

# 宇宙航空研究開発機構研究開発資料

## JAXA Research and Development Memorandum

---

### ダクトファン最適設計プログラム, OptDuct の理論背景と使用法

Theoretical Background and User's Manual of Ducted Fan Optimal Design Program,  
OptDuct

原田 正志

HARADA Masashi

2022年1月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

# 目次

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 概要                       | 1  |
| 記号                       | 2  |
| 1. はじめに                  | 4  |
| 第一部 理論                   |    |
| 2. ダクテッドファンの数学モデル        | 5  |
| 2. 1. ダクテッドファンのモデル       | 5  |
| 2. 2. ダクト表面の格子の形状        | 6  |
| 3. ダクテッドファンにおける特殊な現象     | 8  |
| 3. 1. 物体表面の渦の移動速度        | 8  |
| 3. 2. ダクトが発生する推力         | 8  |
| 4. 推力およびパワーの式の導出         | 10 |
| 4. 1. ファンの発生する推力および吸収パワー | 10 |
| 4. 2. ダクト推力の計算方法         | 11 |
| 4. 3. ブレード上の誘導速度の計算      | 12 |
| 4. 4. ダクト表面上の境界条件        | 13 |
| 4. 5. ダクト後縁の境界条件         | 14 |
| 4. 6. 変数の削減              | 14 |
| 4. 7. ダクト推力の二次形式での表現     | 15 |
| 4. 8. 抵抗を考慮しない場合の推力とパワー  | 16 |
| 5. ダクトが短い場合の影響の計算        | 18 |
| 5. 1. 短いダクトの後流の収縮の計算     | 18 |
| 5. 2. 後流収縮量とリップファクターの関係  | 21 |
| 6. 最適化問題の解法              | 25 |
| 7. ハブを考慮したモデルへの拡張        | 26 |
| 8. 性能推算                  | 27 |

## 第二部 使用方法

|                                     |           |
|-------------------------------------|-----------|
| <b>9. OptDuct によるダクテッドファンの設計</b>    | <b>29</b> |
| 9. 1. 環境から起動まで                      | 29        |
| 9. 2. 設計データファイルの作成                  | 29        |
| 9. 3. 入力形状の確認                       | 32        |
| 9. 4. 後流の収縮の計算                      | 33        |
| 9. 5. 影響係数の計算                       | 33        |
| 9. 6. 最適化計算                         | 33        |
| 9. 7. 収束結果表示と軸方向速度の更新               | 34        |
| 9. 8. 終了処理                          | 36        |
| 9. 9. 画像出力                          | 37        |
| 9.10. 出力ファイル                        | 38        |
| <br>                                |           |
| <b>10. OptDuct によるダクテッドファンの性能推算</b> | <b>39</b> |
| 10. 1. 性能推算の開始方法                    | 39        |
| 10. 2. 形状設定ファイルの作成                  | 39        |
| 10. 3. 形状データファイルの作成                 | 40        |
| 10. 4. 読み込んだデータの確認                  | 41        |
| 10. 5. 性能の推算                        | 41        |
| <br>                                |           |
| <b>11. おわりに</b>                     | <b>44</b> |
| <br>                                |           |
| <b>参考文献</b>                         | <b>44</b> |

# ダクテッドファン最適設計プログラム, OptDuct の理論背景と使用法

原田 正志<sup>\*1</sup>

## Theoretical Background and User's Manual of Ducted Fan Optimal Design Program, OptDuct

HARADA Masashi<sup>\*1</sup>

### ABSTRACT

In recent years, drones and eVTOL have been actively developed, ducted fans are often used for generating thrust for hovering because of the large static thrust, the ability to shield and absorb noise by ducts, and high interpersonal safety. On the demands of the development of these drones and eVTOL, we have developed OptDuct, which designs fan blades for ducted fans that maximize static thrust by giving the number of revolutions, absorption power, number of blades, and so on. This paper describes the theoretical background of the optimal design of OptDuct and summarizes how to use OptDuct.

**Keywords:** Ducted Fan, Optimization, Design, Analysis, Static Thrust, Performance Estimation

### 概 要

近年、ドローンや eVTOL の開発が盛んであるが、静止推力を大きく取れること、ダクトにより騒音を遮蔽し吸収することが可能であること、対人安全性が高いことから、ホバリングのための推力を発生する装置として多く採用されている。これらドローンおよび eVTOL の開発での要望から、回転数、吸収パワー、ブレード枚数などを与えることにより、静止推力を最大にするダクテッドファンのファンブレードを設計する OptDuct を開発した。本稿は OptDuct の最適設計の理論的背景を述べるとともに、OptDuct の使用方法について纏めたものである。

---

\* 2021 年 11 月 11 日受付 (Received November, 11 2021)

<sup>\*1</sup> 航空技術部門航空安全イノベーションハブ (Aviation Safety Innovation Hub, Aviation Technology Directorate)

## 記号

|                       |                                    |
|-----------------------|------------------------------------|
| <b>A</b>              | : 推力を二次形式で表した時のマトリクス               |
| <b>A'</b>             | : ファン推力を二次形式で表した時のマトリクス            |
| <b>a</b>              | : 揚力傾斜                             |
| <b>B</b>              | : ブレード枚数                           |
| <b>b</b>              | : ファン推力を二次形式で表した時のベクトル             |
| <b>C</b>              | : 吸収パワーを二次形式で表した時のマトリクス            |
| <b>C<sub>D</sub></b>  | : 抵抗係数                             |
| <b>C<sub>L</sub></b>  | : 揚力係数                             |
| <b>c</b>              | : 翼弦長                              |
| <b>D</b>              | : ダクト直径                            |
| <b>D</b>              | : ブレードに働く抵抗                        |
| <b>d</b>              | : ダクト長さ                            |
| <b>E</b>              | : 第2種完全楕円積分                        |
| <b>F<sub>L</sub></b>  | : リップファクター                         |
| <b>H</b>              | : ブレードに働く空気力の水平分力                  |
| <b>K</b>              | : 第1種完全楕円積分                        |
| <b>K</b>              | : ブレードの循環からダクト格子の循環を算出するマトリクス      |
| <b>K<sub>DB</sub></b> | : ブレードの循環がダクト格子に引き起こす法線方向の速度の影響係数  |
| <b>K<sub>DD</sub></b> | : ダクト格子の循環がダクト格子に引き起こす法線方向の速度の影響係数 |
| <b>K<sub>DE</sub></b> | : ダクト馬蹄渦がダクト格子に引き起こす法線方向の速度の影響係数   |
| <b>K<sub>K</sub></b>  | : ダクト格子からダクト馬蹄渦に隣接する格子を抽出するマトリクス   |
| <b>K<sub>Q</sub></b>  | : ダクト推力を2次形式で表す際に現れるマトリクス          |
| <b>k<sup>2</sup></b>  | : 完全楕円積分の母数                        |
| <b>k<sup>2</sup></b>  | : ファン回転面積／収縮後の後流の断面積               |
| <b>L</b>              | : ブレードが発生する揚力                      |
| <b>N<sub>B</sub></b>  | : ブレード翼素の数                         |
| <b>N<sub>D</sub></b>  | : ダクト格子の数                          |
| <b>n<sub>z</sub></b>  | : ダクト格子の法線ベクトルのz成分                 |
| <b>P</b>              | : 吸収パワー                            |
| <b>P</b>              | : 静圧                               |
| <b>r</b>              | : コントロールポイントの半径                    |
| <b>r, z</b>           | : 円筒座標系                            |
| <b>S</b>              | : ダクト格子の面積                         |
| <b>S</b>              | : 運動量理論における流路の面積                   |
| <b>T</b>              | : ダクトファン推力                         |
| <b>T<sub>F</sub></b>  | : ファンが発生する推力 (ファン推力)               |
| <b>T<sub>D</sub></b>  | : ダクトが発生する推力 (ダクト推力)               |
| <b>U<sub>T</sub></b>  | : ブレード回転方向の流入速度                    |

|                          |                                      |
|--------------------------|--------------------------------------|
| $U_p$                    | : ブレード回転軸方向の流入速度                     |
| $u_B, v_B, w_B$          | : ブレード上の合計誘導速度                       |
| $u_{BB}, v_{BB}, w_{BB}$ | : ブレードの循環がブレードに引き起こす速度               |
| $u_{BD}, v_{BD}, w_{BD}$ | : ダクト格子の循環がブレードに引き起こす速度              |
| $u_{BE}, v_{BE}, w_{BE}$ | : ダクト馬蹄渦がブレードに引き起こす速度                |
| $u_D, v_D, w_D$          | : ダクト格子上の合計誘導速度                      |
| $u_{DB}$                 | : ブレードの循環がダクト格子に引き起こす法線方向の速度         |
| $u_{DD}$                 | : ダクト格子の循環がダクト格子に引き起こす法線方向の速度        |
| $u_{DE}$                 | : ダクト馬蹄渦がダクト格子に引き起こす法線方向の速度          |
| $V$                      | : ブレード流入速度                           |
| $w$                      | : ダクト内の軸方向速度の初期値                     |
| $X_B, Y_B, Z_B$          | : ブレードの循環とブレードに引き起こされる全誘導速度の合計の影響係数  |
| $X_{BB}, Y_{BB}, Z_{BB}$ | : ブレードの循環がブレードに引き起こす速度の影響係数          |
| $X_{BD}, Y_{BD}, Z_{BD}$ | : ダクト格子の循環がブレードに引き起こす速度の影響係数         |
| $X_{BE}, Y_{BE}, Z_{BE}$ | : ダクト馬蹄渦がブレードに引き起こす速度の影響係数           |
| $X_D, Y_D, Z_D$          | : ブレードの循環とダクト格子に引き起こされる全誘導速度の合計の影響係数 |
| $\alpha$                 | : ブレードの迎え角                           |
| $\alpha_0$               | : 0揚力角                               |
| $\Gamma_{Bi}$            | : $i$ 番目のブレードの循環                     |
| $\Gamma_B$               | : ブレードの循環のベクトル表記                     |
| $\Gamma_{Di}$            | : $i$ 番目のダクト格子の循環                    |
| $\Gamma_D$               | : ダクト格子の循環のベクトル表記                    |
| $\Gamma_{Ei}$            | : $i$ 番目のダクト馬蹄渦の循環                   |
| $\Gamma_E$               | : ダクト馬蹄渦の循環のベクトル表記                   |
| $\Delta_R$               | : 翼素の幅                               |
| $\varepsilon$            | : 誤差                                 |
| $\theta$                 | : ブレード取り付け角                          |
| $\rho$                   | : 空気密度                               |
| $\phi$                   | : 流入角度                               |
| $\Omega$                 | : ブレード回転角速度                          |

## 添字

|     |              |
|-----|--------------|
| B   | : ブレード       |
| D   | : ダクト格子, ダクト |
| E   | : ダクト螺旋渦     |
| $i$ | : $i$ 番目     |

## 1. はじめに

ドローンや eVTOL では、飛行時間を大きくするために、単位消費エネルギーあたりの（上むきの）推力が大きいことが求められる。静止状態においてダクトドファンは同じ直径、同じ吸収パワーのプロペラに比べ、理論上は 1.26 倍、実験的には 1.4 倍の推力を発生できる。さらに、ダクトによってファンが発生する騒音を遮蔽し、ダクトに吸音構造を組み込むことで吸音も行うことができる。機体規模がドローンより大きい eVTOL では回転するプロペラあるいはファンが、周囲の障害物、とりわけ人間に接触して危害を加えることを極力避けなければならない。この点、ダクトドファンはファンの周囲をダクトが覆っているため対人安全性が高く、ダクトに十分な強度を与えることで、万一ファンが破損した場合にも飛散することを抑えることが可能である。

このように多くの利点を持っているダクトドファンであるが、プロペラのように解析的に設計する理論は存在しない。OptDuct と同様にファンを離散化した揚力線で表して設計するプログラムとして MIT が公開している XROTOR がある。XROTOR は主にプロペラの設計および性能解析を目的としたプログラムであるが、オプションの一つに静止状態のダクトドファンの最適設計を行う機能がある。この最適設計の理論は論文として発表されていないものの、User's Guide に理論的背景の説明がある。これを読むとファン回転面での誘導速度は後流における誘導速度の 0.5 倍としているが、これは誤りであり、1.0 倍が正しい。また誘導損失最小の条件を用いず、スパンに渡って循環が一定としているとあるので、最適設計を行なっていると言うことができない。

