性(対地)速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} dt \tag{5.1-2再}$$

機体の慣性(対地)角速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} dt \tag{5.1-3再}$$

機体重心の地表面固定座標

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} dt \tag{5.1-4再}$$

局所水平座標系から機体軸へのクォータニオン

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} dt \tag{5.1-35}$$

ただし、7.1節に示すように、演算ループの初回のみ、積分演算は行わず、時間及び12個の状態変数に初期値を出力する。

(2) 方向余弦

方向余弦行列, 局所水平座標系 ⇒ 機体軸系

$$\mathbf{T}_{HB} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (5.1-36)$$

(3) 対地状態量

オイラー角 (付録1「方向余弦, クォータニオンとオイラー角」(A1-22)及び(A1-23)式)

if $(1 - |T_{HB13}|) > 2.0 \times 10^{-4}$

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(T_{HB23}/T_{HB33}) \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1}(T_{HB12}/T_{HB11}) \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\pi < \Phi \leq +\pi \\ -\frac{\pi}{2} < \Theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \Psi < 2\pi \end{pmatrix} \quad (5.1-37a)$$

Else

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1}(-T_{HB21}/T_{HB22}) \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} < \Theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \Psi < 2\pi \end{pmatrix} \quad (5.1-37b)$$

end

ここで, T_{HBij} は, 方向余弦行列 \mathbf{T}_{HB} の第 (i, j) 要素を示す.

(4) 非線形運動方程式

状態変数の変化率を運動方程式に従い求める.

機体重心の慣性(対地)速度の変化率 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X/m \\ Y/m \\ Z/m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} QW - RV \\ RU - PW \\ PV - QU \end{bmatrix} \quad (5.1-31再)$$

機体の慣性(対地)角速度の変化率 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_{zz}L + I_{zx}N - (I_{zz}^2 - I_{yy}I_{zz} + I_{zx}^2)QR + I_{zx}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})PQ}{I_{xx}I_{zz} - I_{zx}^2} \\ \frac{M + (I_{zz} - I_{xx})RP + I_{zx}(R^2 - P^2)}{I_{yy}} \\ \frac{I_{zz}L + I_{xx}N + (I_{xx}^2 - I_{xx}I_{yy} + I_{zx}^2)PQ - I_{zx}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})QR}{I_{xx}I_{zz} - I_{zx}^2} \end{bmatrix} \quad (5.1-32再)$$

機体重心の地表面固定座標の変化率 (地表面固定座標成分)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{HB}^T \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (5.1-33再)$$

局所水平座標系から機体軸へのクォータニオンの変化率

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & R & -Q & P \\ -R & 0 & P & Q \\ Q & -P & 0 & R \\ -P & -Q & -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (5.1-38)$$

5.2 環境モデル

(1) 重力モデル

入力：機体重心の高度 H

出力：重力(遠心力含む)加速度 g

$$(例) g = \left(\frac{R_0}{R_0 + H} \right)^2 g_0 \quad \text{ただし, } R_0: \text{地球半径} \quad g_0: \text{海面上重力加速度} \quad (5.2-1)$$

(2) 風モデル

入力：機体重心の高度 H

出力：風速(定常風+突風) U_W, V_W, W_W (機体軸成分)

(定常風) U_{WH}, V_{WH}, W_{WH} (局所水平座標成分)

風の角速度 P_W, Q_W, R_W (機体軸成分)

(3) 大気モデル

入力：機体重心の高度 H

出力：大気密度 ρ , 音速 c_s , 気温 T , 動粘性係数 ν

(例) 国際標準大気 ISO 2533:1975

ICAO 標準大気 Doc 7488-CD

米国標準大気 U.S. standard atmosphere, 1976

5.3 機体モデル

(1) 空力モデル

入力： $M, Re, \alpha, \beta, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{P}_a, \hat{Q}_a, \hat{R}_a, \delta_a, \delta_e, \delta_r$ など

出力：

・ 空力係数 $\begin{bmatrix} C_L \\ C_D \\ C_Y \end{bmatrix}$: 揚力/抗力/横力係数

・ 空力モーメント係数 $\begin{bmatrix} C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix}$: ローリング/ピッチング/ヨーイング・モーメント係数

(2) エンジンモデル

入力： $\alpha, \beta, V_{EAS}, T, \rho, \delta_T$ (推力レバー角) など

出力：

・ エンジン推力 $\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix}$: 機体軸成分

・ エンジンモーメント $\begin{bmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{bmatrix}$: 機体軸成分

・ 燃料消費に伴い変動する慣性特性(質量 m , 慣性モーメント $I_{xx} \cdot I_{yy} \cdot I_{zz}$, 慣性乗積 I_{zx} , 重心位置 $x_{CG} \cdot y_{CG} \cdot z_{CG}$)

6. 3自由度シミュレーション

3自由度シミュレーションの流れを 図 6-1 に示す。

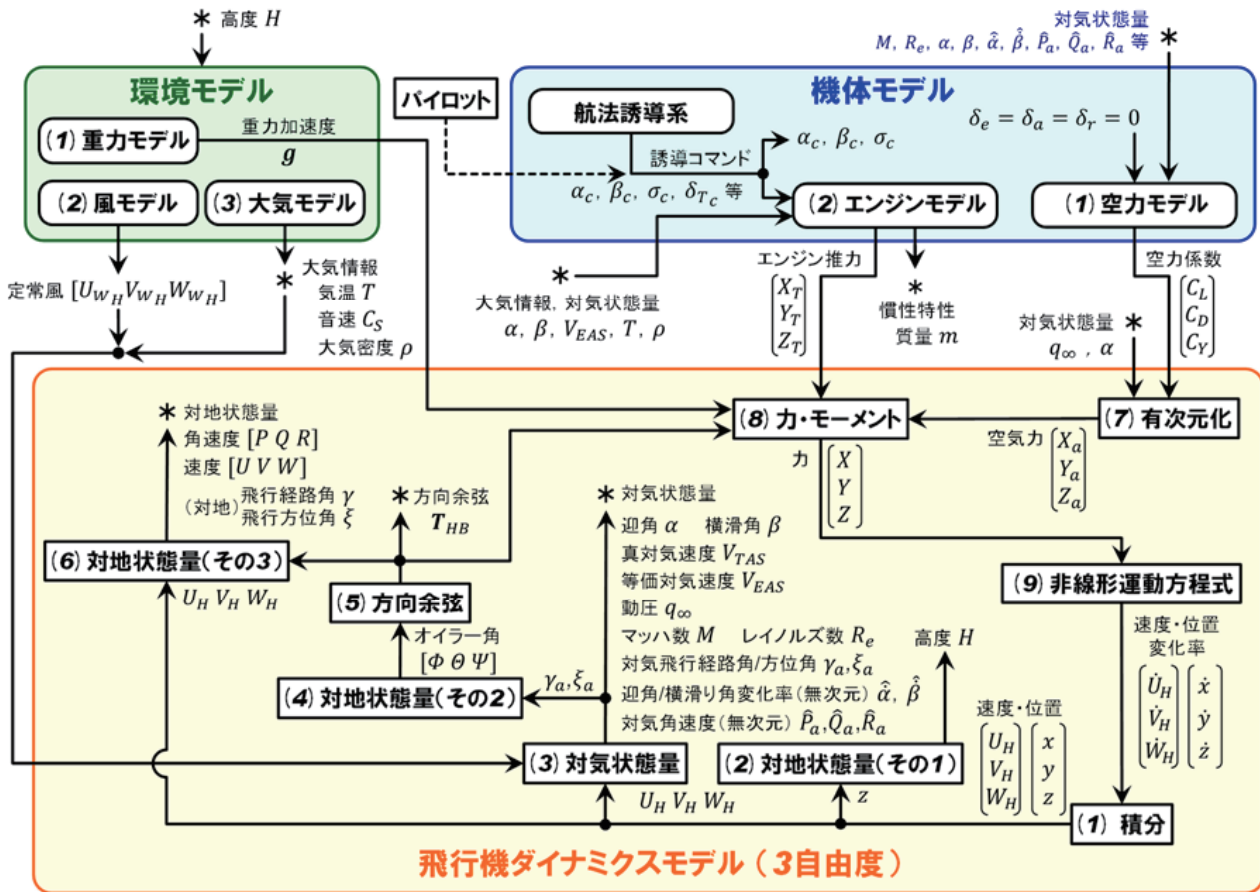


図 6-1 3自由度シミュレーションの流れ

6自由度シミュレーションと同じく、「航空機ダイナミクスモデル」、「環境モデル」及び「機体モデル」から構成される。各構成要素ブロック中の(数字)は、本章各節の項番号と対応している。

「航空機ダイナミクスモデル」は、剛体の3自由度(並進)運動を慣性座標系を基準として解くものであり、機体によらず汎用的なものである。

「環境モデル」及び「機体モデル」は、6自由度シミュレーションと同一である。ただし、風モデルでは、定常風のみ出力し、突風及び風の角速度(回転風)は0を出力する。

以下、3自由度版の「航空機ダイナミクスモデル」について、詳細に述べる。

6.1 航空機ダイナミクスモデル

状態変数として、以下の6個の対慣性座標変数を設定する。

- ・ 速度 $\begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix}$: 機体重心の慣性(対地)速度(地表面局所水平座標成分)
- ・ 位置 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$: 機体重心の地表面固定座標

6自由度シミュレーションでの速度を表す状態変数は慣性速度の機体軸成分であったが、この運動方程式(5.1-31)には機体角速度が現れる。3自由度シミュレーションでは機体の回転運動は解かれず、機体の回転角

速度は求まるとは限らないため、この運動方程式を使うことはできない。よって、ここでは速度を表す状態変数として、慣性(対地)速度の地表面局所水平座標成分(N/E/D方向)を用いる。

図 6.1-1 に、各状態変数のイメージを示す。

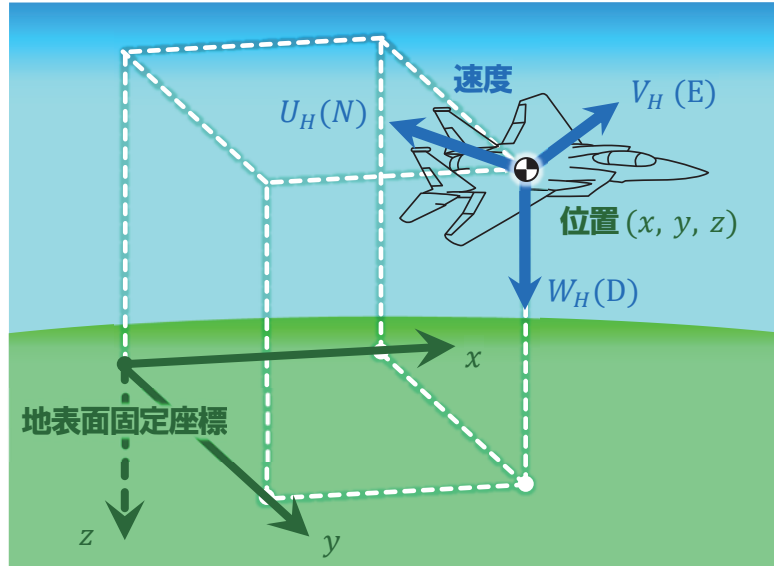


図 6.1-1 3自由度シミュレーションの状態変数

3自由度シミュレーションでは機体の回転運動は解かないので、制御舵面及び機体の角速度は 0 とし、これらが空気力に与える影響は無視する。これらは機体の回転運動には大きな影響を与えるが、並進運動のみを考える場合には影響が小さく、無視しても大きな誤差は生じない。

「機体モデル」及び「環境モデル」から出力される情報を元に機体に作用する力を求め、運動方程式に代入することによって状態変数の時間変化率を計算し、それらを数値積分することによって状態変数の更新値を求める。こうして得られた6個の状態変数より、対地状態量、対気状態量などの必要情報を求める。以下、これらの演算を行う各モジュールについて述べる。各モジュールの入力を赤字、出力を青字で示す。

(1) 積分

時間をカウントアップし、更新後の時間における状態変数の値を、運動方程式より出力される状態変数の変化率を数値積分することにより求める。

時間

$$t = t + \Delta t \quad (5.1-1再)$$

機体重心の慣性(対地)速度 (地表面固定座標成分)

$$\begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{U}_H \\ \dot{V}_H \\ \dot{W}_H \end{bmatrix} dt \quad (6.1-1)$$

機体重心の地表面固定座標

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} dt \quad (5.1-4再)$$

ただし、7.1節に示すように、演算ループの初回のみ、積分演算は行わず、時間及び6個の状態変数に初期値を出力する。

(2) 対地状態量(その1)

高度

$$H = -z \quad (5.1-7再)$$

ここで、高度 H を用いて[環境モデル]([重力モデル], [風モデル] 及び [大気モデル])を実行する。

(3) 対気状態量

対気速度(局所水平座標成分)

$$\begin{bmatrix} U_{aH} \\ V_{aH} \\ W_{aH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_{WH} \\ V_{WH} \\ W_{WH} \end{bmatrix} \quad (6.1-2)$$

真対気速度

$$V_{TAS} = \sqrt{U_{aH}^2 + V_{aH}^2 + W_{aH}^2} \quad (6.1-3)$$

迎角

$$\alpha = \alpha_C \quad (6.1-4)$$

横滑り角

$$\beta = \beta_C \quad (6.1-5)$$

ここで、 α_C , β_C は誘導コマンド(迎角, 横滑り角)

マッハ数

$$M = \frac{V_{TAS}}{c_s} \quad (5.1-17再)$$

レイノルズ数

$$Re = \frac{V_{TAS} \cdot l}{\nu} \left(= \frac{\rho \cdot V_{TAS} \cdot l}{\mu} \right) \quad (5.1-18再)$$

ここで、 l は特性長さ

動圧

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho V_{TAS}^2 \quad (5.1-19再)$$

等価対気速度

$$V_{EAS} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} V_{TAS} \quad (5.1-20再)$$

対気飛行経路角, 方位角

$$\gamma_a = \sin^{-1} \left(\frac{-W_{aH}}{V_{TAS}} \right) \quad (-\pi/2 \leq \gamma_a \leq +\pi/2) \quad (5.1-22再)$$

$$\xi_a = \tan^{-1} \left(\frac{V_{aH}}{U_{aH}} \right) \quad (-\pi < \xi_a \leq +\pi) \quad (5.1-23再)$$

迎角, 横滑り角変化率無次元量

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1-6)$$

対気角速度無次元量 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_a \\ \hat{Q}_a \\ \hat{R}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1-7)$$

(4) 対地状態量(その2)

オイラー角 (付録2「局所水平座標, 速度軸と機体軸」(A2-5)及び(A2-6)式)

if $(1 - |T_{HB13}| > 2.0 \times 10^{-4}(\text{T. B. D.}))$

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(T_{HB23}/T_{HB33}) \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1}(T_{HB12}/T_{HB11}) \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\pi < \Phi \leq +\pi \\ -\frac{\pi}{2} < \theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ -\pi \leq \Psi < +\pi \end{pmatrix} \tag{6.1-8a}$$

else

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1}(-T_{HB21}/T_{HB22}) \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} < \theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ -\pi \leq \Psi < +\pi \end{pmatrix} \tag{6.1-8b}$$

end

ここで,

$$\begin{aligned} T_{HB11} &= \cos \alpha_c \cos \beta_c \cos \gamma_a \cos \xi_a - \cos \alpha_c \sin \beta_c (\sin \sigma_c \sin \gamma_a \cos \xi_a - \cos \sigma_c \sin \xi_a) - \sin \alpha_c (\cos \sigma_c \sin \gamma_a \cos \xi_a + \sin \sigma_c \sin \xi_a) \\ T_{HB21} &= \sin \beta_c \cos \gamma_a \cos \xi_a + \cos \beta_c (\sin \sigma_c \sin \gamma_a \cos \xi_a - \cos \sigma_c \sin \xi_a) \\ T_{HB12} &= \cos \alpha_c \cos \beta_c \cos \gamma_a \sin \xi_a - \cos \alpha_c \sin \beta_c (\sin \sigma_c \sin \gamma_a \sin \xi_a + \cos \sigma_c \cos \xi_a) - \sin \alpha_c (\cos \sigma_c \sin \gamma_a \sin \xi_a - \sin \sigma_c \cos \xi_a) \\ T_{HB22} &= \sin \beta_c \cos \gamma_a \sin \xi_a + \cos \beta_c (\sin \sigma_c \sin \gamma_a \sin \xi_a + \cos \sigma_c \cos \xi_a) \\ T_{HB13} &= -\cos \alpha_c \cos \beta_c \sin \gamma_a - \cos \alpha_c \sin \beta_c \sin \sigma_c \cos \gamma_a - \sin \alpha_c \cos \sigma_c \cos \gamma_a \\ T_{HB23} &= -\sin \beta_c \sin \gamma_a + \cos \beta_c \sin \sigma_c \cos \gamma_a \\ T_{HB33} &= -\sin \alpha_c \cos \beta_c \sin \gamma_a - \sin \alpha_c \sin \beta_c \sin \sigma_c \cos \gamma_a + \cos \alpha_c \cos \sigma_c \cos \gamma_a \end{aligned}$$

$\alpha_c, \beta_c, \sigma_c$ は誘導コマンド(迎角, 横滑り角, バンク角)

なお, 近似式として以下の式を用いても良い.

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_c \\ \gamma_a + \alpha_c \\ \xi_a - \beta_c \end{bmatrix} \tag{6.1-8c}$$

if $(|\theta| > \frac{\pi}{2})$

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{mod}(\Phi + \pi, 2\pi) - \pi \\ \text{sign}(\theta)(\pi - |\theta|) \\ \text{mod}(\Psi + \pi, 2\pi) - \pi \end{bmatrix} \tag{6.1-8d}$$

end

(6.1-8c, d)式のイメージを 図 6.1-2 に示す.

