

# 宇宙航空研究開発機構研究開発資料

## JAXA Research and Development Memorandum

---

### 部材および構造物の強度実証試験に関するノート

Investigation of Strength Demonstration Test for Materials and Structures

伊藤 誠一, 加藤 久弥, 原 栄一, 岡田 孝雄, 星光

ITO Seiichi, KATOH Hisaya, HARA Eiichi, OKADA Takao and HOSHI Hikaru

2021年9月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

# 目次

概要	1
1. はじめに	2
2. 部材強度実証試験	3
2.1 部材強度実証の定式化（正規強度モデル）	5
2.2 数値シミュレーションによる実証確率の計算	6
2.2.1 正規モデルに対する実証確率	6
2.2.2 2母数ワイブルモデルに対する実証確率	6
2.3 打切り標本に対する強度実証確率	7
2.4 数値計算例	7
2.4.1 正規モデル強度実証試験に必要な標本数	8
2.4.2 MCシミュレーションによる強度実証確率	8
2.4.3 正規モデルに対する許容下限値 $x_a$ の実証試験	9
2.4.4 打切り標本の強度実証確率	10
3. 構造強度実証試験	11
3.1 耐荷重実証試験の計画	11
3.1.1 未知母数推定	11
3.1.2 ベイズ期待信頼度	12
3.2 耐荷重実証試験のMCシミュレーション	13
3.2.1 未知母数事前分布の設定	13
3.2.2 形状母数推定と実証試験	13
3.2.3 尺度母数推定と実証試験	15
3.3 追加すべき実証試験	15
3.3.1 追加試験計画における事前情報	16
3.3.2 単体破損荷重の不確定性と追加試験	16
4. おわりに	18
参考文献	19
補記 1 強度実証確率と2元評価基準	20
補記 2 打切り標本の実証確率計算プログラム例	20

# 部材および構造物の強度実証試験に関するノート

伊藤 誠一<sup>\*1</sup>, 加藤 久弥<sup>\*2</sup>, 原 栄一<sup>\*2</sup>, 岡田 孝雄<sup>\*2</sup>, 星 光<sup>\*2</sup>

## Investigation of Strength Demonstration Test for Materials and Structures

ITO Seiichi<sup>\*1</sup>, KATOH Hisaya<sup>\*2</sup>, HARA Eiichi<sup>\*2</sup>, OKADA Takao<sup>\*2</sup>, HOSHI Hikaru<sup>\*2</sup>

### ABSTRACT

In the evaluation of structural strength uncertainty, a large number of samples are used in the material strength test in order to improve the accuracy of model estimation of strength (estimation of unknown parameters). On the other hand, proof load performance is important for small amount products such as substructures and large-scale structures, and the strength demonstration method differs from the structural material strength test. For the demonstration test of material strength, the statistical intervals theory, which is studied in detail by Meeker et al., is applied, and the definition is unified and formulated for the material strength verification method. For strength verification of small sample structures, an extended Bayesian proof load test method that allows for the expansion of the information sources used is constructed.

### 概要

部材および構造物の強度実証に対する試験計画について、区間推定およびベイズ理論を応用した評価手法をまとめる。強度の不確定性評価において、部材試験では強度モデルの未知母数推定の精度を上げるために多数標本が用いられる。一方、構造部位や実機構造などの少量生産品では耐荷重性能が重要であり、多くの標本が得られる部材試験とは強度実証法が異なる。本報告では、多数標本による部材強度の実証試験(demonstration test)について区間推定理論を適用し、必要な標本数を設定する汎用の強度実証に向けた評価法を示す。また少量標本の構造物に対する強度実証では、既開発のベイズ法を応用した耐荷重試験(proof load test)計画について、取り扱う情報源の拡大に向けた手法を展開する。

**Keywords:** 部材強度実証、MIL 値、打切り標本、MC 法、耐荷重実証、拡張ベイズ法

---

\* 2021年6月1日受付 (Received June 1, 2021)

<sup>\*1</sup> アデコ株式会社 (Adecco)

<sup>\*2</sup> 航空技術部門 構造・複合材技術研究ユニット (Structures and Advanced Composite Research Unit, Aeronautical Technology Directorate)

## 1. はじめに

構造および材料強度の安全性、信頼性評価に対しては、材料強度自身のばらつきや、多くの要因が介在する構造物の強度も不確定であることから、信頼性工学に基づく評価手法<sup>1)</sup>が不可欠である。本報告では前半に部材強度の実証について、後半では構造物に対する強度実証試験法についてまとめる。その概要を表1に示す。

表1 強度実証試験手法の概要

実証確率	材料強度の下限界値	構造物の耐荷重性能
不確定性評価	確率モデルの未知母数推定	確率モデルの未知母数推定
実証確率の定義	下限界値の上側確率	破損に対するベイズ期待信頼度
評価手法	区間推定理論 モンテカルロ法	ベイジアン解析 モンテカルロ法

材料強度は本質的に確率特性を持つので、強度データを用いた適合度検定などによって適切な確率分布(モデル)が設定され、このモデルが強度の信頼性評価の基点となる。さらに標本からモデルを構成する固有の母数値を推定するが、その推定精度は標本数に依存するため<sup>2)</sup>、強度の評価では統計的な不確定性も考慮しなければならない。材料強度に対する不確定性を取り扱う基準としてはMIL-A/B値が適用され、信頼度  $R=R_{A/B}$  (A値99%、B値90%) および信頼水準  $1-\gamma=95\%$  ( $\gamma$ は危険率または有意水準)の2元評価で設計基準値が定められる<sup>3)</sup>。ここで、信頼度  $R$  は材料強度の本質的なばらつきを確率分布によって示した強度余裕であり、また信頼水準は確率分布の未知母数推定における標本数に依存する不確定性を表す。2元評価の信頼水準は標本結果を用いて算出された基準値が真の設計基準を超えない割合であり、このとき強度の許容値は区間推定の片側下限界として定められる。しかし、標本数が少ない条件では下限界の変動範囲は広く、また過度に控えめな許容値が採られる場合がある。

このような安全側過ぎる許容値の設定を避けるためには、試験で得られる下限界  $x_L$  の持つ実際の信頼度  $R(x_L)$  を定量的に把握する必要がある。本報告ではMeeker<sup>4)</sup>らが詳細な検討を行っている区間推定理論を適用し、下限界  $x_L$  の確率分布  $F(x_L)$  とこれに対応する実信頼度  $R_{act}=R(x_L)$  の確率分布  $F(R_{act})$  を援用して強度実証試験を計画する。図1に示す下限界  $x_L$  の確率分布において、ある下限界  $x_a$  以上の確率(実信頼度  $R(x_a)$  以下の確率)を強度実証確率  $P_{demo}$  (probability demonstration) と定義し<sup>4)</sup>、 $R(x_a)$  以上の高い信頼度を除いた実証試験を想定する。すなわち、あらかじめ設定した実証確率  $P_{demo}$  を満たす標本数  $n$  によって試験を行い、得られた2元評価の下限界値が  $x_a$  以上であれば、実証試験が信頼水準  $1-\gamma$  で成立する。なお確率モデルには正規分布と2母数ワイブル分布を考慮し、未知母数に依存しないピボット変数変換<sup>5),6)</sup>によって汎用の強度実証確率を求める。また打ち切り標本<sup>4)</sup>に対する実証確率の検討も加える。

上記のように多数の標本により十分な精度が期待される材料の強度実証に比較して、部分構造や大型構造物などの少量生産品に対する耐負荷性能の評価では設計に先立って利用できるデータは少なく、また参考となる同種構造等に関する情報も一般には入手が困難である。したがって、構造物の設計や製造について仕様性能や機能の妥当性を確認するためには、対象構造の耐負荷に対する実証試験が必要である。大型構造物の強度実証試験では、試験を数多く実施して統計的な評価を得る材料強度評価とは異なり、試験設備の規模や経済的な制約から、供試体へ負荷する試験荷重や供試体試験数の設定が重要な問題となる<sup>7)</sup>。

ところで、構造物やその使用負荷条件に不確定性があれば、実証試験における供試体の数や試験負荷レベル等は信頼性工学に基づいて設定されなければならない。ここで、対象構造を用いて

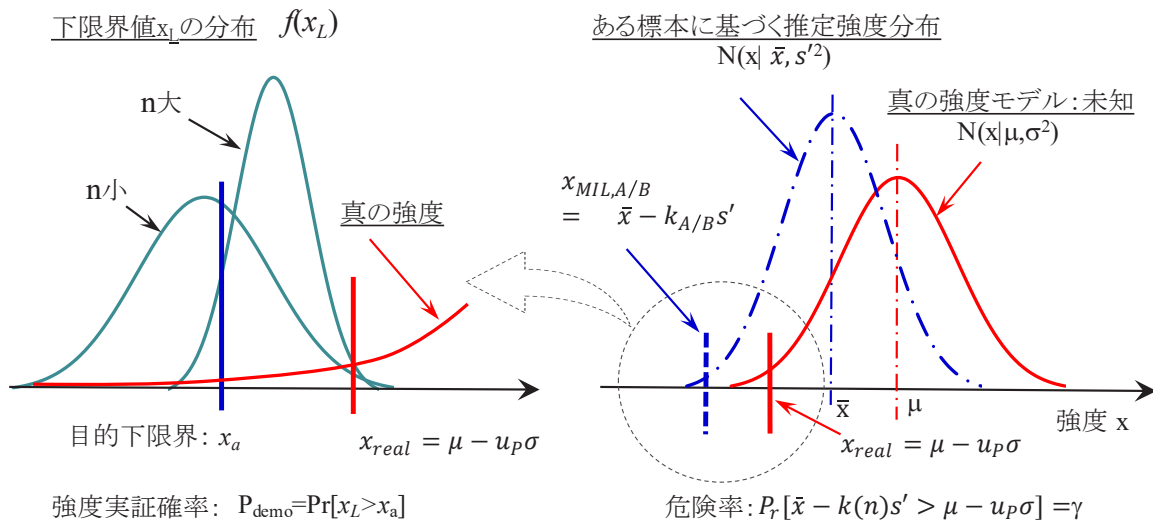


図1 強度の2元評価と下限界の分布

使用負荷に対する実証試験結果を得た場合には、その負荷レベルまでの直接実証を実施したことになり、少なくともこの使用環境には耐えるものと考えられる。一方、対象構造物に関する実証結果は無いが、類似の構造物等に関する耐負荷情報を入手し得る場合には、これらの情報を有効に活用することが考えられる。しかしながら、これら類似例の情報を対象構造物の耐負荷評価へ適用する場合には間接的な実証となり、適切な統計的処理を経なければ大きな不確実性が残ることになる。さらに情報の少ない少量生産品に対しては、従来の統計手法は必ずしも有効であるとは言えない。単一、あるいは少量生産の構造物などでは、実証試験設備やその能力等の制限に加えて、実証試験に提供できる標本供試体の数は限られているのが現実であろう。したがって試験実施前（事前）の情報が少ないければ、類似構造の情報や、従来の経験や工学的判断等の主観的な評価が重要な役割を果たすことになる。

ここでは板垣らのベイズ法<sup>1)</sup>を基本として、類似の構造物の情報源を新たな構造の耐負荷試験計画に適切に反映することが可能な手法を示す。最初に、対象構造物の耐負荷性能の不確実性について一般化して、その不確実性モデルに2母数ワイブル分布を仮定する。少量生産品である対象構造、あるいはそれに類似した供試体を用いた耐負荷実証試験の実施を想定して構造物の信頼度を推定する。多数の実構造試験が困難であるため、ここではモンテカルロ(MC: Monte Carlo)・シミュレーションを適用した信頼度の期待値を求めてこれを信頼性の評価尺度とし、目的の信頼度を確保するための実証試験負荷レベルや供試体数を考察する。また実証試験において破損、あるいは目標の耐負荷に至らなかったというまれな事象を経験する場合、耐負荷実証のために必要となる追加試験の実施計画についてもMC法により検討を加える。不確実性の取り扱いでは、未知母数の推定にベイズ法を採り入れて情報不足を補うための事前情報の有効活用を検討し、さらに得られる情報にあいまいさが含まれる場合に対しては拡張ベイズ法<sup>8),9)</sup>を適用して、不確実性の大きい情報源の適切な活用を図る。