OptDuct はファンブレードを揚力線で、ダクト表面に VLM 的に渦輪を配置したモデルを用い、推力および吸収パワーをブレード状の循環の 2 次形式で表し、吸収パワー一定の制限の元で推力を最大にする最適化問題を解くことでファンブレード形状を得ている。したがってしばしば行われるブレード形状をパラメトリックに変化させて CFD によっては最良の形状を求める方法に比べ、設計者の能力に依存せず、最適化計算が 1 回のみで終わる。また凸問題であることを示すことができ、得られた解は局所最適解ではなく大域的最適解であることが保証されている。

OptDuct は静止推力を最大にするダクトドファンを設計するプログラムであるが、共同研究先のテトラアビエーション株式会社からの要望により、ダクトドファンの形状を与えた場合に性能計算する性能計算機能を加えた。

本稿では第一部では OptDuct の理論を説明し、第二部では具体的な例を用いて最適設計方法、および性能推算方法を詳細に説明する。

## 第一部 理論

### 2. ダクトファンの数学モデル

#### 2.1. ダクトファンのモデル

OptDuct で使用するダクト, スピナ, ブレードの座標系を図 2.1-1 に示す. また図 2.1-2 に示すように 1 枚目のブレードを揚力線で表し  $x$  軸上に置く. ブレードは離散化して分割点から放出渦を, 付け根と翼

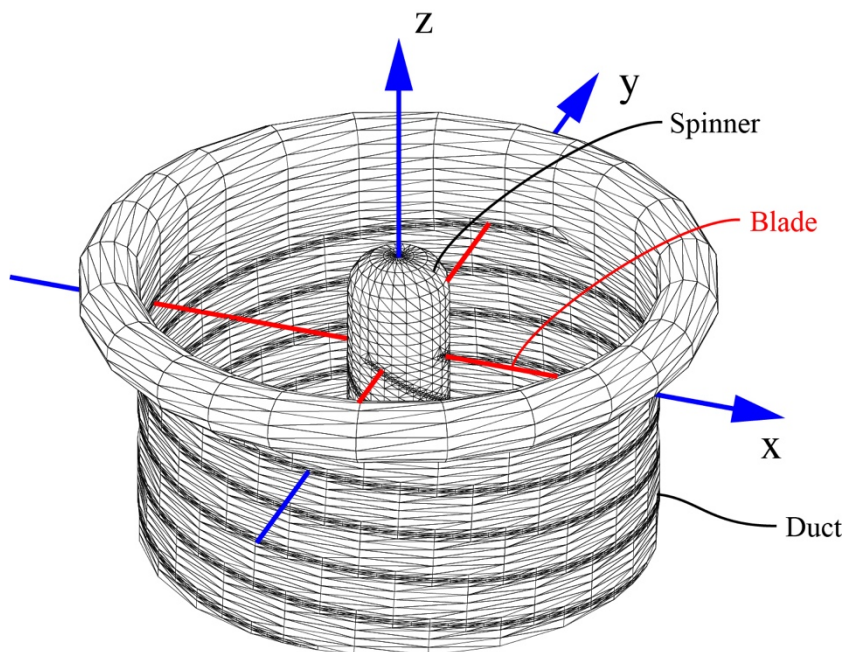


図 2.1-1 ダクトファンの座標系

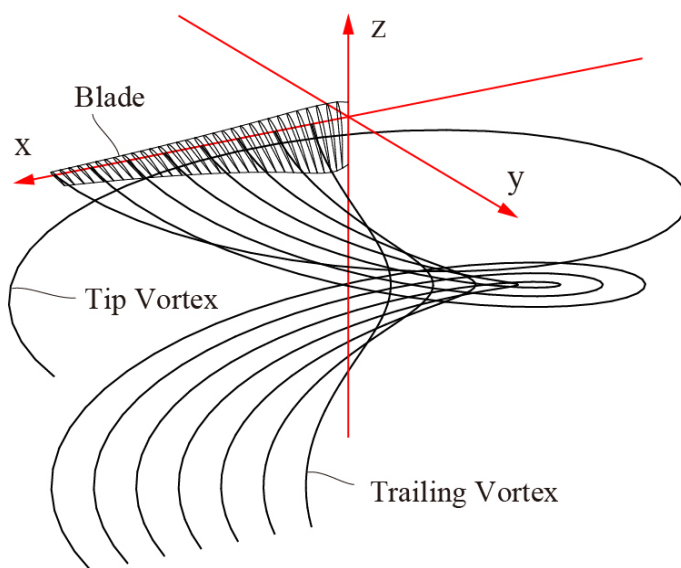


図 2.1-2 ブレードの座標系および放出渦, 翼端渦の形状



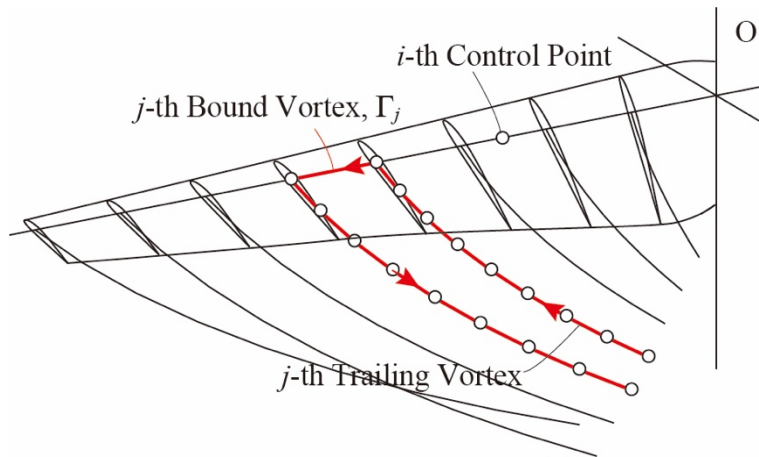


図 2.1-3 コントロールポイントおよび放出渦

端から翼端渦を放出する．ここで注意すべき点は翼端渦のピッチは放出渦の半分の値になる点である．このことについては後述する．また，放出渦と翼端渦は理論上は無限後方に伸びるが，計算上は直径の5倍程度あれば十分である．図 2.1-3 にコントロールポイントと放出渦の詳細を示す．コントロールポイントはブレードを等分割した中間点に取り，内側から順に数える． $i$  番目のコントロールポイントの存在する翼素の循環の大きさを  $\Gamma_{Bi}$  とする． $j$  番目の翼素の内側の分割点から放出される放出渦（方向は負に取る）と  $j$  番目の翼素の束縛渦および  $j$  番目の翼素の外側から放出される放出渦が作る螺旋状の馬蹄渦を， $j$  番目の螺旋馬蹄渦と呼ぶこととする．この  $j$  番目の螺旋馬蹄渦は渦全体が一定の大きさの循環  $\Gamma_{Bi}$  を持つとする．

## 2.2. ダクト表面の格子の形状

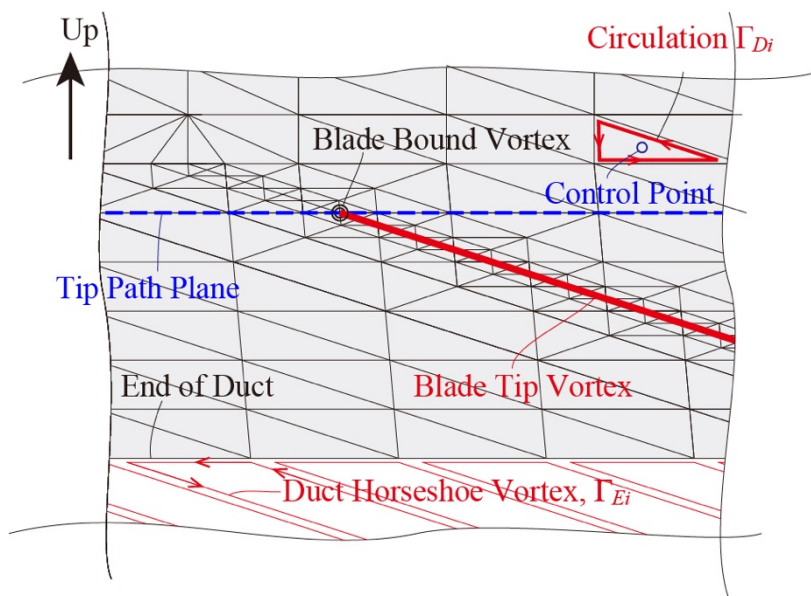


図 2.2-1 ダクト表面の格子

ダクトの表面の格子の模式図を図 2.2-1 に示す。太い赤線で示す翼端渦が格子を横切ることがないように翼端渦が格子の一片をなすようにする。そのため、格子は斜辺の角度が一定の三角形となる。また、翼端渦周辺で最も強い速度変化が生じるため、これを捉えるために翼端渦近くの格子の大きさを基準となる格子の $(1/2)^N$ 倍としてフラクタル的な構造とする。図 2.2-1 では  $N$  は 2 である。このように速度変化が大きい箇所のみを小さくすることで格子の総数を増やすことなく、計算精度を上げることが可能になる。三角形の格子の重心位置にコントロールポイントを設ける。また格子の形をした循環の大きさが  $\Gamma_{Di}$  の渦輪が存在すると考える。

### 3. ダクトドファンにおける特殊な現象

#### 3.1. 物体表面の渦の移動速度

計算の初期には吸収パワー、ダクト直径より運動量理論を用いてダクト内の軸方向速度  $w$  を決定する。旋回流はないとしてこの軸方向速度  $w$  と回転数から放出渦のピッチを決定する。ところが翼端渦（翼根渦も）は放出渦のピッチの半分になる。この現象を図 3.1-1 を用いて説明する。

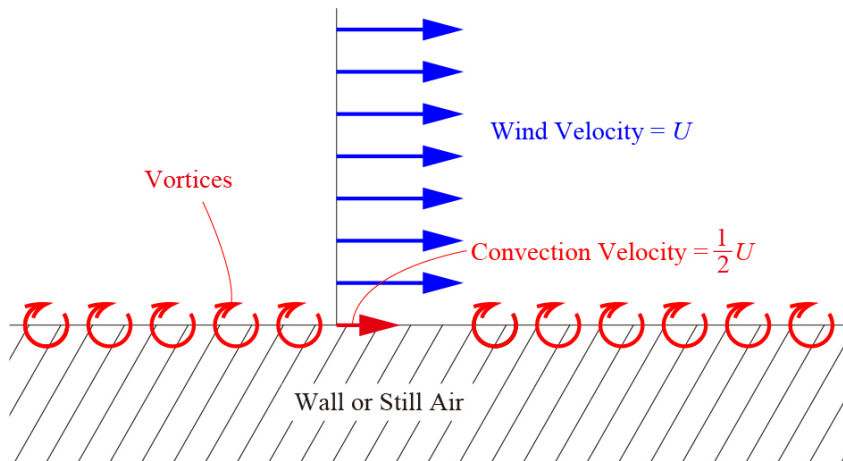


図 3.1-1 物体表面の渦の移動速度

図 3.1-1 には壁（あるいは静止した流れ）と一様速度  $U$  の境界に存在する渦シートの移動速度を示した。壁（あるいは静止した流れ）と一様流速  $U$  の境界には単位長さあたりの循環が  $U$  である渦が分布しており、超関数の理論<sup>1)</sup>によればこの移動速度は  $U/2$  となることが知られている。よってダクト内の流れが  $w$  である場合、ダクト内側表面の渦は  $w/2$  の速度で移動しなければならない。よって翼端渦（翼根渦）のピッチはダクト内の放出渦のピッチの半分でなければならない。