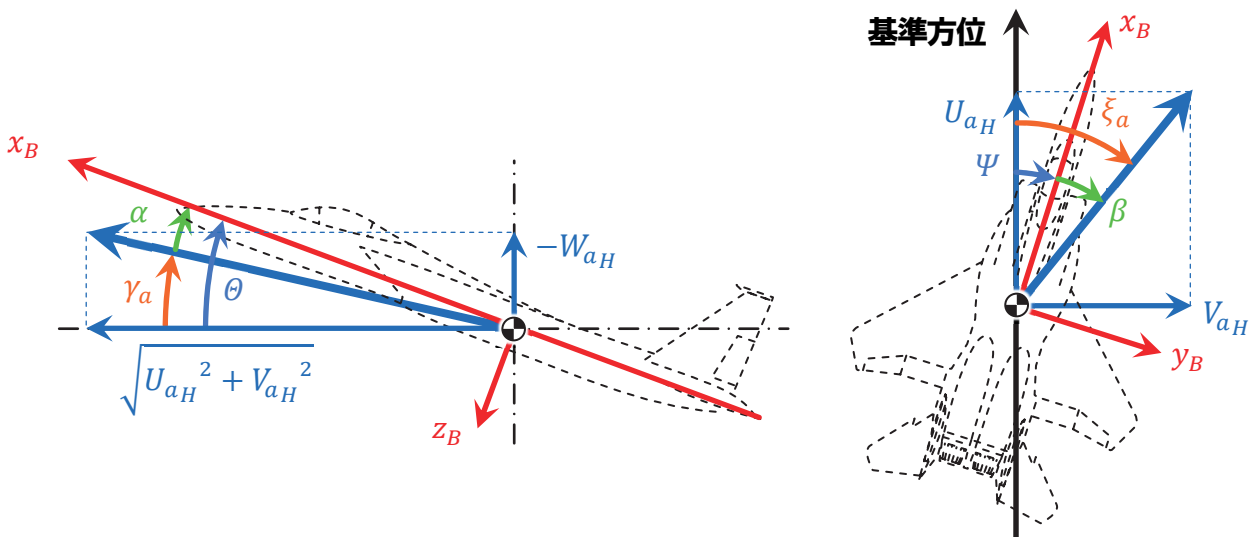
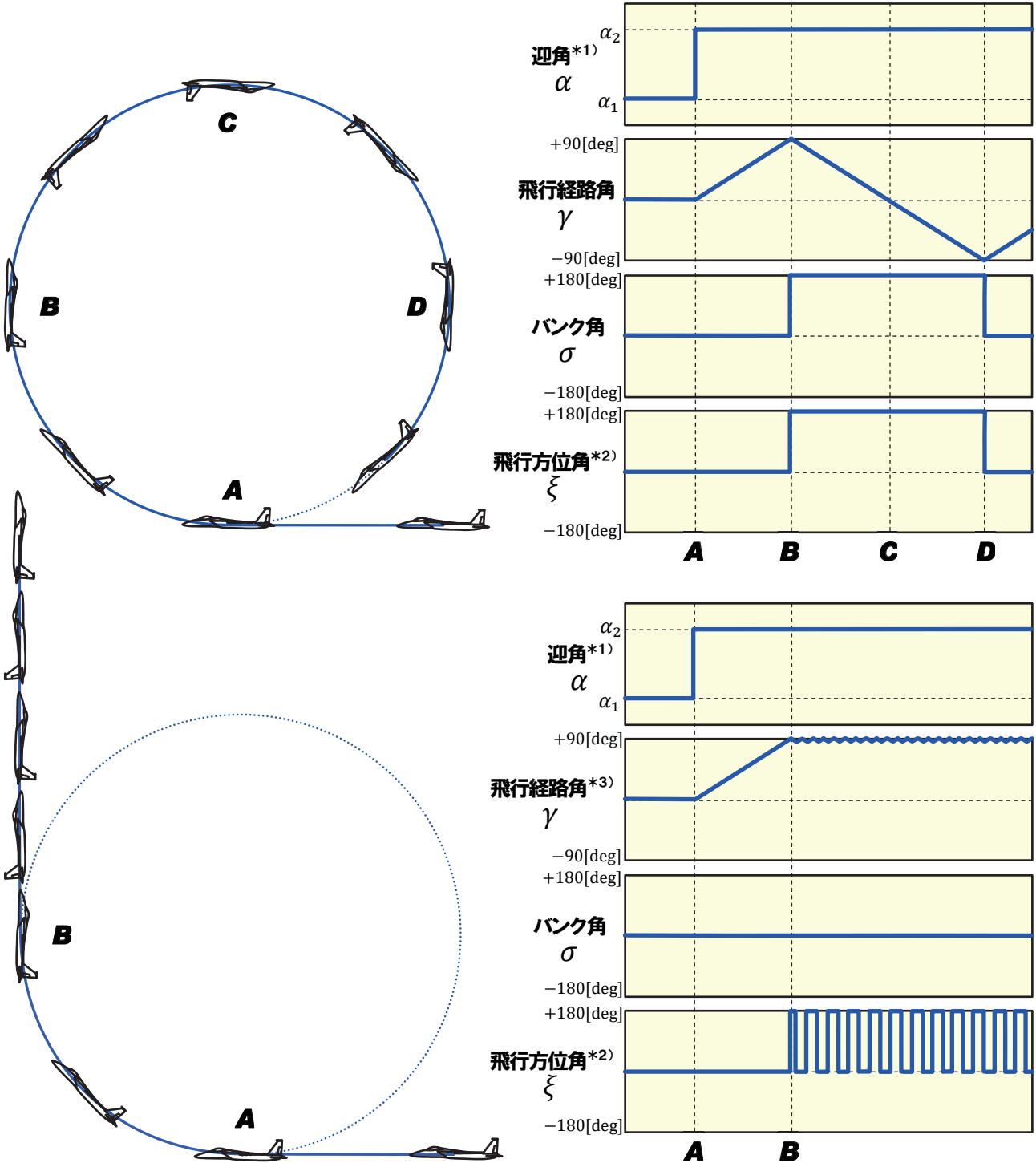


図 6.1-2 誘導コマンドとオイラー角

(3自由度シミュレーションでの注意)

図 6.1-3の左上図の宙返り飛行を考える。この場合の迎角 α 、飛行経路角 γ 、バンク角 σ 、飛行方位角 ξ の履歴は右上図となる。バンク角は 0 と +180[deg] で変動する。ここでバンク角コマンドに一定値 0[deg] を入力すると、 γ が +90[deg] に達して減少に移った瞬間に機体は速度ベクトル周りに 180[deg] 反転する。その結果、揚力の向きも反転し、再び飛行経路角を増加させる。そして再度 γ が +90[deg] に達した瞬間に元の姿勢に反転する。これを繰り返し、 $\gamma \cong +90$ [deg] を維持した状態で垂直上昇に近い飛行を行う。(図 6.1-3 下図)



- * 1) 迎角履歴は無重力環境下でのもの。重力環境下で円軌道にするためには変動する。
- * 2) 初期飛行状態での飛行方位角を $\xi = 0$ とする。
- * 3) 飛行経路角の振幅は実際より大きく、周期も長く描いている。飛行方位角の周期も同じ。

図 6.1-3 バンク角コマンド

(5) 方向余弦

方向余弦行列, 局所水平座標系 ⇒ 機体軸系

$$T_{HB} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.1-6再)$$

(6) 対地状態量(その3)

対地速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = T_{HB} \begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix} \quad (6.1-9)$$

慣性(対地)角速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1-10)$$

飛行経路角, 飛行方位角

$$\gamma = \tan^{-1} \left(-W_H / \sqrt{U_H^2 + V_H^2} \right) \quad (-\pi/2 \leq \gamma \leq +\pi/2) \quad (5.1-9再)$$

$$\xi = \tan^{-1}(V_H / U_H) \quad (-\pi < \xi \leq +\pi) \quad (5.1-10再)$$

ここで, [機体モデル]を実行し, 空力係数, エンジン推力及び慣性特性(質量)を求める.

(7) 有次元化

揚力, 抗力, 横力

$$\begin{bmatrix} L \\ D \\ Y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_L q_\infty S \\ C_D q_\infty S \\ C_Y q_\infty S \end{bmatrix} \quad (5.1-26再)$$

空気力(機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha L - \cos \alpha D \\ Y_a \\ -\cos \alpha L + \sin \alpha D \end{bmatrix} \quad (5.1-27再)$$

(8) 力

全外力(機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} + T_{HB} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (5.1-29再)$$

(9) 非線形運動方程式

速度の変化率(加速度)(地表面局所水平座標成分)

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_H \\ \dot{V}_H \\ \dot{W}_H \end{bmatrix} = T_{BH} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} / m = T_{HB}^T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} / m \quad (6.1-11)$$

位置の変化率(速度)(地表面局所水平座標成分)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Psi_G & \sin \Psi_G & 0 \\ -\sin \Psi_G & \cos \Psi_G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix} \quad (6.1-12)$$

ここで, Ψ_G は, 地表面固定座標系の x 軸の方位角

7. シミュレーション初期値の設定

7.1 機体状態量からの状態変数初期値の導出

シミュレーション初期値は、6自由度シミュレーションの場合、時間と5.1節の12個の状態変数に初期値を設定し、それらを[(1)積分]の出口のところに代入して、[(2)方向余弦]から演算を開始する。

初期機体状態量として、以下の変数が与えられるとする。

- ・ 機体重心の対地速度 : 対地速度(速さ) V_{G_0} , (対地)飛行経路角 γ_0 , (対地)飛行方位角 ξ_0
- ・ 機体の対地角速度 : P_0, Q_0, R_0
- ・ 機体重心の位置 : 地表面固定座標 x_0, y_0 , 高度 H_0
- ・ 機体の姿勢 : オイラー角 ϕ_0, θ_0, ψ_0

この時、(5.1-6)式～(5.1-10)式を用いて、12個の状態変数の初期値は以下のとおり求められる。

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}_0 = \mathbf{T}_{HB0} \begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix}_0 = \mathbf{T}_{HB0} \begin{bmatrix} V_{G_0} \cos \gamma_0 \cos \xi_0 \\ V_{G_0} \cos \gamma_0 \sin \xi_0 \\ -V_{G_0} \sin \gamma_0 \end{bmatrix} \quad (7.1-1)$$

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \\ R_0 \end{bmatrix} \quad (7.1-2)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -H_0 \end{bmatrix} \quad (7.1-3)$$

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} \quad (7.1-4)$$

ただし、

$$\mathbf{T}_{HB0} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \cos \psi_0 & \cos \theta_0 \sin \psi_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \phi_0 \sin \theta_0 \cos \psi_0 - \cos \phi_0 \sin \psi_0 & \sin \phi_0 \sin \theta_0 \sin \psi_0 + \cos \phi_0 \cos \psi_0 & \sin \phi_0 \cos \theta_0 \\ \cos \phi_0 \sin \theta_0 \cos \psi_0 + \sin \phi_0 \sin \psi_0 & \cos \phi_0 \sin \theta_0 \sin \psi_0 - \sin \phi_0 \cos \psi_0 & \cos \phi_0 \cos \theta_0 \end{bmatrix}$$

具体例として、初期状態が、滑走路基準点で滑走路方位を向いて静止している状態ならば、

- ・ 機体重心の対地速度 : $V_{G_0} = 0, \gamma_0 = 0, \xi_0 = 0$
- ・ 機体の対地角速度 : $(P_0, Q_0, R_0) = (0, 0, 0)$
- ・ 機体重心の位置 : $(x_0, y_0, H_0) = (0, 0, H_{CG0})$
- ・ 機体の姿勢 : $(\phi_0, \theta_0, \psi_0) = (0, 0, 0)$

とすれば良い。ただし、地面固定座標として滑走路座標を取っている。

3自由度シミュレーションの場合には、同様に時間と6.1節の6個の状態変数に初期値を設定し、それらを[(1)積分]の出口のところに代入して、[(2)対地状態量(その1)]から演算を開始する。

初期機体状態量として、以下の変数が与えられるとする。

- ・ 機体重心の対地速度 : 対地速度(速さ) V_{G_0} , 飛行経路角 γ_0 , 飛行方位角 ξ_0
- ・ 機体重心の位置 : 地表面固定座標 x_0, y_0 , 高度 H_0

この時、(5.1-7)式～(5.1-10)式より、6個の状態変数の初期値は以下となる。

$$\begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} V_{G_0} \cos \gamma_0 \cos \xi_0 \\ V_{G_0} \cos \gamma_0 \sin \xi_0 \\ -V_{G_0} \sin \gamma_0 \end{bmatrix} \quad (7.1-5)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -H_0 \end{bmatrix} \quad (7.1-3再)$$

具体例の、滑走路基準点で滑走路方位を向いて静止している状態については、6自由度の場合と同様にして初期値を設定することができる。

7.2 釣合い計算

前節での具体例のように、機体が地上静止状態、あるいは地上走行状態からシミュレーションを開始する場合は、対応する状態変数を容易に求めることができるが、飛行状態から開始する場合には、航空機が釣合い状態にないとシミュレーション開始直後に機体が大きく運動し、瞬時に墜落に至る可能性がある。そのため、釣合い(Trim)計算を行い、その結果として得られる機体状態量から状態変数を求め、その値を初期値とすることが必要である。

釣合い計算については別稿で述べることとするが、釣合い計算により、対象釣合い飛行、あるいは非対称釣合い飛行(定常横滑り飛行)、さらには定常旋回飛行などにおける以下の変数の値が出力される。

- ・機体重心の位置
 x, y : 機体重心の地表面固定座標, H : 高度
- ・機体重心の対地速度ベクトル
 V_G : 対地速度, γ : (対地)飛行経路角, ξ : (対地)飛行方位角
 もしくは U_H, V_H, W_H : 対地速度(局所水平座標成分) など
- ・機体重心の対気速度ベクトル
 V_{TAS} : 真対気速度, V_{EAS} : 等価対気速度, γ_a : 対気飛行経路角, ξ_a : 対気飛行方位角
 もしくは U_{aH}, V_{aH}, W_{aH} : (真)対気速度(局所水平座標成分) など
- ・機体の対気姿勢
 α : 迎角, β : 横滑り角, σ : バンク角
- ・機体の(対地)角速度 = 対気角速度
 P : ロール角速度, Q : ピッチ角速度, R : ヨー角速度
- ・制御量
 δ_a : エルロン舵角, δ_e : エレベータ舵角, δ_r : ラダー舵角, δ_T : 推力レバー角

釣合い計算により、上記変数値が得られれば、6自由度シミュレーションの場合は(7.1-1)～(7.1-3)式を用いて、速度、角速度、位置の初期値が得られる。姿勢(オイラー角)の初期値については、(6.1-8a, b)式において、誘導コマンド $\alpha_C, \beta_C, \sigma_C$ を、迎角 α 、横滑り角 β 、バンク角 σ に置き換えて用いる。あるいは、近似式として、(6.1-8c, d)式を用いても良い。

3自由度シミュレーションの場合は、(7.1-5)式と(7.1-3)式を用いる。

第2部 地球回転楕円体モデル

8. 地球回転楕円体モデル

地球回転楕円体モデルでは、

- ・ 地球の形状は 赤道半径 $a >$ 極半径 b の偏楕円体
- ・ 地軸まわりに角速度 ω で自転, 機体の運動スケールを考え, 地球の公転運動は等速直線運動と近似

図 8-1 に, 地球回転楕円体モデルのイメージを示す。

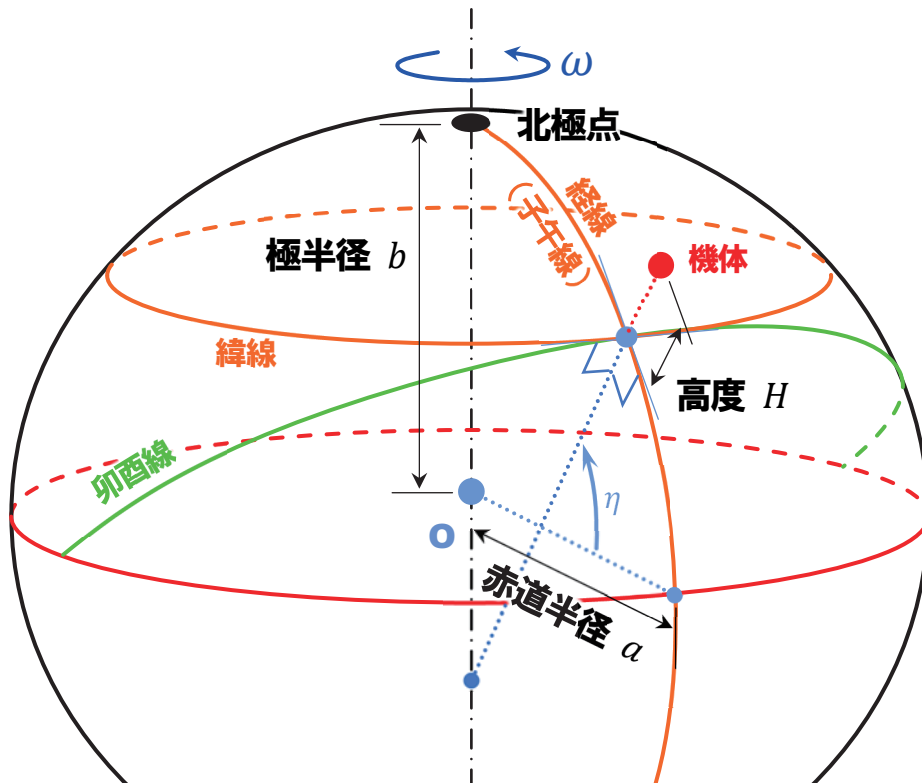


図 8-1 地球回転楕円体モデル

○ WGS (World Geodetic System: 世界測地系) 84 での地球モデル定数の例

楕円体原点	: 地球質量中心	
赤道半径	: $a = 6,378,137.000\ 000$	[m]
極半径	: $b = 6,356,752.314\ 25$	[m]
扁平率 ($f \triangleq \frac{a-b}{a}$)	: $f = 1/298.257\ 223\ 563$	
離心率 ($e \triangleq \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$)	: $e^2 = 6.694\ 379\ 99013 \cdot 10^{-3}$	
平均自転速度	: $\omega = 7,292,115.146\ 7 \cdot 10^{-11}$	[rad/s]
高度	: 楕円体高	

9. 座標系

9.1 ECI (Earth Centered Inertial) 座標系

原点: 地球中心, z 軸: 地軸上北極向き, x 軸: 基準時刻における緯度 0° , 経度 0° 方向 (図 9.1-1)

- ・ 地球の公転は等速直線運動と近似 \Rightarrow 慣性座標系

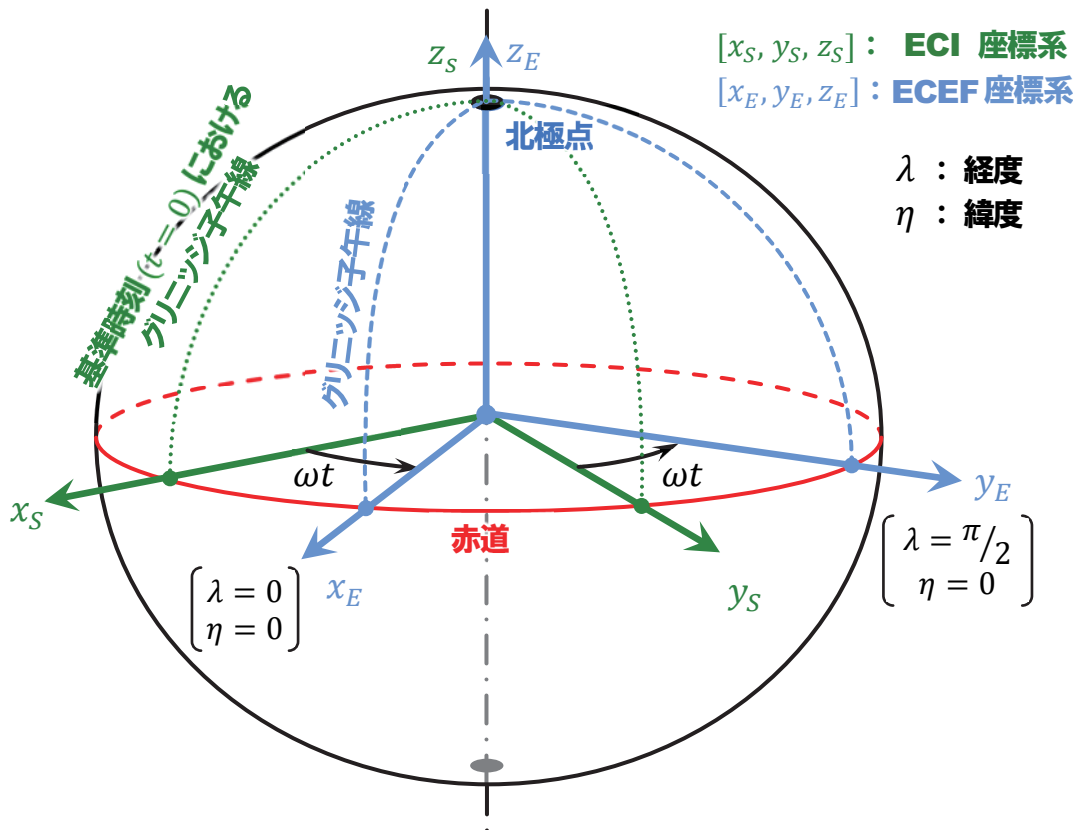


図 9.1-1 ECI座標系とECEF座標系

9.2 ECEF (Earth Centered, Earth Fixed) 座標系

原点: 地球中心, z 軸: 地軸上北極向き, x 軸: 緯度 0° , 経度 0° 方向 (図 9.1-1)

