

全速度数値流束スキームの改良について

嶋 英志, 北村 圭一

宇宙航空研究開発機構 情報・計算工学センター

Improvements on All Speed Numerical Flux Scheme

By

Eiji SHIMA, Keiichi Kitamura

JEDI center, JAXA

ABSTRACT

This paper presents a numerical flux function of compressible CFD methods for all speeds that can be used from very low Mach numbers to very high Mach numbers. For the low Mach number limit, it is known that excessive numerical error degrades both the solution and the convergence rate. In this study, such problems are fixed by controlling numerical dissipation contained in the pressure term of AUSM-family schemes. For the high Mach number limit, on the other hand, there are crucial problems remained unsolved at a shock front, such as the carbuncle phenomenon. It is shown that the stability strongly depends on the formulation of the mass flux function in AUSM-family schemes. The new scheme, named SD-SLAU (Shock Detecting SLAU), switches the pressure difference term in the mass flux scheme using a shock detecting function in a way that the new scheme can readily be applied to unstructured grids. This scheme provides proper amount of dissipation into both normal and tangential directions to the captured shock in our tests: In particular, numerical noises (“wiggles”) behind the shock are eliminated.

1. はじめに

原理的には、圧縮性流体の方程式は、全マッハ数範囲での基礎方程式であるが、一つの数値計算手法で取り扱うことは未だに困難である。マッハ10以上の極超音速流とマッハ0.01程度の液体が混在する流れ場はターボポンプ内部のキャビテーション流れなど航空宇宙工学で重要な対象中にも存在する。本研究の目的は、MUSCL等として知られるGodunov型スキームの枠組みの中で、数値流束関数の改良により、全マッハ数領域での統一的な解析を可能とする基本スキームの開発である。

圧縮性CFDにおいて、高マッハ数側では、

- (H.1) 衝撃波で非物理的なピークを作らない単調性
- (H.2) 真空が発生するような強い膨張に対する堅牢性
- (H.3) カーバンクルなどの衝撃波不安定性への対処
- (H.4) 上記を満足させた上で粘性流れに対する低散逸に留意しなければならない。Godunov法に始まる風上法の適用で(H.1)を満足する無振動スキームへの道は開かれ、その後、Roeスキーム^[1]をはじめとする計算量を削減した様々な手法が開発された^[2]などが、全ての要請を満足するのは容易ではなかった。その中でLiouとSteffen^[3]によるAUSMは、(H.1-4)をほぼ満足し、その後、様々な改良版がAUSM族(AUSM-family)スキームとして開発され^[4-6]、圧縮性CFDの基礎として広く用いられている。

一方、低マッハ数流れを解析する場合には、

- (L.1) 特性速度の違いによる収束性の劣化
- (L.2) 過大な数値粘性による大きな誤差

に注意する必要がある。これらは前処理法^[7-9]により顕著な改善が可能であるが、高速ではベースの圧縮性スキームに漸近するので、Roeスキームでの脆弱性や、中心差分+数値粘性での無振動と低散逸の両立の困難、等の弱点も同時に引き継いでしまう。

一方、高速側で望ましい特徴を持つAUSM族スキームに基づいて、低速流れを扱うことのできる全速度スキームがEdwards^[10]、Liou^[11]などにより提案されている。全速度AUSM族スキームの中で、筆者らの提案したSLAU(Simple Low-dissipation AUSM)^[12,13]は、比較的シンプルかつ、他の手法に含まれる調整パラメータなしに極めて低いマッハ数から精度良く解析ができ、また堅牢であることから、様々な分野で応用が始まっている。^[14-18]

SLAUには低マッハ数から遷音速までの領域においては大きな問題がなく、また、極超音速でのカーバンクル現象などの衝撃波不安定性も生じにくい。しかし、格子によっては斜め衝撃波背後の超音速流中でノイズが生じる問題点があった。^[19]このノイズはSLAUのみならずAUSMやAUSM+などでも生じることが判明しており、