## 2. 部材強度実証試験

材料強度の不確実性評価のMIL基準は信頼度および信頼水準の2元評価の下限值で記述される。MIL許容値 $x_{MIL}$ は、標本から得られる標本平均 $\bar{x}$ と標本標準偏差 $s'$ を用いて、信頼度、信頼水準、そして標本数 $n$ の関数であるばらつき係数 $k$ を適用して次式で表される<sup>3),10)</sup>。

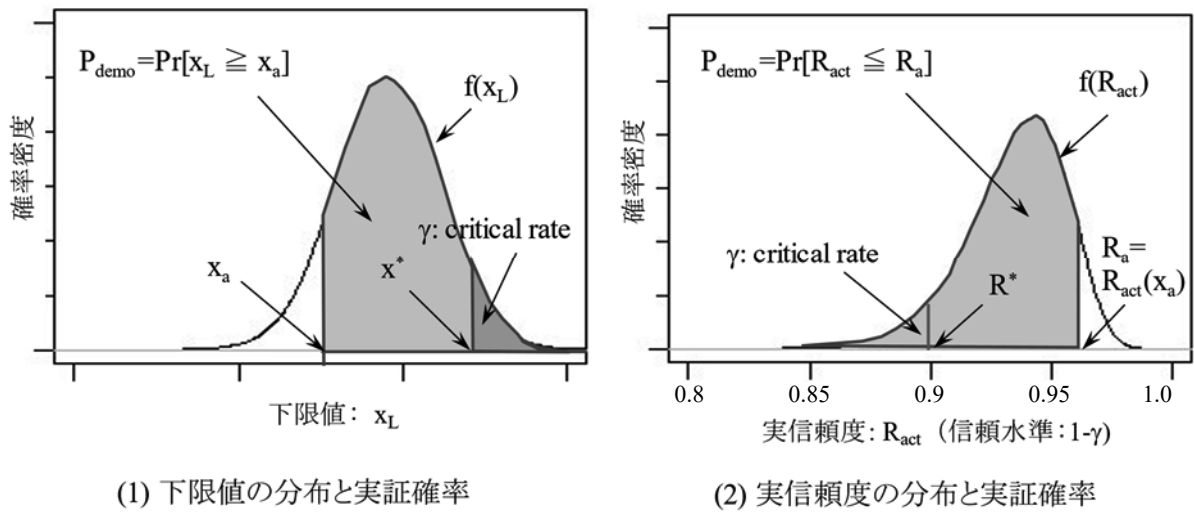


図2 強度実証確率の定義

$$x_L = x_{MIL} = \bar{x} - ks' \quad (1)$$

区間推定の下限界  $x_L$  として求められる許容値  $x_{MIL}$  は標本に依存する確率変数であるため、(1)式や図1から明らかなように、変動係数の大きい材料や標本数  $n$  が少ない場合には下限値  $x_{MIL}$  は極めて安全側に設定されることもある。次節に詳細を示すが、標本数  $n$  が少ないほど  $x_{MIL}$  は小さく、高い実信頼度の占める割合は多くなる。したがって、このような過度の保守側への設定を避けるためには、多くの標本数を用いた試験によって強度の基準を実証しなければならない。

ここで2元評価の下限界がある対象の基準強度（目的強度下限界） $x_a$  以上である確率を考えると、図2(1)に示すように、この確率は下限値  $x_L$  の確率分布  $F_{x_L}$  を用いて次式で表現される。

$$P_{\text{demo}} = Pr[x_L \geq x_a] = 1 - F_{x_L}(x_a) \quad (2)$$

本報告では Meeker<sup>4)</sup>らの区間推定理論に従い、この確率  $P_{\text{demo}}$  を材料強度試験の実証確率として定義する。ここで下限値  $x_L$  における材料強度としての実信頼度を  $R_{\text{act}}(x_L)$  とし、また真の強度の確率分布を  $F_{\text{strength}}(x_L)$  と記すと  $R_{\text{act}}(x_L) = 1 - F_{\text{strength}}(x_L)$  であり、 $R_{\text{act}}(x_L)$  も標本に依存する確率変数となる。したがって、強度の下限界  $x_L$  の確率分布に対応して信頼水準  $1-\gamma$  の実信頼度  $R_{\text{act}}$  の確率分布が定義される。なお図2(2)に示すように、(1)式の MIL 値に対応する実際の信頼度  $R_{\text{act}}(x_{MIL}) = 1 - F_{\text{strength}}(x_{MIL})$  が MIL 基準の信頼度  $R_{A/B}$  以上である割合は信頼水準  $1-\gamma$  となる。 $R_{A/B}$  で代表される2元評価の信頼度目標を  $R^*(=R_{A/B})$  と記すと、実信頼度は信頼水準  $1-\gamma$  で  $R_{\text{act}} \geq R^*$  でなければならない。実証確率の(2)式は、信頼度  $R_{\text{act}}$  を用いると(3)式に書ける。ここで、 $R_a = 1 - F_{\text{strength}}(x_a)$  である。

$$P_{\text{demo}} = Pr[R_{\text{act}} \leq R_a] \quad (3)$$

上記(2)式および(3)式から、強度の下限界の分布  $F_{x_L}$  において基準強度  $x_a$  以上である確率  $P_{\text{demo}}$  を満たす標本数  $n$  の試験を計画し、これらの試験標本を用いて(1)式から得られた強度の下限界  $x_L$  が  $x_a$  以上であれば、信頼水準  $1-\gamma$ 、実証確率  $P_{\text{demo}}$  で強度実証試験が成立する<sup>4)</sup>。

以下では、部材の基準強度  $x_a$  における実信頼度  $R_{\text{act}}(x_a)$  と実証試験に必要な標本数  $n$  の関係を、MC シミュレーション法および解析手法によって求める。

## 2.1 部材強度実証の定式化(正規強度モデル)

強度モデルに正規分布  $N(x|\mu, \sigma^2)$  を仮定して(2)式の実証確率  $P_{demo}$  を求める。真の母数( $\mu, \sigma^2$ )を未知とし、部材強度  $N(x|\mu, \sigma^2)$  から  $n$  個の標本を考えて、標本平均  $\bar{x}$  と標本標準偏差  $s'$  を求める。(1)式から、強度分布の信頼度  $R$  に関する、信頼水準  $1-\gamma$  の許容値 (下限値)  $x_L$  が得られる。

MIL 基準に代表される 2 元評価の信頼区間の導出ではピボット変数が応用される。ピボット変数は標本と未知母数から構成されるが、また一方では未知母数に依存しない確率分布が得られる特徴を持つ。したがってピボット変換を施すことによって、その累積確率の分位点から未知母数や要因の区間推定が可能になる。強度モデルや未知母数の設定に依存して信頼限界を求める過程は異なるが、ピボット量を用いることにより、区間推定が未知母数と無関係に信頼水準  $1-\gamma$ 、信頼度  $R$ 、標本数  $n$  によって記述される。 $(\mu, \sigma)$  とともに未知である正規分布の区間推定ではピボット変換として非心  $t$  分布が応用されており、下記する実証確率を得る過程においてもピボット変数が用いられる<sup>2),5),6)</sup>。

実証試験では、 $x_L \geq x_a$  であることを信頼水準  $1-\gamma$  で実証する。この実証確率は先の(2)式で示される。ここで下限値  $x_L$  は、(1)式を用いて MIL 基準と同様に次式から計算される。

$$x_L = \bar{x} - t'(1-\gamma; n-1, \delta_{Ra}) s' / \sqrt{n} \quad (4)$$

ここで(4)式を用いると(1)式のばらつき係数  $k$  が次式に表される。

$$k = t'(1-\gamma; n-1, \delta_{Ra}) / \sqrt{n} \quad (5)$$

上式の  $t'(1-\gamma; n-1, \delta_{Ra})$  は、自由度  $n-1$ 、非心度  $\delta_{Ra} = -z(1-R_a)n^{1/2}$  の非心  $t$  分布の  $(1-\gamma)*100\%$  分位点を示す。ここで  $z(P)$  は標準正規分布の分位点を示す。また前述のように下限値  $x_L$  における材料強度の真の信頼度  $R_{act}(x_L)$  は  $R_{act}(x_L) = 1 - F_{strength}(x_L)$  である。したがって、 $P(x_L) = F_{strength}(x_L)$  と記すと、下限値は  $x_L = \mu + \sigma * z(P(x_L))$  と書ける。この  $x_L$  が基準強度  $x_a$  以上の、 $x_L \geq x_a$  である確率が (2)式の強度実証確率である。以上から、標本平均  $\bar{x}$  と標本標準偏差  $s'$  を用いると、(2)式の実証確率  $P_{demo}$  が次式にまとめられる<sup>4)</sup>。

$$\begin{aligned} P_{demo} &= Pr(x_L \geq x_a) \\ &= Pr[\bar{X} - t'(1-\gamma; n-1, \delta_{Ra}) s' / \sqrt{n} \geq x_a] = Pr[\bar{X} - t'(1-\gamma; n-1, \delta_{Ra}) s' / \sqrt{n} \geq \mu + \sigma z(P(x_L))] \\ &= Pr\left[\frac{\sqrt{n} \bar{X} - \mu - z(P(x_L)) \sqrt{n}}{s' / \sigma} \geq t'(1-\gamma; n-1, \delta_{Ra})\right] \\ &= 1 - Pr[T \leq t'(1-\gamma; n-1, \delta_{Ra})] \quad (6) \end{aligned}$$

上式の変数  $T$  は自由度  $n-1$ 、非心度  $\delta_{Ra} = -z(1-R_a)n^{1/2}$  の非心  $t$  分布に従う確率変数である。また非心度  $\delta_{PactL} = -z(P(x_L))n^{1/2}$  として計算ソフト“R”<sup>11),12)</sup>を用い、 $pt(t;n,\delta)$ ,  $qt(p;n,\delta)$  を母数 $(n,\delta)$ の非心  $t$  分布の累積確率および分位点関数とすると、上記(6)式が次式で計算される。

$$P_{demo} = 1 - pt[qt(1-\gamma; n-1, \delta_{Ra}); n-1, \delta_{PactL}] \quad (7)$$

(7)式的具体例として、ある 2 元評価における下限値と実信頼度の各々の確率密度関数を図 3 に示す。このように正規モデルでは、実証確率  $P_{demo}$  が標本の下限値の上側確率、また実信頼度の下側確率として、(7)式の解析手法を基に得られる。

## 2.2 数値シミュレーションによる実証確率の計算

### 2.2.1 正規モデルに対する実証確率

(2)式の実証確率を MC シミュレーションによって確認する。簡単化のために強度の単位を基準化して、母数は未知であるがその真の強度モデル  $F_{strength}$  を標準正規分布  $N(x|0,1^2)$  に仮定する。2元評価において信頼度  $R^*$ 、信頼水準  $1-\gamma$  とし、 $N(x|0,1^2)$  から MC 法により  $n$  個の標本を得る。これから標本平均  $\bar{x}$ 、標本標準偏差  $s'$  であるとき、下限値  $x_L$  は(1)式で計算される。このときの実信頼度は  $R = 1 - F_{strength}(x_L)$  であり、一つの標本平均と一つの標本標準偏差が求められるので下限値  $x_L$  も一つだけ定まる。したがって  $R$  は確率変数であり、これを  $R_{act}$  と記して  $m$  回の MC シミュレーションを行い、 $R_{act}$  の確率分布を推定する。 $m$  個の  $R_{act}$  を昇順に並べ直した順序統計量を経て、 $R_{act}$  の累積分布としての経験分布(ecdf: empirical cumulative distribution function)が得られる。図4にその概略流れを示す。