#### 3.2. ダクトが発生する推力

運動量理論からはファン回転面積とダクト出口面積が等しいダクトドファンの静止時の推力は全推力の 50% をファンが発生し、残りの 50% をダクトが発生する。ダクトを図 3.2-1 の a) に示すように単純な筒である場合、ダクト前縁を回り込む速度が無限になる。この無限の速度が作る負圧が無限に小さい前縁の面積に働いて前縁推力が生じる。しかし、この前縁推力を得るためには無限大に無限小をかける演算が必要であり、求めることが困難である。そこで OptDuct では図 3.2-1 の b) に示すように前縁に有限の大きさのリップを設けた。このようにすることでリップを回り込む速度は有限となり、負圧も有限の値となる。この負圧の上向き成分をリップの表面全体に渡って積分することによってダクトが発生する推力を計算することができる。またリップを 270 度の範囲に設けることにより、リップの前縁を回り込む流れによるわずかな値の前縁推力は、水平方向の力となるため、軸に関して反対側の前縁推力と打ち消しあうことでリップ前縁の前縁推力を計算する必要がなくなる。

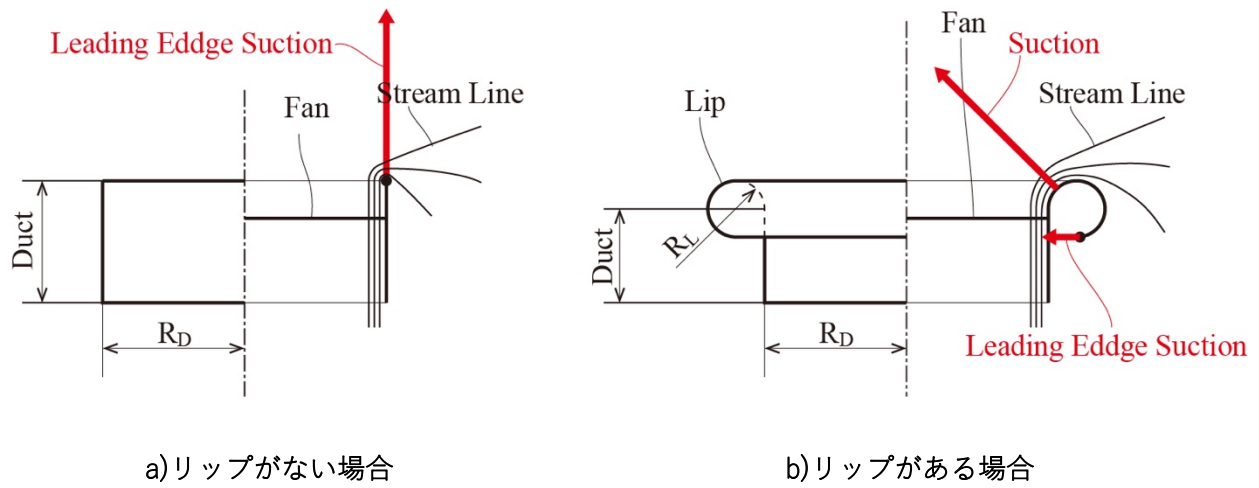


図 3.2-1 ダクトが発生する推力

## 4. 推力およびパワーの式の導出

### 4.1. ファンの発生する推力および吸収パワー

ブレードのコントロールポイントに流入する流れの速度ベクトル図を図 4.1-1 の a) に示す。ブレードの  $i$  番目のコントロールポイントに誘導される誘導速度の  $y$  方向成分、 $z$  方向成分をそれぞれ  $v_{Bi}$ 、 $w_{Bi}$  とする。  $w_{Bi}$  は一般に負の値をとる。水平方向の相対速度  $U_{Ti}$  は次式で与えられる。

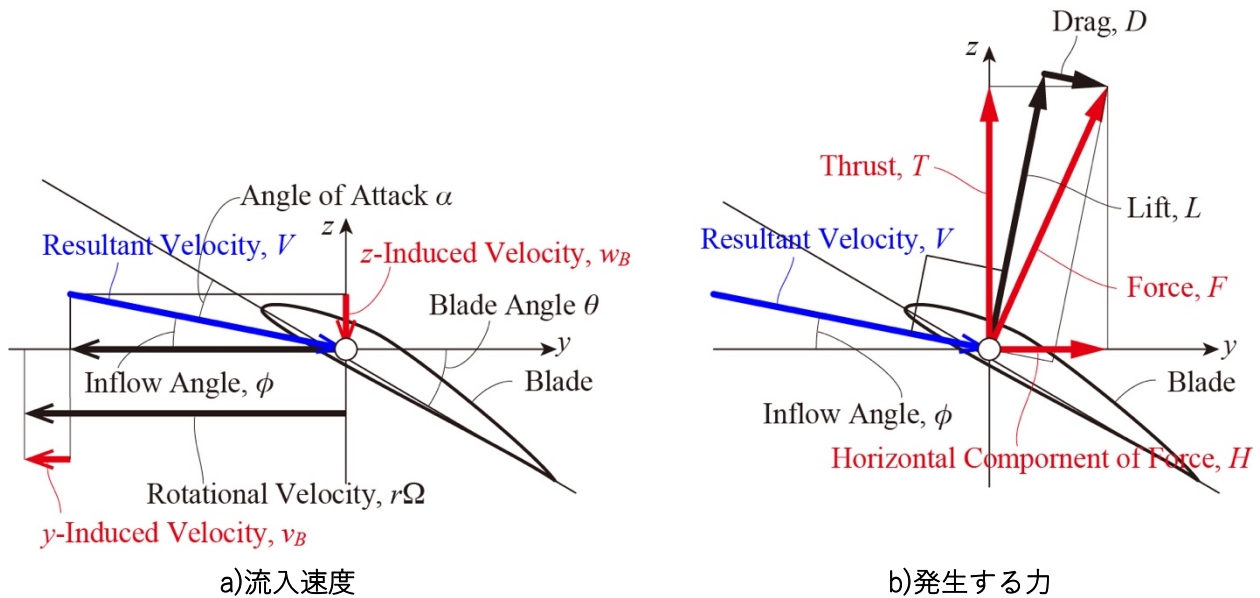


図 4.1-1 ブレードに関する諸量

$$U_{Ti} = r_i \Omega - v_{Bi} \quad (4.1-1)$$

同様に垂直方向の相対速度  $U_{Pi}$  (上向きが正) は

$$U_{Pi} = w_{Bi} \quad (4.1-2)$$

で与えられる。流入角度  $\phi_i$  は次式で与えられる。

$$\phi_i = \tan^{-1} \frac{U_{Pi}}{U_{Ti}} \quad (4.1-3)$$

(4.1-3)式で定義される  $\phi_i$  は一般に負の値をとる。  $i$  番目の翼素でのブレード取付角を  $\theta_i$  とすると、有効迎角  $\alpha_i$  は次式で与えられる。

$$\alpha_i = \theta_i + \phi_i \quad (4.1-4)$$

また流入する流れの速さ  $V_i$  は

$$V_i = \sqrt{U_{Pi}^2 + U_{Ti}^2} \quad (4.1-5)$$

で与えられる。  $i$  番目の翼素の循環は  $\Gamma_{Bi}$  であるから、Kutta- Joukowski の定理より局所揚力  $dL_i$  は次式で与えられる。

$$dL_i = \rho V_i \Gamma_{Bi} \Delta_R \quad (4.1-6)$$

ここで設計揚力係数を  $C_L$ 、未知数である翼弦長を  $c_i$  とすると、局所揚力  $dL_i$  は次式でも表される。

$$dL_i = \frac{1}{2} \rho V_i^2 C_L c_i \Delta_R \quad (4.1-7)$$

(4.1-6)式と(4.1-7)式を等置して次式を得る。

$$c_i = \frac{2\Gamma_{Bi}}{V_i C_L} \quad (4.1-8)$$

よって翼弦長  $c_i$  と流速  $V_i$  からレイノルズ数  $Re$  が分かり、選定した翼型とレイノルズ数  $Re$  及び設計揚力係数  $C_L$  から  $C_D$  が定まる。この  $C_D$  を用いて局所抵抗  $dD_i$  は次式で与えられる。

$$dD_i = \frac{1}{2} \rho V_i^2 C_D c_i \Delta_R \quad (4.1-9)$$

これら  $dL_i$ 、 $dD_i$  を図 4.1-1 の b) に示す。図より局所推力  $dT_i$  と局所水平分力  $dH_i$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$dT_i = dL_i \cos \phi_i - dD_i \sin \phi_i \quad (4.1-10)$$

$$dH_i = dL_i \sin \phi_i + dD_i \cos \phi_i \quad (4.1-11)$$

(4.1-11)式より局所パワー  $dP_i$  は次式で表される。

$$dP_i = dH_i r_i \Omega \quad (4.1-12)$$

抵抗を考慮しない場合、局所推力  $dT_i$  は Kutta - Joukowski の定理より直ちに

$$dT_i = \rho U_{Ti} \Gamma_{Bi} \Delta_R \quad (4.1-13)$$

で与えられる。同様に局所水平分力  $dH_i$  は

$$dH_i = -\rho U_{Pi} \Gamma_{Bi} \Delta_R \quad (4.1-14)$$

で与えられる。負の符号がついているのは  $U_{Pi}$  が通常負であるためである。ファンが発生する推力  $T_F$  および吸収パワー  $P$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$T_F = B \sum_{i=1}^N dT_i \quad (4.1-15)$$

$$P = B \sum_{i=1}^N dH_i r_i \Omega \quad (4.1-16)$$

ここで  $B$  はブレード枚数である。

## 4.2. ダクト推力の計算方法

ファン直径とダクト出口直径が同じ場合、単純運動量理論からファンが発生する推力  $T_F$  が全推力  $T$  に占める割合は 50% であり、ダクトのリップが発生する推力（以下ダクト推力） $T_D$  が全推力  $T$  に占める割合は 50% であることが導かれる。

ダクト推力  $T_D$  は全ダクト格子に働く負圧に格子面積をかけ、その  $z$  方向成分の和をとることで得られる。実際には法線が水平な格子は  $z$  方向成分の力を生じないから、ダクトのリップを構成するダクト格子のみ計算すれば良い。リップの  $i$  番目のダクト格子のコントロールポイントに誘導される速度を  $(u_{Dci}, v_{Dci}, w_{Dci})^T$  とする。コントロールポイントは流れのある内側と止水域である外側の間にあるため、3章1節で行った議論によりダクト内側表面の速度  $(u_{Di}, v_{Di}, w_{Di})^T$  は  $(u_{Dci}, v_{Dci}, w_{Dci})^T$  の2倍となる。また、 $i$  番目のダクト格子のコントロールポイントにおけるダクト推力  $dT'_{Di}$  は非定常の Bernoulli の定理より

$$dT'_{Di} = d\tilde{T}_{Di} + dT_{Di} \quad (4.2-1)$$

となる。ここで右辺第一項はポテンシャルの時間微分の項であり、第2項は次式で与えられる。

$$dT_{Di} = \frac{1}{2} \rho (u_{Di}^2 + v_{Di}^2 + w_{Di}^2) S_i n_{zi} \quad (4.2-2)$$

ここで  $n_{zi}$  は  $i$  番目の格子の法線ベクトルの  $z$  成分である。ダクトにわたって局所推力  $dT'_{Di}$  の和をとると、ブレードの周期性によってポテンシャルの時間微分の項は0になる。よってダクト推力  $T_D$  は次式で与えられる。

$$T_D = \sum_i dT_{Di} \quad (4.2-3)$$

### 4.3. ブレード上の誘導速度の計算

ファンの発生する推力  $T_F$  及び吸収するパワー  $P$  の計算には誘導速度を用いた。本節ではこれら誘導速度の計算式を導く。

誘導速度は任意の位置の渦が着目している点（コントロールポイント）に Biot-Savart の法則に従って引き起こす。以下図 4.3-1 を用いて説明する。任意の点  $A, B$  を結ぶ線分上に循環の大きさが  $\Gamma$  の渦があ