(H.5) 衝撃波背後の低ノイズ

として数値流束への高速側の要請として付け加えるべきものである。

本研究では、このノイズの発生原因を解明し、解決した新しいスキームSD(Shock-Detecting)-SLAUを提案するとともに、気液混相流等への応用に必要な理想気体以外の状態方程式への拡張を考慮した定式化を示す。

2. 基礎方程式

圧縮性NS方程式は積分形式で次の様に書ける.

$$\iiint \mathbf{Q}_i dv + \iint (\hat{\mathbf{E}} - \hat{\mathbf{R}}) ds = 0 \quad (2.1)$$

ここで, \mathbf{Q} , $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{R}}$ は保存変数, 境界に外向き垂直方向の非粘性/粘性流束である. 積分形の基礎方程式の検査体積 (セル) を多面体 (2次元では多角形) とし, 検査体積が時間的に不変とすると構造格子にも非構造格子にも共通な有限体積法(FVM)の基礎式が得られる.

$$\frac{V_i}{\Delta t_i} \Delta \mathbf{Q}_i + \sum_j (\tilde{\mathbf{E}}_{i,j} - \tilde{\mathbf{R}}_{i,j}) s_{i,j} = 0 \quad (2.2)$$

$$\Delta \mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}^{n+1}_i - \mathbf{Q}^n_i \quad (2.3)$$

ここで添え字 i, j は i 番目のセルの j 番目の境界面 (辺) もしくは, その面で接する隣のセル, $n, n+1$ は時間ステップ, V, s はセルの体積及び境界の面積を示す. また, 局所時間法の使用を考慮してセル毎に異なる時間刻み Δt_i を仮定している. \mathbf{Q}_i をセル内平均値, $\tilde{\mathbf{E}}_{i,j}$ 等を面上

の時間・空間の平均値と考えれば, この式には近似は, 含まれない. FVMにおいて, 近似されるのはセル境界での流束のみであり, 数値計算法はセル内の平均値 \mathbf{Q}_i からセル周囲での流束の算出に帰着する.

なお, 本研究では高速流れのみを扱うので触れないが, 本稿で紹介する流束関数の低マッハ数流れ解析時の Weiss & Smith^[8,9]の時間微分前処理行列との併用の有効性は確認されている^[12,13].

3. 新数値流束関数について

3.1 AUSM族スキームの概要

AUSM族スキームを用いた2次元MUSCL有限体積法での非粘性流束は高次精度に再構築されたセル境界の左(+)/右(-)の値を用いて次のように書ける.

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} \Phi^+ + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} \Phi^- + \tilde{p} \mathbf{N} \quad (3.1)$$

$$\Phi = (\mathbf{1}, u, v, h)^T \quad (3.2)$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{0}, x_n, y_n, 0)^T \quad (3.3)$$

$$h = (e + p) / \rho \quad (3.4)$$

ただし, (x_n, y_n) は左から右方向の法線ベクトル, u, v は x, y 方向の速度, ρ, p, e は密度, 圧力, 全エネルギーである.

また, \dot{m} , \tilde{p} はセル境界で定義された質量流束および圧力であり, これらの違いにより様々なAUSM族数値流束関数が定義される. 3次元への拡張は容易である.

3.2 運動量方程式中の圧力項の修正

殆どのAUSM族スキームは運動量方程式にvan LeerのFVS^[2]を源とする下記のような圧力項を用いている.

$$\tilde{p} = \beta^+ p^+ + \beta^- p^- \quad (3.5)$$

$$\beta^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4}(2 \mp M^\pm)(M^\pm \pm 1)^2 \pm \alpha M^\pm (M^\pm - 1)^2, & |M^\pm| < 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(\pm M^\pm)), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$M^\pm = \frac{V_n^\pm}{\bar{c}} = \frac{u^\pm x_n + v^\pm y_n}{\bar{c}}$$

ただし, 本研究では $\alpha=0$ としている. この圧力項は次のように近似なしに書き変えることができる.