- ・ 地球とともに回転 \Rightarrow 非慣性座標系

ECI 座標系と ECEF 座標系は中心及び z 軸は一致するが, 地球は慣性空間に対して地軸まわりに一定角速度 ω で自転しているとモデル化しているため, 両座標系の x 軸と y 軸は, 時刻 t において ωt だけ角度差を持つ。

9.3 局所水平座標系

原点: 機体重心, x - z 平面: 子午面内, z 軸: 地表面に直交下向き(D), x 軸: 北向き(N) (図 9.3-1)

- ・ 機体とともに加速並進 \Rightarrow 非慣性座標系
- ・ 常に N/E/D 方向 \Rightarrow 機体の並進移動とともに ECEF 座標系に対して回転(transport rate)
- ・ 機体の姿勢の基準

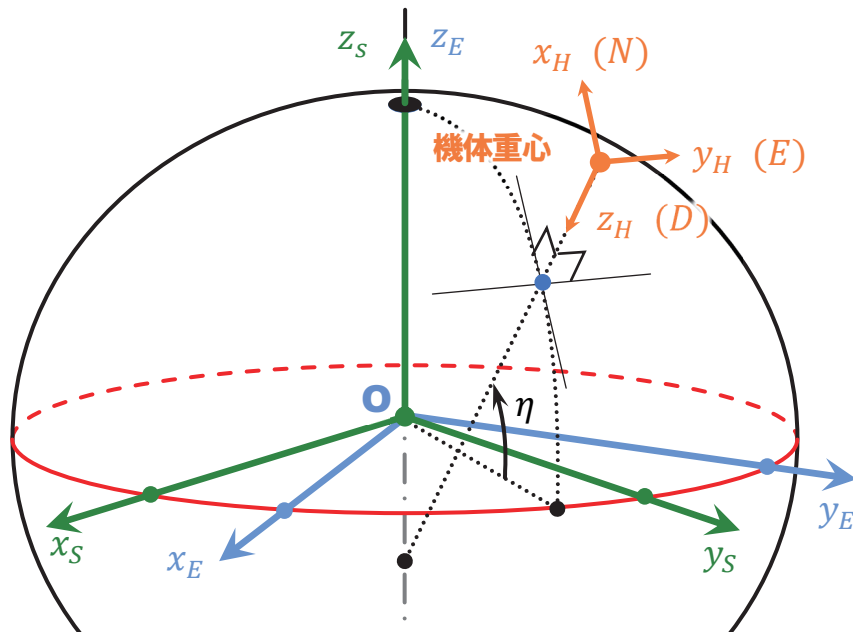


図 9.3-1 局所水平座標系

9.4 機体軸系

原点: 機体重心, x - z 平面: 機体対称面, x 軸: 前方向き, y 軸: 右翼方向

- ・ 機体とともに加速並進・回転 \Rightarrow 非慣性座標系
- ・ 機体の速度, 角速度ベクトルの成分表示に使用

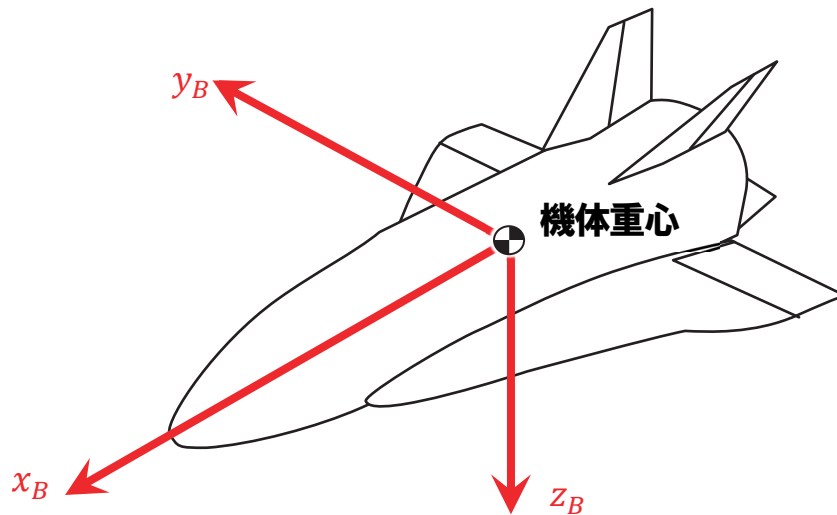


図 9.4-1 機体軸系

【例1】機体軸 (Body Axes) [x_B, y_B, z_B] (図 9.4-1)

x 軸: 機体製造時の基準前後軸方向

【例2】安定軸 (Stability Axes)

x 軸: 釣合い飛行(対称飛行)時の速度ベクトル方向 (釣合い飛行から外れた後も, 軸は機体固定)

10. 慣性座標系を基準とした運動計算

地球回転楕円体モデルに基づく飛行シミュレーションにおいても、地球平面モデルの場合と同様、最終的に知りたい飛行状態量は地球に対する相対的なパラメータ、すなわち対地状態量であるので、通常は状態変数として対地状態量を取り、運動方程式も、地球固定座標系を基準として立てられる。しかし、地球固定座標系は非慣性座標系(加速度運動あるいは回転運動を行う座標系)であるので、運動方程式には慣性力、すなわち、地球自転に伴う遠心力や、回転座標系上での移動に伴うコリオリ力を考慮しなければならない。これらの見かけの力のために、運動方程式は複雑になり、直感的な理解が困難となる。

そこで、今回は、状態変数として対ECI座標系(慣性座標系)のものを取り、運動方程式も慣性座標を基準として記述することとした。これにより運動方程式は地球平面モデルの場合と同じものが使用可能となり、シンプルで理解が容易になる。そして、運動方程式を解いて得られる対慣性座標状態量を、対地状態量に変換し、最終出力とする。ただし、ECI座標系を基準としてオイラー角を定義すると、旅客機のような機体でも、赤道上で真北に向かって飛行する場合など、特異点である $\theta = \pm 90[\text{deg}]$ になり得るので、状態変数としてオイラー角は使用できず、クォータニオンのみとなる。

なお、第1部の地球平面モデルに基づく飛行シミュレーションと同様、地球回転楕円体モデルに基づく飛行シミュレーションにおいても、6自由度シミュレーションと3自由度シミュレーションの2種類を用意する。

11. 6自由度飛行シミュレーション

6自由度シミュレーションの流れを 図11-1 に示す。

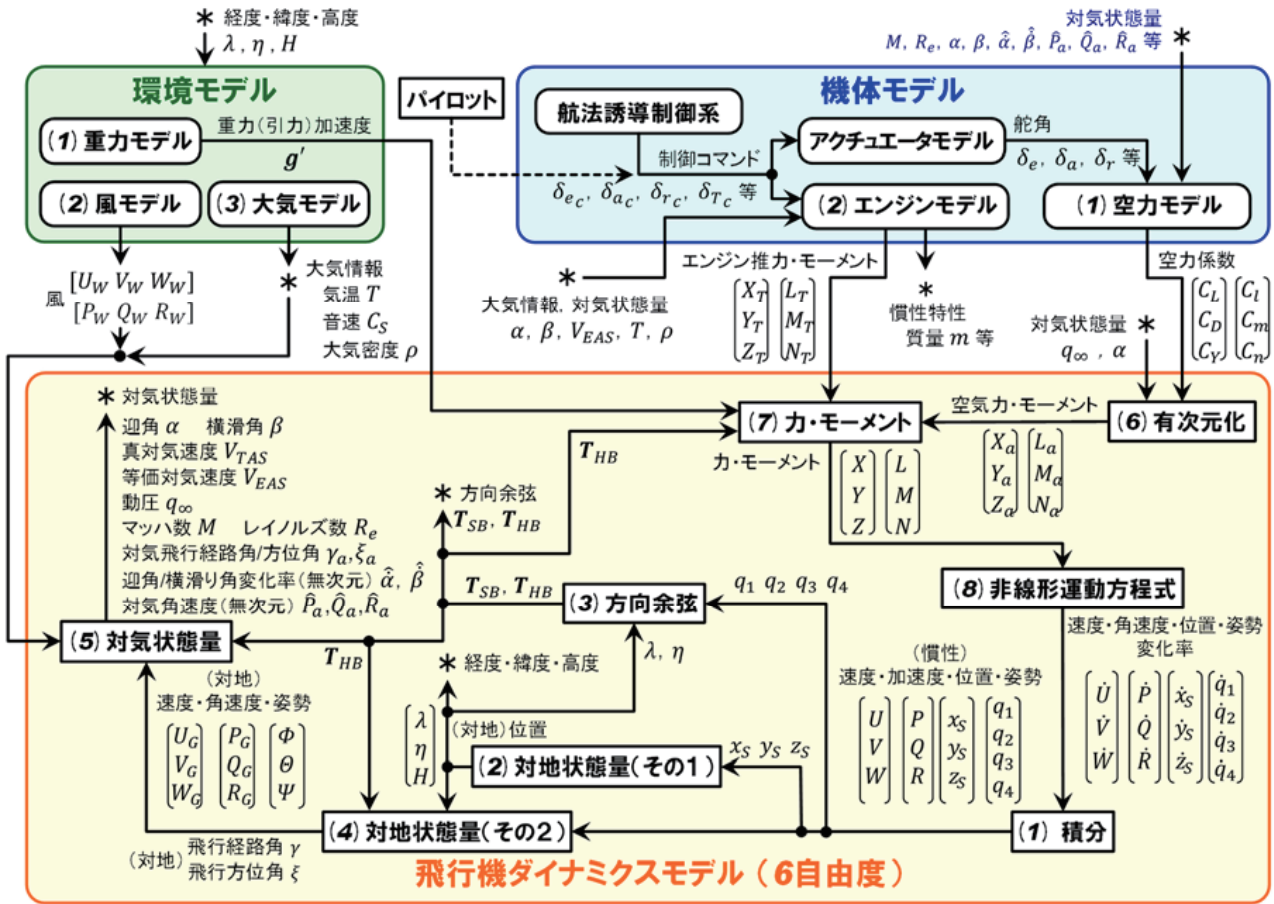


図 11-1 6自由度シミュレーションの流れ

アルゴリズムは、「航空機ダイナミクスモデル」、「環境モデル」及び「機体モデル」から構成される。各構成要素ブロック中の(数字)は、本章各節の項番号と対応している。

「航空機ダイナミクスモデル」は、「機体モデル」から出力される外力及びモーメントと「環境モデル」から出力される重力を合成し、機体に作用する全外力とモーメントを算出する。そして、この全外力とモーメントを入力として一般的な剛体の6自由度運動を慣性座標系を基準として解くものであり、運動方程式自体は航空機に限らず汎用的なものである。

「環境モデル」は、大気モデル、風モデル及び重力モデルより構成され、いずれも航空機重心の地球固定座標との相対位置(経度、緯度、高度)を入力として、重力加速度や大気密度などの各種の環境パラメータを出力する。

「機体モデル」は、シミュレーションの対象とする機体に応じてモデルを作成し、空力6分力係数、エンジン推力・モーメント及び慣性特性(質量、慣性モーメント、慣性乗積、重心位置)を出力する。

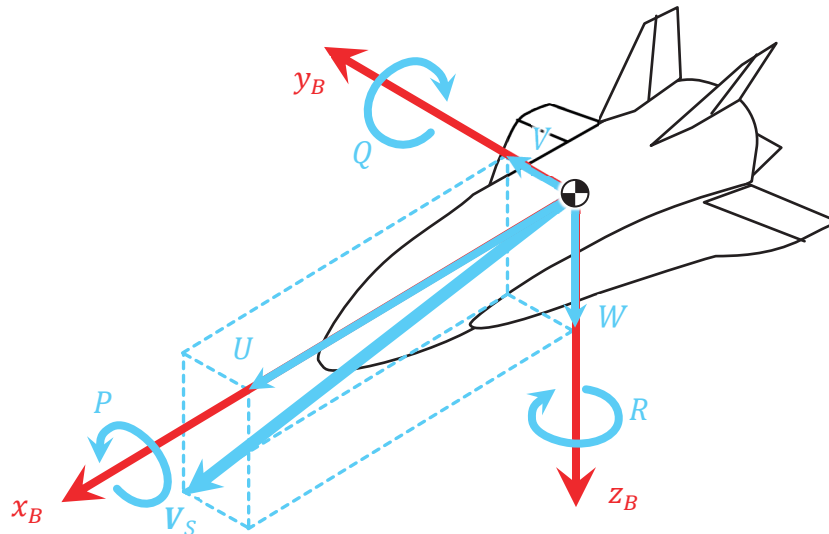
以下、11.1節～11.3節に、これら3つの構成要素について、詳細に述べる。

11.1 航空機ダイナミクスモデル

状態変数として、以下の13個の対慣性座標変数を設定する。地球平面モデルでのクォータニオン版と同じである。ただし、基準となる慣性座標系が、平面モデルでは地表面固定座標であったところ、回転楕円体モデルでは ECI 座標となっている。

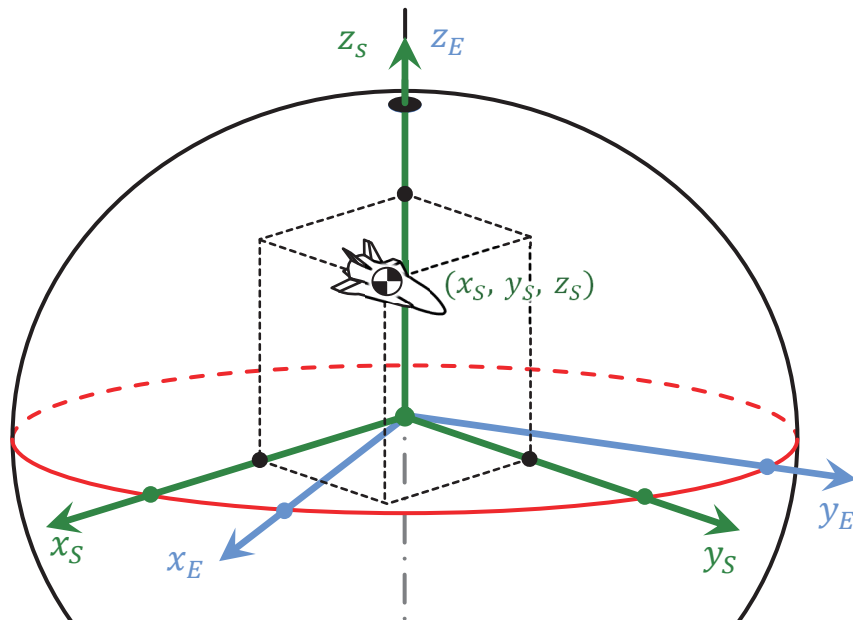
- ・ 速度 $\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$: 機体重心の慣性(対 ECI 座標系)速度 (機体軸成分)
- ・ 角速度 $\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$: 機体の慣性(対 ECI 座標系)角速度 (機体軸成分)
- ・ 位置 $\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix}$: 機体重心の ECI 座標
- ・ 姿勢 $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$: ECI 座標系から機体軸へのクォータニオン

図11.1-1に、各状態変数のイメージを示す。姿勢を示すクォータニオンについては付録1「方向余弦, クォータニオンとオイラー角」も参照のこと。



(a) 速度, 角速度

図 11.1-1 6自由度シミュレーションの状態変数(続く)



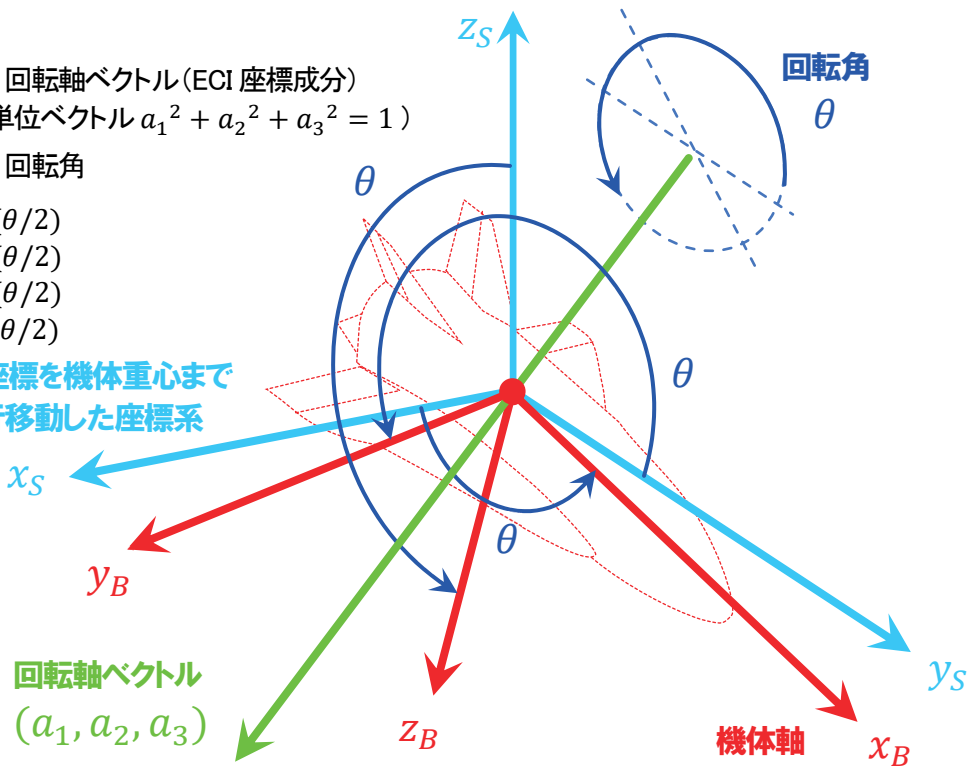
(b) 位置

(a_1, a_2, a_3) : 回転軸ベクトル (ECI 座標成分)
 (単位ベクトル $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$)

θ : 回転角

$$\begin{cases} q_1 = a_1 \sin(\theta/2) \\ q_2 = a_2 \sin(\theta/2) \\ q_3 = a_3 \sin(\theta/2) \\ q_4 = \cos(\theta/2) \end{cases}$$

ECI 座標を機体重心まで
 平行移動した座標系



(c) 姿勢

図 11.1-1 6自由度シミュレーションの状態変数(続き)