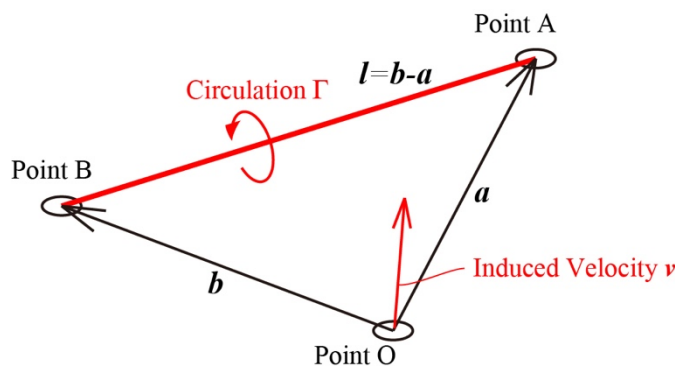


図 4.3-1 Biot-Savart の法則の説明図

るものとする。この渦が点  $O$  に引き起こす速度  $v$  は次式で与えられる。

$$v = \frac{1}{4\pi} \frac{a \times l}{|a \times l|^2} \left( \frac{b}{|b|} - \frac{a}{|a|} \right) \cdot l \quad (4.3-1)$$

ここで  $a, b, l$  はそれぞれ  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB}$  である。

誘導速度を引き起こす渦には3種類あり、ブレードの螺旋馬蹄渦（循環の大きさ  $\Gamma_{Bi}$ ）が  $N_B \times B$  個、ダクト表面の渦輪（循環の大きさ  $\Gamma_{Di}$ ）が  $N_D$  個、ダクト馬蹄渦（循環の大きさ  $\Gamma_{Ei}$ ）が  $N_E$  個ある。

まずブレードの全ての馬蹄渦が  $i$  番目のブレードのコントロールポイントに引き起こす誘導速度 ( $u_{\text{BB}i}$ ,  $v_{\text{BB}i}$ ,  $w_{\text{BB}i}$ )<sup>T</sup> は

$$\begin{aligned} u_{\text{BB}i} &= X_{\text{BB}ij} \Gamma_{\text{B}j} \\ v_{\text{BB}i} &= Y_{\text{BB}ij} \Gamma_{\text{B}j} \\ w_{\text{BB}i} &= Z_{\text{BB}ij} \Gamma_{\text{B}j} \end{aligned} \quad (4.3-2)$$

ここで  $X_{\text{BB}ij}$ ,  $Y_{\text{BB}ij}$ ,  $Z_{\text{BB}ij}$  は影響係数であり上述の Biot-Savart の法則より求められる。ここで添字  $i, j$  はアインシュタインの規約に従う。(4.3-2)式の表記は次式の表記と同義である。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{BB}} &= \mathbf{X}_{\text{BB}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{B}} \\ \mathbf{v}_{\text{BB}} &= \mathbf{Y}_{\text{BB}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{B}} \\ \mathbf{w}_{\text{BB}} &= \mathbf{Z}_{\text{BB}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{B}} \end{aligned} \quad (4.3-3)$$

ダクト格子からの誘導速度, ダクト馬蹄渦からの誘導速度もそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{BD}} &= \mathbf{X}_{\text{BD}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{D}} \\ \mathbf{v}_{\text{BD}} &= \mathbf{Y}_{\text{BD}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{D}} \\ \mathbf{w}_{\text{BD}} &= \mathbf{Z}_{\text{BD}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{D}} \end{aligned} \quad (4.3-4)$$

および

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{BE}} &= \mathbf{X}_{\text{BE}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{E}} \\ \mathbf{v}_{\text{BE}} &= \mathbf{Y}_{\text{BE}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{E}} \\ \mathbf{w}_{\text{BE}} &= \mathbf{Z}_{\text{BE}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{E}} \end{aligned} \quad (4.3-5)$$

と表記できる。以上がブレード上に引き起こされる誘導速度である。

#### 4.4. ダクト表面上の境界条件

ブレードの馬蹄渦がダクト格子のコントロールポイントに引き起こす誘導速度の格子に対する法線成分  $u_{\text{DB}}$  を次式で表す。

$$\mathbf{u}_{\text{DB}} = \mathbf{K}_{\text{DB}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{B}} \quad (4.4-1)$$

ダクト格子がダクト格子のコントロールポイントに引き起こす誘導速度の格子に対する法線成分  $u_{\text{DD}}$ , ダクト馬蹄渦がダクト格子のコントロールポイントに引き起こす誘導速度の格子に対する法線成分  $u_{\text{DE}}$  をそれぞれ

$$\mathbf{u}_{\text{DD}} = \mathbf{K}_{\text{DD}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{D}} \quad (4.4-2)$$

$$\mathbf{u}_{\text{DE}} = \mathbf{K}_{\text{DE}} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{E}} \quad (4.4-3)$$

で表す。

ダクトは固体であり, 表面を貫通する流れがない。したがってダクト格子のコントロールポイントに誘導される速度の格子に対する法線成分は 0 でなければならない。つまり



$$\mathbf{u}_{DB} + \mathbf{u}_{DD} + \mathbf{u}_{DE} = 0 \quad (4.4-4)$$

となる。この条件はダクト格子の数、つまり  $N_D$  個存在する。

#### 4.5. ダクト後縁の境界条件

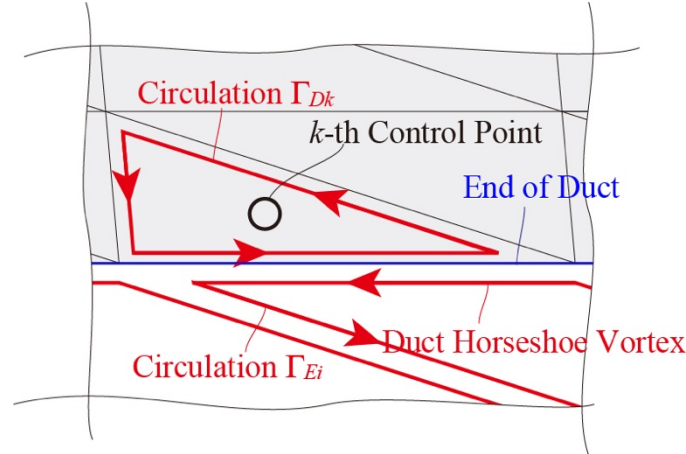


図 4.5-1 ダクト後縁の詳細図

2.2-1 図のダクト後縁付近を拡大した図を 4.5-1 図に示す。i 番目のダクト馬蹄渦は k 番目のダクト格子に隣接している。ダクト格子の数は  $N_D$  であり、そのうち後縁に位置するのは  $N_E$  個だけである。 $N_E$  は  $N_D$  より遥かに小さな数であり、適当な縦  $N_E$  列、横  $N_D$  行の要素が 1 か 0 の行列  $\mathbf{K}_K$  によって、 $\mathbf{K}_{Kij} \Gamma_{Dj}$  を i 番目のダクト後縁馬蹄渦に隣接する  $\Gamma_D$  の要素とすることが出来る。

ここでクッタの条件より後縁の循環は 0 でなければならない。これを 4.5-1 図の循環の向きに注意して式で表すと

$$\Gamma_E = \mathbf{K}_K \Gamma_D \quad (4.5-1)$$

となる。

#### 4.6. 変数の削減

(4.4-4)式で表される条件は  $\Gamma_D$  の要素数である  $N_D$  個存在する。一般に  $N_D$  は数万になる。その一方で  $\Gamma_B$  の要素数  $N_B$  は数十から数百と少ない。本節では  $\Gamma_D$  を消去して変数量を大きく削減する。

(4.4-4)式に(4.4-1), (4.4-2), (4.4-3)式を代入して次式を得る。

$$\mathbf{K}_{DB} \Gamma_B + \mathbf{K}_{DD} \Gamma_D + \mathbf{K}_{DE} \Gamma_E = 0 \quad (4.6-1)$$

(4.5-1)式より(4.6-1)式は

$$\mathbf{K}_{DB} \Gamma_B + \mathbf{K}_{DD} \Gamma_D + \mathbf{K}_{DE} \mathbf{K}_K \Gamma_D = 0 \quad (4.6-2)$$

となる。この式をさらに変形して

$$\left( \mathbf{K}_{DD} + \mathbf{K}_{DE} \mathbf{K}_K \right) \Gamma_D = -\mathbf{K}_{DB} \Gamma_B \quad (4.6-3)$$

を得る. ここで

$$\mathbf{K} = -(\mathbf{K}_{DD} + \mathbf{K}_{DE} \mathbf{K}_K)^{-1} \mathbf{K}_{DB} \quad (4.6-4)$$

とすると, 次式を得る.

$$\mathbf{\Gamma}_D = \mathbf{K} \mathbf{\Gamma}_B \quad (4.6-5)$$

また(4.6-5)式を(4.5-1)式に代入して

$$\mathbf{\Gamma}_E = \mathbf{K}_K \mathbf{K} \mathbf{\Gamma}_B \quad (4.6-6)$$

を得る.

ブレードに引き起こされる誘導速度の x 成分  $u_B$  は(4.3-3)式, (4.3-4)式, (4.3-5)式より次式で表される.

$$u_B = \mathbf{X}_{BB} \mathbf{\Gamma}_B + \mathbf{X}_{BD} \mathbf{\Gamma}_D + \mathbf{X}_{BE} \mathbf{\Gamma}_E \quad (4.6-7)$$

この式に(4.6-5)式, (4.6-6)式を代入して

$$u_B = \mathbf{X}_{BB} \mathbf{\Gamma}_B + \mathbf{X}_{BD} \mathbf{K} \mathbf{\Gamma}_B + \mathbf{X}_{BE} \mathbf{K}_K \mathbf{K} \mathbf{\Gamma}_B \quad (4.6-8)$$

を得る.  $\mathbf{\Gamma}_B$  についてまとめると

$$u_B = (\mathbf{X}_{BB} + \mathbf{X}_{BD} \mathbf{K} + \mathbf{X}_{BE} \mathbf{K}_K \mathbf{K}) \mathbf{\Gamma}_B \quad (4.6-9)$$

となる. ここで

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{X}_{BB} + \mathbf{X}_{BD} \mathbf{K} + \mathbf{X}_{BE} \mathbf{K}_K \mathbf{K} \quad (4.6-10)$$

と定義すると, (4.6-9)式は

$$u_B = \mathbf{X}_B \mathbf{\Gamma}_B \quad (4.6-11)$$

となる.  $v_B$ ,  $w_B$ , にも同様の操作を行い  $\mathbf{Y}_B$ ,  $\mathbf{Z}_B$  を定義し,

$$v_B = \mathbf{Y}_B \mathbf{\Gamma}_B \quad (4.6-12)$$

$$w_B = \mathbf{Z}_B \mathbf{\Gamma}_B \quad (4.6-13)$$

と表記する.

#### 4.7. ダクト推力の二次形式での表現

本節では4章3節で求めたダクト推力  $T_D$  を  $\mathbf{\Gamma}_B$  の二次形式で表す.