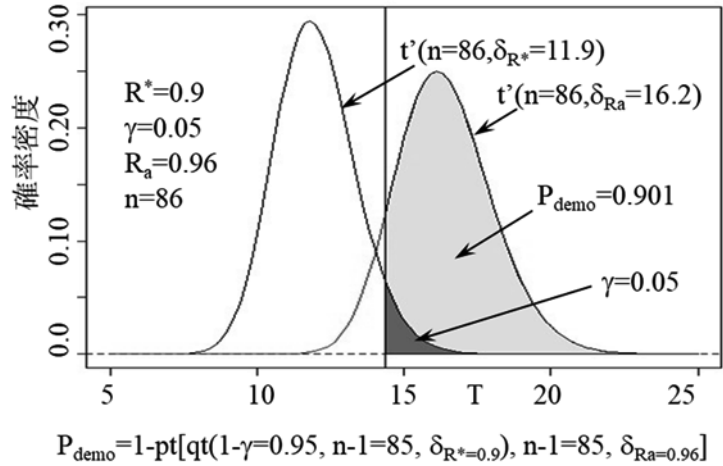


図3 正規強度モデル実証確率(7)式の計算例

### 2.2.2 2母数ワイブルモデルに対する実証確率

形状母数 $\alpha$ 、尺度母数 $\beta$ の2母数ワイブル分布  $W(x|\alpha,\beta)$  では下限値  $x_L$  を解析的に求めることはできない。そこでワイブル変数を極値分布  $F_E(t|u, b)$  に対数変換し、ワイブル母数の最尤推定値(MLE: Maximum Likelihood Estimate) :  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  を援用することによって、正規モデルの(1)式と同形な区間推定のばらつき係数  $k_1$  を数値計算で求めることが可能である。この  $k_1$  による下限値を次式に示す。

$$t_L = \tilde{u} - k_1 \tilde{b} \quad (8)$$

ここで、 $t_L = \ln x_L$ ,  $\tilde{b} = 1 / \tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{u} = \ln \tilde{\beta}$  である。下限値  $t_L$  を求める係数  $k_1$  は、未知母数( $u, b$ )に独立なピボット変数と MLE:  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  を用いて、信頼度  $R_{A/B}(=1-P_{A/B})$ 、信頼水準  $1-\gamma$ 、そして標本数  $n$  から求められる<sup>5)</sup>。またワイブル分布に対する信頼限界の近似式では非心  $t$  分布を適用した  $B_{ain}$  の近似<sup>13)</sup>も提案されており、MIL-HDBK の近似式<sup>3)</sup>と同様にわずかに保守側の係数を与えるが実用性を備えている。ここでは  $B_{ain}$  の近似法を適用したばらつき係数  $k_1$  を求めて(8)式へ適用し、許容値  $t_L$  の数値シミュレーションを行う。そして  $x_L = \exp(t_L)$  の変換後に真の信頼度、 $R_{act} = R(x_L) = 1 - F_{strength}(x_L|\alpha,\beta)$  の経験分布 ecdf を得る。

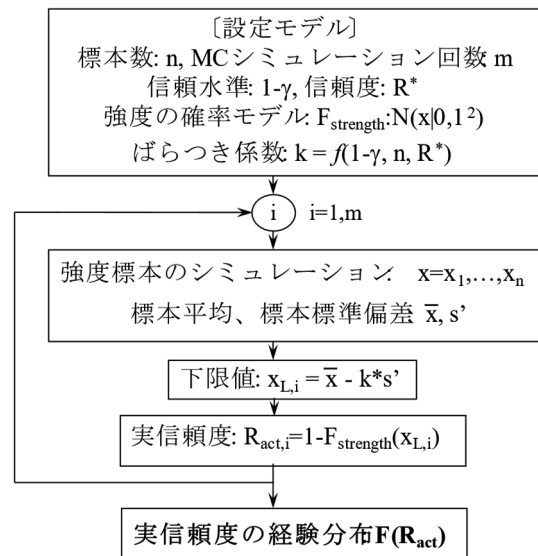


図4 MC シミュレーションによる実信頼度



### 2.3 打ち切り標本に対する強度実証確率

標本数の設定では費用と時間の制約を受けるために、疲労寿命試験のような中途打ち切り試験が適用されている。ここでは Scott らの結果<sup>14)</sup>を参照して、正規モデルおよびワイブルモデルに対する各々の打ち切り標本に対して数値シミュレーションによって強度実証確率を求める。なお、ここで扱う打ち切り標本は次の2種である。

- ・ タイプ I 打ち切り標本：あらかじめ設定した時間や強度で試験を打切る。
- ・ タイプ II 打ち切り標本：破損や故障などの数  $r$  があらかじめ設定した標本数に達したときに試験を打切る。

以下では上記のタイプ II の打ち切り標本に対する強度実証試験について、正規モデルを例としてその評価手法を示す。

未知母数 $(\mu, \sigma)$ の推定では(1)式における全数標本試験の標本平均 $\bar{x}$ と標本標準偏差  $s'$ の代わりに、打ち切り標本を用いた MLE:  $(\mu^*, \sigma^*)$ が用いられる。正規モデルを仮定した場合、 $n$  個の標本のうち  $r$  個が破損した時点で試験を中止するタイプ II の打ち切り標本の尤度は次式になる。

$$L(\mu, \sigma) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r \left\{ \frac{1}{\sigma} \phi \left[ \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right] \right\} * \left\{ 1 - \Phi \left[ \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right] \right\}^{n-r}$$

$x_1 < \dots < x_r$ : ordered failures (9)

上式において  $\phi$  は標準正規分布の確率密度、 $\Phi$  は確率分布を記す。ここで、部材強度  $N(x|\mu, \sigma^2)$  の  $P=(1-R)*100\%$  分位点、 $x_p = \mu + z(P)\sigma$  の下限界を求める。信頼水準  $1-\gamma$  の  $x_p$  に対する区間推定が必要であるため、ピボット変数  $K$  を次式で定義する<sup>14)</sup>。

$$K = K(\mu, \sigma, x_p) = (\mu^* - x_p) / \sigma^* = (\mu^* - \mu - z(P)\sigma) / \sigma^* \quad (10)$$

上式の変数  $K$  は未知母数 $(\mu, \sigma)$ の関数ではあるが、その分布関数は $(P, n, r)$ のみに依存する<sup>5)</sup>。MLE の計算で用いた標本から変数  $K$  の経験分布を求めると、 $x_p$  の下限界が次式で求められる。

$$x_p = \mu^* - K^{-1}(1-\gamma, P, n, r) * \sigma^* \quad (11)$$

ここで、 $K^{-1}(1-\gamma, P, n, r)$  は  $K$  の経験分布における $(1-\gamma)*100\%$  分位点を示す。(11)式の下限值  $x_p$  から実信頼度  $R_{act} = 1 - \Phi(x_p|\mu, \sigma^2)$  を計算することによって、実証確率の基準となる実信頼度の経験分布が全数標本の場合と同じ手順 (図4) で得られる。

ワイブルモデルについても全数標本と同様に極値分布に変換し、(8)式を用いて実信頼度の経験分布を求める。なお、打ち切り標本に対する MLE の計算ではソフト “R” のライブラリーパッケージ<sup>15)</sup>を用いる。また、タイプ I の打ち切り標本に対する実証確率の計算では標本ごとの破損数  $r$  が各々異なるため、正規およびワイブルモデルともに同一の破損数ごとにまとめることによってタイプ II と同手順で MLE が得られる。

### 2.4 数値計算例

最初に 2.1 節の解析手法により、正規モデルに対する強度実証試験に必要な標本数を求める。次に 2.2 節の MC シミュレーション法を適用した正規モデルとワイブルモデルの汎用の実証確率—実信頼度線図を示す。また両モデルの打ち切り標本に対する実証確率の具体例を検討する。なお数値例では MIL-A/B 規格を基本に、信頼水準  $1-\gamma=0.95$  の下での信頼度  $R^*=0.9$ 、 $R^*=0.99$  に対して実証確率を計算する。

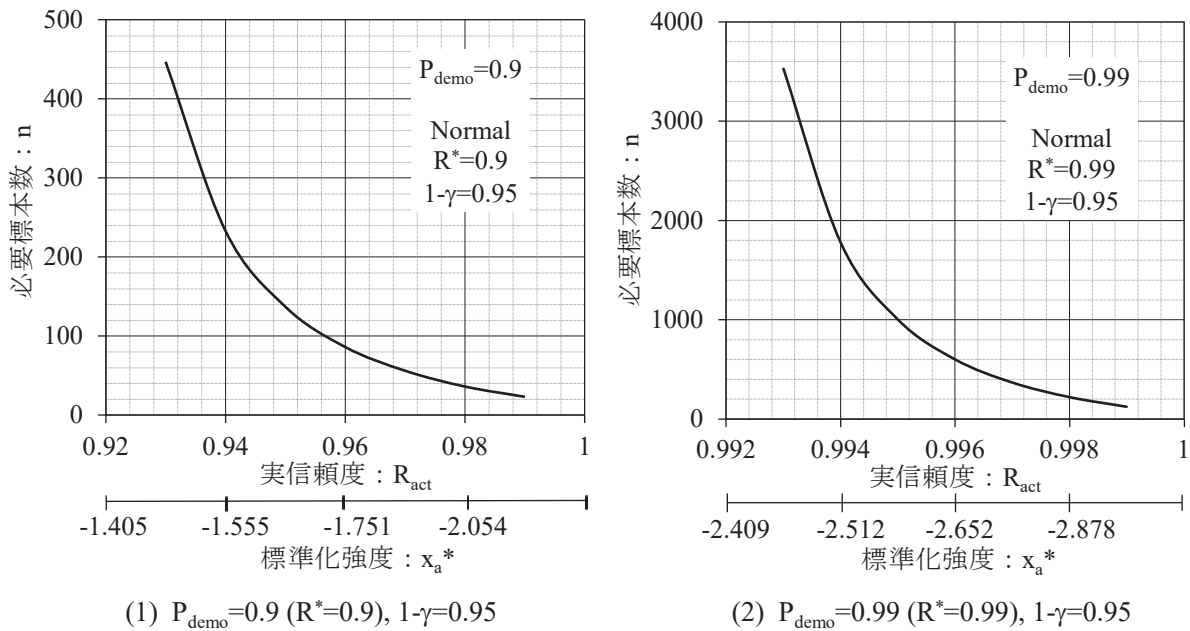


図5 正規モデルの必要標本数

#### 2.4.1 正規モデル強度実証試験に必要な標本数

あらかじめ定めた実証確率  $P_{\text{demo}}$  を満たす試験標本数について(7)式の解析手法を用いて求める。正規モデル( $R^*=0.9$ ,  $1-\gamma=0.95$ ) および( $R^*=0.99$ ,  $1-\gamma=0.95$ )のそれぞれの必要標本数を図5(1)と(2)に示す。ここで2元評価の信頼度  $R^*$  を  $P_{\text{demo}}$  に等しく設定すると、本結果から実信頼度  $R_{\text{act}}$  を高く考慮することで必要標本数は少なくなるが、図5の横軸に示す標準化した基準強度  $x_a^*$ :  $N(0,1^2)$  についてはさらに安全側の低いレベルを考えなければならない。特に MIL-A 基準を想定した  $R^*=0.99$  では  $x_a^*$  を大きく設定するとともに必要標本数は増大して、極めて厳しい実証試験が与えられる。