「機体モデル」及び「環境モデル」から出力される情報を元に機体に作用する力及びモーメントを求め、それらを運動方程式に代入することによって状態変数の時間変化率を計算し、それを数値積分することによって状態変数の更新値を求める。こうして得られた13個の状態変数より、対地状態量、対気状態量などの必要情報を求める。以下、これらの演算を行う各モジュールについて述べる。各モジュールの入力を赤字、出力を青字で示す。

(1) 積分

時間をカウントアップし、更新後の時間における状態変数の値を、運動方程式より出力される状態変数の変化率を数値積分することにより求める。

時間

$$t = t + \Delta t \quad (11.1-1)$$

機体重心の慣性(対 ECI 座標系)速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} dt \quad (11.1-2)$$

機体の慣性(対 ECI 座標系)角速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} dt \quad (11.1-3)$$

機体重心の ECI 座標

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{z}_S \end{bmatrix} dt \quad (11.1-4)$$

ECI 座標系から機体軸へのクォータニオン

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} dt \quad (11.1-5)$$

ただし、13.1節に示すように、演算ループの初回のみ、積分演算は行わず、時間及び13個の状態変数に初期値を出力する。

(2) 対地状態量(その1)

経度、緯度、高度 (付録3「ECEF 座標と経度・緯度・高度」(A3-13)式)

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \eta \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \left(\frac{y_S}{x_S} \right) - \omega t \\ \tan^{-1} \left\{ \frac{(1-e^2)z_S + e^2 b \sin^3 \theta}{(1-e^2)(\sqrt{x_S^2 + y_S^2} - e^2 a \cos^3 \theta)} \right\} \\ \frac{\sqrt{x_S^2 + y_S^2}}{\cos \eta} - \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \eta}} \end{bmatrix} \quad (11.1-6)$$

ただし、

$$\theta \triangleq \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \frac{z_S}{\sqrt{x_S^2 + y_S^2}} \right) \quad (11.1-7)$$

ここで、経度 λ 、緯度 η 、高度 H を用いて[環境モデル]([重力モデル]、[風モデル] 及び [大気モデル])を実行する。

(3) 方向余弦

方向余弦行列, ECI 座標系 \Rightarrow 機体軸系

$$\mathbf{T}_{SB} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (11.1-8)$$

方向余弦行列, ECI 座標系 \Rightarrow 局所水平座標系

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{SH} &= \begin{bmatrix} \cos(-\eta - \pi/2) & 0 & -\sin(-\eta - \pi/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\eta - \pi/2) & 0 & \cos(-\eta - \pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \lambda) & \sin(\omega t + \lambda) & 0 \\ -\sin(\omega t + \lambda) & \cos(\omega t + \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \eta \cos(\omega t + \lambda) & -\sin \eta \sin(\omega t + \lambda) & \cos \eta \\ -\sin(\omega t + \lambda) & \cos(\omega t + \lambda) & 0 \\ -\cos \eta \cos(\omega t + \lambda) & -\cos \eta \sin(\omega t + \lambda) & -\sin \eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.1-9)$$

方向余弦行列, 局所水平座標系 \Rightarrow 機体軸系

$$\mathbf{T}_{HB} = \mathbf{T}_{SB} \mathbf{T}_{SH}^{-1} = \mathbf{T}_{SB} \mathbf{T}_{SH}^T \quad (11.1-10)$$

(4) 対地状態量(その2)

機体重心の対地(対 ECEF 座標系)速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} U_G \\ V_G \\ W_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} - \mathbf{T}_{SB} \begin{bmatrix} -y_S \omega \\ x_S \omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.1-11)$$

機体の対地(対 ECEF 座標系)角速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} P_G \\ Q_G \\ R_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} - \mathbf{T}_{SB} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (11.1-12)$$

オイラー角 (付録1「方向余弦, クォータニオンとオイラー角」(A1-22)及び(A1-23)式)

if $(1 - |T_{HB13}| > 2.0 \times 10^{-4})$

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(T_{HB23}/T_{HB33}) \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1}(T_{HB12}/T_{HB11}) \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\pi < \Phi \leq +\pi \\ -\frac{\pi}{2} < \Theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \Psi < 2\pi \end{pmatrix} \quad (11.1-13)$$

else

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1}(-T_{HB21}/T_{HB22}) \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} < \Theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \Psi < 2\pi \end{pmatrix} \quad (11.1-14)$$

end

ここで, T_{HBij} は, 方向余弦行列 \mathbf{T}_{HB} の第 (i, j) 要素を示す.

機体重心の慣性(対 ECI 座標系)速度 (局所水平座標成分)

$$\begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{HB}^T \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (11.1-15)$$

機体重心の対地(対 ECEF 座標系)速度 (局所水平座標成分)

$$\begin{bmatrix} U_{HG} \\ V_{HG} \\ W_{HG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_H \\ V_H - \sqrt{x_S^2 + y_S^2} \omega \\ W_H \end{bmatrix} \quad (11.1-16)$$

飛行経路角, 飛行方位角

$$\gamma = \tan^{-1} \left(-W_{HG} / \sqrt{U_{HG}^2 + V_{HG}^2} \right) \quad (-\pi/2 \leq \gamma \leq +\pi/2) \quad (11.1-17)$$

$$\xi = \tan^{-1}(V_{HG} / U_{HG}) \quad (-\pi < \xi \leq +\pi) \quad (11.1-18)$$

(5) 対気状態量

第5.1節の地球平面モデルでの航空機ダイナミクスモデルの(4)対気状態量と全く同一である。

機体重心の対気速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} U_a \\ V_a \\ W_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_G \\ V_G \\ W_G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_W \\ V_W \\ W_W \end{bmatrix} \quad (5.1-11再)$$

機体の対気角速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} P_a \\ Q_a \\ R_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_G \\ Q_G \\ R_G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_W \\ Q_W \\ R_W \end{bmatrix} \quad (5.1-12再)$$

機体基準点の対気速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} U_{aref} \\ V_{aref} \\ W_{aref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_a + R_a y_{CG} + Q_a z_{CG} \\ V_a - P_a z_{CG} + R_a x_{CG} \\ W_a - Q_a x_{CG} - P_a y_{CG} \end{bmatrix} \quad (5.1-13再)$$

ここで, $[x_{CG}, y_{CG}, z_{CG}]$ は, 機体基準点から見た重心位置 (後方, 上方, 右方 正)

真対気速度

$$V_{TAS} = \sqrt{U_{aref}^2 + V_{aref}^2 + W_{aref}^2} \quad (5.1-14再)$$

迎角

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{W_{aref}}{U_{aref}} \right) \quad (5.1-15再)$$

横滑り角

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{V_{aref}}{V_{TAS}} \right) \quad (5.1-16再)$$

マッハ数

$$M = \frac{V_{TAS}}{c_s} \quad (5.1-17再)$$

レイノルズ数

$$Re = \frac{V_{TAS} \cdot l}{\nu} \left(= \frac{\rho \cdot V_{TAS} \cdot l}{\mu} \right) \quad (5.1-18再)$$

ここで, l は特性長さ

動圧

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho V_{TAS}^2 \quad (5.1-19再)$$

等価対気速度

$$V_{EAS} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} V_{TAS} \quad (5.1-20再)$$

対気飛行経路角, 方位角

$$\begin{bmatrix} U_{aH} \\ V_{aH} \\ W_{aH} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{HB}^T \begin{bmatrix} U_{a_{ref}} \\ V_{a_{ref}} \\ W_{a_{ref}} \end{bmatrix} \quad (5.1-21再)$$

$$\gamma_a = \sin^{-1} \left(\frac{-W_{aH}}{V_{TAS}} \right) \quad (-\pi/2 \leq \gamma_a \leq +\pi/2) \quad (5.1-22再)$$

$$\xi_a = \tan^{-1} \left(\frac{V_{aH}}{U_{aH}} \right) \quad (-\pi < \xi_a \leq +\pi) \quad (5.1-23再)$$

迎角, 横滑り角変化率無次元量

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} / \left(\frac{2V_{TAS}}{\bar{c}} \right) \\ \dot{\beta} / \left(\frac{2V_{TAS}}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (5.1-24再)$$

ここで, $\dot{\alpha}$ 及び $\dot{\beta}$ は, α 及び β を数値微分することにより求める.

対気角速度無次元量 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_a \\ \hat{Q}_a \\ \hat{R}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_a / \left(\frac{2V_{TAS}}{b} \right) \\ Q_a / \left(\frac{2V_{TAS}}{\bar{c}} \right) \\ R_a / \left(\frac{2V_{TAS}}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (5.1-25再)$$

ここで, [機体モデル]を実行し, 空力6分力係数, エンジン推力・モーメント 及び 慣性特性(質量, 慣性モーメント, 慣性乗積, 重心位置)を求める.

(6) 有次元化

これも第5.1節の地球平面モデルでの航空機ダイナミクスモデルの (5)有次元化と全く同一である.

揚力, 抗力, 横力

$$\begin{bmatrix} L \\ D \\ Y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_L q_\infty S \\ C_D q_\infty S \\ C_Y q_\infty S \end{bmatrix} \quad (5.1-26再)$$

空気力 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha L - \cos \alpha D \\ Y_a \\ -\cos \alpha L + \sin \alpha D \end{bmatrix} \quad (5.1-27再)$$

空気モーメント (機体重心まわり, 機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} L_a \\ M_a \\ N_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_l q_\infty S b \\ C_m q_\infty S \bar{c} \\ C_n q_\infty S b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -z_{CG} & -y_{CG} \\ z_{CG} & 0 & -x_{CG} \\ y_{CG} & x_{CG} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} \quad (5.1-28再)$$

(7) カ・モーメント

全外力（機体軸成分）

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} + \mathbf{T}_{HB} \begin{bmatrix} mg'_x \\ mg'_y \\ mg'_z \end{bmatrix} \quad (11.1-19)$$

これらの力は、慣性空間に対する運動方程式に入力されるので、重力項は遠心力を含まない“引力”であることに注意。

全外力モーメント（機体重心まわり，機体軸成分）

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a \\ M_a \\ N_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{bmatrix} \quad (5.1-30再)$$

(8) 非線形運動方程式

状態変数の変化率を運動方程式に従い求める。

機体重心の慣性(対 ECI 座標系)速度の変化率（機体軸成分）

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X/m \\ Y/m \\ Z/m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} QW - RV \\ RU - PW \\ PV - QU \end{bmatrix} \quad (5.1-31再)$$

機体の慣性(対 ECI 座標系)角速度の変化率（機体軸成分）

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_{zz}L + I_{zx}N - (I_{zz}^2 - I_{yy}I_{zz} + I_{zx}^2)QR + I_{zx}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})PQ}{I_{xx}I_{zz} - I_{zx}^2} \\ \frac{M + (I_{zz} - I_{xx})RP + I_{zx}(R^2 - P^2)}{I_{yy}} \\ \frac{I_{zx}L + I_{xx}N + (I_{xx}^2 - I_{xx}I_{yy} + I_{zx}^2)PQ - I_{zx}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})QR}{I_{xx}I_{zz} - I_{zx}^2} \end{bmatrix} \quad (5.1-32再)$$

機体重心の ECI 座標の変化率（ECI 座標成分）

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{HB}^T \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (5.1-33再)$$

ECI 座標系から機体軸へのクォータニオンの変化率

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & R & -Q & P \\ -R & 0 & P & Q \\ Q & -P & 0 & R \\ -P & -Q & -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (5.1-38再)$$

11.2 環境モデル

(1) 重力モデル

入力：機体重心の位置(経度 λ ，緯度 η ，高度 H)

出力：遠心力を含む“重力(=引力+遠心力)”と、含まない“引力”の2種類

重力(遠心力含む)加速度(局所水平座標成分 g_x, g_y, g_z)

重力(遠心力含まず=引力)加速度(局所水平座標成分 g'_x, g'_y, g'_z)

(例) WGS-84 モデル (引力含む)

$$g = 9.7803267714 \frac{1 + 0.00193185138639 \sin^2 \eta}{\sqrt{1 - 0.00669437999013 \sin^2 \eta}} \quad \text{ただし, } \eta: \text{緯度} \quad (11.2-1)$$

(2) 風モデル

入力 : 機体重心の位置(経度 λ , 緯度 η , 高度 H), 局所水平座標から機体軸への方向余弦行列 T_{HB}

出力 : 風速 (定常風+突風) U_W, V_W, W_W (機体軸成分)

(定常風) U_{WH}, V_{WH}, W_{WH} (局所水平座標成分)

風の角速度 P_W, Q_W, R_W (機体軸成分)

(3) 大気モデル

入力 : 機体重心の位置(経度 λ , 緯度 η , 高度 H)

出力 : 大気密度 ρ , 音速 c_s , 気温 T , 動粘性係数 ν

(例) 国際標準大気 ISO 2533:1975

ICAO 標準大気 Doc 7488-CD

米国標準大気 U.S. standard atmosphere, 1976

11.3 機体モデル

第5.3節の地球平面モデルでの機体モデルと全く同一である.

(1) 空力モデル

入力 : $M, R_e, \alpha, \beta, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{P}_a, \hat{Q}_a, \hat{R}_a, \delta_a, \delta_e, \delta_r$ など

出力 :

・ 空力係数 $\begin{bmatrix} C_L \\ C_D \\ C_Y \end{bmatrix}$: 揚力/抗力/横力係数

・ 空力モーメント係数 $\begin{bmatrix} C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix}$: ローリング/ピッチング/ヨーイング・モーメント係数

(2) エンジンモデル

入力 : $\alpha, \beta, V_{EAS}, T, \rho, \delta_T$ (推力レバー角) など

出力 :

・ エンジン推力 $\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix}$: 機体軸成分

・ エンジンモーメント $\begin{bmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{bmatrix}$: 機体軸成分

・ 燃料消費に伴い変動する慣性特性(質量 m , 慣性モーメント $I_{xx} \cdot I_{yy} \cdot I_{zz}$, 慣性乗積 I_{zx} , 重心位置 $x_{CG} \cdot y_{CG} \cdot z_{CG}$)

12. 3自由度シミュレーション

3自由度シミュレーションの流れを図12-1に示す.

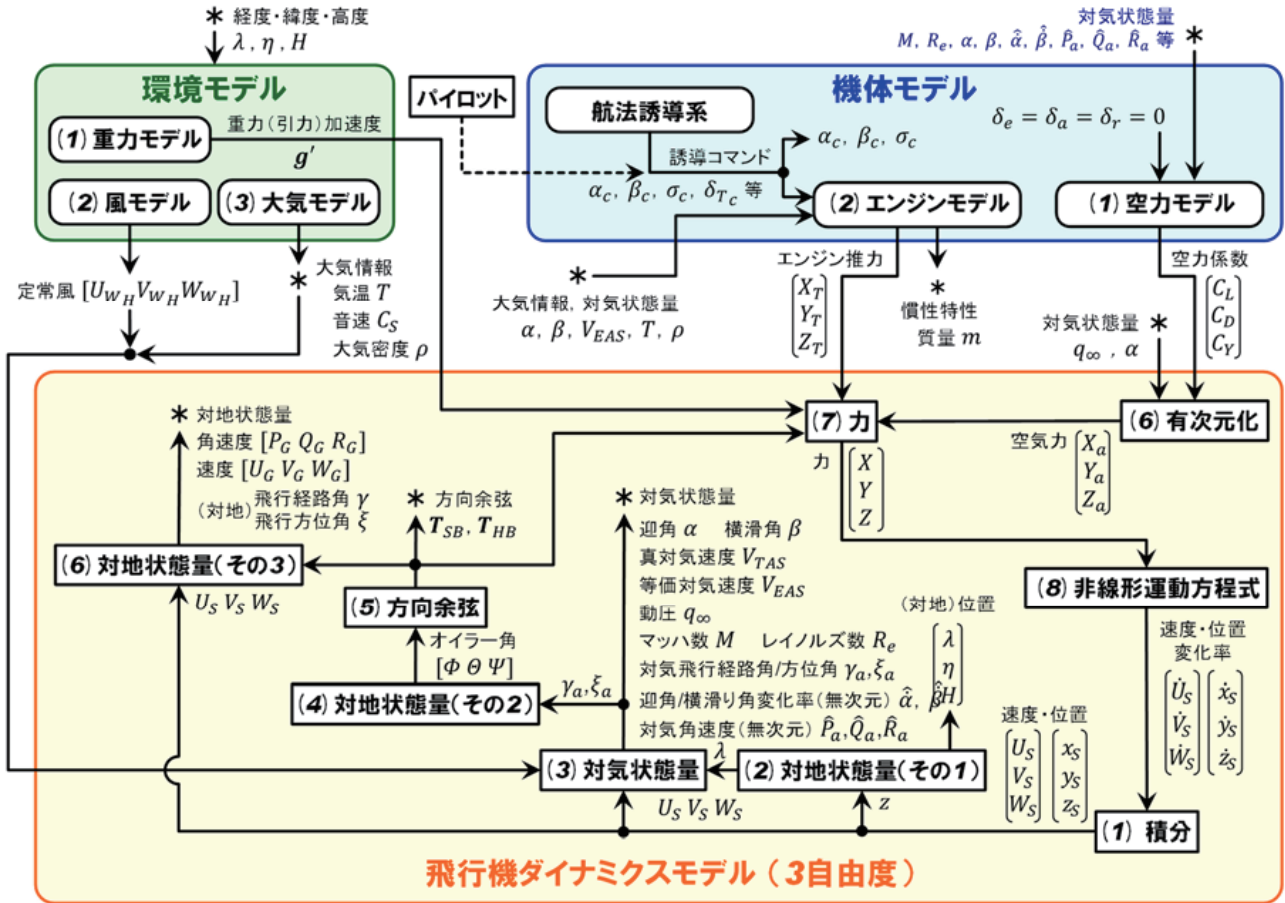


図 12-1 3自由度シミュレーションの流れ

6自由度シミュレーションと同じく、「航空機ダイナミクスモデル」、「環境モデル」及び「機体モデル」から構成される。各構成要素ブロック中の(数字)は、本章各節の項番号と対応している。

「航空機ダイナミクスモデル」は、剛体の3自由度(並進)運動を慣性座標系を基準として解くものであり、機体によらず汎用的なものである。

「環境モデル」及び「機体モデル」は、6自由度シミュレーションと同一である。ただし、風モデルでは、定常風のみ出力し、突風及び風の角速度(回転風)は0を出力する。

以下、3自由度版の「航空機ダイナミクスモデル」について、詳細に述べる。

12.1 航空機ダイナミクスモデル

状態変数として、以下の6個の対慣性座標変数を設定する。基本となる慣性座標系が地表面固定座標系から ECI 座標系になっている点を除いて、地球平面モデルの場合と同じである。

- ・ 速度 $\begin{bmatrix} U_S \\ V_S \\ W_S \end{bmatrix}$: 機体重心の慣性(対 ECI 座標系)速度 (ECI 座標成分)
- ・ 位置 $\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix}$: 機体重心の ECI 座標