ダクト内側の表面に誘導される速度はダクト格子に誘導される速度の2倍であること, および(4.6-11)式, (4.6-12)式, (4.6-13)式の導出と同様の手順により次の式で表すことが出来る.

$$u_D = \mathbf{X}_D \mathbf{\Gamma}_B \quad (4.7-1)$$

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{Y}_D \boldsymbol{\Gamma}_B \quad (4.7-2)$$

$$\mathbf{w}_D = \mathbf{Z}_D \boldsymbol{\Gamma}_B \quad (4.7-3)$$

ここで  $i$  番目のダクト格子の面積を  $S_i$ 、法線ベクトルの  $z$  成分を  $n_{zi}$  とし、

$$\mathbf{K}_Q = \text{diag} \left( \frac{1}{2} \rho S_i n_{zi} \right) \quad (4.7-4)$$

なる対角行列を用いれば、ダクト推力  $T_D$  は次式で与えられる。

$$T_D = \mathbf{u}_D^T \mathbf{K}_Q \mathbf{u}_D + \mathbf{v}_D^T \mathbf{K}_Q \mathbf{v}_D + \mathbf{w}_D^T \mathbf{K}_Q \mathbf{w}_D \quad (4.7-5)$$

ここで

$$\mathbf{T}_D = \mathbf{X}_D^T \mathbf{K}_Q \mathbf{X}_D + \mathbf{Y}_D^T \mathbf{K}_Q \mathbf{Y}_D + \mathbf{Z}_D^T \mathbf{K}_Q \mathbf{Z}_D \quad (4.7-6)$$

と定義することで(4.7-5)式は

$$\mathbf{T}_D = \boldsymbol{\Gamma}_B^T \mathbf{T}_D \boldsymbol{\Gamma}_B \quad (4.7-7)$$

と表記することが出来る。

#### 4.8. 抵抗を考慮しない場合の推力とパワー

抵抗を考慮しない場合、ファンの推力  $T_F$  は(4.1-15)式に(4.1-13)式を代入し、さらに(4.1-1)式、(4.6-12)式を代入して次式で表される。

$$T_F = B \sum_{i=1}^N \rho \left( r_i \Omega - Y_{Bij} \right) \Gamma_{Bi} \Delta_R \quad (4.8-1)$$

または、ベクトルを用いて次式で表される。

$$\mathbf{T}_F = \boldsymbol{\Gamma}_B^T \mathbf{A}' \boldsymbol{\Gamma}_B + \mathbf{b}^T \boldsymbol{\Gamma}_B \quad (4.8-2)$$

ここで  $\mathbf{A}'$  は次式

$$\mathbf{A}' = -\rho B \Delta_R \left( Y_{Bij} \right) \quad (4.8-3)$$

で与えられる  $N_B \times N_B$  の行列であり、 $\mathbf{b}$  は

$$\mathbf{b} = \rho B \Omega \Delta_R \left( r_i \right) \quad (4.8-4)$$

で与えられる要素数  $N_B$  の縦ベクトルである。

ファンの吸収パワー  $P$  は(4.1-16)式に(4.1-14)式を代入し、さらに(4.1-2)式、(4.6-13)式を代入して次式で表される。

$$P = -B \sum_{i=1}^N \rho Z_{Bij} \Gamma_{Bi} \Gamma_{Bj} \Delta_R r_i \Omega \quad (4.8-5)$$

または、ベクトルを用いて次式で表される.

$$\mathbf{P} = \mathbf{\Gamma}_B^T \mathbf{C} \mathbf{\Gamma}_B \quad (4.8-6)$$

ここで  $\mathbf{C}$  は

$$\mathbf{C} = -\rho \mathbf{B} \mathbf{r}_i \Omega \Delta_R \left( Z_{Bij} \right) \quad (4.8-7)$$

で与えられる  $N_B \times N_B$  の行列である.

ダクトファン全体の推力  $\mathbf{T}$  はファン推力  $\mathbf{T}_F$  とダクト推力  $\mathbf{T}_D$  の和であるから次式で表される.

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Gamma}_B^T \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}_B + \mathbf{b}^T \mathbf{\Gamma}_B \quad (4.8-8)$$

ここで  $\mathbf{A}$  は

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{T}_D \quad (4.8-9)$$

で与えられる  $N_B \times N_B$  の行列である.

## 5. ダクトが短い場合の影響の計算

### 5.1. 短いダクトの後流の収縮の計算

マルチコプター形式の eVTOL あるいはドローンに使用されるダクトドファンは前進飛行時の空気抵抗を減らすためにダクト長さが極めて短いものが多い。ダクトは後流の収縮を抑える働きがあり、ダクトが短くなるとプロペラ後流と同様に収縮する。この収縮が大きいと静止時においてダクトドファンが発生する推力の 50% はファンによるものであり、残りの 50% がダクトによって発生されるという運動量理論の結果が成り立たず、収縮量が大きいほどダクトが発生する推力の全体に占める割合は小さくなる。この詳細については次節で解説し、本節では OptDuct で採用した後流の収縮量を計算する方法について述べる。

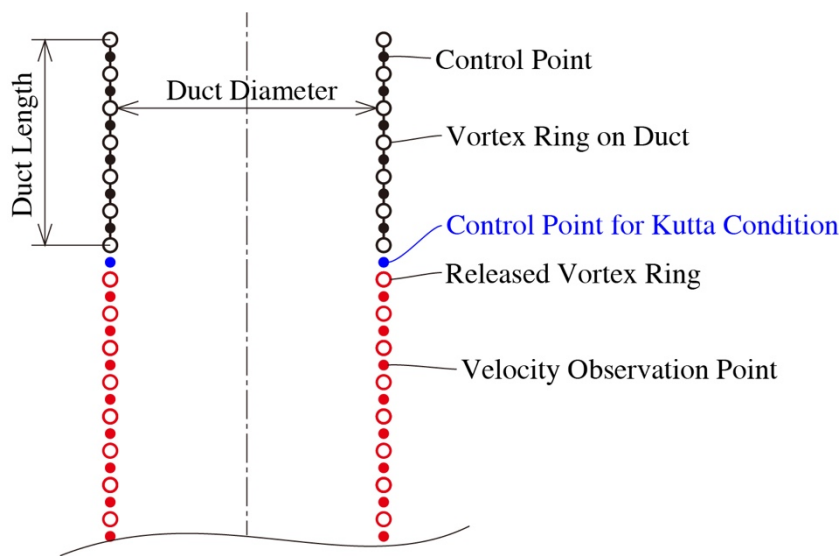


図 5.1-1 ダクト後流の収縮の計算に使うモデル

図 5.1-1 に示したようにダクトを長さ方向に離散化し、未知の強度の循環  $\Gamma_i$  を持つ渦輪を分布する。この渦輪をダクト渦と呼ぶこととする。この際、等間隔にダクトを分割すると計算が容易になる。またその際の分割数を  $N$ 、分割幅を  $dz$  とする。ダクトの後縁から  $dz$  離れた位置から後流方向に、後流の流れを表す間隔  $dz$ 、強度  $\Gamma_0$  の渦輪の列をおく。この渦輪を放出渦輪とよぶこととする。放出渦輪の列の長さはダクト直径の 20 倍以上あればよい。次にダクト渦輪の中間にコントロールポイントを設ける。このコントロールポイントの数は  $N-1$  個である。ダクトの壁面に貫通する流れはないから、このコントロールポイントにおいて貫通する流れがないこと、およびクッタの条件よりダクト後縁を回り込む流れがないことから、ダクト後縁から  $dz/2$  離れた位置にもコントロールポイントを設け、このコントロールポイントも流れが貫通しないとす。これらにより境界条件は  $N$  個となり、未知数  $\Gamma_i$  の数と等しくなり解を求めることができる。

コントロールポイントにおける速度は、渦輪を離散化して多角形で近似して Biot-Savart の法則を用いて計算しても良いが次の方法を用いると、精度が高く簡単である。

円筒座標系において軸方向位置が  $0$  であり半径が  $R$ 、循環の強度が  $\Gamma$  である渦輪が、半径位置  $r$ 、軸方向位置  $z$  における軸方向速度  $u_z$ 、半径方向速度  $u_r$  は次式で与えられる<sup>2)</sup>。

$$u_z = \frac{\Gamma}{2\pi\sqrt{(R+r)^2+z^2}} \left\{ K(k^2) + \frac{R^2-r^2-z^2}{(R-r)^2+z^2} E(k^2) \right\} \quad (5.1-1)$$

$$u_r = \frac{\Gamma z}{2\pi r\sqrt{(R+r)^2+z^2}} \left\{ -K(k^2) + \frac{R^2+r^2+z^2}{(R-r)^2+z^2} E(k^2) \right\} \quad (5.1-2)$$

ここで  $K$  および  $E$  はそれぞれ第 1 種完全楕円積分, 第 2 種完全楕円積分であり, それぞれ次式で与えられる.

$$K(k^2) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (5.1-3)$$

$$E(k^2) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (5.1-4)$$

ここで  $k^2$  は  $K$  および  $E$  の母数であり, 次式で与えられる

$$k^2 = \frac{4Rr}{\sqrt{(R+r)^2+z^2}} \quad (5.1-5)$$

第 1 種および第 2 種完全楕円積分は Landen 変換, Gauss 変換あるいは算術幾何平均などの方法を用いた簡単なアルゴリズムを用いて高速に, かつ精度よく求めることができる<sup>3)</sup>. しかし OptDuct は Matlab で書かれているため組み込み関数 `ellipke` を使用した.

これらの数式を用いて, 全ての放出渦輪および  $N$  個の未知の強度の循環を持つダクト渦輪が,  $N$  個のコントロールポイントに誘導する速度を求め, 貫通しないとすると  $N$  個の連立方程式が立ち, これを解くことでダクト渦輪の循環の強度が決定される. つぎに,  $dz$  の間隔で置かれた放出渦輪の midpoint に速度の観測点を設け, この速度の観測点での軸方向速度と半径方向速度を求める. この速度の観測点における  $z$  方向の軸方向速度分布と半径方向速度分布を用いて, ダクト後縁を初期位置としたダクト渦輪の  $z$  方向位置と半径の時間事歴を得ることができる. ただし, 時間とともにダクト渦輪の半径が変化し, 速度の観測点から離れるため, 正確な速度を用いて  $z$  方向位置と半径の時間事歴を得たことにはならない. しかし, 一次近似としてこの計算法を採用した.

図 5.1-2 に後流の収縮の計算結果を示す. 図 5.1-2 の a) は「ダクト長さ」/「ダクト直径」が 0.5 の場合, b) は「ダクト長さ」/「ダクト直径」が 0.125 の場合である. ダクトが短い方が収縮の度合いが大きいことが再現できている. しかし, 図 5.1-4 に示すように収縮量が過大に見積もられている. そこでダクトにリップをつけた場合どうなるかを計算してみた. その結果を図 5.1-3 に示す.

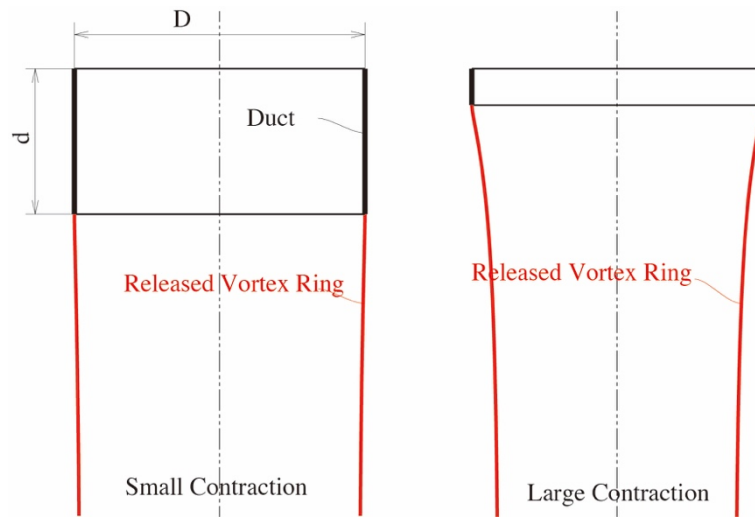
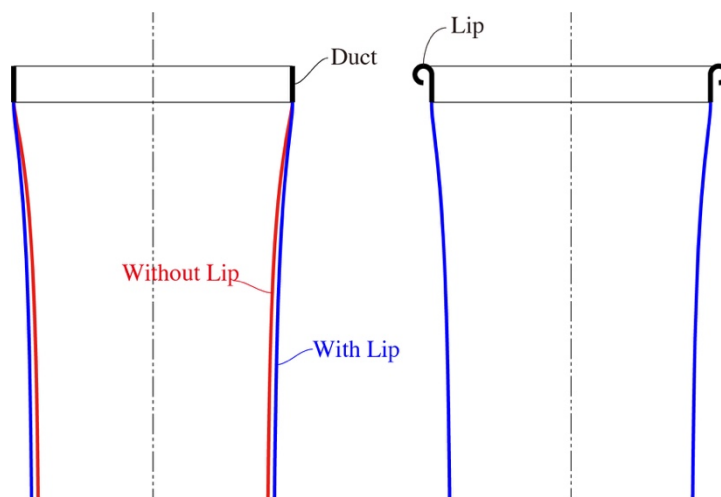
a)  $d/D = 0.5$  の場合b)  $d/D = 0.125$  の場合