#### 2.4.2 MC シミュレーションによる強度実証確率

2.2節のMCシミュレーション法による実証確率と標本数の結果を図6および図7に示す。実信頼度の累積分布と目標の実証確率を得るための標本数線図を表している。ここでは実信頼度の経験分布を得るMCシミュレーション回数を  $m=10,000$  に統一した。各線図の  $R_{\text{act}}=R^*$  において  $P_{\text{demo}}$  は危険率  $\gamma$  に一致する。すなわち(3)式で示したように、 $P_{\text{demo}}$  に従う実証試験は  $1-\gamma$  で成立することになる。なお、材料によって信頼度  $R^*$  および信頼水準  $1-\gamma$  が異なる強度基準もある(補記1)。

図6の正規モデルの結果は図5の結果をさらに具体化したものである。図に示すように、 $P_{\text{demo}}=0.9$  を満たすためには  $R_{\text{act}}=0.96$  では  $n=86$  の標本を必要とし、また  $R_{\text{act}}=0.98$  では  $n=36$  の標本が要求される。標準化強度  $N(x|0,1^2)$  を考慮すると、2.1節の定義によって  $x_a=z(1-R_{\text{act}})$  であるから、下限界はそれぞれ  $x_a=z(1-R_{\text{act}})=z(1-0.96)=-1.751$ 、 $x_a=z(1-R_{\text{act}})=z(1-0.98)=-2.054$  となる。したがって同一の  $P_{\text{demo}}$  であっても標本数によって下限界の基準強度  $x_a$  は異なり、標本数が大きい場合には基準強度  $x_a$  を大きく設定する ( $R_{\text{act}}$  を小さくする。) ことが可能である。

図7にワイブルモデルの結果を示す。正規モデルの図6と比較すると、実信頼度  $R_{\text{act}}$  に関してワイブルモデルのほうが  $P_{\text{demo}}$  は大きい。たとえば実信頼度  $R_{\text{act}}=0.96$  のときに  $P_{\text{demo}}=0.9$  を満たす標本数は、正規モデルの  $n=86$  に対してワイブルモデルでは  $n=68$ 、また  $R_{\text{act}}=0.98$  では  $n=27$  となり、実証試験に要する標本数は少ない。(8)式のワイブル分布のばらつき係数  $k_1$  は(5)式の正規分布の係数  $k$  よりも大きく<sup>13)</sup>、また2元評価を1元化したベイズ期待信頼度の評価においてもワイブル分布が多少安全側の推定がなされており<sup>10)</sup>、両分布の裾野の違いが本結果に表れている。

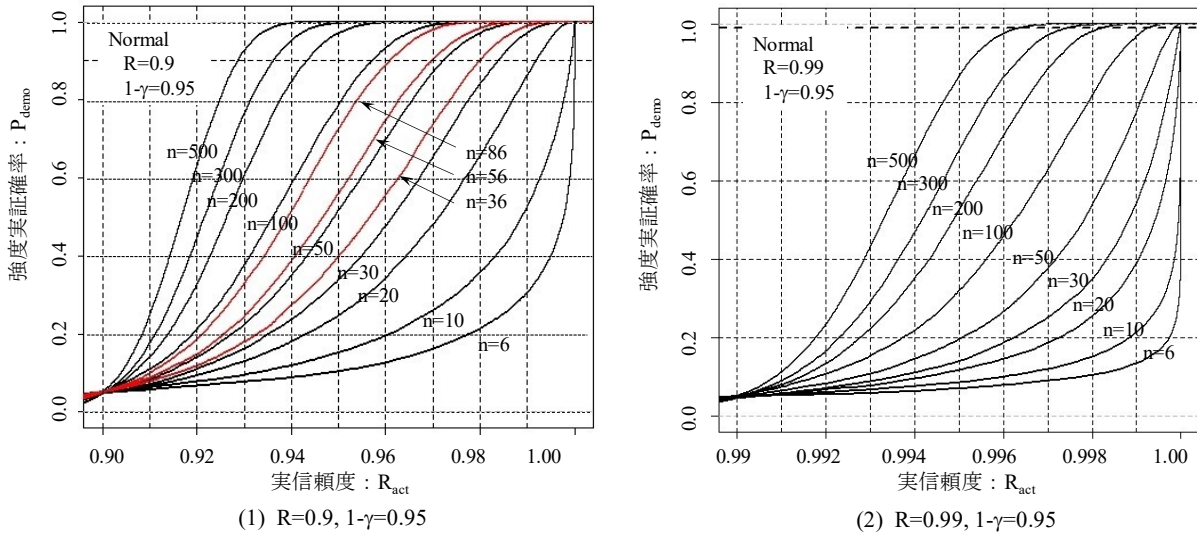


図6 実証確率と実信頼度 (正規モデル)

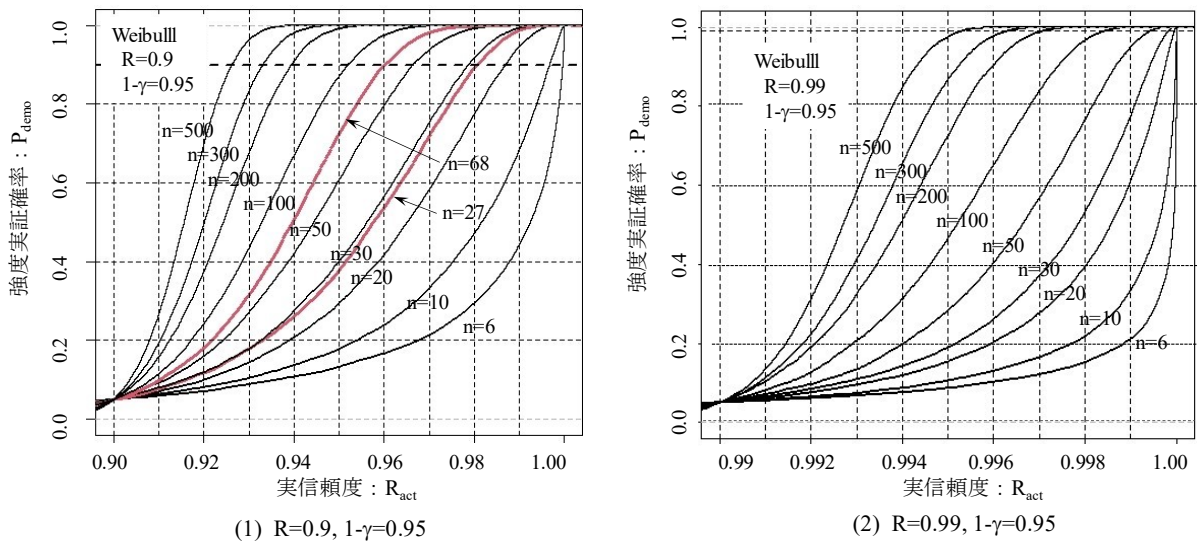


図7 実証確率と実信頼度 (ワイブルモデル)

2.4.3 正規モデルに対する許容下限値  $x_a$  の実証試験

ある部材の引張強度に対する許容下限値  $x_a$  の実証試験を想定する。部材が正規モデルに従うことは判明し、この部材の基準として2元評価の信頼度  $R^*=0.90$  に関して片側95%の信頼水準を考える。また過度に保守側である許容値を避けるためには、前述のように、適切な実信頼度  $R_{act}$  を考慮した十分な標本数による実証試験が必要となる。ここで標本から得られた下限値  $x_L$  の90%が許容下限値  $x_a$  以上であることを実証する確率  $P_{demo}$  を  $R^*=0.90$  に等しく置くと、 $P_{demo}$  を満たす試験結果から、部材強度が少なくとも90%は  $x_a$  以上であることが保証される。

上述の90%以上という基準から、図2に示したように、下限値が  $x_a$  以上である実証確率  $P_{demo} =$

0.90 を満たす標本数  $n$  によって実証試験を行う。図 5 および図 6 の実信頼度  $R_{act}$  の設定に依存して採るべき標本数が決まるが、標本結果から得られた 2 元評価の  $x_L$  が  $x_a$  以上であれば、信頼水準  $1-\gamma$  で実証試験が成立する。具体例として許容引張強度が  $x_a=700\text{MPa}$  であるとき、部材基準から実証確率を  $P_{demo}=0.90$  と置き、また実信頼度を  $R_{act}=0.97$  に設定すると、図 5 あるいは図 6 から  $P_{demo}=0.90$  を満たす標本数は  $n=56$  になる。この標本で  $R^*=0.9$  および  $1-\gamma=0.95$  における 2 元評価  $x_L$  が  $x_a=700\text{MPa}$  以上であれば、実証試験が信頼水準 95% で成功する。

#### 2.4.4 打切り標本の強度実証確率

打切り標本に対する実証確率を MC シミュレーションによって検討する。計算例では正規モデルおよびワイブルモデルともに標本数  $n=100$  とし、信頼度  $R^*=0.90$  および信頼水準  $1-\gamma=0.95$  を全数試験と同一にした。タイプ I 試験では、タイプ II 試験の破損数  $r$  のような正規モデルとワイブルモデルの間の共通の打切り基準がないため、真の確率分布の分位点を寿命や強度の打切り起点とした実証確率の比較を行う。したがって双方のタイプの直接比較はできないが、図 8 および図 9 の結果から、タイプ II の  $P_{demo}$  がタイプ I に比べてその累積確率の分布幅が多少広いことがわかる。ここで、ソフト“R”を用いたタイプ II の MC シミュレーションプログラム例を補記 2 に示す。

タイプ I の実証確率を図 8 に示す。全数試験やタイプ II 試験と同様に、同一の実信頼度  $R_{act}$  においてワイブルモデルの方が正規モデルよりも  $P_{demo}$  は大きい。一方、 $R_{act}$  上の  $P_{demo}$  の取る範囲は両モデルともに同程度であるが、打切り分位点の延長 (25% から 75% へ) の効果はワイブルモデルが高い。具体的には図 8 に示すように、正規モデルの  $P_{demo}=0.9$  の場合、25% 線では  $R_{act}=0.968$ 、50% 線では  $R_{act}=0.967$ 、そして 75% 線では  $R_{act}=0.963$  である。これに対してワイブルモデルでは、 $R_{act}=0.962$ 、 $R_{act}=0.960$ 、 $R_{act}=0.956$  を各々示しており、打切り分位点の延長に伴い、ワイブルモデルの実信頼度の低下がわずかに早いことを示している。

図 9 に示すように、タイプ II データに対する正規分布モデルとワイブル分布モデルの比較では、真の信頼度  $R_{act}$  に関して、全数標本データと同様にワイブルモデルの方が  $P_{demo}$  は全体に大きい。打切り数  $r$  については、 $r$  が大きい場合にはワイブルモデルの方が  $P_{demo}$  は大きい。また  $r$  が小さい領域では双方の差は小さくなる。