図12.1-1に、各状態変数のイメージを示す。

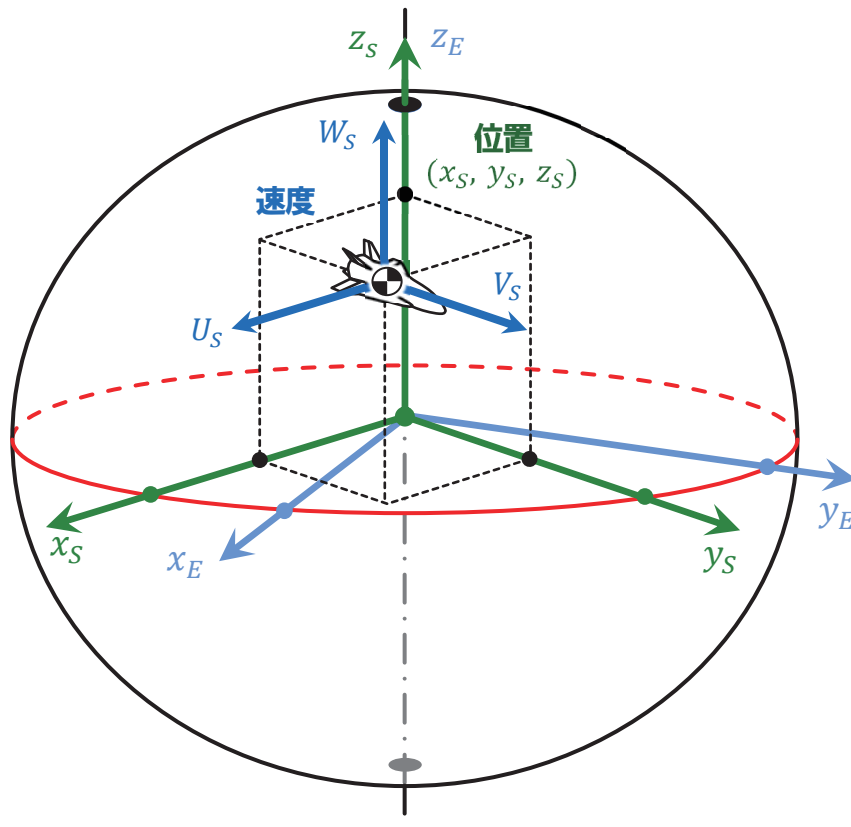


図 12.1-1 3自由度シミュレーションの状態変数

以下、図12-1の各モジュールについて述べる。各モジュールの入力を赤字、出力を青字で示す。

(1) 積分

時間をカウントアップし、更新後の時間における状態変数の値を、運動方程式より出力される状態変数の変化率を数値積分することにより求める。

時間

$$t = t + \Delta t \quad (11.1-1再)$$

機体重心の慣性(対 ECI 座標系)速度 (ECI 座標成分)

$$\begin{bmatrix} U_S \\ V_S \\ W_S \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{U}_S \\ \dot{V}_S \\ \dot{W}_S \end{bmatrix} dt \quad (12.1-1)$$

機体重心の ECI 座標

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{z}_S \end{bmatrix} dt \quad (11.1-4再)$$

ただし、13.1節に示すように、演算ループの初回のみ、積分演算は行わず、時間及び6個の状態変数に初期値を出力する。

(2) 対地状態量(その1)

経度、緯度、高度 (付録3「ECEF 座標と経度・緯度・高度」(A3-13)式)

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \eta \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}\left(\frac{y_S}{x_S}\right) - \omega t \\ \tan^{-1}\left\{ \frac{(1-e^2)z_S + e^2 b \sin^3 \theta}{(1-e^2)(\sqrt{x_S^2 + y_S^2} - e^2 a \cos^3 \theta)} \right\} \\ \frac{\sqrt{x_S^2 + y_S^2}}{\cos \eta} - \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \eta}} \end{bmatrix} \quad (11.1-6再)$$

ただし,

$$\theta \triangleq \tan^{-1}\left(\frac{a}{b} \frac{z_S}{\sqrt{x_S^2 + y_S^2}}\right) \quad (11.1-7再)$$

ここで、経度 λ 、緯度 η 、高度 H を用いて[環境モデル]([重力モデル]、[風モデル]及び[大気モデル])を実行する。

(3) 対気状態量

方向余弦行列, ECI 座標系 \Rightarrow 局所水平座標系

$$\mathbf{T}_{SH} = \begin{bmatrix} -\sin \eta \cos(\omega t + \lambda) & -\sin \eta \sin(\omega t + \lambda) & \cos \eta \\ -\sin(\omega t + \lambda) & \cos(\omega t + \lambda) & 0 \\ -\cos \eta \cos(\omega t + \lambda) & -\cos \eta \sin(\omega t + \lambda) & -\sin \eta \end{bmatrix} \quad (11.1-9再)$$

慣性(対 ECI 座標系)速度 (局所水平座標成分)

$$\begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{SH} \begin{bmatrix} U_S \\ V_S \\ W_S \end{bmatrix} \quad (12.1-2)$$

対気速度(局所水平座標成分)

$$\begin{bmatrix} U_{aH} \\ V_{aH} \\ W_{aH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_{WH} \\ V_{WH} \\ W_{WH} \end{bmatrix} \quad (6.1-2再)$$

真対気速度

$$V_{TAS} = \sqrt{U_{aH}^2 + V_{aH}^2 + W_{aH}^2} \quad (6.1-3再)$$

迎角

$$\alpha = \alpha_C \quad (6.1-4再)$$

横滑り角

$$\beta = \beta_C \quad (6.1-5再)$$

マッハ数

$$M = \frac{V_{TAS}}{c_s} \quad (5.1-17再)$$

レイノルズ数

$$Re = \frac{V_{TAS} \cdot l}{\nu} \left(= \frac{\rho \cdot V_{TAS} \cdot l}{\mu} \right) \quad (5.1-18再)$$

ここで、 l は特性長さ

動圧

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho V_{TAS}^2 \quad (5.1-19再)$$

等価対気速度

$$V_{EAS} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} V_{TAS} \quad (5.1-20再)$$

対気飛行経路角, 方位角

$$\gamma_a = \sin^{-1}\left(\frac{-W_{aH}}{V_{TAS}}\right) \quad (-\pi/2 \leq \gamma_a \leq +\pi/2) \quad (5.1-22再)$$

$$\xi_a = \tan^{-1}\left(\frac{V_{aH}}{U_{aH}}\right) \quad (-\pi < \xi_a \leq +\pi) \quad (5.1-23再)$$

迎角, 横滑り角変化率無次元量

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1-6再)$$

対気角速度無次元量 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_a \\ \hat{Q}_a \\ \hat{R}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1-7再)$$

(4) 対地状態量(その2)

オイラー角 (付録2「局所水平座標, 速度軸と機体軸」(A2-5)及び(A2-6)式)

if $(1 - |T_{HB13}|) > 2.0 \times 10^{-4}$ (T. B. D.)

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(T_{HB23}/T_{HB33}) \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1}(T_{HB12}/T_{HB11}) \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\pi < \Phi \leq +\pi \\ -\frac{\pi}{2} < \Theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ -\pi \leq \Psi < +\pi \end{pmatrix} \quad (6.1-8a再)$$

else

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1}(-T_{HB21}/T_{HB22}) \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} < \Theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ -\pi \leq \Psi < +\pi \end{pmatrix} \quad (6.1-8b再)$$

end

ここで,

$$\begin{aligned} T_{HB11} &= \cos \alpha_c \cos \beta_c \cos \gamma_a \cos \xi_a - \cos \alpha_c \sin \beta_c (\sin \sigma_c \sin \gamma_a \cos \xi_a - \cos \sigma_c \sin \xi_a) - \sin \alpha_c (\cos \sigma_c \sin \gamma_a \cos \xi_a + \sin \sigma_c \sin \xi_a) \\ T_{HB21} &= \sin \beta_c \cos \gamma_a \cos \xi_a + \cos \beta_c (\sin \sigma_c \sin \gamma_a \cos \xi_a - \cos \sigma_c \sin \xi_a) \\ T_{HB12} &= \cos \alpha_c \cos \beta_c \cos \gamma_a \sin \xi_a - \cos \alpha_c \sin \beta_c (\sin \sigma_c \sin \gamma_a \sin \xi_a + \cos \sigma_c \cos \xi_a) - \sin \alpha_c (\cos \sigma_c \sin \gamma_a \sin \xi_a - \sin \sigma_c \cos \xi_a) \\ T_{HB22} &= \sin \beta_c \cos \gamma_a \sin \xi_a + \cos \beta_c (\sin \sigma_c \sin \gamma_a \sin \xi_a + \cos \sigma_c \cos \xi_a) \\ T_{HB13} &= -\cos \alpha_c \cos \beta_c \sin \gamma_a \quad -\cos \alpha_c \sin \beta_c \sin \sigma_c \cos \gamma_a \quad -\sin \alpha_c \cos \sigma_c \cos \gamma_a \\ T_{HB23} &= -\sin \beta_c \sin \gamma_a \quad + \cos \beta_c \sin \sigma_c \cos \gamma_a \\ T_{HB33} &= -\sin \alpha_c \cos \beta_c \sin \gamma_a \quad -\sin \alpha_c \sin \beta_c \sin \sigma_c \cos \gamma_a \quad + \cos \alpha_c \cos \sigma_c \cos \gamma_a \end{aligned}$$

$\alpha_c, \beta_c, \sigma_c$ は誘導コマンド(迎角, 横滑り角, バンク角)

なお, 近似式として以下の式を用いても良い.

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_c \\ \gamma_a + \alpha_c \\ \xi_a - \beta_c \end{bmatrix} \quad (6.1-8c再)$$

if $(|\Theta| > \frac{\pi}{2})$

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{mod}(\Phi + \pi + \pi, 2\pi) - \pi \\ \text{sign}(\Theta)(\pi - |\Theta|) \\ \text{mod}(\Psi + \pi + \pi, 2\pi) - \pi \end{bmatrix} \quad (6.1-8d再)$$

end

(5) 方向余弦

方向余弦行列, 局所水平座標系 \Rightarrow 機体軸系

$$T_{HB} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (5.1-6再)$$

方向余弦行列, ECI 座標系 \Rightarrow 局所水平座標系

$$T_{SH} = \begin{bmatrix} -\sin \eta \cos(\omega t + \lambda) & -\sin \eta \sin(\omega t + \lambda) & \cos \eta \\ -\sin(\omega t + \lambda) & \cos(\omega t + \lambda) & 0 \\ -\cos \eta \cos(\omega t + \lambda) & -\cos \eta \sin(\omega t + \lambda) & -\sin \eta \end{bmatrix} \quad (11.1-9再)$$

方向余弦行列, ECI 座標系 \Rightarrow 機体軸系

$$T_{SB} = T_{HB} T_{SH} \quad (12.1-3)$$

(6) 対地状態量(その3)

対地(対 ECI 座標系)速度 (局所水平座標成分)

$$\begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix} = T_{SH} \begin{bmatrix} U_S \\ V_S \\ W_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \eta \cos(\omega t + \lambda) & -\sin \eta \sin(\omega t + \lambda) & \cos \eta \\ -\sin(\omega t + \lambda) & \cos(\omega t + \lambda) & 0 \\ -\cos \eta \cos(\omega t + \lambda) & -\cos \eta \sin(\omega t + \lambda) & -\sin \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_S \\ V_S \\ W_S \end{bmatrix} \quad (12.1-4)$$

対地(対 ECEF 座標系)速度 (局所水平座標成分)

$$\begin{bmatrix} U_{HG} \\ V_{HG} \\ W_{HG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_H \\ V_H - \sqrt{x_S^2 + y_S^2} \omega \\ W_H \end{bmatrix} \quad (11.1-16再)$$

飛行経路角, 飛行方位角

$$\gamma = \tan^{-1} \left(-W_{HG} / \sqrt{U_{HG}^2 + V_{HG}^2} \right) \quad (-\pi/2 \leq \gamma \leq +\pi/2) \quad (11.1-17再)$$

$$\xi = \tan^{-1}(V_{HG} / U_{HG}) \quad (-\pi < \xi \leq +\pi) \quad (11.1-18再)$$

対地(対 ECEF 座標系)速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} U_G \\ V_G \\ W_G \end{bmatrix} = T_{HB} \begin{bmatrix} U_{HG} \\ V_{HG} \\ W_{HG} \end{bmatrix} \quad (12.1-5)$$

対地(対 ECEF 座標系)角速度 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} P_G \\ Q_G \\ R_G \end{bmatrix} = -T_{SB} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (12.1-6)$$

ここで, [機体モデル]を実行し, 空力係数, エンジン推力及び慣性特性(質量)を求める。

(7) 有次元化

揚力, 抗力, 横力

$$\begin{bmatrix} L \\ D \\ Y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_L q_\infty S \\ C_D q_\infty S \\ C_Y q_\infty S \end{bmatrix} \quad (5.1-26再)$$

空気力 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha L - \cos \alpha D \\ Y_a \\ -\cos \alpha L + \sin \alpha D \end{bmatrix} \quad (5.1-27再)$$

(8) 力

全外力 (機体軸成分)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} + \mathbf{T}_{HB} \begin{bmatrix} mg'_x \\ mg'_y \\ mg'_z \end{bmatrix} \quad (11.1-19再)$$

これらの力は、慣性空間に対する運動方程式に入力されるので、重力項は遠心力を含まない“引力”であることに注意.

(9) 非線形運動方程式

速度の変化率(加速度) (ECI 座標成分)

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_S \\ \dot{V}_S \\ \dot{W}_S \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{BS} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} / m = \mathbf{T}_{SB}^T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} / m \quad (12.1-7)$$

機体重心の ECI 座標の変化率 (ECI 座標成分)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{z}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_S \\ V_S \\ W_S \end{bmatrix} \quad (12.1-8)$$

13. シミュレーション初期値の設定

13.1 機体状態量からの状態変数初期値の導出

シミュレーション初期値は、6自由度シミュレーションの場合、時間と11.1節の13個の状態変数に初期値を設定し、それらを[(1)積分]の出口のところに代入して、[(2)対地状態量(その1)]から演算を開始する。

初期機体状態量として、一般的に以下の変数が与えられるとする。

- ・ 機体重心の対地速度 : 対地速度(速さ) V_{G_0} , 飛行経路角 γ_0 , 飛行方位角 ξ_0
- ・ 機体の対地角速度 : $P_{G_0}, Q_{G_0}, R_{G_0}$
- ・ 機体重心の位置 : 経度 λ_0 , 緯度 η_0 , 高度 H_0
- ・ 機体の姿勢 : オイラー角 ϕ_0, θ_0, ψ_0

この時、(11.1-10), (11.1-15) ~ (11.1-18)式, 付録3「ECEF 座標と経度・緯度・高度」の(A3-10)式及び 付録1「方向余弦, クォータニオンとオイラー角」の(A1-19)式より, 13個の状態変数の初期値は以下のとおり求められる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}_0 &= \mathbf{T}_{HB_0} \begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix}_0 = \mathbf{T}_{HB_0} \begin{bmatrix} U_{HG} \\ V_{HG} + \sqrt{x_S^2 + y_S^2} \omega \\ W_{HG} \end{bmatrix}_0 \\ &= \mathbf{T}_{HB_0} \begin{bmatrix} V_{G_0} \cos \gamma_0 \cos \xi_0 \\ V_{G_0} \cos \gamma_0 \sin \xi_0 + \sqrt{x_{S_0}^2 + y_{S_0}^2} \omega \\ -V_{G_0} \sin \gamma_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13.1-1)$$

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} P_G \\ Q_G \\ R_G \end{bmatrix}_0 + \mathbf{T}_{SB_0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{G_0} \\ Q_{G_0} \\ R_{G_0} \end{bmatrix} + \mathbf{T}_{SB_0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (13.1-2)$$

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} (R_{N_0} + H_0) \cos \eta_0 \cos(\omega t_0 + \lambda_0) \\ (R_{N_0} + H_0) \cos \eta_0 \sin(\omega t_0 + \lambda_0) \\ \{(1 - e^2)R_{N_0} + H_0\} \sin \eta_0 \end{bmatrix} \quad (13.1-3)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\text{sgn}(T_{SB_{023}} - T_{SB_{032}})}{2} \sqrt{1 + T_{SB_{011}} - T_{SB_{022}} - T_{SB_{033}}} \\ \frac{\text{sgn}(T_{SB_{031}} - T_{SB_{013}})}{2} \sqrt{1 - T_{SB_{011}} + T_{SB_{022}} - T_{SB_{033}}} \\ \frac{\text{sgn}(T_{SB_{012}} - T_{SB_{021}})}{2} \sqrt{1 - T_{SB_{011}} - T_{SB_{022}} + T_{SB_{033}}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{1 + T_{SB_{011}} + T_{SB_{022}} + T_{SB_{033}}} \end{bmatrix} \quad (13.1-4)$$

ただし,

t_0 : シミュレーション開始時の時刻

R_{N_0} : 緯度 η_0 での卯酉線曲率半径 $\left(= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \eta_0}} \right)$ 付録3 (A3-4)式

$T_{SB_{0ij}}$: 方向余弦行列 \mathbf{T}_{SB_0} の $[ij]$ 成分

$$\mathbf{T}_{SB_0} = \mathbf{T}_{HB_0} \mathbf{T}_{EH_0} \mathbf{T}_{SE_0}$$

$$\mathbf{T}_{SE_0} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t_0 + \lambda_0) & \sin(\omega t_0 + \lambda_0) & 0 \\ -\sin(\omega t_0 + \lambda_0) & \cos(\omega t_0 + \lambda_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{EH_0} = \begin{bmatrix} \cos(-\eta_0 - \pi/2) & 0 & -\sin(-\eta_0 - \pi/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\eta_0 - \pi/2) & 0 & \cos(-\eta_0 - \pi/2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{HB_0} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \cos \Psi_0 & \cos \theta_0 \sin \Psi_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \phi_0 \sin \theta_0 \cos \Psi_0 - \cos \phi_0 \sin \Psi_0 & \sin \phi_0 \sin \theta_0 \sin \Psi_0 + \cos \phi_0 \cos \Psi_0 & \sin \phi_0 \cos \theta_0 \\ \cos \phi_0 \sin \theta_0 \cos \Psi_0 + \sin \phi_0 \sin \Psi_0 & \cos \phi_0 \sin \theta_0 \sin \Psi_0 - \sin \phi_0 \cos \Psi_0 & \cos \phi_0 \cos \theta_0 \end{bmatrix}$$

具体例として、初期状態が、滑走路基準点で滑走路方位を向いて静止している状態ならば、

- ・ 機体重心の対地速度 : $V_{G_0} = 0, \gamma_0 = 0, \xi_0 = \Psi_{RW}$
- ・ 機体の対地角速度 : $(P_{G_0}, Q_{G_0}, R_{G_0}) = (0, 0, 0)$
- ・ 機体重心の位置 : $(\lambda_0, \eta_0, H_0) = (\lambda_{RW}, \eta_{RW}, H_{RW} + h_{CG})$
- ・ 機体の姿勢 : $(\phi_0, \theta_0, \Psi_0) = (0, 0, \Psi_{RW})$

とすれば良い。

ただし、

- $(\lambda_{RW}, \eta_{RW}, H_{RW}), \Psi_{RW}$: 滑走路基準点の経度, 緯度, 高度 及び 滑走路方位
- h_{CG} : 機体が地上静止時の機体重心の地面からの高さ

3自由度シミュレーションの場合には、同様に時間と 12.1 節の6個の状態変数に初期値を設定し、それらを [(1)積分] の出口のところに代入して、[(2) 対地状態量(その1)] から演算を開始する。