図 5.1-2 後流の収縮量のダクト長さへの依存の様子



a) リップがない場合

b) リップがある場合

図 5.1-3 ダクトにリップをつけた効果

図 5.1-3 の a) がリップがない場合、b) がリップがある場合である。両者とも「ダクト長さ」／「ダクト直径」は 0.13 であり、「リップ半径」／「ダクト直径」は 0.03 である。明らかにリップがある場合の後流の方が収縮が抑えられている。

「リップ半径」／「ダクト直径」が変化した場合に後流の収縮量がどのように変化するかを図 5.1-4 に示す。

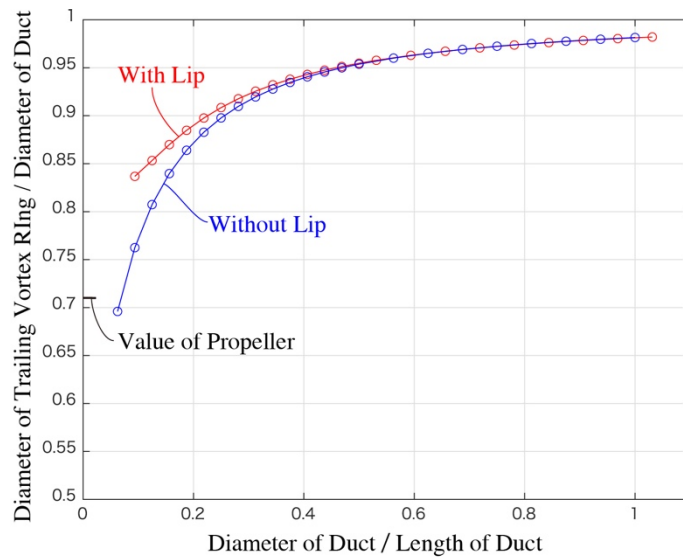


図 5.1-4 リップあるなしでの後流の収縮量とダクト長さの関係

リップなしのダクトの後流の収縮量を青い線で、リップ（「リップ半径」／「ダクト直径」=0.031）付きの後流の収縮量を赤い線で描いた．また図示したようにプロペラの運動量理論での「後流の直径」／「プロペラの直径」は 0.71 である．リップなしのダクトの後流の収縮量はプロペラの収縮量を上回っており、収縮量が過大に見積もられている．これに対してリップありの場合は「ダクト長さ」／「ダクト直径」が 0 に漸近した時に 0.71 をやや上回る値に漸近する様子が見られ、より現実的な値となっている．

ダクトが短い場合、リップのあるなしで後流の収縮量に大きな差が出る．また、後流収縮量の計算にはリップをつけず、最適化設計の際にはリップをつけるのでは整合性が取れない．従ってダクトファンの最適計算に先立って後流収縮量を求める際には、最適化を行う際に用いる大きさのリップをつけて計算すべきである．

## 5.2. 後流収縮量とリップファクターの関係

以後、「ダクトが発生する推力」／「ダクトファン全体の推力」をリップファクターと呼ぶこととする．このリップファクターは後流の収縮量によって決定される．まず図 5.2-1 を用いてダクトが長く後流の収縮を無視できる場合のダクトファンについて、ダクト推力およびファンが発生する推力（ファン推力）を運動量理論<sup>4)</sup>を用いて導く



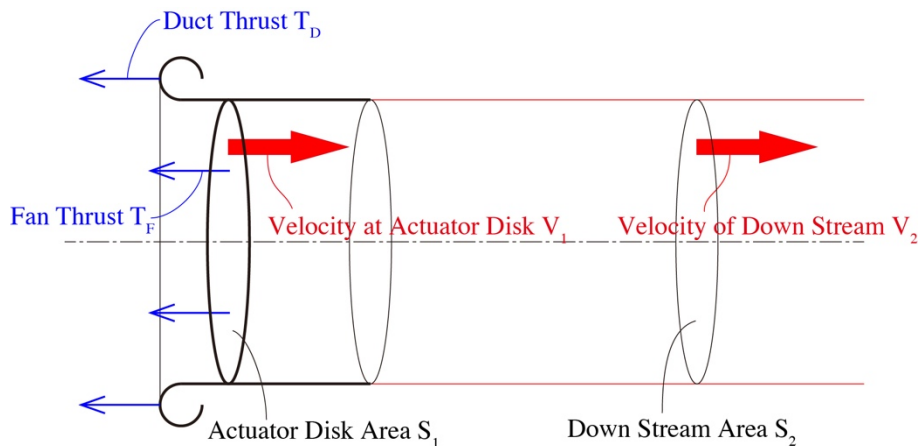


図 5.2-1 ダクトが長い時のダクトのモデル

ここでは単純化のためダクトはストレートであるとし、ファン回転面とダクト出口の面積は等しいとする。ダクト長さが十分な場合、ダクトの働きによって後流の収縮が抑えられる。その結果ファン回転面の速度と後流の速度は等しくなる。ファン回転面より前方にベルヌーイの定理を適用すると、

$$P_0 = P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 \quad (5.2-1)$$

が成り立つ。ここで  $P_0$  は大気圧、 $P_1$  はファン前面の静圧、 $V_0$  はファン回転面での速度である。ファン回転面より後方にベルヌーイの定理を適用すると、ファン回転面より後方の流れに速度の変化がないため、ファン後面の静圧  $P_2$  は大気圧  $P_0$  と等しくなる。ファン推力  $T_F$  はファンの前後の圧力差にファン面積  $S_F$  をかけることで次のように得られる

$$T_F = \left\{ P_0 - \left( P_0 - \frac{1}{2}\rho V_1^2 \right) \right\} S_F = \frac{1}{2}\rho V_1^2 S_F \quad (5.2-2)$$

また後流の単位時間あたりの流量に速度をかけることでダクテッドファン全体の推力  $T$  は次式で与えられる。

$$T = \rho S_F V_1^2 \quad (5.2-3)$$

ダクト推力  $T_D$  はダクテッドファン全体の推力  $T$  からファンが発生する推力  $T_F$  を引くことによって次式で与えられる。

$$T_D = T - T_F = \frac{1}{2}\rho V_1^2 S_F \quad (5.2-4)$$

これら式から分かるように、ストレートなダクテッドファンにおいて、ダクト推力  $T_D$  はファンが発生する推力  $T_F$  と等しい。

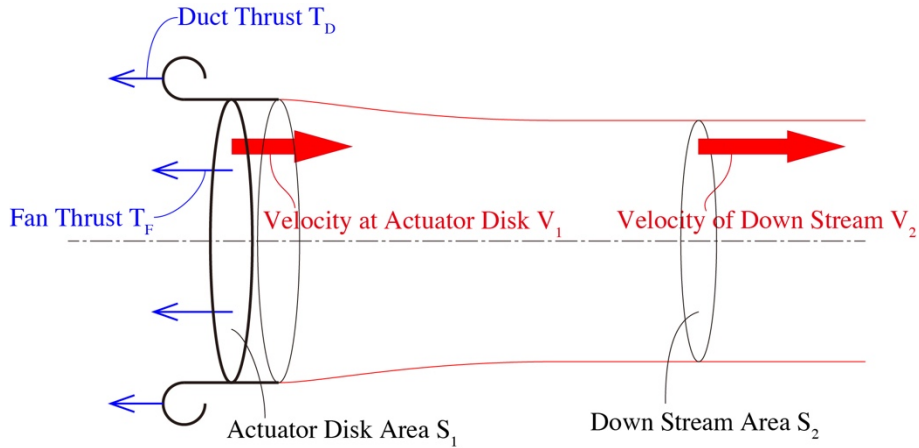


図 5.2-2 ダクトが短い時のダクトのモデル

次にダクトファンダクトが短く、後流が収縮する場合を考える。図 5.2-2 に示すように後流の速度はダクトを出た直後は  $V_1$  であるが、十分後方では流路が  $S_2$  に減少するため、質量保存則より次式が成り立つ。

$$V_1 S_1 = V_2 S_2 \quad (5.2-5)$$

ここで  $V_2$  は十分後方での流速である。ファン回転面より後方にベルヌーイの定理を適用すると次式を得る。

$$P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 \quad (5.2-6)$$

ここで  $k^2 = S_1 / S_2$  とすると

$$P_2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho (k^4 - 1) V_1^2 \quad (5.2-7)$$

を得る。よってファンが発生する推力  $T_F$  は次式で与えられる。

$$T_F = \left\{ \left( P_0 + \frac{1}{2} \rho (k^4 - 1) V_1^2 \right) - \left( P_0 - \frac{1}{2} \rho V_1^2 \right) \right\} S_1 \quad (5.2-8)$$

これを計算して

$$T_F = \frac{1}{2} \rho k^4 V_1^2 S_1 \quad (5.2-9)$$

を得る。ダクトファン全体が発生する推力  $T$  は十分後流の単位時間あたりの流量に速度をかけることで

$$T = \rho S_2 V_2^2 = k^2 \rho S_1 V_1^2 \quad (5.2-10)$$

となるから、リップが発生する推力  $T_D$  は次式で与えられる。

$$T_D = (k^2 - 0.5k^4) \rho S_1 V_1^2 \quad (5.2-11)$$

ダクト推力 $T_D$ をファンが発生する推力をダクトファン全体が発生する推力 $T$ で除した値をリップファクター $F_L$ とすると、リップファクター $F_L$ は

$$F_L = 1 - 0.5k^2 \quad (5.2-12)$$

で与えられる。ダクトが十分長い時は  $k^2=1$  であり  $F_L$  は 0.5 となり、全推力の半分がリップで発生する事実と一致し、またダクトがない時つまりプロペラの場合は  $k^2=2$  となることが知られており、ダクト推力は 0 になる。

このリップファクターの式を得たことで、収縮量が与えられればリップの発生する推力が決定される。最適化計算の際に、リップファクターを用いて全推力に占めるダクト推力を拘束条件とすることで、ダクトが短く後流が収縮する場合も扱うことができる。

## 6. 最適化問題の解法

静止推力を最大とするダクトファンの形状を決定する問題は、ここまでの計算より次の最適化問題を満たす  $\Gamma_B$  を求める問題に帰着する。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad -T \\ & \text{subject to} \quad P - P_0 = 0, T_D = F_L T \end{aligned}$$

ここで  $P_0$  は設計者が設定する吸収パワーである。  $\Gamma_B$  が得られればブレード角  $\theta_i$  は(4.1-4)式から、翼弦長  $c_i$  は(4.1-8)式より求められる。抵抗を考慮しない場合、目的関数の  $T$  は(4.8-8)式で与えられ、拘束条件の  $P$  は(4.8-6)式で与えられる。

抵抗を考慮する場合、推力  $T$  は(4.8-8)式のような二次形式で表記できず、(4.6-12)式、(4.6-13)式から誘導速度  $v_B$  および  $w_B$  を求め、(4.1-1)式から(4.1-10)式までの式、及び(4.1-15)式からファン推力  $T_F$  を求め、(4.7-7)式から求められるダクト推力  $T_D$  から

$$T = T_F + T_D \tag{6-1}$$

として得られる。吸収パワー  $P$  も同様に(4.6-12)式、(4.6-13)式から誘導速度  $v_B$  および  $w_B$  を求め、(4.1-1)式から(4.1-12)式までの式、及び(4.1-16)式から求める。

抵抗係数の値は揚力係数に比べはるかに小さいため、抵抗を考慮した解が抵抗を考慮しない場合から大きく異なることはない。

OptDuct ではこの最適化問題を次のように解いている。拘束条件はペナルティ法で目的関数に重み係数をかけて加え、このようにして作られた目的関数をシミュレーテッドアニーリングによって最小化している。ペナルティ法の欠点は拘束条件を厳密に満たす解を得られない点であるが、OptDuct では拘束条件を意図的にずらす特殊な方法で拘束条件を厳密に満たす解を得ている。この詳細に関しては省略する。