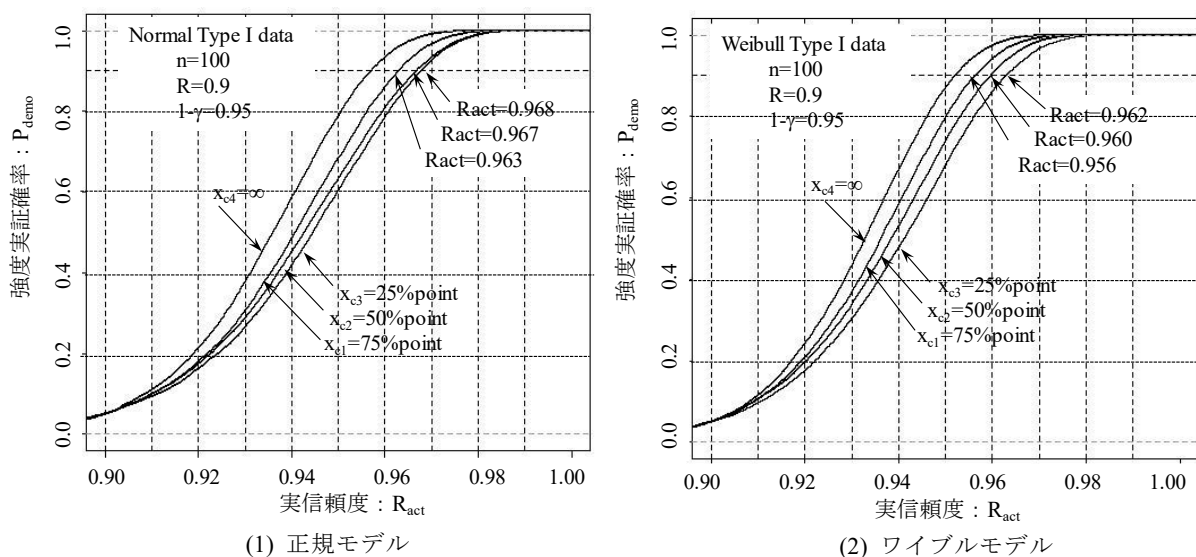


図 8 実証確率と実信頼度 (TYPE I 打切りデータ)

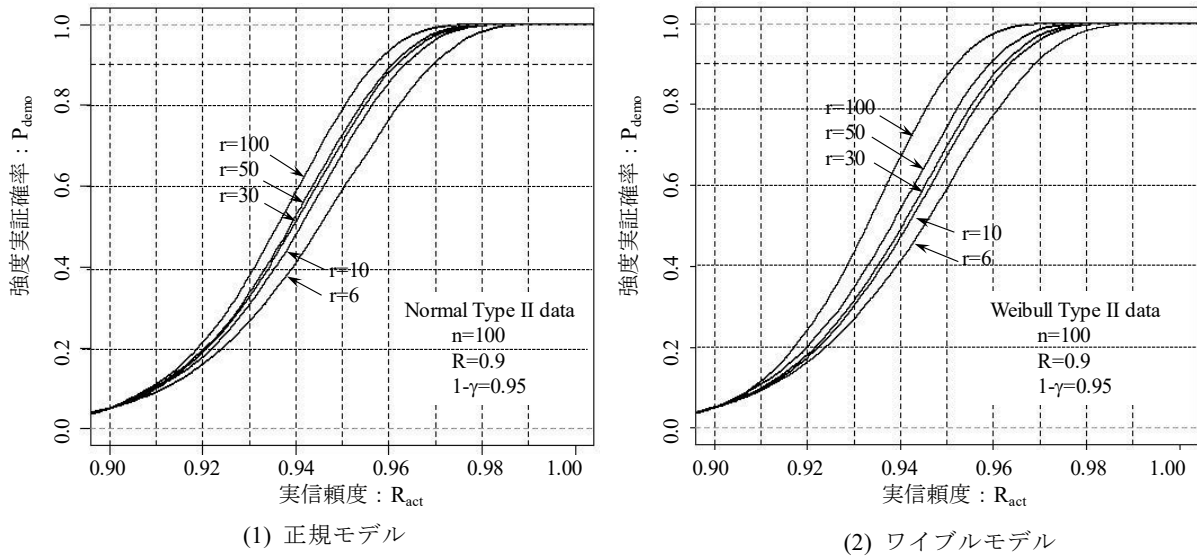


図9 実証確率と実信頼度 (TYPE II 打切りデータ)

### 3. 構造強度実証試験

構造物の耐荷重性能に2母数ワイブルモデルを仮定して不確実性を一般化し、少量生産の実機、あるいはそれに近い構造物を用いて耐荷重実証試験を行って、構造信頼度を推定する手法を記す。そして目的の信頼度を得るための適切な試験荷重レベルや供試体数（標本数）について考察し、また単体構造の実証試験で破損という事象を経験した場合、さらに必要となる追加試験の実施についてベイズ信頼性解析手法に基づき検討する。なお、ここでは板垣らの方法<sup>16),17)</sup>を基本として、取扱う未知母数や情報源の拡張を行う。耐荷重試験の解析法の概略を図10に示す。

#### 3.1 耐荷重実証試験の計画

対象となる構造の耐荷重能力  $x$  の不確実性が2母数ワイブルモデル  $W(x|\alpha,\beta)$  に従うと仮定する。ここで形状母数  $\alpha$  および尺度母数  $\beta$  をともに未知と考える。そして  $(\alpha,\beta)$  の推定における情報不足を補うために、工学的判断および実証試験により得られるデータを解析手法に順次導入し、ベイズ法を適用して未知母数の推定を行う。

##### 3.1.1 未知母数推定

(12)式に2母数ワイブルモデル  $W(x|\alpha,\beta)$  の確率分布を示す。解析の事前において  $(\alpha,\beta)$  の推定に有益な情報を導入する。実証試験の事前において  $(\alpha,\beta)$  の変数域の上下限に関する情報のみが得られている状況では、(13)式の一様分布が適用される。また  $(\alpha,\beta)$  についてさらなる情報、たとえば類似構造の経験などの定性的情報が得られていれば、ファジイ集合などを用いてこれらを適切に定量化して、(14)式に示すように  $G(\alpha,\beta)$  なる追加情報として事前分布を再評価することが可能である<sup>17)</sup>。

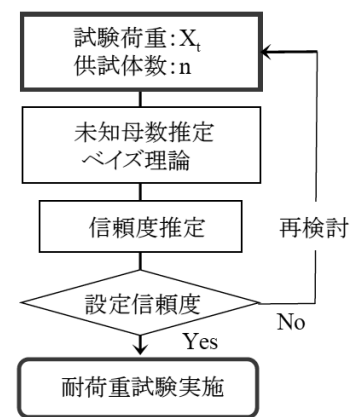


図10 耐荷重試験

$$W(x|\alpha, \beta) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right\}, \quad \frac{dW}{dx} = w(x) \quad (12)$$

$$f^{(0)}(\alpha, \beta) = 1/\{(\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\}, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 \quad (13)$$

$$f^{(0)}(\alpha, \beta) \propto G(\alpha, \beta) \cdot f^{(0)}(\alpha, \beta), \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 \quad (14)$$

ここで標本数  $n$  に対して耐荷重試験の実施を想定する。 $n$  個の試験標本に対してあらかじめ最大荷重  $X_t$  を加えて試験を行い、その結果、 $n$  個中  $k$  個が各々  $(x_1, \dots, x_k)$  なる荷重で破損し、残りの  $(n-k)$  個は荷重レベル  $X_t$  まで試験荷重に耐えたとする。この事象を  $\text{Test}(n, k, X_t)$  と略記すると、 $\text{Test}(n, k, X_t)$  の生起確率は次式で表される。

$$P_r[\text{Test}(n, k, X_t)|\alpha, \beta] = \{1 - W(X_t|\alpha, \beta)\}^{n-k} \prod_{i=1}^k w(x_i|\alpha, \beta) \quad (15)$$

試験結果  $\text{Test}(n, k, X_t)$  を得た後の未知母数  $(\alpha, \beta)$  をベイズ法によって推定すると、上式の確率  $P_r[\text{Test}(n, k, X_t)]$  を用いて、(14)式の  $f^{(0)}(\alpha, \beta)$  を基に次式に示す事後分布  $f^{(1)}(\alpha, \beta)$  が得られる。

$$\begin{aligned} f^{(1)}\{\alpha, \beta|\text{Test}(n, k, X_t)\} \\ = P_r[\text{Test}(n, k, X_t)|\alpha, \beta] \cdot f^{(0)}(\alpha, \beta) / \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} (\text{Numerator}) d\beta d\alpha \end{aligned} \quad (16)$$

### 3.1.2 ベイズ期待信頼度

運用荷重レベル  $X_s$  まで構造が無事である信頼度の表現として、(16)式の事後分布  $f^{(1)}(\alpha, \beta)$  を適用した次の(17)式が考えられる。この  $R_M$  は実験結果に基づくベイズ期待信頼度<sup>18)</sup>である。本式から明らかのように、試験結果から適切な情報を引き出すためには試験標本数  $n$ 、試験荷重レベル  $X_t$  の設定が重要となる。

$$R_M\{X_s|\text{Test}(n, k, X_t)\} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \{1 - W(X_s|\alpha, \beta)\} \cdot f^{(1)}\{\alpha, \beta|\text{Test}(n, k, X_t)\} d\beta d\alpha \quad (17)$$

耐荷重実証試験が行われる場合には、その試験結果  $\text{Test}(n, k, X_t)$  を用いて運用荷重  $X_s$  に対する信頼度が上記(17)式によって求められる。しかし、多数の標本や構造標本を用いた実証試験は現実に困難である。そこで実証試験を実施したと仮定して、(17)式の期待信頼度がどのような値を取るかを検討する。ところで、試験結果  $\text{Test}(n, k, X_t)$  は真実値  $(\alpha_{\text{true}}, \beta_{\text{true}})$  に依存する確率変数  $k, x_1, \dots, x_k$  などの関数であり、したがって (17)式の期待信頼度も確率変数となる。ここでは信頼度の平均的な値を考え、これを信頼度の指標に用いる。試験結果の生起確率から、この信頼度の平均は次式の  $R_M^*$  に表現できる。本報告では、この(18)式の  $R_M^*$  を MC シミュレーションによって求めている。

$$\begin{aligned} R_M^*(X_s|\alpha_{\text{true}}, \beta_{\text{true}}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^{X_t} \dots \int_0^{X_t} \{1 - W(X_t|\alpha_{\text{true}}, \beta_{\text{true}})\}^{n-k} \\ \prod_{i=1}^k w(x_i|\alpha_{\text{true}}, \beta_{\text{true}}) R_M\{X_s|\text{Test}(n, k, X_t)\} dx_1 \dots dx_k \end{aligned} \quad (18)$$

### 3.2 耐荷重実証試験のMCシミュレーション

#### 3.2.1 未知母数事前分布の設定

耐荷重試験における試験荷重  $X_t$  と標本数  $n$  の設定について、MCシミュレーションによって得た数値例を示す。シミュレーション回数を  $m=10,000$  回に設定した。最初に未知母数  $(\alpha, \beta)$  の事前分布  $f^{(0)}(\alpha, \beta)$  を形成するが、未知母数に関する情報が得られない場合には、工学的判断で上下限値を定めた(13)式の一様分布が用いられる。そこで  $(\alpha, \beta)$  の推定範囲の上下限値  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$  を表2および図11に定める。また  $\alpha$  と  $\beta$  を独立として  $f^{(0)}(\alpha), f^{(0)}(\beta)$  には各々一様分布を仮定する。形状母数の真実値  $\alpha_{true}=3.5, 4.0, 4.5$  を仮定して、未知母数  $\alpha$  の範囲設定について危険側(Case 1)、妥当(Case 2)、そして安全側(Case 3)を設定する。また Case 2 をさらに進めて、類似構造の情報や過去の経験などの事前情報を重ねて  $\alpha$  の事前分布を3角形状に定量化した  $G(\alpha)$  (Case 4)も考慮した。尺度母数についても真実値  $\beta_{true}=2.5, 4.0, 5.5$  の3種を仮定して、形状母数と同様に Case 1 から Case 4 の4通りの事前分布を設定した。なお、 $\alpha$  と  $\beta$  の独立の仮定から、 $G(\alpha, \beta)=G(\alpha)*G(\beta)$  とする。また尺度母数  $\beta$  を運用荷重レベル  $X_s$  で基準化する。