$$\tilde{p} = \bar{p} + \frac{1}{2}(\beta_+ - \beta_-)(p^+ - p^-) + (\beta_+ + \beta_- - 1)\bar{p} \quad (3.7)$$

$$\bar{p} = (p^+ + p^-) / 2 \quad (3.8)$$

式(3.7)右辺第1項は左右の圧力の平均であり, 第2項は超音速では完全に風上側の値をとるための切り替え項とみなせる. 第3項は, 平均音速 \bar{c} を適切に定義すると, 理想気体では低マッハ数で下記に漸近する.

$$(\beta_+ + \beta_- - 1)\bar{p} \Rightarrow \frac{3}{4\gamma} \bar{\rho} \bar{c} (V_n^+ - V_n^-) \quad (3.9)$$

$$\bar{\rho} = (\rho^+ + \rho^-) / 2 \quad (3.10)$$

即ち, この項は音速のオーダーの係数を持つ数値粘性項として作用し, 遷音速では適切なスケールであるが, 低マッハ数では過大である. これを低マッハ数では移流速度で高速では元の式に漸近するようマッハ数のオーダーを持つ係数を乗じ, 次のような圧力項を用いる.

$$\tilde{p} = \bar{p} + \frac{\beta_+ - \beta_-}{2}(p^+ - p^-) + (1 - \chi)(\beta_+ + \beta_- - 1)\bar{p} \quad (3.11)$$

$$\chi = (1 - \hat{M})^2 \quad (3.12)$$

$$\hat{M} = \min \left(1.0, \frac{1}{\bar{c}} \sqrt{\frac{u^{+2} + v^{+2} + u^{-2} + v^{-2}}{2}} \right) \quad (3.13)$$

式(3.9)の変形では, 理想気体の次の関係を用いた.

$$p = \rho c^2 / \gamma \quad (3.14)$$

その結果, 係数が(密度) \times (音速)となり, この項が適切な数値粘性となったが, 一般の状態方程式では, 成立するとは限らない. そこで式(3.11)を次のように変更する.

$$\tilde{p} = \bar{p} + \frac{\beta_+ - \beta_-}{2}(p^+ - p^-) + (1 - \chi)(\beta_+ + \beta_- - 1)\bar{\rho} \bar{c}^2 \quad (3.15)$$

これにより数値粘性項が γ 倍となるが, 大きな違いは生じない. 平均音速としては左右の相加平均を用いる.

$$\bar{c} = (c^+ + c^-) / 2 \quad (3.16)$$

3.3 SLAUの質量流束

まず、理論的に簡潔なRoe法^[1]から始める。その質量流束は基本変数を用いて、次のようにあらわされる。

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left\{ (\rho V_n)^+ + (\rho V_n)^- - |\bar{V}_n| \Delta \rho - \frac{|\bar{M}+1| - |\bar{M}-1|}{2} \bar{\rho} \Delta V_n - \frac{|\bar{M}+1| + |\bar{M}-1| - 2|\bar{M}|}{2\bar{c}} \Delta p \right\} \quad (3.17)$$

$$\Delta q = q^- - q^+$$

この表記により質量流束が4要素に分解され、圧力差分項と呼ぶ四行目の取り扱いが鍵となる。圧力差分項は、等エントロピー変化に関しては、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \frac{|\bar{M}+1| + |\bar{M}-1| - 2|\bar{M}|}{2} \frac{\Delta p}{\bar{c}} \\ & \approx \frac{|\bar{M}+1| + |\bar{M}-1| - 2|\bar{M}|}{2} \bar{c} \Delta \rho \\ & = \begin{cases} (1-|\bar{M}|) \bar{c} \Delta \rho & -1 < \bar{M} < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ & \therefore \Delta p \approx \bar{c}^2 \Delta \rho \end{aligned} \quad (3.18)$$

したがって、圧力差分項は亜音速では、等エントロピー変化、即ち音波に対して、散逸項として作用し、次のような性質があることが分かっている。

- (1) 低マッハ数流れ計算での振動を抑制する
- (2) 時間微分前処理との併用に悪影響を及ぼさない^[12,13]
- (3) 超音速流れに対して、カーバングルを引き起こす^[20]
- (4) 低マッハ数流れを除けば、式(3.17)の1,2行目だけでも実用的なスキームが構築できる