最適化計算を始めるにあたり、放出渦の形状が与えられていなければならない。そこで運動量理論を用いて、ファン直径と吸収パワーからファンを通過する流速  $w$  を計算する。この流速  $w$  を用いて放出渦のピッチを求め、放出渦の形状を決定する。翼端渦のピッチは前述のとおり放出渦の半分とする。このようにして放出渦の形状を与えて最適化計算を行う。次にブレード上の誘導速度  $w_B$  (半径ごとに異なる軸方向の速度)を縦軸に、横方向を半径位置とする曲線を描き、この  $w_B$  の曲線の近似曲線を与える  $\tilde{w}_B$  を最小二乗近似によって半径の2次関数として得る。この  $\tilde{w}_B$  を新たなダクト内の軸方向の速度分布とすると、繰り返し計算が不安定になるため、 $i$  回目の繰り返し計算では

$$w_B^{(i+1)} = 0.5w_B^{(i)} + 0.5\tilde{w}_B \tag{6-2}$$

を次の計算で使用するダクト内の軸方向の速度分布とする。ここで  $w_B^{(i)}$  は  $i$  回目の繰り返し計算で用いるダクト内の軸方向の速度分布である。この  $w_B^{(i)}$  から半径位置ごとに異なる放出渦のピッチを決定する。また翼端渦のピッチは  $w_B^{(i)}$  のファン半径での値の半分の値を用いて決定する。放出渦、翼端渦のピッチは軸方向速度だけでなく周方向速度も考慮して決定しなければならない。OptDuct では近似的に軸方向速度のみ用いて放出渦、翼端渦のピッチを決定している。

## 7. ハブを考慮したモデルへの拡張

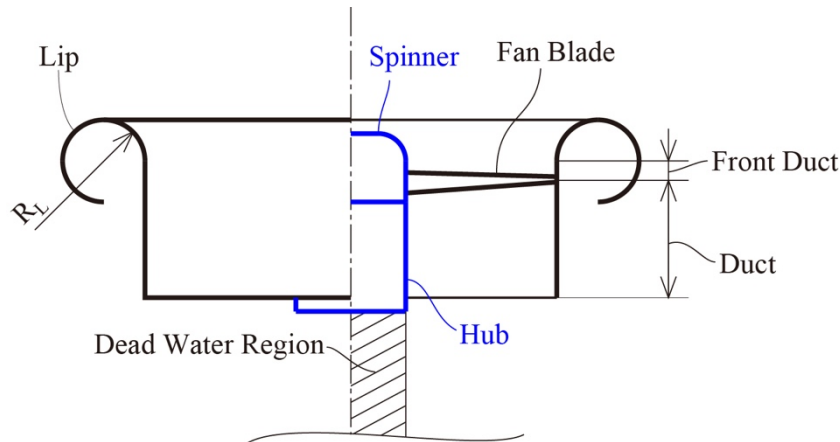


図 7-1 ダクトが短い時のダクトのモデル

図 7-1 に示すように現実的にはダクトの中心にはモーター等を格納するハブが必要である。ハブはダクトの中心に固定され、モーターを格納し、モーター軸にブレードとスピナーが取り付けられる。ここでは以下のようにモデル化する。スピナーとハブは同じ直径、ハブは短い円柱であり、ハブ後端で流れは剥離し、まっすぐ流れるものとする。従ってハブ後端の下流は死水領域である。ダクトがブレード翼端の翼端板の役割を果たすのと同様に、スピナーとハブが翼根の翼端板の役割を果たす。そのためスピナー及びハブ表面には翼根渦が螺旋状に存在する。ダクト表面と同様にスピナー表面、ハブ表面に階層構造を持った格子を切り、ハブ後端からはダクト馬蹄渦と同様にハブ馬蹄渦を放出する。またダクト長さとはリップ全面からダクト後縁までの長さとする。ダクト前部とはダクトの直線部分のブレード面より前方の部分とする。

次に用語を再定義する。ダクト格子はリップ、ダクト前部、ダクト、スピナー、ハブ表面の格子からなる。ダクト馬蹄渦はダクト後縁から放出される馬蹄渦とハブ後縁から放出される馬蹄渦からなる。ダクト推力はダクトとスピナーが発生する推力とする。このように、ダクト格子、ダクト馬蹄渦、ダクト推力を再定義すればスピナー、ハブを含んだモデルを扱うことが出来る。

## 8. 性能推算

OptDuctにはオプションとしてブレード枚数, ブレード形状, ダクト形状, 回転数が与えられれば推力と吸収パワーを計算する機能がある. ここではこの計算手法について説明する.

ブレード形状は, ブレードを  $N_B$  等分し, 等分割したブレードの中間点にコントロールポイントを設け, コントロールポイントの半径を  $r_i$  とする. この  $r_i$  における翼弦長  $c_i$ , 取り付け角  $\theta_i$ , 0 揚力角  $\alpha_{0i}$ , 揚力傾斜  $a_i$ , 抵抗係数  $C_{D,i}$  を設定する. 翼型がブレード全体で同じであれば, 0 揚力角  $\alpha_{0i}$ , 揚力傾斜  $a_i$ , 抵抗係数  $C_{D,i}$  は定数となるが, 構造上の問題から付け根は厚く, 翼端に行くにつれて薄くすることが多いため, これらは半径に依存した値とする.

放出渦のピッチは次のように求める. ブレード半径  $R$  の 75%位置での取り付け角  $\theta_{0.75}$ , 0 揚力角  $\alpha_{0,0.75}$  を用いて, 等価な平板の取り付け角  $\theta$  を次のように求める.

$$\theta = \theta_{0.75} - \alpha_{0,0.75} \quad (8-1)$$

この角度で取り付けられた平板が揚力を発生しない軸方向速度  $w$  を次のように計算する.

$$w = 0.75R\Omega \tan \theta \quad (8-2)$$

ダクト内の軸方向の速度が一様に  $w$  であるとして放出渦のピッチを決定する. 翼端渦および翼根渦のピッチは放出渦の半分とする. 翼端渦および翼根渦のピッチが決定されるとダクトおよびハブの格子の形状が決まり, 放出渦の形状などから種々の影響係数を決定する. 最終的に(4.6-10)式から  $\mathbf{X}_B$ ,  $\mathbf{Y}_B$ ,  $\mathbf{Z}_B$  を求め, (4.7-6)式で与えられる  $\mathbf{T}_D$  を求める.

$\Gamma_B$  を以下の手順で決定する.

(初期値の決定)

$\Gamma_B$  の初期値は任意の値で良いが, OptDuct では 0 ベクトルとする.

(以下  $p$  回目の繰り返し計算)

(4.6-12)式, (4.6-13)式から誘導速度  $v_B$  および  $w_B$  を求め, (4.1-1)式から(4.1-4)式を用いて有効迎角  $\alpha_i$  を求める. この  $\alpha_i$  と 0 揚力角  $\alpha_{0i}$ , 揚力傾斜  $a_i$  から次式を用いて揚力係数  $C_{Li}$  を求める.

$$C_{Li} = a_i (\alpha_i - \alpha_{0i}) \quad (8-3)$$

(4.1-8)式を変形して次式を得る.

$$\tilde{\Gamma}_{Bi} = \frac{1}{2} V_i C_{Li} c_i \quad (8-4)$$

この  $\tilde{\Gamma}$  を新しい循環として使用すると計算が収束しないので,

$$\Gamma_{Bi}^{(p+1)} = (1 - \beta) \Gamma_{Bi}^{(p)} + \beta \tilde{\Gamma}_{Bi} \quad (8-5)$$

として  $\Gamma_i^{(p+1)}$  を新しい循環とする. ここで  $\beta$  は循環の値が急激に変化しないようにして計算を安定させるための係数であり, OptDuct では 0.005 を用いている.

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N_B} \left( \Gamma_{Bi}^{(p+1)} - \Gamma_{Bi}^{(p)} \right)^2 \quad (8-6)$$

上式で与えられる誤差  $\varepsilon$  が十分小さくなった時に計算を打ち切る.

(2.10-12)式, (2.10-13)式から誘導速度  $v_B$  および  $w_B$  を求め, (4.1-1)式から(4.1-10)式までの式, 及び(4.1-15)式からファン推力  $T_F$  を求め, (4.7-7)式から求められるダクト推力  $T_D$  との和が推力  $T$  となる. 吸収パワー  $P$  は(4.6-12)式, (4.6-13)式から誘導速度  $v_B$  および  $w_B$  を求め, (4.1-1)式から(4.1-12)式までの式, 及び(4.1-16)式から求める.

一回の計算では  $w_B$  から得られる放出渦のピッチと, 計算に用いた放出渦のピッチは一致しないため, (6-2)式を用いて新たな放出渦のピッチを求め, この新しい放出渦を用いて新たな繰り返し計算を行い,  $\Gamma_B$  を収束させる. 計算で用いた放出渦のピッチと  $w_B$  から得られる放出渦のピッチが十分一致したところで計算を終了し, 推力  $T$ , 吸収パワー  $P$  を解として得る.

## 第二部 使用方法

### 9. OptDuct によるダクトファンの設計

#### 9.1. 環境から起動まで

OptDuct は Matlab で記述されており, Matlab がコンピュータにインストールされている必要がある。この上で多数の m ファイルからなる OptDuct を任意のディレクトリにコピーする。時節で説明する設計データファイルは, このディレクトリに置く必要がある。Matlab を起動し OptDuct の存在するディレクトリに移動し, Matlab のコマンドウインドウから OptDuct と入力しエンターキーを押すことで, OptDuct が走り始める。

起動すると「設計を行う = 1、性能推算を行う = 2 >>」と表示される。本章ではダクトファンの設計を行うので「1」を入力し, エンターキーを押す。すると「定義ファイルの番号を入力してください >>」と表示されるので, 設計条件をフォーマットに従って記入した設計データファイルをエクセル形式で作成する。

#### 9.2. 設計データファイルの作成

設計データファイルのフォーマットを表 9.2-1 に示す。設計データファイル名は OptDuct\_setting\_\*.dat でなければならない, \*\*の部分に OptDuct が聞いてくる「定義ファイルの番号」を当てる。仮に「定義ファイルの番号」を 25 とすると, 設計データファイルのファイル名は OptDuct\_setting\_25.dat となる。

2 行目は 6 章の後半で記述した 6-2 式による放出渦の更新回数である。経験的にこの値は 4 程度が妥当である。3 から 5 行目は OptDuct の将来の拡張のためのダミーである。6 行目はファン回転数であり, 単位は rpm である。7 行目はファンの吸収パワーであり, 単位は W である。8 行目は使用する揚力係数である。この値はブレード付け根から先端まで一定で, 変化させることはできない。9 行目は使用迎え角である。翼型を決定し, 使用揚力係数を決定すると決まる値であり, 任意の値を用いることができない点に注意が必要である。10 行目は抵抗係数である。翼型を決定し, 使用揚力係数を決定するとこの値も一意に決まる。ブレード半径ごとにレイノルズ数が変化するため, 厳密には半径ごとに違う値をとるが, 75% 半径でのレイノルズ数を代表値として形状抵抗の代表値を用いると良い。11 行目はダクト長さであり, 単位は m である。このファイルでは長さの単位は全て m である。ダクト長さの定義を図 9.2-1 に示す。

12 行目はダクトの直径である。OptDuct ではダクトとファンとの隙間がないと考えるのでダクトの直径とファンの直径は同じ値をとる。13 行目は「ブレード間の基本メッシュ周方向数」である。ここで「ブレード間の」と言うのは図 2.2-1 における翼端渦の赤い斜めの線と線の間を意味しており, 基本メッシュとは細分化していない基本の大きさの格子を意味しており, この周方向の数である。この値を細かくするほど精度が向上するが, この値を安易に大きくするとたちまち格子の数が増えるため, 大きさの決定には注意が必要である。図 2.2-1 に示したように翼端渦の近傍の格子は, 基本格子の大きさの  $(1/2)^N$  倍の大きさにして翼端渦近傍の急激な速度変化を捉えることができるようにしてある。14 行目はこの N の値である。経験的に 2 で良い結果が得られる。15 行目は, 図 9.2-1 に示す「ダクトインテーク長さ」であり, ファン回転面からリップが始まる位置までのダクトの長さである。16 行目は 15 行目の「ダクトインテーク長さ」を軸方向に分割する数である。17 行目はリップの分割数, 18 行目はリップの半径である。