表2 未知母数事前分布と真実値

	$\alpha_{true}$	$\beta_{true}$	$f^{(0)}(\alpha)$	$f^{(0)}(\beta)$
Case 1	3.5	2.5	一様分布	一様分布
Case 2	4.0	4.0	一様分布	一様分布
Case 3	4.5	5.5	一様分布	一様分布
Case 4	4.0	4.0	G( $\alpha$ ):3角形	G( $\beta$ ):3角形

推定範囲 :  $(\alpha_1 \sim \alpha_2) = (3.0 \sim 5.0), (\beta_1 \sim \beta_2) = (1.0 \sim 7.0)$

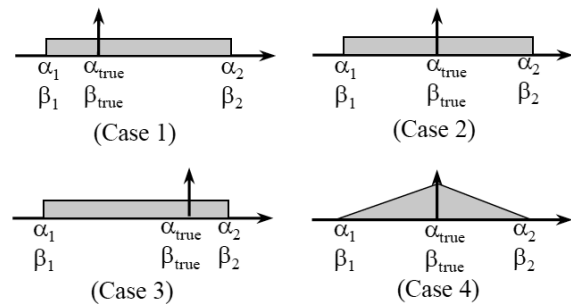


図11 事前分布  $f^{(0)}(\alpha), f^{(0)}(\beta)$  の設定

#### 3.2.2 形状母数推定と実証試験

試験荷重  $X_t$  を運用荷重レベル  $X_s$  で基準化した  $X_t/X_s$  を媒介として、試験の標本数  $n$  の信頼度推定に対する効果を図12に示す。ここでは形状母数  $\alpha$  の推定範囲を把握するために、尺度母数については真実値を  $\beta_{true}=4.0$  とした Case 2 の一様分布を考慮し、図11の Case 1, Case 2, そして Case 3 について3種類の  $\alpha_{true}$  に対する期待信頼度  $R^*_M$  を求めた。 $R^*_M$  は運用荷重で基準化した試験荷重レベル  $X_t/X_s$  に対する信頼度である。各 Case とともに試験荷重が  $X_t/X_s=0.5$ 、すなわち運用荷重レベルの50%の試験荷重では期待信頼度が標本数  $n$  に対してほとんど不変であり、このような実証試験条件では当然ではあるが信頼度の推定には寄与しない。試験荷重、 $X_t/X_s=0.5, 1.5, 2.5$  について真実値  $R_{true}=1-W(X_t/X_s|\alpha_{true}, \beta_{true})$  への推定信頼度の漸近線は、標本数  $n$  に関して各 Case とともに相対的に同様な傾向を示している。すなわち、各 Case の標本数  $n$  における  $R^*_M/R_{true}$  の比に大きな差異はなく、本例の範囲内では形状母数の事前設定が信頼度に与える影響は少ないと思われる。なお、図中では実信頼度  $R_{true}$  を▷印に、また  $f^{(0)}(\alpha, \beta)$  を用いた初期期待信頼度を▶印で各々示す。形状母数に関する事前情報  $G(\alpha)$  を重ねた Case 4 の結果を図12の点線に示すが、一様分布の Case 2 の期待信頼度に比べて多少優位であり、試験標本の少ない状況では適切な工学的判断等の事前情報が有用であることがわかる。

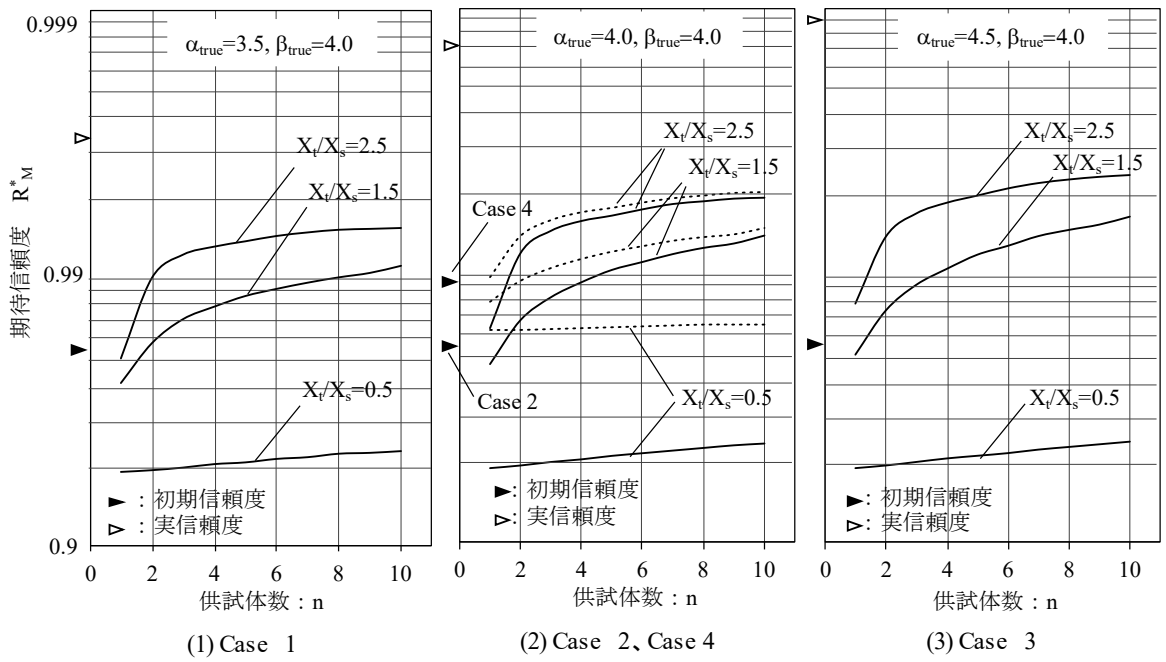


図 12 期待信頼度と供試体数

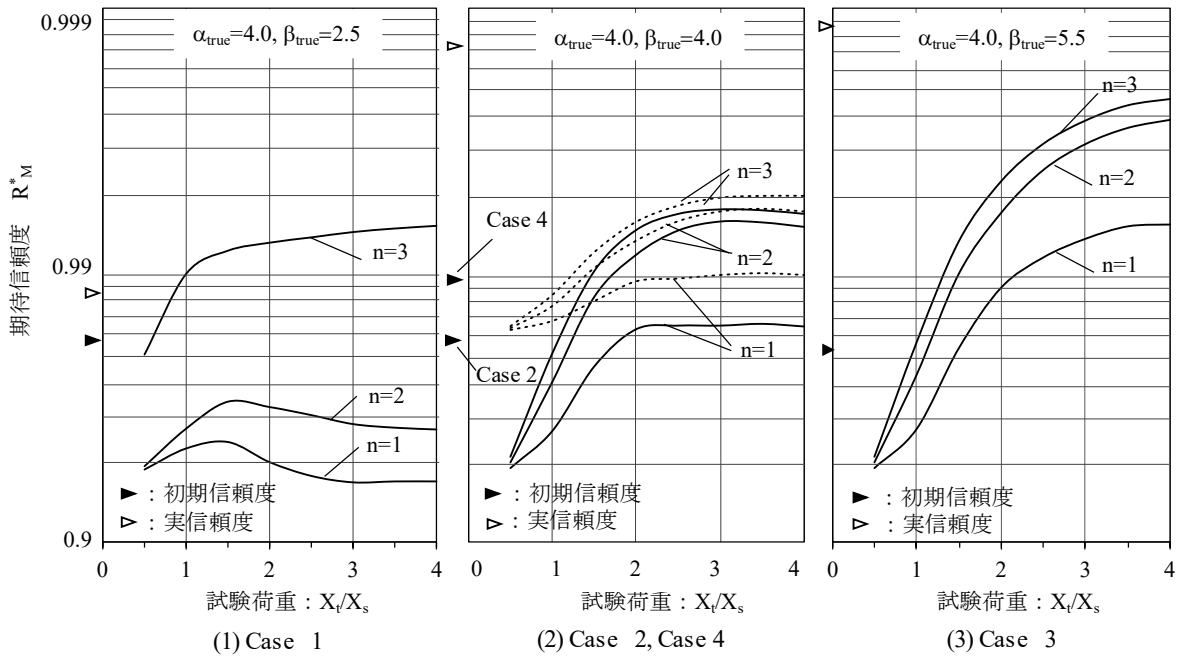


図 13 期待信頼度と試験荷重



### 3.2.3 尺度母数推定と実証試験

次に尺度母数 $\beta$ の推定範囲の影響をみるために、形状母数の $f^{(0)}(\alpha)$ についてはCase 2の真実値を $\alpha_{true}=4.0$ とした一様分布に置く。そして尺度母数 $\beta$ に対しては図11のCase 1, Case 2, Case 3について3種類の $\beta_{true}$ を仮定し、実証試験のMCシミュレーション( $m=10,000$ )を行った。図13は尺度母数の事前分布設定の範囲に対して、標本数 $n$ 、試験荷重 $X_f/X_s$ の条件下の実証試験で得られた期待信頼度 $R^*_M$ を示す。尺度母数 $\beta$ に対する事前の予測が妥当(Case 2)および安全側(Case 3)の場合には、試験荷重レベルの増加に伴って期待信頼度 $R^*_M$ も増加する。これに対してCase 1の危険側では、期待信頼度 $R^*_M$ が試験荷重レベルの増加とともに実信頼度に対して減少している。したがって負荷レベルを変えて試験を実施し、解析結果がこのような傾向を示す場合には、尺度母数の事前分布の設定を再検討する必要がある。また妥当および安全側の事前情報が得られた場合(Case 2およびCase 3)には、実証荷重レベルが低い設定でも信頼度の真実値  $R_{true}$ への漸近が早い。特にCase 4の適切な事前情報の導入(図中の点線)に見られるように、前項3.2.2の形状母数と同様に、試験標本数 $n$ の少ない状況では適切な事前情報 $G(\beta)$ または $G(\alpha, \beta)$ の導入効果が期待される。

### 3.3 追加すべき実証試験

単体( $n=1$ )の耐荷重実証試験を考える。試験において供試体破損無しの結果が得られれば、すなわち試験が成功すれば初期の構造信頼度は保証される。しかし破損というまれな事象が生じた場合には、初期の信頼度を得るための追加試験が必要である。以下、追加試験の荷重レベル $X_{tA}$ と必要な追加試験数  $n_A$ の評価についてベイズ解析を適用する。追加試験の概略流れを図14に示す。

単体の実証試験において、 $X_t$ 以内のある荷重レベル  $X_f < X_t$ で 破損(fail)という尤度を $L$ とすると、 $(\alpha, \beta)$ に対する尤度は次式で表される。

$$L(\alpha, \beta | fail) = w(X_f | \alpha, \beta) \quad (19)$$

構造物の破損荷重は常に明確な値で得られるとは限らない。構造の不静定や測定系において避けられない曖昧性が含まれ、破損荷重  $X_f$  が不確実な状況もあり得る。そこで、この破損荷重の不確実性をファジイ集合である帰属度関数<sup>8),19)</sup> (msf: membership function)  $\mu(X_f)$ を用いてモデル化する。ここでは安全側に、破損荷重が得られた値  $X_f$ よりも小さい状況を想定して、その不確実性を示すmsfを3角形状とする(図15)。破損荷重  $\tilde{X}_f = \mu(X_f)$  の生起確率はファジイ事象 $\tilde{X}_f$ の生起確率として以下のように計算される。

$$L(\alpha, \beta | fail) = \int_{X_f} \mu(X_f) w(X_f | \alpha, \beta) dX_f \quad (20)$$