初期機体状態量として、一般的に以下の変数が与えられるとする。

- ・ 機体重心の対地速度 : 対地速度(速さ) V_{G_0} , 飛行経路角 γ_0 , 飛行方位角 ξ_0
- ・ 機体重心の位置 : 経度 λ_0 , 緯度 η_0 , 高度 H_0

この時、(12.1-2)式, (11.1-16)~(11.1-18)式 及び 付録3「ECEF 座標と経度・緯度・高度」の(A3-10)式より、6個の状態変数の初期値は以下のとおり求められる。

$$\begin{bmatrix} U_S \\ V_S \\ W_S \end{bmatrix}_0 = \mathbf{T}_{SH_0}^{-1} \begin{bmatrix} U_H \\ V_H \\ W_H \end{bmatrix}_0 = \mathbf{T}_{SH_0}^T \begin{bmatrix} U_{HG_0} \\ V_{HG_0} + \sqrt{x_{S_0}^2 + y_{S_0}^2} \omega \\ W_{HG_0} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{T}_{SH_0}^T \begin{bmatrix} V_{G_0} \cos \gamma_0 \cos \xi_0 \\ V_{G_0} \cos \gamma_0 \sin \xi_0 + \sqrt{x_{S_0}^2 + y_{S_0}^2} \omega \\ -V_{G_0} \sin \gamma_0 \end{bmatrix} \quad (13.1-5)$$

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} (R_{N_0} + H_0) \cos \eta_0 \cos(\omega t_0 + \lambda_0) \\ (R_{N_0} + H_0) \cos \eta_0 \sin(\omega t_0 + \lambda_0) \\ \{(1 - e^2)R_{N_0} + H_0\} \sin \eta_0 \end{bmatrix} \quad (13.1-3再)$$

ただし、

t_0 : シミュレーション開始時の時刻

R_{N_0} : 緯度 η_0 での卯酉線曲率半径 $\left(= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \eta_0}} \right)$ 付録3 (A3-4)式

$$\mathbf{T}_{SH_0} = \mathbf{T}_{EH_0} \mathbf{T}_{SE_0}$$

$$\mathbf{T}_{SE_0} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t_0 + \lambda_0) & \sin(\omega t_0 + \lambda_0) & 0 \\ -\sin(\omega t_0 + \lambda_0) & \cos(\omega t_0 + \lambda_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{EH_0} = \begin{bmatrix} \cos(-\eta_0 - \pi/2) & 0 & -\sin(-\eta_0 - \pi/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\eta_0 - \pi/2) & 0 & \cos(-\eta_0 - \pi/2) \end{bmatrix}$$

具体例の、滑走路基準点で滑走路方位を向いて静止している状態については、6自由度の場合と同様にして初期値を設定することができる。

13.2 釣合い計算

前節での具体例のように、機体が地上静止状態、あるいは地上走行状態からシミュレーションを開始する場合は、対応する状態変数を容易に求めることができるが、飛行状態から開始する場合には、航空機が釣合い状態にないとシミュレーション開始直後に機体が大きく運動し、瞬時に墜落に至る可能性がある。そのため、釣合い(Trim)計算を行い、その結果として得られる機体状態量から状態変数を求め、その値を初期値とすることが必要である。釣合い計算により、以下の変数の釣合い飛行状態での値が出力されるものとする。

- ・機体重心の位置

λ, η : 機体重心の経緯度, H : 高度

- ・機体重心の対地速度ベクトル

V_G : 対地速度, γ : (対地)飛行経路角, ξ : (対地)飛行方位角

もしくは U_H, V_H, W_H : 対地速度 (局所水平座標成分) など

- ・機体重心の対気速度ベクトル

V_{TAS} : 真対気速度, V_{EAS} : 等価対気速度, γ_a : 対気飛行経路角, ξ_a : 対気飛行方位角

もしくは U_{aH}, V_{aH}, W_{aH} : (真)対気速度 (局所水平座標成分) など

- ・機体の対気姿勢

α : 迎角, β : 横滑り角, σ : バンク角

- ・機体の(対地)角速度＝対気角速度

P_G : ロール角速度, Q_G : ピッチ角速度, R_G : ヨー角速度

- ・制御量

δ_a : エルロン舵角, δ_e : エレベータ舵角, δ_r : ラダー舵角, δ_T : 推力レバー角

これらの変数値が得られれば、6自由度シミュレーションの場合は、(13.1-1)～(13.1-4)式を用いて、13個の状態変数の初期値が得られる。ただし、(13.1-4)式に必要なオイラー角の初期値は、(6.1-8)式において、誘導コマンド $\alpha_C, \beta_C, \sigma_C$ を、迎角 α , 横滑り角 β , バンク角 σ に置き換えて用いる。

3自由度シミュレーションの場合は、(13.1-5)式と(13.1-3)式を用いる。

14. おわりに

航空技術開発の初期段階から最終段階まで、重要な役割を果たす飛行シミュレーションのための演算アルゴリズムについて纏めた。第1部では近距離飛行を行う旅客機などを対象とした地球平面モデルに基づく飛行シミュレーションを扱い、第2部では大陸間飛行を行う航空機や宇宙往還機を対象とした地球回転楕円体モデルに基づく飛行シミュレーションを扱った。今後、飛行シミュレーション解析を行う方々のお役に立てば幸いである。

謝辞

旧航空宇宙技術研究所において、飛行シミュレーション技術を初めとする飛行システム技術に関してご指導下さった坂東俊夫室長及び永安正彦室長、参考文献1)に関して貴重な意見を述べて下さった鈴木広一研究員及び塚本太郎研究員に深く感謝する次第です。(肩書きはいずれも当時)

参考文献

- 1) 航空宇宙技術研究所資料 TM-594 「宇宙往還機飛行シミュレーションプログラム」(1988年8月)

付録1 方向余弦, クォータニオンとオイラー角

A1.0 クォータニオン

クォータニオン (姿勢基準座標系 \Rightarrow 機体軸系) (姿勢基準座標系は, 局所水平座標系もしくは ECI 座標系)

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 \sin(\theta/2) \\ q_2 &= a_2 \sin(\theta/2) \\ q_3 &= a_3 \sin(\theta/2) \\ q_4 &= \cos(\theta/2) \end{aligned} \quad (\text{A1-1})$$

ただし, 姿勢基準座標系から機体軸系へ, 1回の回転で変換する場合の

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) &: \text{回転軸方向の単位ベクトルの姿勢基準座標成分 } (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1) \\ \theta &: \text{回転角 } (-\pi \leq \theta < \pi) \end{aligned}$$

よって

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (\text{A1-2})$$

A1.1 クォータニオン \Rightarrow 方向余弦行列 T_{*B}

方向余弦行列 T_{*B} (姿勢基準座標系 \Rightarrow 機体軸系) (*は H (局所水平座標系) もしくは S (ECI 座標系))

$$T_{*B} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A1-3})$$

A1.2 方向余弦行列 $T_{*B} \Rightarrow$ クォータニオン

T_{*Bij} を方向余弦行列 T_{*B} の $[ij]$ 成分とすると

(A1-2) 及び (A1-3) 式より

$$q_1^2 + q_2^2 = \frac{1}{2} (1 - T_{*B33}) \quad (\text{A1-4})$$

$$q_1^2 - q_2^2 = \frac{1}{2} (T_{*B11} - T_{*B22}) \quad (\text{A1-5})$$

$$q_3^2 + q_4^2 = \frac{1}{2} (1 + T_{*B33}) \quad (\text{A1-6})$$

$$q_3^2 - q_4^2 = \frac{1}{2} (-T_{*B11} - T_{*B22}) \quad (\text{A1-7})$$

よって

$$q_1^2 = \frac{1}{4} (1 + T_{*B11} - T_{*B22} - T_{*B33}) \quad (\text{A1-8})$$

$$q_2^2 = \frac{1}{4} (1 - T_{*B11} + T_{*B22} - T_{*B33}) \quad (\text{A1-9})$$

$$q_3^2 = \frac{1}{4} (1 - T_{*B11} - T_{*B22} + T_{*B33}) \quad (\text{A1-10})$$

$$q_4^2 = \frac{1}{4} (1 + T_{*B11} + T_{*B22} + T_{*B33}) \quad (\text{A1-11})$$

また, (A1-3) 及び (A1-1) 式より

$$q_1q_4 = \frac{1}{4} (T_{*B23} - T_{*B32}) \quad (\text{A1-12})$$

$$q_2q_4 = \frac{1}{4} (T_{*B31} - T_{*B13}) \quad (\text{A1-13})$$

$$q_3q_4 = \frac{1}{4} (T_{*B12} - T_{*B21}) \quad (\text{A1-14})$$

$$q_4 = \cos(\theta/2) > 0 \quad (-\pi \leq \theta < \pi) \quad (\text{A1-15})$$

よって

$$\operatorname{sgn}(q_1) = \operatorname{sgn}(q_1 q_4) = \operatorname{sgn}(T_{*B32} + T_{*B23}) \quad (\text{A1-16})$$

$$\operatorname{sgn}(q_2) = \operatorname{sgn}(q_2 q_4) = \operatorname{sgn}(T_{*B31} - T_{*B13}) \quad (\text{A1-17})$$

$$\operatorname{sgn}(q_3) = \operatorname{sgn}(q_3 q_4) = \operatorname{sgn}(T_{*B12} - T_{*B21}) \quad (\text{A1-18})$$

以上より

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sgn}(T_{*B23} - T_{*B32})}{2} \sqrt{1 + T_{*B11} - T_{*B22} - T_{*B33}} \\ \frac{\operatorname{sgn}(T_{*B31} - T_{*B13})}{2} \sqrt{1 - T_{*B11} + T_{*B22} - T_{*B33}} \\ \frac{\operatorname{sgn}(T_{*B12} - T_{*B21})}{2} \sqrt{1 - T_{*B11} - T_{*B22} + T_{*B33}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{1 + T_{*B11} + T_{*B22} + T_{*B33}} \end{pmatrix} \quad (\text{A1-19})$$

A1.3 方向余弦行列 T_{*B} を回転角 θ とその方向ベクトル (a_1, a_2, a_3) で表すと...

$$\begin{aligned} T_{*B} &= \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A1-3再}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I} - 2 \begin{bmatrix} q_2^2 + q_3^2 & -q_1 q_2 - q_3 q_4 & -q_1 q_3 + q_2 q_4 \\ -q_1 q_2 + q_3 q_4 & q_1^2 + q_3^2 & -q_2 q_3 - q_1 q_4 \\ -q_1 q_3 - q_2 q_4 & -q_2 q_3 + q_1 q_4 & q_1^2 + q_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} (a_2^2 + a_3^2) \sin \frac{\theta}{2} & -a_1 a_2 \sin \frac{\theta}{2} - a_3 \cos \frac{\theta}{2} & -a_1 a_3 \sin \frac{\theta}{2} + a_2 \cos \frac{\theta}{2} \\ -a_1 a_2 \sin \frac{\theta}{2} + a_3 \cos \frac{\theta}{2} & (a_1^2 + a_3^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} & -a_2 a_3 \sin \frac{\theta}{2} - a_1 \cos \frac{\theta}{2} \\ -a_1 a_3 \sin \frac{\theta}{2} - a_2 \cos \frac{\theta}{2} & -a_2 a_3 \sin \frac{\theta}{2} + a_1 \cos \frac{\theta}{2} & (a_1^2 + a_2^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I} - \begin{bmatrix} (a_2^2 + a_3^2)(1 - \cos \theta) & -a_1 a_2(1 - \cos \theta) - a_3 \sin \theta & -a_1 a_3(1 - \cos \theta) + a_2 \sin \theta \\ -a_1 a_2(1 - \cos \theta) + a_3 \sin \theta & (a_1^2 + a_3^2)(1 - \cos \theta) & -a_2 a_3(1 - \cos \theta) - a_1 \sin \theta \\ -a_1 a_3(1 - \cos \theta) - a_2 \sin \theta & -a_2 a_3(1 - \cos \theta) + a_1 \sin \theta & (a_1^2 + a_2^2)(1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I} - \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} -(a_2^2 + a_3^2) & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & -(a_1^2 + a_3^2) & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & -(a_1^2 + a_2^2) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I} - \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{S} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{SS} \quad (\text{A1-20}) \end{aligned}$$

ただし,

$$\mathbf{S} \triangleq \theta \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{SS} = \theta^2 \begin{bmatrix} -(a_2^2 + a_3^2) & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & -(a_1^2 + a_3^2) & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & -(a_1^2 + a_2^2) \end{bmatrix}$$

A1.4 オイラー角 \Rightarrow 方向余弦行列 T_{HB}

方向余弦行列 T_{HB} (局所水平座標系 \Rightarrow 機体軸系)

$$T_{HB} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \Psi & \cos \theta \sin \Psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \Psi - \cos \phi \sin \Psi & \sin \phi \sin \theta \sin \Psi + \cos \phi \cos \Psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \Psi + \sin \phi \sin \Psi & \cos \phi \sin \theta \sin \Psi - \sin \phi \cos \Psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A1-21})$$

A1.5 方向余弦行列 $T_{HB} \Rightarrow$ オイラー角

if $(1 - |T_{HB13}| > 2.0 \times 10^{-4} (\text{T. B. D.}))$

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(T_{HB23}/T_{HB33}) \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1}(T_{HB12}/T_{HB11}) \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} -\pi < \phi \leq +\pi \\ -\frac{\pi}{2} < \theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \psi < 2\pi \end{array} \right) \quad (\text{A1-22})$$

else

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1}(-T_{HB21}/T_{HB22}) \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \psi < 2\pi \end{array} \right) \quad (\text{A1-23})$$

end

付録2 局所水平座標, 速度軸と機体軸

局所水平座標, 速度軸(+風軸)と機体軸(図 A2-1参照)は, いずれも原点が機体重心であるので, それらは重心まわりの回転により変換できる. その回転は, オイラー角($\phi/\theta/\psi$), 対気飛行経路角/対気飛行方位角(γ_a, ξ_a), 迎角/横滑り角/バンク角($\alpha/\beta/\sigma$)で表すことができる. ここでは, それらについて纏める. なお, 対気飛行状態量は, 正しくは機体基準点において定義されているが, ここではそれを重心基準と近似する.

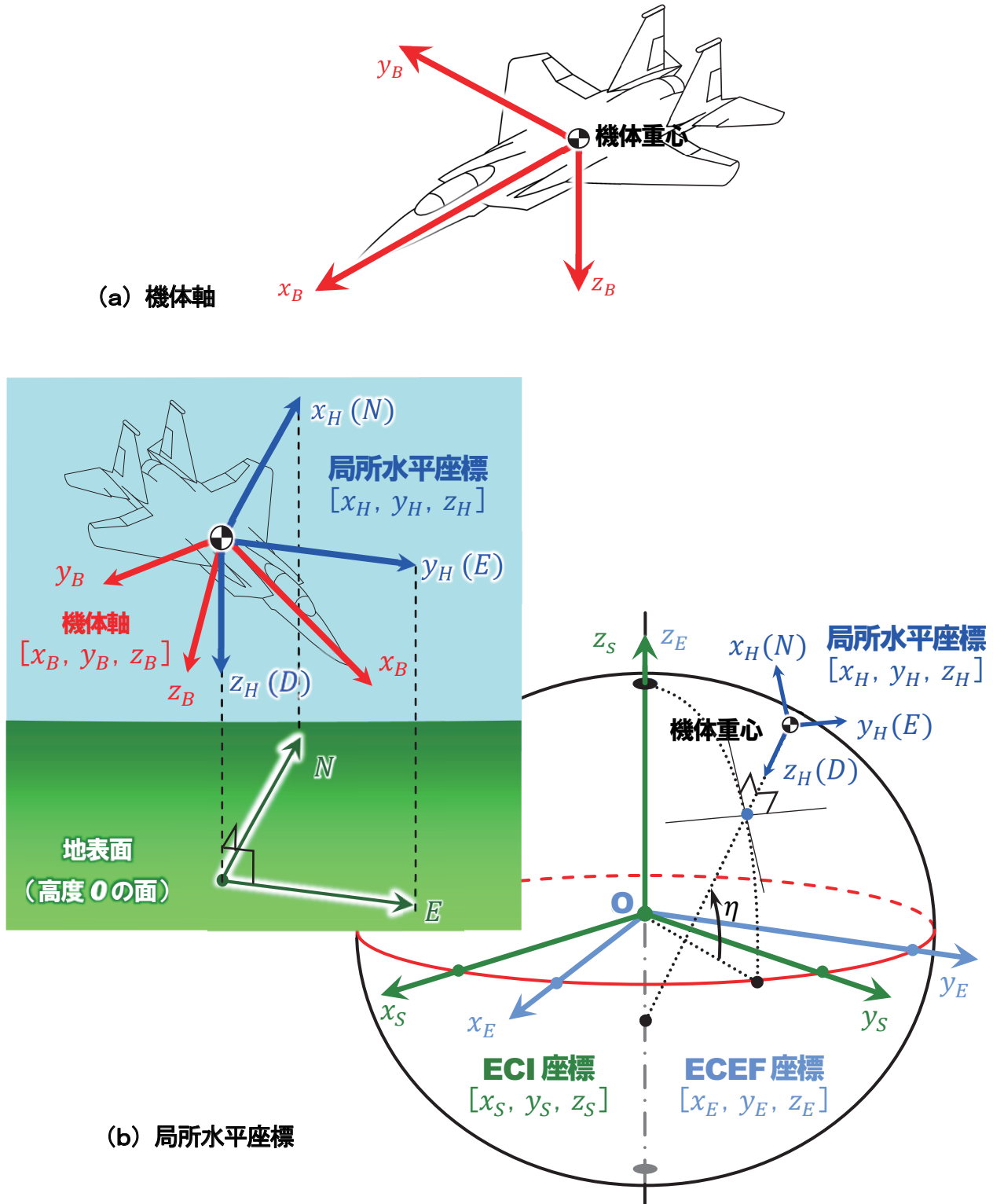
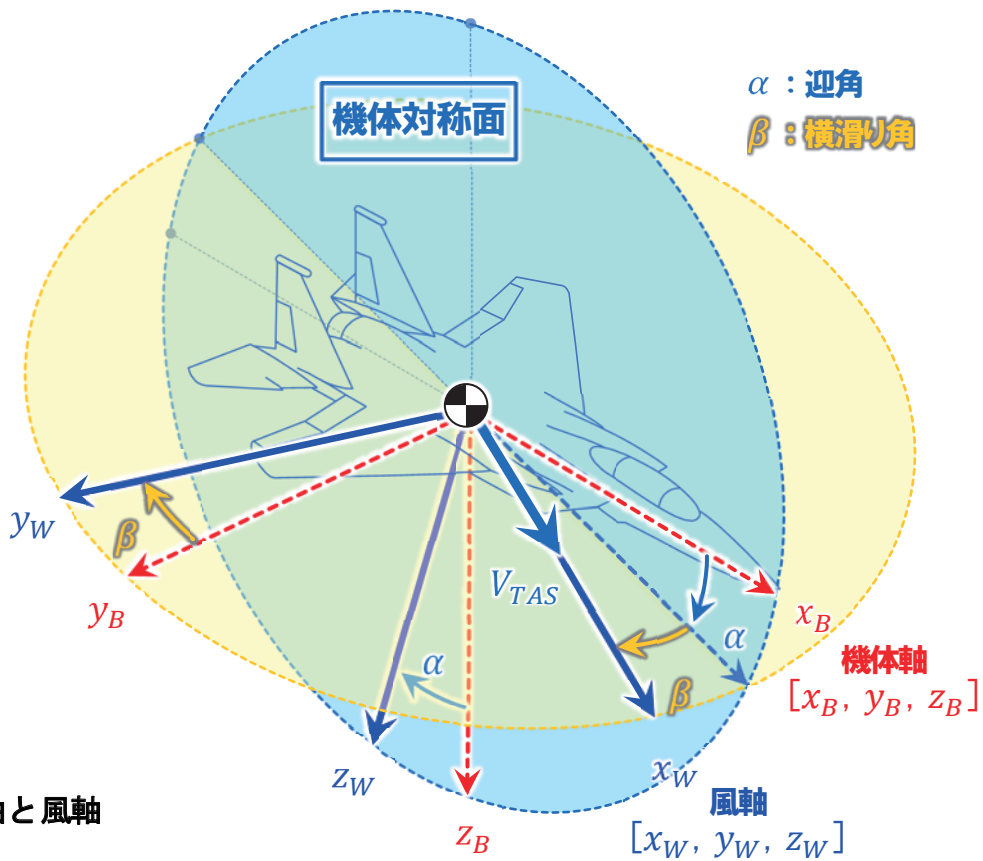
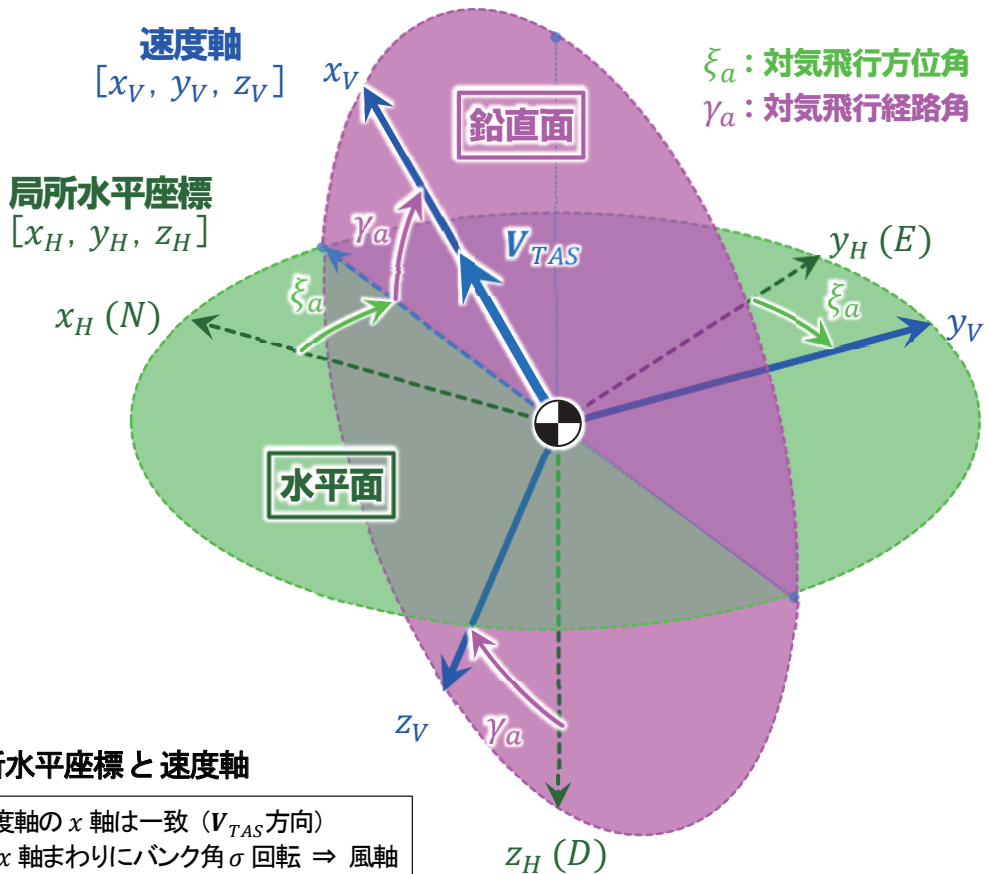