そこで、(4)の指針に従い、かつ、亜音速でのみ圧力項が有効になるように、式(3.12,13)の関数 χ を用い、SLAUの密度流束を第一段階として次のように定義する。

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left\{ (\rho V_n)^+ + (\rho V_n)^- - |\bar{V}_n| \Delta \rho - f_{pSLAU} \frac{\Delta p}{\bar{c}} \right\} \quad (3.19)$$

$$f_{pSLAU} = \chi = (1 - \hat{M})^2 \quad (3.20)$$

$$|\bar{V}_n| = \frac{\rho^+ |V_n|^+ + \rho^- |V_n|^-}{\rho^+ + \rho^-} \quad (3.21)$$

更に強い膨張での非物理的な密度流束へ修正を加え、最終的に次式をSLAUの質量流束として用いる。

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left\{ (\rho V_n)^+ + (\rho V_n)^- - |\bar{V}_n| \Delta \rho (1-g) - f_{pSLAU} \frac{\Delta p}{\bar{c}} \right\} \quad (3.22)$$

$$g = -\max(\min(M^+, 0), -1) \cdot \min(\max(M^-, 0), 1) \quad (3.23)$$

3.4 新手法SD-SLAUの質量流束

SLAUでは速度の絶対値を用いた多次元的なマッハ数の関数 χ により、超音速では全く作用しないように圧力差分項を設計した。後述のように、斜め衝撃波背後での圧力差分項の不在が、ノイズの原因となる。その解決のためには、超音速領域での圧力差分項を復活させる必要があるが、これは衝撃波面不安定性を引き起こす懸念がある。そこで、衝撃波面上で衝撃波面に沿った方向でのみ圧力差分項を消し去るような関数 θ を導入する。即ち、

$$\theta \approx \begin{cases} 0 & \text{along shock fronts} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.24)$$

これを用いて、新手法SD(Shock-Detecting)-SLAUの質量流束を次のように定義する。

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left\{ (\rho V_n)^+ + (\rho V_n)^- - |\bar{V}_n| \Delta \rho (1-g) - f_{pSD-SLAU} \frac{\Delta p}{\bar{c}} \right\} \quad (3.25)$$

$$f_{pSD-SLAU} = \theta \frac{|\bar{M}+1| + |\bar{M}-1| - 2|\bar{M}|}{2} \quad (3.26)$$

$$\bar{M} = |\bar{V}_n| / \bar{c} \quad (3.27)$$

θ としては次の関数を用いる。

$$\theta = \min \left(1, \left(\frac{C_{SD2} |\Delta p| / \bar{p} + C_{SD1}}{|\Delta p|_{\max} / \bar{p} + C_{SD1}} \right)^2 \right) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} C_{SD2} & \approx 10 \\ C_{SD1} & \approx 0.1 \end{aligned}$$

この関数は次の性質を持つ。

- ・ 衝撃波以外では $\theta=1$
- ・ 衝撃波面、衝撃波に垂直な方向では $\theta=1$
- ・ 衝撃波面、衝撃波に平行な方向では $\theta \ll 1$

$|\Delta p|_{\max}$ は対象となる面を挟む二つの計算セルとその周囲のセルとの圧力差分を探索して決定し、計算手順は次のとおりである。(図1参照)

- (1) 各セルにおいてセル中心と周囲のセルの圧力差を算出し、その最大絶対値 $|\Delta p|_{\max}$ を記憶する。
- (2) 数値流束計算時に対象となる面を挟む二つのセルの $|\Delta p|_{\max}$ の大なるものを最終的に $|\Delta p|_{\max}$ として用いる。