破損事象の尤度 (19)式または(20)式と先の事前分布  $f^{(0)}(\alpha, \beta)$  から、ベイズ法またはファジイ情報を扱うことが可能な拡張ベイズ法<sup>8),9)</sup>によって、破損事象後の $(\alpha, \beta)$ の事後分布 $f^{(1)}(\alpha, \beta | fail)$ が次式に書ける。

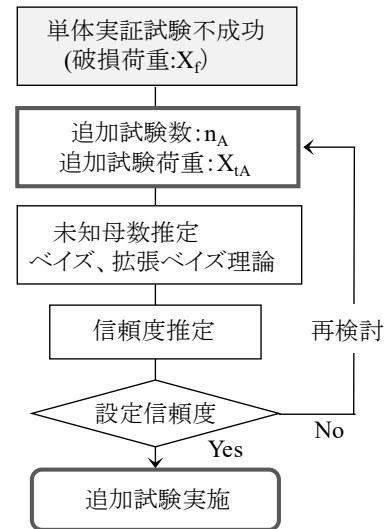


図14 耐荷重追加試験

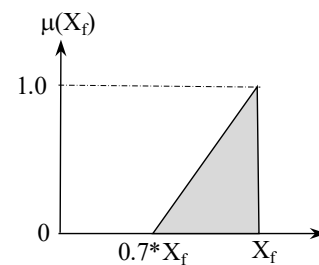


図15 破損荷重  $\mu(X_f)$

$$f^{(1)}(\alpha, \beta | \text{fail}) = L(\alpha, \beta | \text{fail}) \cdot f^{(0)}(\alpha, \beta) / \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} (\text{Numerator}) d\beta d\alpha \quad (21)$$

ここで信頼度保証のために荷重レベル $X_{tA}$ で $n_A$ 回の追加試験を行い、いずれも破損が無い結果を想定して、その尤度を(22)式に示す $L(\alpha, \beta | n_A: \text{successes})$ とする。この尤度と $f^{(1)}(\alpha, \beta | \text{fail})$ を事前分布として、再びベイズの定理から、新たな $(\alpha, \beta)$ の事後分布である $f^{(2)}(\alpha, \beta)$ が(23)式で得られる。

$$L\{\alpha, \beta | n_A: \text{successes}\} = \{1 - F_x(X_{tA} | \alpha, \beta)\}^{n_A} = \exp\{-n_A(X_{tA}/\beta)^\alpha\} \quad (22)$$

$$f^{(2)}\{\alpha, \beta | n_A: \text{successes}\} = L\{\alpha, \beta | n_A: \text{successes}\} \cdot f^{(1)}(\alpha, \beta | \text{fail}) / \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} (\text{Numerator}) d\beta d\alpha \quad (23)$$

(17)式と同様に運用荷重 $X_s$ における構造信頼度を $R_{1M}(X_s)$ とすると、これは以下の(24)式から求められる。さらに、信頼度の平均値としての信頼度指標 $R_{1M}^*(X_s)$ が、(18)式と同様に(25)式で表現できる。

$$R_{1M}(X_s) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \{1 - F_x(X_s | \alpha, \beta)\} \cdot f_2\{\alpha, \beta | k: \text{successes}\} d\beta d\alpha \quad (24)$$

$$R_{1M}^*(X_s) = \int_{X_{tA}}^{X_s} R_{1M}(X_s) \cdot w(X_f | \alpha_{true}, \beta_{true}) / W(X_{tA} | \alpha_{true}, \beta_{true}) \cdot dX_f \quad (25)$$

### 3.3.1 追加試験計画における事前情報

前節の結果が示唆するように、2母数ワイブルモデルの信頼性解析では形状母数の推定範囲の絞込みが重要であり、過去の経験を導入した母数推定範囲の精査などのさらなる工夫が必要である。しかし図12で得られた結果では、形状母数が3~5の範囲において2母数ワイブルモデルの推定信頼度の真実値に対する精度の差は見られない。また従来の経験から形状母数を材料定数として評価するなどの信頼性評価も多い。そこで本節では、単体試験という情報不足を補うために形状母数を既知とし、尺度母数のみを未知としてベイズ解析を行う。ここでは尺度母数の事前情報と単体試験における破損荷重の不確定性に対して、表3に示すCase 1, Case 2の2種類の不確定性を想定して、 $m=10,000$ 回のMCシミュレーションにより追加試験を検討する。

### 3.3.2 単体破損荷重の不確定性と追加試験

不確定性の大きいCase 1のモデルに対して、初期の信頼度を保証するための追加試験条件を求める。数値計算では表4に示す諸要因値を仮定した。初期信頼度には尺度母数に対する事前分布 $f^{(0)}(\beta)$ を一様とした期待信頼度 $R_{M0}$ を用い、また追加試験の目標信頼度を $R_{OB}=0.99$ に設定した。なお破損荷重 $X_f$ については、図15に示すように $X_f$ 以下であるという不確定性を含む情報を仮定し、(19)式および(20)式を用いて拡張ベイズ法によって尺度母数の推定を行う。表5および図16に単体試験荷重レベル $X_t$ および追加試験荷重レベル

表3 事前分布と破損荷重

	$f^{(0)}(\beta)$	破損荷重: $X_f$
Case 1	一様分布	$\mu(X_f): \text{msf}$
Case 2	$G(\beta): 3$ 角形	$X_f: \text{crisp}$

$$\alpha_{true}=4.0, \beta_{true}=4.0, (\beta_1 \sim \beta_2)=(1.0 \sim 7.0)$$

表4 追加試験信頼度

	初期: $R_{M0}$	追加試験: $R_{OB}$
Case 1	0.9473	0.99
Case 2	0.9847	

表 5 追加試験回数： $n_A$  (Case 1)

追加試験荷重： $X_{tA}/X_s$	単体試験荷重： $X_t/X_s$						
	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
1	81	79	75	68	57	44	31
1.5	16	16	15	14	12	9	7
2	6	6	5	4	4	3	2
2.5	3	3	2	2	2	2	1
3	2	2	1	1	1	1	1
3.5	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1

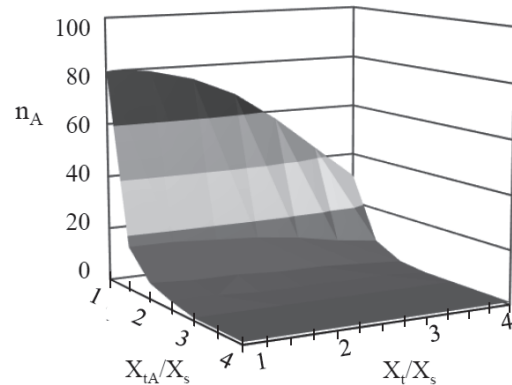


図16 追加試験回数(Case 1)

表 6 追加試験回数： $n_A$  (Case 2)

追加試験荷重： $X_{tA}/X_s$	単体試験荷重： $X_t/X_s$						
	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
1	67	65	60	51	37	22	10
1.5	14	13	12	10	8	5	2
2	5	5	4	4	3	2	1
2.5	2	2	2	2	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1
3.5	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1

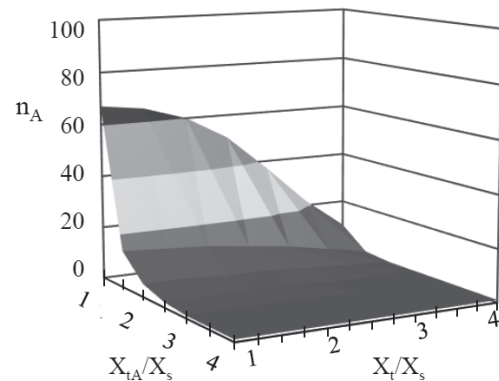


図17 追加試験回数(Case 2)

$X_{tA}$  の各試験条件と、信頼度  $R_{OB}$  を保証するために要する試験回数  $n_A$  を示す。最初の単体試験荷重  $X_t$  に関わらず、追加試験荷重レベル  $X_{tA}$  の増加に伴い、追加試験の数  $n_A$  は減少する。これは低いレベルの追加試験荷重では、追加試験数を増しても初期の信頼度を回復することは難しく、したがってある程度高いレベルの負荷での追加試験が必要であることを示している。

Case 1 に比べて不確定性の少ない Case 2 では尺度母数の事前情報が適切に得られており、 $f^{(0)}(\beta)$  が 3 角形と設定され、かつ単体試験における破損荷重が明確(crisp)である状況を想定する。Case 1 と同様に目標信頼度を  $R_{OB}=0.99$  に設定し、信頼度  $R_{OB}$  を保証するために要する追加試験の荷重  $X_{tA}$  と試験回数  $n_A$  を表 6 および図 17 に示す。Case 1 に比べて情報量の多い Case 2 では、必要な追加試験回数が Case 1 よりも少ない。3.2 節と同様に、有益な事前情報の効果が表れている。また Case 1、Case 2 双方ともに、単体試験の荷重を増加させるよりも追加試験の荷重レベルを上げる方が追加試験回数から見て試験効果大きい。

Case 1 および Case 2 の結果から、単体試験に関する事前情報の重要性と、破損荷重に不確定性が含まれている状況でも拡張ベイズ法によって合理的な未知母数推定が可能になることが明らかになった。

## 4. おわりに

多数標本の取得が可能な部材と少量生産の制約を受ける実大構造について、それぞれの強度実証を実験によって確認するための信頼性評価手法をまとめた。

一般に材料強度に対する不確定性については強度の片側下限界値である MIL 基準に従う。しかし標本数が少ない状況では下限値の変動範囲は広く、過度な余裕の許容値が採られる場合がある。ここでは Meeker<sup>4)</sup>らの区間推定理論に基づく実証確率を材料強度の実証試験に適用し、下限値の信頼度で定義する実証確率と強度の実信頼度との関係を MC シミュレーションによって求めた。この結果から、目的の材料強度を実証するための各種試験計画について具体例を示した。他方、実機や部分構造などの大型構造の信頼性を把握するためには、耐荷重試験を行うことによって種々の不確定性を評価する必要がある。しかし少量生産であるがゆえに応用可能な情報は限られ、製造工程に含まれる諸要因、また荷重配分や局所的応力分布の不確定性などから試験結果は確率事象となり、現実にもどのようなデータが得られるか事前に予測することは困難である。本報告ではこれに対する有効な手段として、構造物の不確実要因の特性を合理的に推定できる板垣、朝田らのベイズ理論<sup>1),16)</sup>を用いた構造信頼性解析法を構築し、耐荷重試験にベイズ法を適用して、MC シミュレーションを用いた仮想耐荷重試験の評価手法を示した。

部材および構造物の強度実証試験計画について得られた結果を以下にまとめる。

- (1) 2元評価の信頼度と信頼水準に加えて、強度下限値の信頼度の実証確率を定義することによって、あらかじめ設定した目的の強度と実信頼度の関係が明らかになった。この強度が持つ真の信頼度を実現できる確率、すなわち強度実証確率を基本とした新たな試験計画が可能となる。
- (2) 正規モデルおよび2母数ワイブルモデルの双方の強度の確率モデルに対して、MC シミュレーションによって実証確率を求め、対応する実信頼度を取得するために必要な標本数の汎用線図を得た。
- (3) 正規およびワイブルモデルの双方の打ち切り標本に対する実証確率と実信頼度の汎用線図を求め、静強度と同様に疲労強度の実証試験に対応する有用な標本数を求めた。
- (4) 構造物の耐荷重試験における試験荷重と標本数の設定について、2母数ワイブルモデルのベイズ信頼性解析を基本とした評価プログラムを構築した。本手法を適用することによって、強度実証試験を想定した MC シミュレーションによるベイズ期待信頼度を評価指標として、少量生産である構造物の適切な強度実証試験が計画可能となる。
- (5) 単体構造試験の破損という情報量が限定されている状況であっても、拡張ベイズ法によって未知母数に対する事前情報や破損荷重の不確定性を適切に信頼性評価に反映できることが示された。さらに信頼性を確保するための必要な追加試験計画についてもベイズ解析を適用し、数値例を通じて本手法の有効性を明らかにした。