図 A2-1 機体軸, 局所水平座標, 風軸と速度軸 (続く)



(c) 機体軸と風軸



(d) 局所水平座標と速度軸

風軸と速度軸の x 軸は一致 (V_{TAS} 方向)
 速度軸を x 軸まわりにバンク角 σ 回転 \Rightarrow 風軸

図 A2-1 機体軸, 局所水平座標, 風軸と速度軸 (続き)

A2.1 オイラー角による局所水平座標 $[x_H, y_H, z_H] \Rightarrow$ 機体軸 $[x_B, y_B, z_B]$ の変換

- ① z 軸まわりに Ψ (ヨー角) 回転
- ② y 軸まわりに θ (ピッチ角) 回転
- ③ x 軸まわりに ϕ (ロール角) 回転 \Rightarrow 機体軸
(図 A2-2 参照)

局所水平座標 \Rightarrow 機体軸 の方向余弦

$$\begin{aligned}
 T_{HB} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \Psi & \cos \theta \sin \Psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \Psi - \cos \phi \sin \Psi & \sin \phi \sin \theta \sin \Psi + \cos \phi \cos \Psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \Psi + \sin \phi \sin \Psi & \cos \phi \sin \theta \sin \Psi - \sin \phi \cos \Psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A2-1})
 \end{aligned}$$

A2.2 対気飛行方位角/経路角による局所水平座標 $[x_H, y_H, z_H] \Rightarrow$ 速度軸 $[x_V, y_V, z_V]$ の変換

- ① z 軸まわりに ξ_a (対気飛行方位角) 回転
- ② y 軸まわりに γ_a (対気飛行経路角) 回転 \Rightarrow 速度軸
(図 A2-3 参照)

局所水平座標 \Rightarrow 速度軸 の方向余弦

$$\begin{aligned}
 T_{HV} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma_a & 0 & -\sin \gamma_a \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma_a & 0 & \cos \gamma_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \xi_a & \sin \xi_a & 0 \\ -\sin \xi_a & \cos \xi_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma_a \cos \xi_a & \cos \gamma_a \sin \xi_a & -\sin \gamma_a \\ -\sin \xi_a & \cos \xi_a & 0 \\ \sin \gamma_a \cos \xi_a & \sin \gamma_a \sin \xi_a & \cos \gamma_a \end{bmatrix} \quad (\text{A2-2})
 \end{aligned}$$

A2.3 バンク角/横滑り角/迎角による速度軸 $[x_V, y_V, z_V] \Rightarrow$ 機体軸 $[x_B, y_B, z_B]$ の変換

- ① x 軸まわりに σ (バンク角) 回転 \Rightarrow 風軸
- ② z 軸まわりに $-\beta$ (横滑り角) 回転
- ③ y 軸まわりに α (迎角) 回転 \Rightarrow 機体軸
(図 A2-4 参照)

速度軸 \Rightarrow 機体軸 の方向余弦

$$\begin{aligned}
 T_{VB} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & \sin(-\beta) & 0 \\ -\sin(-\beta) & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \sigma & \sin \sigma \\ 0 & -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \cos \sigma + \sin \alpha \sin \sigma & -\cos \alpha \sin \beta \sin \sigma - \sin \alpha \cos \sigma \\ \sin \beta & \cos \beta \cos \sigma & \cos \beta \sin \sigma \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \cos \sigma - \cos \alpha \sin \sigma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \sigma + \cos \alpha \cos \sigma \end{bmatrix} \quad (\text{A2-3})
 \end{aligned}$$

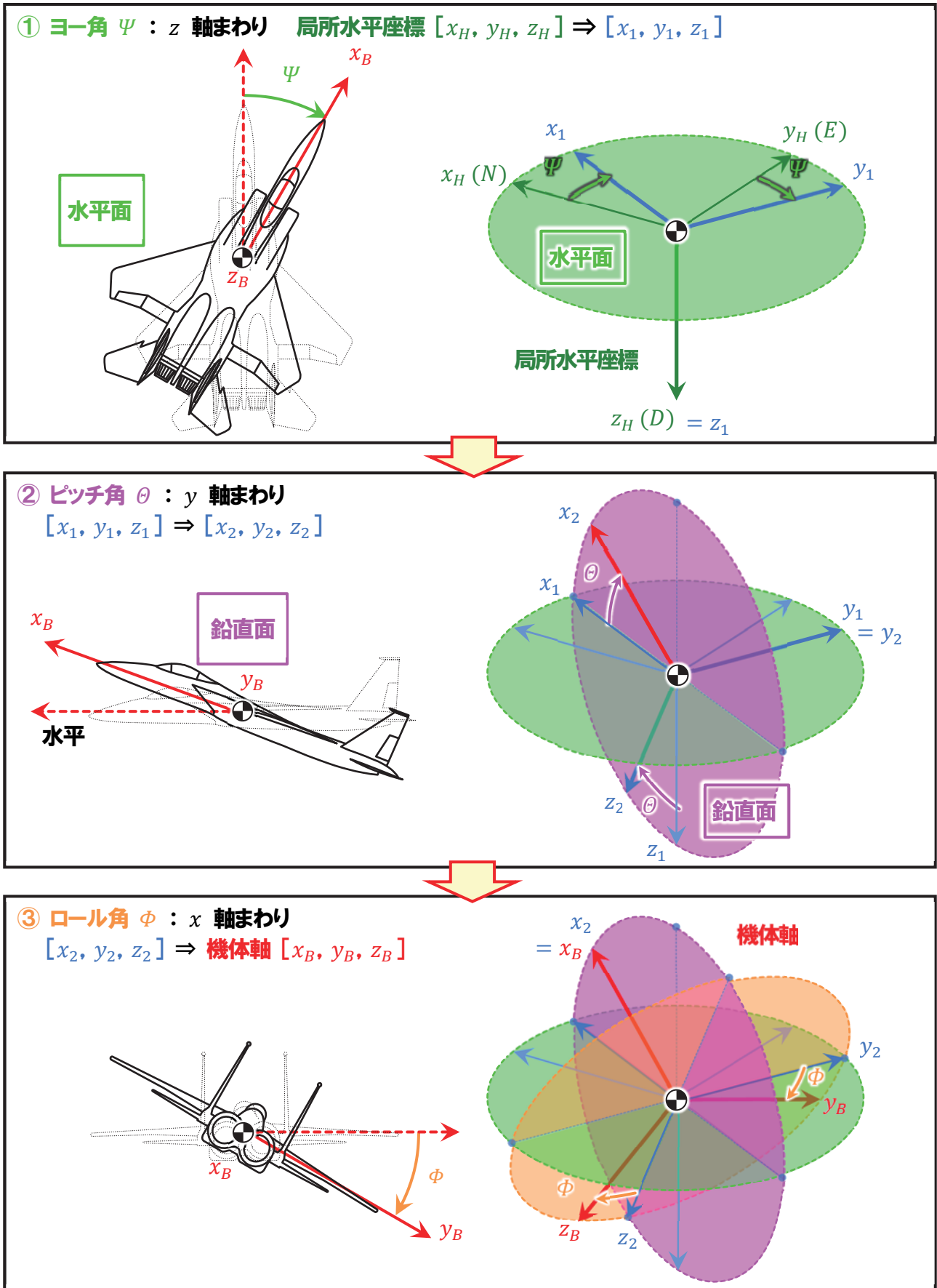
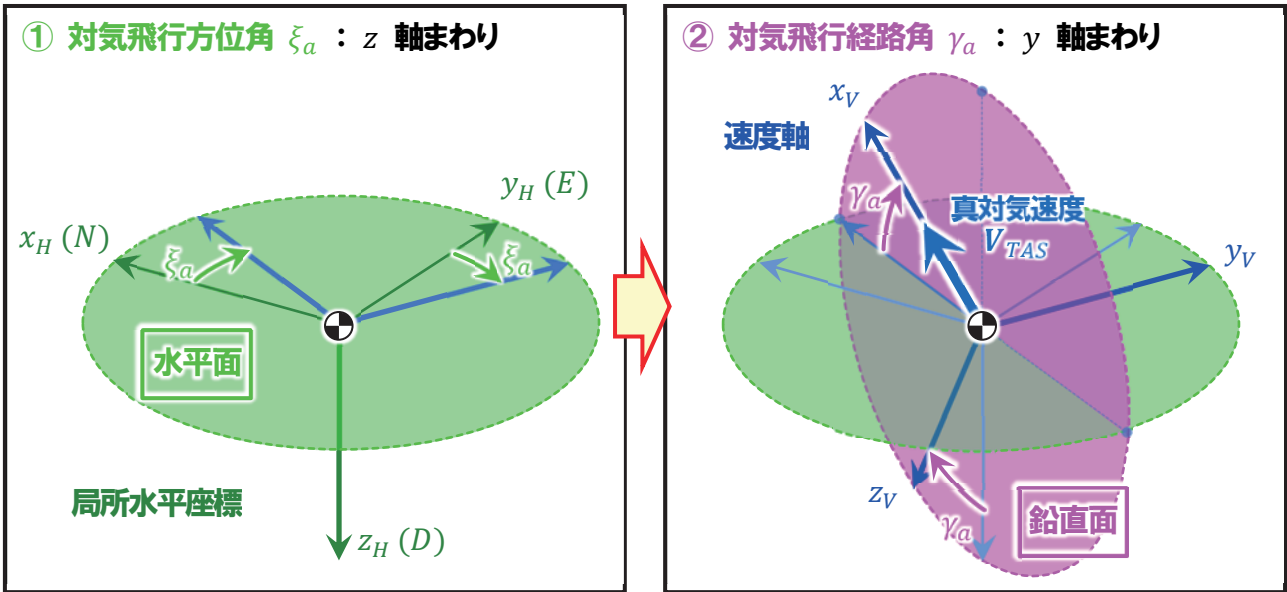


図 A2-2 オイラー角による 局所水平座標 \Rightarrow 機体軸 の変換



図A2-3 対気飛行方位角/経路角による 局所水平座標 ⇒ 速度軸 の変換

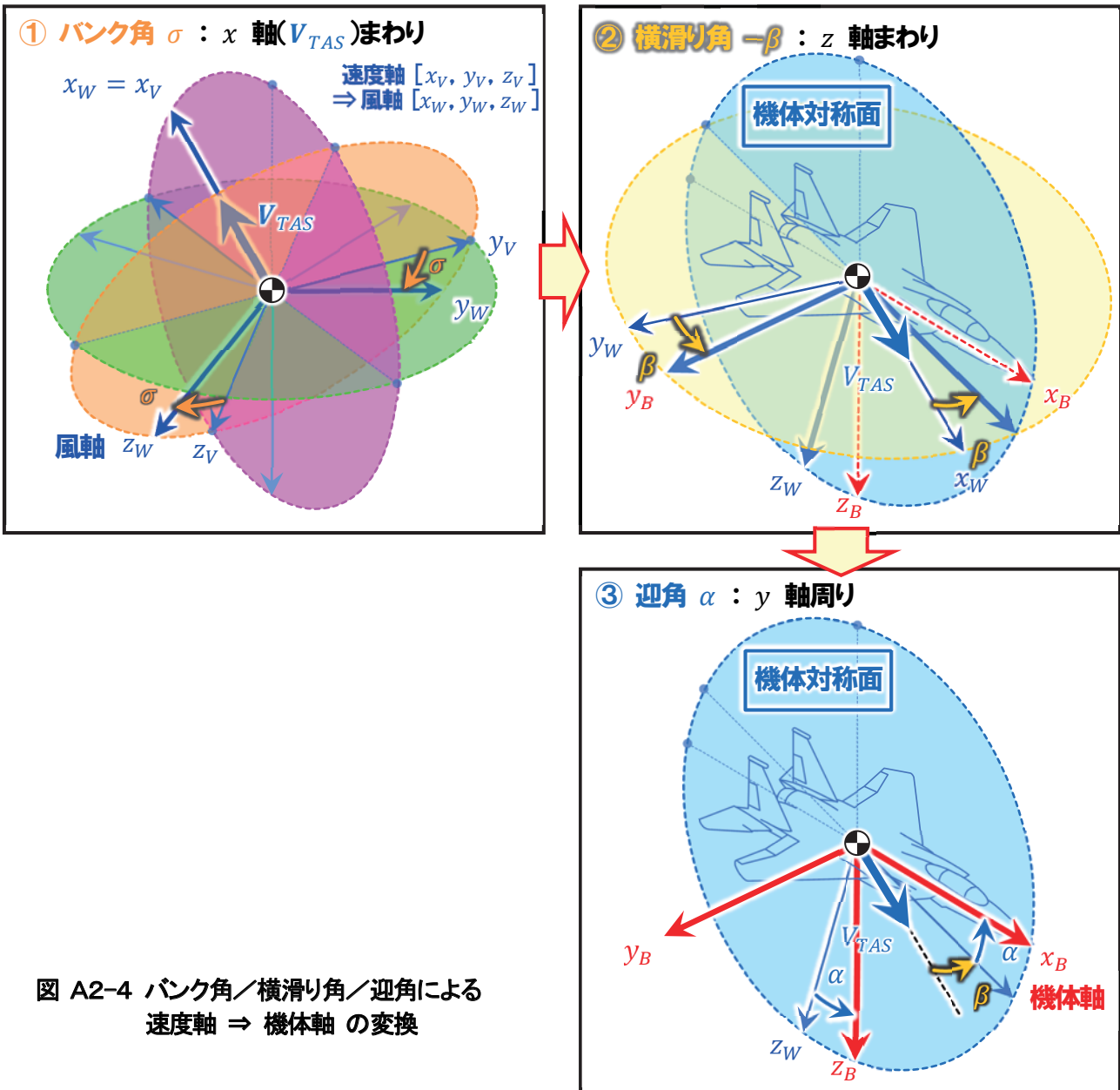


図 A2-4 バンク角/横滑り角/迎角による 速度軸 ⇒ 機体軸 の変換

A2.4 α, β, σ 及び γ_a, ξ_a と Φ, θ, Ψ の関係

(A2-2)式 及び (A2-3)式より,

$$\begin{aligned}
 T_{HB} &= T_{VB} T_{HV} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \cos \sigma + \sin \alpha \sin \sigma & -\cos \alpha \sin \beta \sin \sigma - \sin \alpha \cos \sigma \\ \sin \beta & \cos \beta \cos \sigma & \cos \beta \sin \sigma \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \cos \sigma - \cos \alpha \sin \sigma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \sigma + \cos \alpha \cos \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma_a \cos \xi_a & \cos \gamma_a \sin \xi_a & -\sin \gamma_a \\ -\sin \xi_a & \cos \xi_a & 0 \\ \sin \gamma_a \cos \xi_a & \sin \gamma_a \sin \xi_a & \cos \gamma_a \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} T_{HB11} & T_{HB12} & T_{HB13} \\ T_{HB21} & T_{HB22} & T_{HB23} \\ T_{HB31} & T_{HB32} & T_{HB33} \end{bmatrix} \tag{A2-4}
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 T_{HB11} &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma_a \cos \xi_a - \cos \alpha \sin \beta (\sin \sigma \sin \gamma_a \cos \xi_a - \cos \sigma \sin \xi_a) - \sin \alpha (\cos \sigma \sin \gamma_a \cos \xi_a + \sin \sigma \sin \xi_a) \\
 T_{HB21} &= \sin \beta \cos \gamma_a \cos \xi_a + \cos \beta (\sin \sigma \sin \gamma_a \cos \xi_a - \cos \sigma \sin \xi_a) \\
 T_{HB31} &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma_a \cos \xi_a - \sin \alpha \sin \beta (\sin \sigma \sin \gamma_a \cos \xi_a - \cos \sigma \sin \xi_a) + \cos \alpha (\cos \sigma \sin \gamma_a \cos \xi_a + \sin \sigma \sin \xi_a) \\
 T_{HB12} &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma_a \sin \xi_a - \cos \alpha \sin \beta (\sin \sigma \sin \gamma_a \sin \xi_a + \cos \sigma \cos \xi_a) - \sin \alpha (\cos \sigma \sin \gamma_a \sin \xi_a - \sin \sigma \cos \xi_a) \\
 T_{HB22} &= \sin \beta \cos \gamma_a \sin \xi_a + \cos \beta (\sin \sigma \sin \gamma_a \sin \xi_a + \cos \sigma \cos \xi_a) \\
 T_{HB32} &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma_a \sin \xi_a - \sin \alpha \sin \beta (\sin \sigma \sin \gamma_a \sin \xi_a + \cos \sigma \cos \xi_a) + \cos \alpha (\cos \sigma \sin \gamma_a \sin \xi_a - \sin \sigma \cos \xi_a) \\
 T_{HB13} &= -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma_a - \cos \alpha \sin \beta \sin \sigma \cos \gamma_a - \sin \alpha \cos \sigma \cos \gamma_a \\
 T_{HB23} &= -\sin \beta \sin \gamma_a + \cos \beta \sin \sigma \cos \gamma_a \\
 T_{HB33} &= -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma_a - \sin \alpha \sin \beta \sin \sigma \cos \gamma_a + \cos \alpha \cos \sigma \cos \gamma_a
 \end{aligned}$$

(A2-1)式と(A2-4)式を等置すると, α, β, σ 及び γ_a, ξ_a と Φ, θ, Ψ の関係式が得られる

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \Psi & \cos \theta \sin \Psi & -\sin \theta \\ \sin \Phi \sin \theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \theta \\ \cos \Phi \sin \theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{HB11} & T_{HB12} & T_{HB13} \\ T_{HB21} & T_{HB22} & T_{HB23} \\ T_{HB31} & T_{HB32} & T_{HB33} \end{bmatrix}$$

たとえば, α, β, σ 及び γ_a, ξ_a が既知のとき, Φ, θ, Ψ は次のように求まる.

if $(1 - |T_{HB13}|) > 2.0 \times 10^{-4}$ (T. B. D.)