SLAUを含む、今までのAUSM族スキームでは使われることのなかった種類のデータが必要となるが、計算量の増加は小さい。また、三次元や非構造格子においても

算出は容易である。更に、この改良は接触不連続面の捕捉性等のほとんどの特性に影響を与えない。

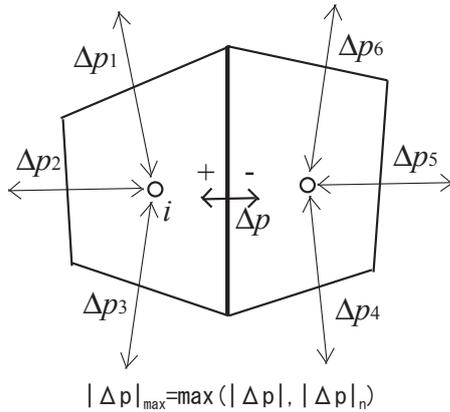


図1 $|\Delta p|_{\max}$ 等の定義

4. 計算例

SD-SLAUとSLAUは質量流束中の圧力差分項の取り扱いだけが異なるが、低マッハ数では、ほぼ同じで、遷音速以下では挙動も共通である。以下、SD-SLAUによる改良が顕著に表れる超音速流れの例を示す。

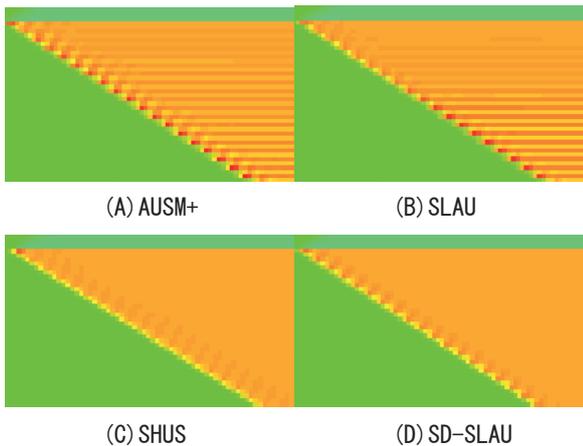


図2 M=2の超音速流中の平板(迎角5度)下側の圧力分布。(A) AUSM+, (B) SLAU, (C) SHUS, (D) SD-SLAU。

4.1 斜め衝撃波背後のOdd-Even Decoupling

図2にマッハ2の超音速流中に迎角5度でおかれた平板下側の圧力分布を、各セルの圧力に応じて着色したカラーマップで示す。格子は等間隔直交格子を用いている。

図2(A)(B)は質量流束に圧力差分項がない、あるいは超音速では作用しないAUSM+とSLAUの結果であり、図2(C)(D)は圧力差分項のあるSHUSとSD-SLAUの結果である。図から読みとれるように(A)(B)では衝撃波背後に縞模様状のノイズが目立つ。この流れに沿った、また格子線の方向にも沿った縞模様は、格子の1列毎に圧力が高低と変化するOdd-Even Decouplingによって生じている。この種のノイズは、可視化段階でセル中心のデータ

を頂点で平均すると見えなくなってしまう。

このノイズの発生原因として、斜め衝撃波が格子の異なる部分を通る際に、作用する数値粘性の大きさが異なるために不均一が発生し、それが伝搬することが考えられる。このノイズは、どのような手法でも多少は発生しており、(C)(D)でも衝撃波背後にも、かすかに見える。ただし、(C)(D)では、隣り合うセルで圧力が異なっている場合、質量流束中の圧力差分項が作用して、即座にこれを緩和する方向の質量流束を生じ、結果として乱れは均されてしまう。一方、(A)(B)では、このような効果がなく、そのまま伝搬し顕著なノイズとなる。

表1 2次元チャネル衝撃波伝搬解析の諸条件

衝撃波伝搬マッハ数	6.00
衝撃波後密度	5.26829
衝撃波後流速	4.86111
衝撃波後音速	2.8179
衝撃波前密度	1.00
衝撃波前流速	0.00
衝撃波前音速	1.00
比熱比	1.40
計算領域	1.0(H)x200.0(L)
格子サイズ	0.05の等間隔直交格子
格子歪みの導入	上下方向中心の格子に互い違いに $\pm 1.0 \times 10^{-6}$ の変動。上下の格子は線形補間で生成
クーラン数(無次元時間幅)	0.461(0.003)
時間積分	オイラー陽解法
空間精度	1次