## 参考文献

1. 岡村弘之、板垣 浩、“強度の統計的取り扱い”、破壊力学と材料強度講座-6、培風館、1979.
2. 永田 靖、“サンプルサイズの決め方”、統計ライブラリー、朝倉書店、2009.
3. MIL-HDBK-17-1F, Vol.1 of 5, 2002.
4. William Q. Meeker, Gerald J. Hahn, Luis A. Escobar, “Statistical Intervals: A Guide for Practitioners and Researchers” (Wiley Series in Probability and Statistics), 2017.
5. Lawless, J.F. , “Statistical Methods for Lifetime Data”, John Wiley & Sons, 1982.
6. 下河利行、“数表による数値積分と2母数ワイブル分布の母数およびパーセント点の信頼性限界値推定”、材料、Vol.41, N0.468, pp.1446-1451, 1992.
7. Michael Mohaghegh, “Validation and Certification of Aircraft Structures”, AIAA Paper 2005-2102, 46<sup>th</sup>AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 2005.
8. 伊藤誠一、杉本 直、岡田孝雄、“疲労寿命安全率に関するノート”、宇宙航空研究開発機構研究開発資料 JAXA-RM-11-007、2012.
9. 矢川元基 編、“ファジイ推論”、計算力学とCAEシリーズ4、培風館、1991.
10. 伊藤誠一、加藤久弥、原 栄一、岡田孝雄、“強度不確定性に対する簡易評価指標 –MCMCに基づくベイズ期待信頼度–”、宇宙航空研究開発機構研究開発資料 JAXA-RM-18-011、2019.
11. 金 明哲、“Rによるデータサイエンス、データ解析の基礎から最新手法まで”、森北出版、2017.
12. 船尾暢雄、“The R Tips(第2版)”、オーム社、2009.
13. Lee J. Bain and Max Engelhardt, “Simple Approximate Distributional Results for Confidence and Tolerance Limits for the Weibull Distribution Based on Maximum Likelihood Estimators”, Technometrics, Vol.23, No.1, 15-20, 1981.
14. Scott W., Luis A. Escobar, Q. Meeker, “Sample size and Number of Failure Requirements for Demonstration Test with Log-Location-Scale Distributions and Type II Censoring”, Iowa State University, Digital Repository, 3-2-2002, 2002.
15. Derek S. Young, “An R Package for Estimating Tolerance Intervals”, Journal of Statistical Software, Vol.36, Issue 5, 2010.
16. 板垣 浩、“実証試験のベイズ的解釈”、第11回材料・構造信頼性シンポジウム特別講演、1992.
17. Seiichi Ito, Takao Okada, “Reliability analysis for proof load test of large-scale structure system”, 9th Japan International SAMPE Symposium & Exhibition, 2005.
18. 伊藤誠一、杉本 直、青木雄一郎、岡田孝雄、“複合材構造の疲労寿命実証試験における荷重設定について–ベイズアン・アプローチ–”、宇宙航空研究開発機構研究開発資料 JAXA-RM-13-011、2013.
19. 田中英夫、松岡 浩 訳、“ファジイ数学モデル”、オーム社、1992.
20. (財)日本住宅・木材技術センター編、“木造軸組工法住宅の許容応力度設計(2008 年度版)”、(財)日本住宅・木材技術センター、2009.

### 補記 1 強度実証確率と2元評価基準

MIL-A と MIL-B の下限値では双方ともに信頼水準は  $1-\gamma=0.95$  であるが、信頼度は  $R_A=0.99$ ,  $R_B=0.90$  の規格である。A 値では信頼度  $R$  の基準が厳しくなるため、標本から得られる下限界の確率分布は左へシフトする。一方、材質の生育度や繊維の分布など、多くの要因が強度性能に関わる木材の静強度の例を見ると、その基準は MIL-B と比較して信頼度が  $R=0.95$  と高く設定されるが、信頼水準は  $1-\gamma=0.75$  と緩和されている<sup>20)</sup>。ここで木材基準強度に対する実証確率を図 A1 に示す。また図 A2 には得られた実信頼度に対応する標準正規分布のパーセント点について、木材強度と MIL-B (本文図 5(1)参照) とを比較した。なお本例の標本数設定の実証確率は、MIL-B では  $P_{\text{demo}}=0.90$ 、木材強度では  $P_{\text{demo}}=0.95$  とそれぞれの信頼度基準  $R^*$  に相当する。これらの結果から、標本数  $n=13$  程度までは木材強度の下限値は MIL-B 値に比較して大きく設定されるが、それ以上の標本数では MIL-B 基準よりも厳しい強度設定となる。 $P_{\text{demo}}$  の設定、すなわち信頼度基準  $R^*$  の違いもあるが、高い目標強度の実証には標本数を多く必要とする。

なお、木材の基準強度設定値では信頼水準  $1-\gamma$  の記号定義が MIL 基準とは異なる<sup>20)</sup>。

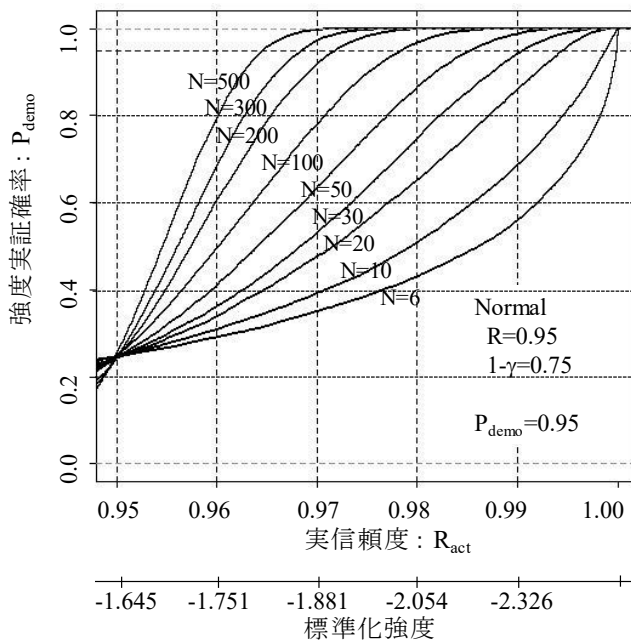


図 A1 実証確率と実信頼度 (木材静強度)

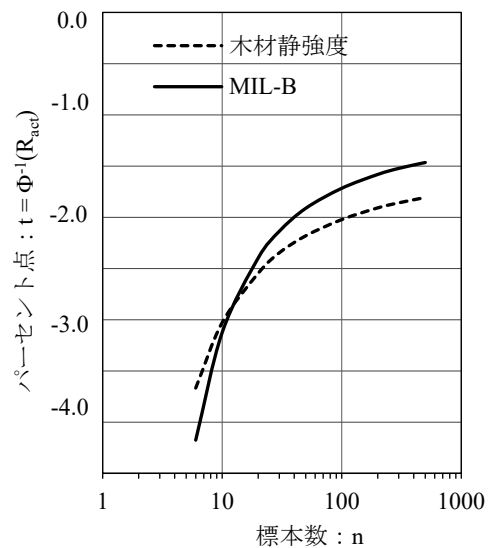


図 A2 実信頼度と標本数

### 補記 2 打ち切り標本の実証確率計算プログラム例

正規モデルのタイプ II 打ち切り標本に対して、フリーソフト“R”を用いた強度実証確率を求める計算プログラムの例を以下に示す。MIL-B 値に対応する強度実証確率を MC シミュレーションによって、総標本数  $n=100$  の中で打ち切り標本数を  $n_r=6, 10, 20, 50, 100$  として実証確率と実信頼度の線図を求める例である。詳細部を除き、本文の図 9(1)の結果に相当する。なお、“R”のソースリスト中の“#”以後の行内の文字は注釈を意味する。

```

# Normal-Type II censored sample data (正規分布未知母数最尤推定を含む。)
L<- function(par){
  sum(nr*log(dnorm(xx,par[1],par[2]))) + sum((n-nr)*log(1-pnorm(xx,par[1],par[2]))) }
# 標本数 : n, 打切り標本数 : nr
# L: 尤度関数、 par[1]: 平均, par[2]: 標準偏差
mm<- c()      #作業変数
ss<- c()      #作業変数
xx<- c()      #作業変数
k<- c()       #作業変数
qq<- c()      #作業変数
n<- 100       #標本総数
nt<- 5        #打切り種類、本例では以下の5種
nrc<- c(6,10,30,50,100) #打切り標本数
nr1<- c(7,11,31,51,100) # nr1=nrc+1(n=100を除く)
pr<- 0.1      # 破損確率、R=0.90、1-R=F=0.1
tm<- 0.0     # MC シミュレーションの真平均値
ts<- 1.0     # MC シミュレーションの真標準偏差
qpt<- qnorm(pr,tm,ts) # F=0.1の%点
m<- 10000    # MC シミュレーション回数
#
for(jj in 1:nt){ # 打切り標本 nr を5種計算
  set.seed(7875) #乱数初期値
  nr<- nrc[jj]
  for(j in 1:m){
    x <- rnorm(n,tm, ts) #正規乱数 n 個発生
    xx<- sort(x)        #昇順に並べ替え
    mx<- xx[nr]         #打切り時の破損強度
    for(i in nr1[jj]:n){ xx[i]<- mx} #残りの標本の信頼度
    res<- optim(c(0,1),L,control = list(fnscale=-1)) #最尤推定(optim)
    bosu<- res$par
    mm[j]<- bosu[1]
    ss[j]<- bosu[2]
    k[j]<- (mm[j]-qpt)/ss[j] } #本文(10)式
    fk<- ecdf(k)          #K の経験分布(ecdf)
    kk<- quantile(fk,prob=0.95,name=F) #K の下側5%点(信頼水準)
    for(j in 1:m){ tt<- mm[j]-ss[j]*kk #本文(11)式
      qq[j]<- 1-pnorm(tt, tm,ts) } #実信頼度: Ract
      qqf<- ecdf(qq)       #実信頼度の経験分布
      if(jj==1){
        plot(qqf,xlim=c(0.9,1.0), ylim=c(0.0,1.0),lty=1,lwd=1) } #図座標軸
      else{plot(qqf,xlim=c(0.9,1.0), ylim=c(0.0,1.0),lwd=1,lty=1, ann=FALSE,axes=FALSE)}
      par(new=T) } #実信頼度描画
# 補足描画
abline(h=0.9,lty=2)
par(new=T)
vv<- c(0.9,0.91,0.92,0.93,0.94,0.95,0.96,0.97,0.98,0.99)
for(k in 1:10){ abline(v=vv[k],lty=2,lwd=0.1) }
#

```

宇宙航空研究開発機構研究開発資料 JAXA-RM-21-002

JAXA Research and Development Memorandum

部材および構造物の強度実証試験に関するノート

Investigation of Strength Demonstration Test for Materials and Structures

---

発行 国立研究開発法人 宇宙航空研究開発機構 (JAXA)

〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1

URL: <http://www.jaxa.jp/>

発行日 2021年9月30日

電子出版制作 松枝印刷株式会社

※本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。

Unauthorized copying, replication and storage digital media of the contents of this publication, text and images are strictly prohibited. All Rights Reserved.

---