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \left(\frac{T_{HB23}}{T_{HB33}} \right) \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1} \left(\frac{T_{HB12}}{T_{HB11}} \right) \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} -\pi < \Phi \leq +\pi \\ -\frac{\pi}{2} < \theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \Psi < 2\pi \end{array} \right) \tag{A2-5}$$

else

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin^{-1}(-T_{HB13}) \\ \tan^{-1}(-T_{HB21}/T_{HB22}) \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \theta \leq +\frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \Psi < 2\pi \end{array} \right) \tag{A2-6}$$

end

付録3 ECEF 座標と経度・緯度・高度

A3.0 地表面上の点（地軸からの距離 l , 赤道面からの距離 z ）

赤道半径 a , 極半径 b の偏回転楕円体の表面上で, 地軸からの距離 l , 赤道面からの距離 z の点 **A**

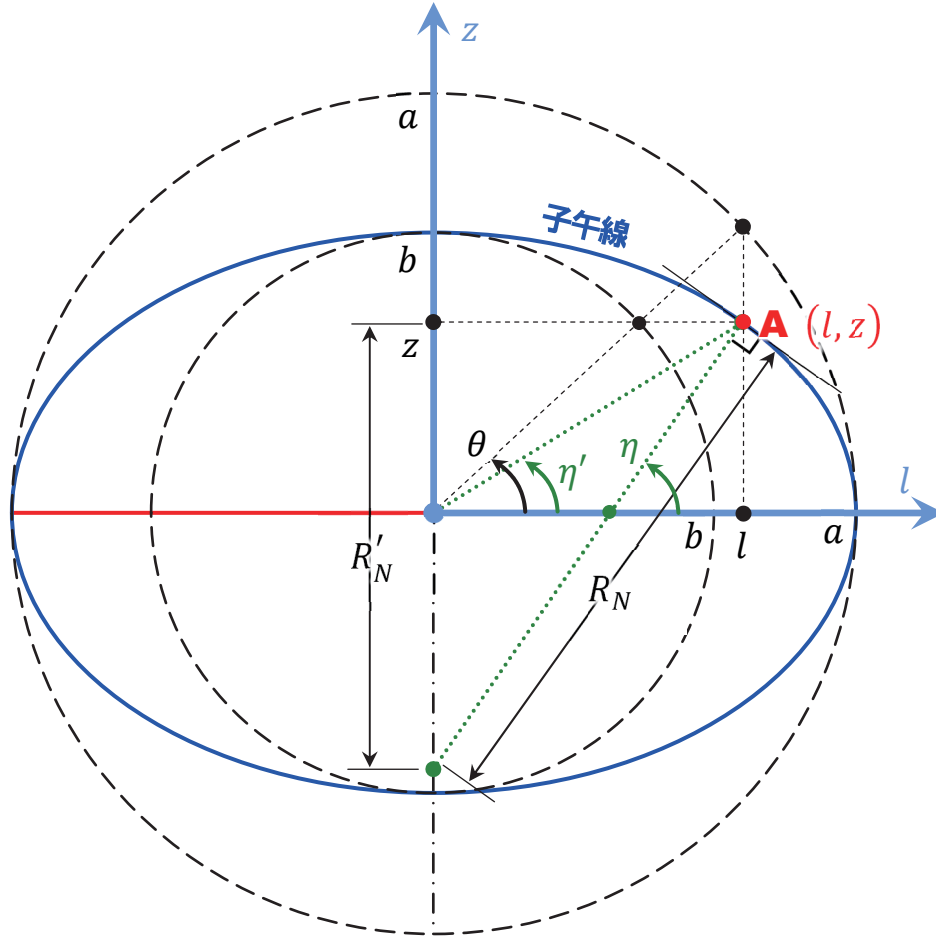


図 A3-1 地表面上の点 **A**

A 点は楕円上の点なので

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

A 点での子午線の接線の方程式

$$\frac{2l}{a^2} dl + \frac{2z}{b^2} dz = 0 \Rightarrow \frac{\cos \theta}{a} (l - a \cos \theta) + \frac{\sin \theta}{b} (z - b \sin \theta) = 0$$

ただし θ は図A3-1に定義する角度

$$\begin{bmatrix} l \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{a z}{b l} \right) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2} \right) \tag{A3-1}$$

A 点での子午線の法線の方程式

$$\frac{\sin \theta}{b}(l - a \cos \theta) - \frac{\cos \theta}{a}(z - b \sin \theta) = 0$$

同法線の z 接片

$$z_0 = -\frac{\sin \theta}{b}(a^2 - b^2) \quad \left(l \text{ 接片: } l_0 = \frac{\cos \theta}{a}(a^2 - b^2) \right)$$

R'_N

$$\begin{aligned} R'_N &= z - z_0 = z - \left\{ -\frac{\sin \theta}{b}(a^2 - b^2) \right\} = b \sin \theta + \frac{\sin \theta}{b}(a^2 - b^2) = \frac{a^2 \sin \theta}{b} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 z \\ &= \frac{z}{1 - e^2} \end{aligned}$$

ただし,

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}/a : \text{離心率}$$

地心緯度 η'

$$\begin{aligned} \eta' &= \tan^{-1} \frac{z}{l} = \tan^{-1} \frac{b \sin \theta}{a \cos \theta} = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \tan \theta \right) = \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 \tan \eta \right\} \\ &= \tan^{-1} \{ (1 - e^2) \tan \eta \} \end{aligned} \quad (\text{A3-2})$$

(地理)緯度 η

$$\eta = \tan^{-1} \frac{R'_N}{l} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1 - e^2} \frac{z}{l} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1 - e^2} \tan \eta' \right) = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \tan \theta \right) \quad (\text{A3-3})$$

卯酉線曲率半径 R_N

$$\begin{aligned} R_N &= \sqrt{l^2 + R_N'^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^4 z^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{1}{1 - e^2} \right)^2 z^2} \\ &= \sqrt{(a \cos \theta)^2 + \left(\frac{a^2 \sin \theta}{b} \right)^2} = \frac{a}{b} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} = a \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta} + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}} \\ &= a \sqrt{\frac{1 + (a/b)^2 \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}} = a \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \eta}{1 + (b/a)^2 \tan^2 \eta}} = a \sqrt{\frac{\cos^2 \eta + \sin^2 \eta}{\cos^2 \eta + (1 - e^2) \sin^2 \eta}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \eta}} \end{aligned} \quad (\text{A3-4})$$

A 点の座標

$$\begin{cases} R_N = \sqrt{l^2 + \left(\frac{1}{1 - e^2} \right)^2 z^2} \\ \tan \eta = \frac{1}{1 - e^2} \frac{z}{l} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = R_N \cos \eta \\ z = (1 - e^2) R_N \sin \eta \end{cases} \quad (\text{A3-5})$$

A3.1 地表面上の点 (ECEF 座標 $[x_E, y_E, z_E]$, 経度・緯度・高度 $[\lambda, \eta, 0]$)

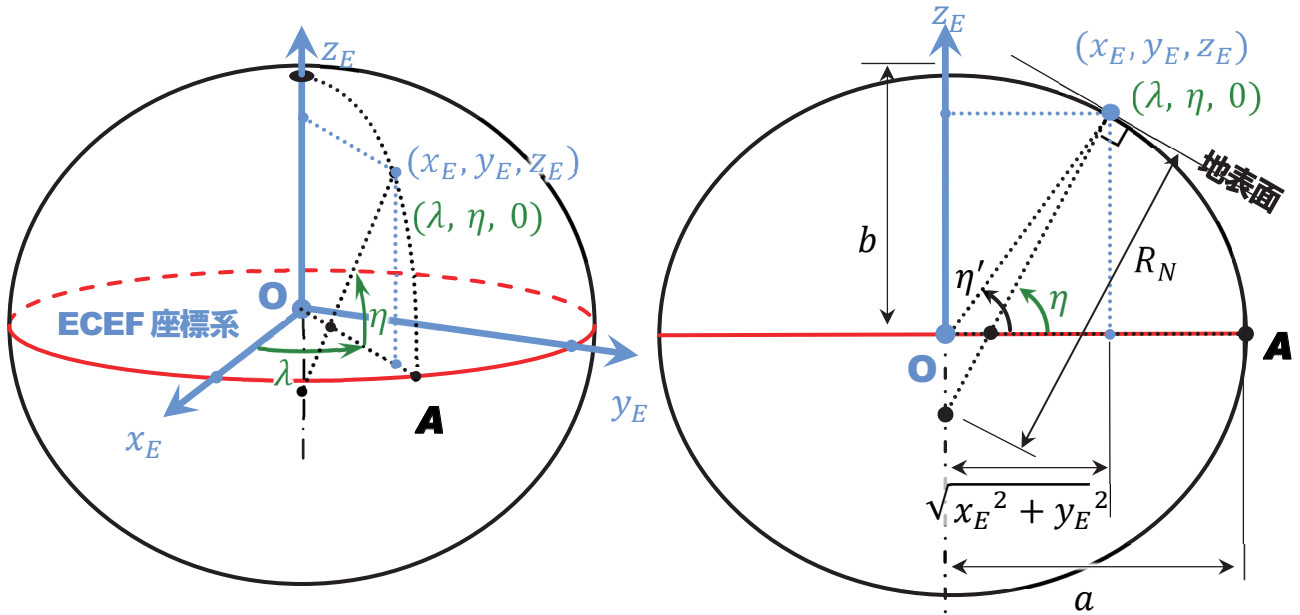


図 A3-2 ECEF座標と経度・緯度・高度(地表面上の点)

A3.1.1 経度・緯度・高度 ⇒ ECEF座標

(A3-3) 及び (A3-4) 式において, $l \Rightarrow \sqrt{x_E^2 + y_E^2}$ ($x_E = l \cos \lambda$, $z_E = l \sin \lambda$), $z \Rightarrow z_E$ とすると,

$$\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_N \cos \eta \cos \lambda \\ R_N \cos \eta \sin \lambda \\ (1 - e^2) R_N \sin \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \eta}} \cos \eta \cos \lambda \\ \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \eta}} \cos \eta \sin \lambda \\ (1 - e^2) \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \eta}} \sin \eta \end{bmatrix} \quad (\text{A3-6})$$

A3.1.2 ECEF座標 ⇒ 経度・緯度・高度

(A3-2), (A3-1) 及び (A3-3) 式において, $l \Rightarrow \sqrt{x_E^2 + y_E^2}$, $z \Rightarrow z_E$ とすると,

経度・緯度・高度

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \eta \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} (y_E/x_E) \\ \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - e^2} \frac{z_E}{\sqrt{x_E^2 + y_E^2}} \right\} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A3-7})$$

地心緯度

$$\eta' = \tan^{-1} \left(\frac{z_E}{\sqrt{x_E^2 + y_E^2}} \right) \quad (\text{A3-8})$$

卯酉線曲率半径 R_N

$$R_N = \sqrt{x_E^2 + y_E^2 + \left(\frac{1}{1 - e^2} \right)^2 z_E^2} \quad (\text{A3-9})$$

A3.2 高度 H の点 (ECEF 座標 $[x_E, y_E, z_E]$, 経度・緯度・高度 $[\lambda, \eta, H]$)

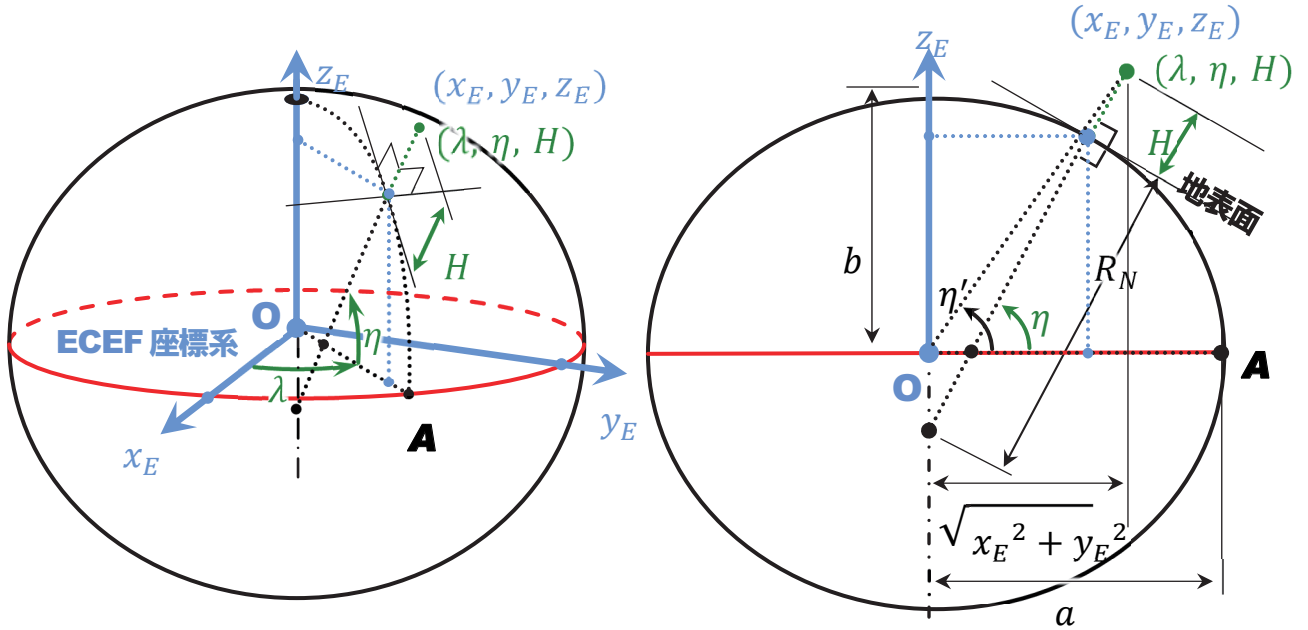


図 A3-3 ECEF座標と経度・緯度・高度

A3.2.1 経度・緯度・高度 \Rightarrow ECEF座標

(A3-6)式より,

$$\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_N + H) \cos \eta \cos \lambda \\ (R_N + H) \cos \eta \sin \lambda \\ \{(1 - e^2)R_N + H\} \sin \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \eta}} + H \right) \cos \eta \cos \lambda \\ \left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \eta}} + H \right) \cos \eta \sin \lambda \\ \left\{ \frac{(1 - e^2)a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \eta}} + H \right\} \sin \eta \end{bmatrix} \quad (\text{A3-10})$$

A3.2.2 ECEF座標 \Rightarrow 経度・緯度・高度

(A3-7)及び(A3-8)式より,

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \eta \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(y_{E0}/x_{E0}) \\ \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - e^2} \frac{z_{E0}}{\sqrt{x_{E0}^2 + y_{E0}^2}} \right\} \\ \frac{\sqrt{x_E^2 + y_E^2}}{\cos \eta} - R_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(y_E/x_E) \\ \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - e^2} \frac{z_{E0}}{\sqrt{x_{E0}^2 + y_{E0}^2}} \right\} \\ \frac{\sqrt{x_E^2 + y_E^2}}{\cos \eta} - \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \eta}} \end{bmatrix} \quad (\text{A3-11})$$

$$\eta' = \tan^{-1} \left(\frac{z_E}{\sqrt{x_E^2 + y_E^2}} \right) \quad (\text{A3-12})$$

ただし, $[x_{E0}, y_{E0}, z_{E0}]$ は, $[x_E, y_E, z_E]$ から地表面に下ろした垂線の足のECEF座標.

しかし, $[x_E, y_E, z_E]$ から $[x_{E0}, y_{E0}, z_{E0}]$ を解析的に求めることはできないため, (地理)緯度 η については, 以下の近似式を用いて求める.

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \eta \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(y_E/x_E) \\ \tan^{-1} \left\{ \frac{(1-e^2)z_E + e^2b \sin^3 \theta}{(1-e^2)(\sqrt{x_E^2 + y_E^2} - e^2a \cos^3 \theta)} \right\} \\ \frac{\sqrt{x_E^2 + y_E^2}}{\cos \eta} - \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \eta}} \end{bmatrix} \quad (\text{A3-13})$$

ただし、 θ は(A3-1)式において、 $l \Rightarrow \sqrt{x_E^2 + y_E^2}$ 、 $z \Rightarrow z_E$ としたもの。

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \frac{z_E}{\sqrt{x_E^2 + y_E^2}} \right)$$

宇宙航空研究開発機構研究開発資料 JAXA-RM-20-006

JAXA Research and Development Memorandum

飛行シミュレーションアルゴリズム

Flight Simulation Algorithm

発行 国立研究開発法人 宇宙航空研究開発機構 (JAXA)

〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1

URL : <http://www.jaxa.jp/>

発行日 2021年2月19日

電子出版制作 松枝印刷株式会社

※本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。

Unauthorized copying, replication and storage digital media of the contents of this publication, text and images are strictly prohibited. All Rights Reserved.