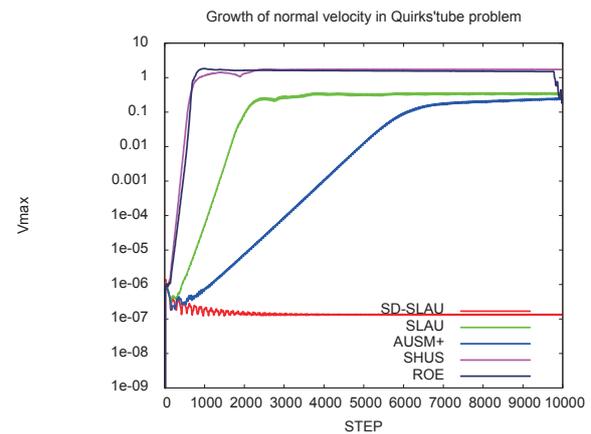


図3 垂直方向最大速度の成長履歴。

4.2 歪んだ格子の2次元チャネル中の衝撃波伝搬

多次元衝撃波面不安定性の例として、僅かに歪んだ格子の2次元チャネル中をマッハ6で伝搬する衝撃波^[21]の例を取り上げる。表1に格子・計算条件等の詳細を示す。

図3は、本来、0であるべき垂直方向速度の最大値(Vmax)の時間発展を、Roe法、SHUS、AUSM+、SLAU、

SD-SLAUについてプロットしたものである。格子歪みの程度で安定しているのはSD-SLAUだけで、他のスキームでは、不安定性を生じていることが分かる。

図 4 (A)(B)に1000ステップ目のRoe法, SLAUの衝撃波付近のマッハ数等高線を示す。Roeでは衝撃波の形状が大きく崩れていることが分かる。擾乱が成長しても $V_{max} < 0.01$ 程度までは可視化結果では目立たないので、SLAUではカーバンクル発生は見いだせない。

図 5 (A)(B)(C)にAUSM+, SLAU, SD-SLAUの10000ステップでのマッハ数等高線を示す。AUSM+, SLAUでは衝撃波形状が崩れるには至っていないが、衝撃波面にノイズが生じている。SD-SLAUは、擾乱が全く成長せず、衝撃波は初期の形状を保っている。

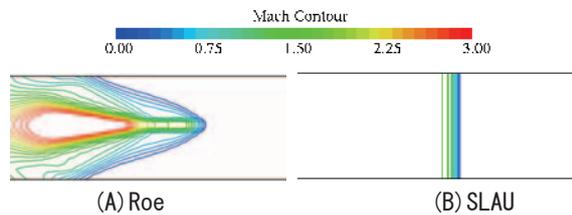


図 4 1000ステップ後のマッハ数等高線

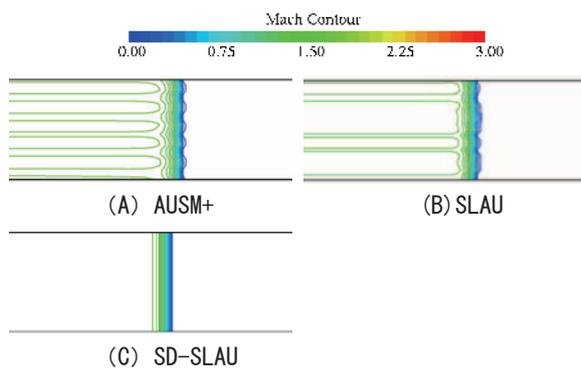


図 5 10000ステップ後のマッハ数等高線

4.3 二重マッハ反射

図6に30度斜面にマッハ10の平面衝撃波が入射した際の二重マッハ反射の非粘性解析例(密度等高線)を示す。格子点数は1200x300, C-O3次の再構築, 2段階陽解法を用いている。Roe法の結果では壁面に沿って右方に噴き出すジェットが右端の衝撃波から飛び出しているが、AUSM+, SLAU, SD-SLAUではジェットは巻きあがって衝撃波内にとどまっている。前節の衝撃波に対する各手法の性質からRoe法の結果はカーバンクルによるものと判断される。しかし、一般には、このような複雑な流れ場では物理現象とカーバンクルの区別は困難で、多少複雑な手段を用いてもこれを抑制する必要があることが理解されよう。

5. まとめと考察および今後の課題

全速度数値流束スキームSLAUに残されていた

- ・斜め衝撃波背後のノイズ除去
 - ・一般の状態方程式に拡張するための修正
- を施した新スキームSD-SLAUについて、その定式化と典型的な計算例を示した。非構造格子にも導入容易な形式の衝撃波検知(Shock-Detecting)関数を導入することで、上記の目標とカーバンクル抑制の両立に成功した。

全速度スキームでない普通の数値流束関数の研究において、カーバンクル抑制のために、衝撃波に垂直な方法と平行な方向でスキームを切り替えるアイデアは、新しいものではない^[22-25]。例えば、Nishikawa & Kitamura^[22]は、速度差分により衝撃波方向を検知し、Roe法とHLL法を混合した数値流束を用いている。同様に、多くの手法は、ベースの手法に加え、散逸効果がより大きく、粘性計算には不向きなスキームを組み合わせている。これらの方法は有効であるが、3次元への拡張が容易でなかったり、衝撃波方向の検知次第で精度や収束性が劣化したり、といった課題が残っている。これに対し、SD-SLAUで制御しているのは質量流束中の圧力差分項のみであり、このON/OFFにかかわらず境界層の解像能力等の、ほとんどの性質は変化しないので、衝撃波検知に何らかの問題があっても精度等への影響は最小限である。

カーバンクルの完全な抑制を別にすれば、低速から高速まで、また、様々な状態方程式に対応できる基礎スキームは完成したので、現実的な複雑な流体物理や流れ場への適用が今後の課題である。

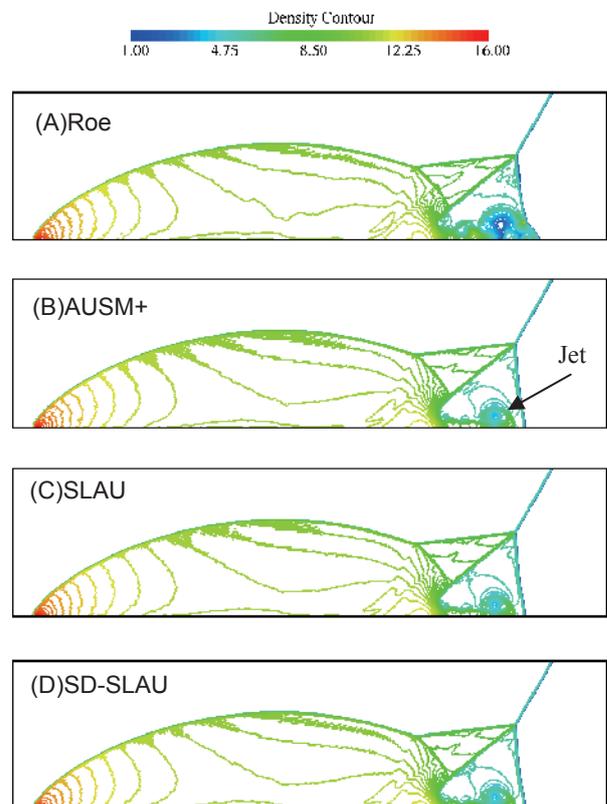


図 6 二重マッハ反射の解析例

参考文献

- [1] P.L. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, *Journal of Computational Physics* 43 (1981) 357- 372.
- [2] B. Van Leer, Flux-vector splitting for the Euler equations, *Lecture Notes in Physics* 170 (1982) 507- 512
- [3] M.-S. Liou, C.J. Steffen Jr., A new flux splitting scheme, *Journal of Computational Physics* 107 (1993) 23- 39.
- [4] M.-S. Liou, A Sequel to AUSM: AUSM+, *Journal of Computational Physics*, Vol. 129, 1996, pp. 364- 382.
- [5] Y. Wada, M.-S. Liou, A flux splitting scheme with high-resolution and robustness for discontinuities, *AIAA Paper* 94-0083, (1994)
- [6] E. Shima, Role of CFD in Aeronautical Engineering (No.14) -AUSM Type Upwind Schemes-, *NAL-SP30, Proceedings of 13th NAL symposium on Aircraft Computational Aerodynamics*, pp. 41-46, (1996)
- [7] E. Turkel, Preconditioning Technique in Computational Fluid Dynamics, *Annu. Rev. Fluid Mech* (1999) 31:385-416
- [8] J.M. Weiss and W.A. Smith, Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows, *AIAA Journal* Vol. 33, 1995, pp. 2050- 2057.
- [9] D. Unrau, and D.W. Zingg, Viscous Airfoil Computations Using Local Preconditioning, *AIAA Paper* 97-2027, 1997.
- [10] J.R. Edwards, Towards Unified CFD Simulation of Real Fluid Flows, *AIAA Paper* 2001-2524, (2001)
- [11] Liou, M. S. ,” A Sequel to AUSM, Part II: AUSM⁺-up for all speeds”, *J. Comp. Phys.* vol. 214, pp. 137-170, (2006)
- [12] 嶋英志, AUSM 族全速度スキームと前処理付き陰解法, 第 22 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 2008
- [13] Shima, E. and Kitamura, K, On New Simple Low-Dissipation Scheme of AUSM-Family for All Speeds, *AIAA Paper* 2009-136, 2009
- [14] 中村博紀, 松尾亜紀子, 高林徹(HONDA), 圧縮性を考慮したガソリンエンジン排気過程の非定常数値解析, 第 23 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 2009
- [15] 高山央貴, 佐々木大輔, 中橋和博, 田辺安忠, 齊藤茂, 非構造格子法と構造格子法のカップリングによるヘリコプター周りの数値計算, 第 23 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 2009
- [16] 佐藤真帆, 上野和之, 澤田恵介, 固体ロケットモータ内混相流れの数値シミュレーション, 第 23 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 2009
- [17] T. Shimada, “SRM Combustion Stability with Two-Phase Flow Effects,” CD edited by M.L. Riethmuller, von Karman Institute for Fluid Dynamics, D/2009/0238/558, M.L. Riethmuller, Editor-in-Chief, ISBN978-2-930389-47-8, 3rd European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS), Versailles, July 6-10, 2009, pp. 301-310
- [18] M. Motoe and T. Shimada, “Head-End Injected Swirling Gas Flow in a Chamber,” *AIAA-2009-5025*, 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Denver, Colorado, Aug. 2-5, 2009
- [19] 田邊陽, 私信, (2008)
- [20] Liou, M. S. ,” Mass Flux Schemes and Connection to Shock Instability”, *J. Comp. Phys.* vol. 160, pp. 623-648, (2000)
- [21] J.J. Quirk, A contribution to the great Riemann solver debate, *International Journal of Numerical Methods Fluids* 18 (1994)
- [22] Nishikawa, H. and Kitamura, K., Very Simple, Carbuncle-Free, Boundary-Layer Resolving, Rotated-Hybrid Riemann Solvers, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227 (2008), pp. 2560-2581.
- [23] S.F. Davis, A rotationally biased upwind difference scheme for the Euler equations, *Journal of Computational Physics* 56 (1984) 65- 92.
- [24] D.W. Levy, K.G. Powell, B. van Leer, Use of a rotated Riemann solver for the two-dimensional Euler equations, *Journal of Computational Physics* 106 (1993) 201- 214.
- [25] Y.-X. Ren, A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solvers, *Computers and Fluids* 32 (2003) 1379- 1403.