表 9.2-1 設計データファイルのフォーマット

| 1  | 内部変数名      | 説明                 | 値      |
|----|------------|--------------------|--------|
| 2  | e_itr      | 繰り返し計算回数           | 4      |
| 3  | dummy      | 将来の拡張のための予備        | 0      |
| 4  | dummy      | 将来の拡張のための予備        | 0      |
| 5  | dummy      | 将来の拡張のための予備        | 0      |
| 6  | Rpm        | 回転数 (rpm)          | 2500   |
| 7  | Power      | パワー(W)             | 18000  |
| 8  | CL         | 使用揚力係数             | 1      |
| 9  | AOA0       | 使用迎角               | 2.5    |
| 10 | CD0        | 抵抗係数               | 0.014  |
| 11 | Length     | ダクト長さ (m)          | 0.5    |
| 12 | Dia        | 直径 (m)             | 1      |
| 13 | M0         | ブレード間の基本メッシュ周方向数   | 4      |
| 14 | Msub       | セグメントの構造分割数        | 2      |
| 15 | L_in_duct  | ダクトインテーク長さ (m)     | 0.08   |
| 16 | Nin_s      | ダクトインテーク分割数        | 4      |
| 17 | Nin_r      | リップ分割数             | 16     |
| 18 | R_rip      | リップ半径 (m)          | 0.06   |
| 19 | L_in_spn   | スピナ前方直線部長さ (m)     | 0.08   |
| 20 | R_spn      | スピナ半径 (m)          | 0.1    |
| 21 | R_rip_s    | スピナ肩部半径 (m)        | 0.06   |
| 22 | Nin_s_s    | スピナ前方直線部 分割数       | 4      |
| 23 | Nin_r_s    | スピナ肩部 分割数          | 6      |
| 24 | Nin_p_s    | スピナ水平部分割数          | 3      |
| 25 | Visub      | 最初の放出渦の分割数         | 3      |
| 26 | Visub_l    | 最初の放出渦の細分化するセグメント数 | 5      |
| 27 | N_blade    | ブレード数              | 5      |
| 28 | Ndiv       | ブレード分割数            | 40     |
| 29 | Gap        | ブレードギャップ (m)       | 0      |
| 30 | Rip_Factor | リップファクター           | 0.5    |
| 31 | C_Limit    | 翼弦長の制限長(m)         | 0.2    |
| 32 | W1         | 評価関数のパワーへの重み       | 0.0001 |
| 33 | W2         | 評価関数の翼弦長への重み       | 1000   |

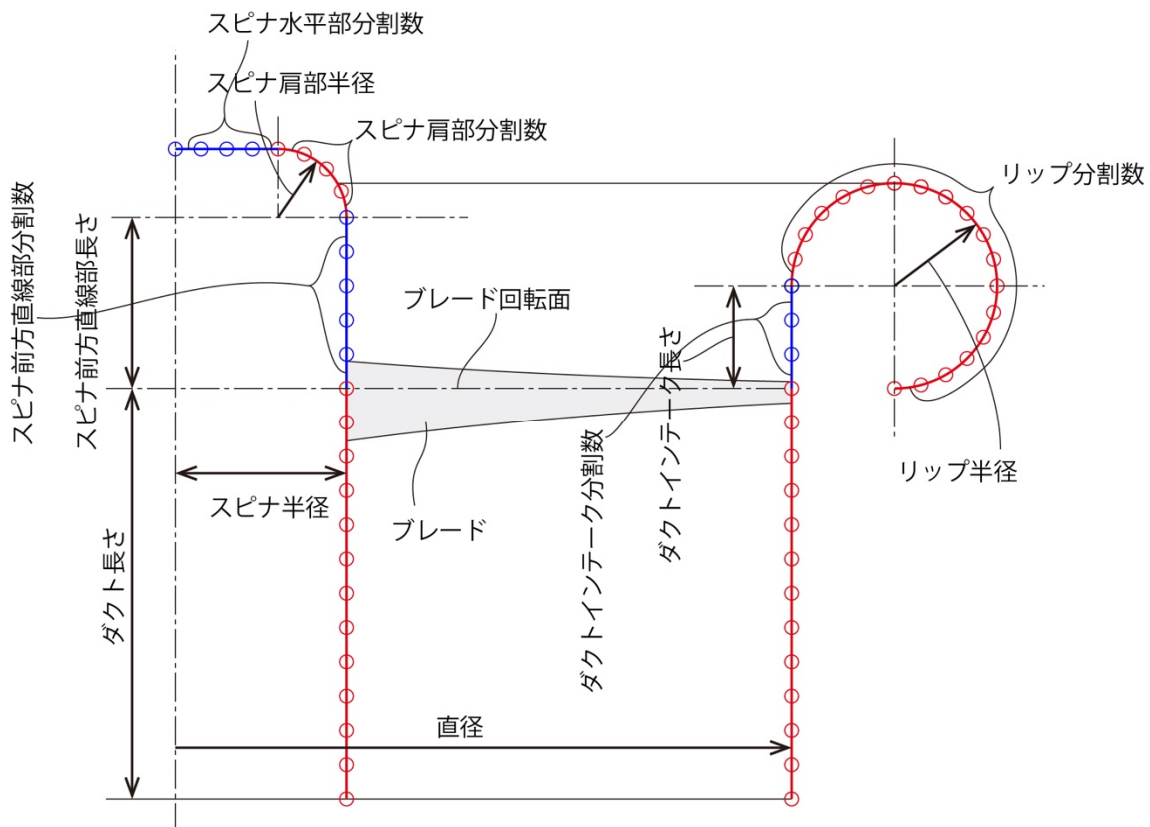


図 9.2-1 設計データファイルで用いられている用語

19行目は図 9.2-1 に示した「スピナ前方直線部長さ」である。20行目は「スピナ半径」、21行目は「スピナ肩部半径」、22行目は「スピナ前方直線部分割数」、23行目は「スピナ肩部分割数」、24行目は「スピナ水平部分割数」であり、図 9.2-1 に示す通りである。翼端渦、翼根渦は格子の1辺と一致しており、分割数を細かくすることができない。ブレードに近い放出渦はなるべく細かく螺旋を分割して滑らかにしたい。そこで放出渦には翼端渦、翼根渦と同じ分割幅にせず、翼端渦、翼根渦をさらに細かく分割する。この分割数が25行目の「最初の放出渦の分割数」である。またブレードから数えて翼端渦、翼根渦の渦の分割数のどこまでこの放出渦の細分化を行うかの数が「最初の放出渦の細分化するセグメント数」である。27行目がブレード数であり、28行目がブレード分割数である。29行目はブレード先端とダクト壁面までの距離であるが、頒布するバージョンの OptDuct ではこの値を考慮することができない。また、頒布するバージョンの OptDuct では後流の収縮量を決定してリップファクターを決定するため、30行目のリップファクターは利用できないが、リップファクターを意図的に操作した場合に結果がどう変わるかという目的の特別な OptDuct で使用するために残してある。付け根の翼弦長は広くなりがちで、実用上不都合な値になることがある。この様な時に「翼弦長の制限長」を妥当な長さに設定すると、この値を超える翼弦長になることがない。OptDuct では常に「翼弦長の制限長」を使用しており、翼弦長の制限を行わない場合は、「翼弦長の制限長」を十分大きな値に設定しておくことで目的を達成することができる。またブレードの1/3以上程度が翼弦長の制限にかかる様な時は、解が不安定になり解が得られない場合があるので注意が必要である。32行目はペナルティ法を用いて評価関数に $(P - P_0)^2$ を重みをかけて足している。この重みの大きさである。ここで  $P$  は計算で得られた吸収パワー、 $P_0$  は吸収パワー

の設計値である。この値を大きくすると拘束条件である  $P=P_0$  が成立しやすくなる。3 3 行目は同じくペナルティ法を用いて評価関数に  $(F_L T - T_D)^2$  を重みをかけて足している。この重みの大きさである。ここで  $T$  は計算で得られた吸収パワー、 $T_D$  はダクトが発生する推力、 $F_L$  はリップファクターである。この値も同様に、大きくすると  $F_L T - T_D$  が成立しやすくなる。これら重みは大きくしすぎると、拘束条件は守られるものの最適化の度合いが低い解がえられる。OptDuct では小さな重みの値で拘束条件を満たす様工夫されているので、表に示す重みの値から大きくずらすことは勧めない。

### 9.3. 入力形状の確認

「定義ファイルの番号を入力してください >>」と表示されたところで、今回製作したファイルの番号である「25」を入力してエンターキーを押すと図 9.3-1 の様に設計データファイルに基づいて作図されたダクトの断面図が表示される。リップの半径、スピナの肩部の半径、分割点の数などが妥当であるか確

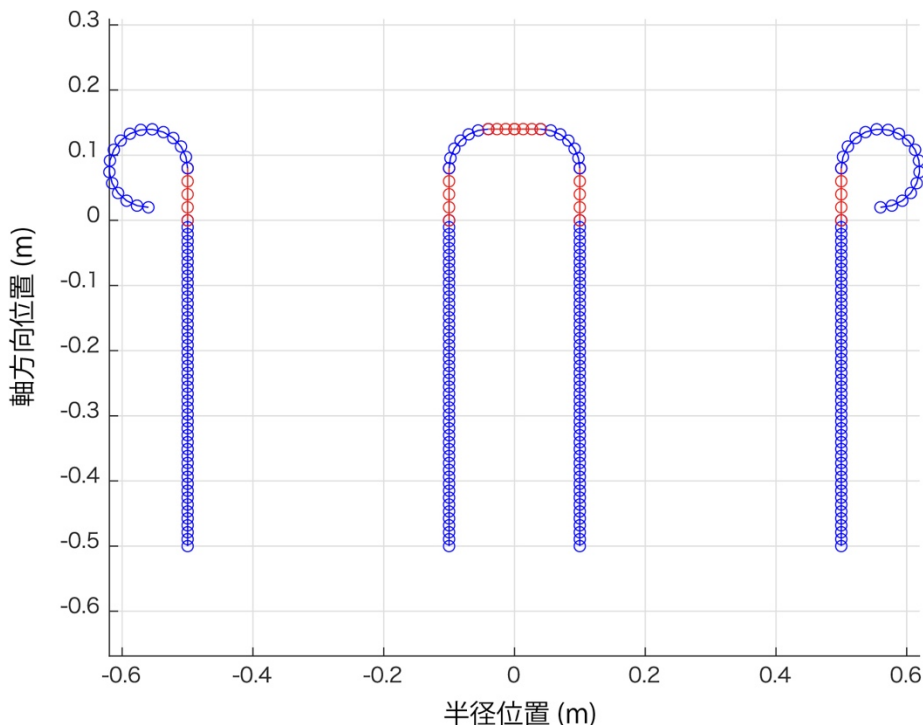


図 9.3-1 設計データファイルに基づいて作図されたダクトの断面図

認する。「この形状でいいですか? Yes=1, No=0>>」と画面に表示されるので、不具合があった場合、例えばリップの分割数が荒かった場合、「0」と入力する。すると再度「定義ファイルの番号を入力してください >>」と表示されるので、OptDuct\_setting\_25.dat のリップの分割数の値を修正して保存し、「25」と入力してエンターキーを押すことで、変更が反映された図が表示される。ダクト全体にわたってバランスよく分割数を定義することは困難であるので、OptDuct のこの機能で満足が行くところまで修正を繰り返す。

#### 9.4. 後流の収縮の計算

「この形状でいいですか? Yes=1, No=0>>」と表示されている状態で「1」と入力し, エンターキーを押すと, 「後流の収縮を計算中」と表示されて数秒間コンピュータからの反応がなくなる. この後流の収縮量の計算が終わると, 画面に「収縮したあとの半径は 0.482504」, 「Rip\_Factor = 0.463083」と表示される. ダクトの直径が 1.016m であるので, 半径は 0.508 であり, これが後流の下流では 0.482504m になるということであり, この収縮で(5.2-12)式によりリップファクターが 0.463083 と計算されたと言う意味である. また後流にどのような収縮が生じたのか, Matlab の Figure 23 に表示される. これを図 9.4-1 に示す.

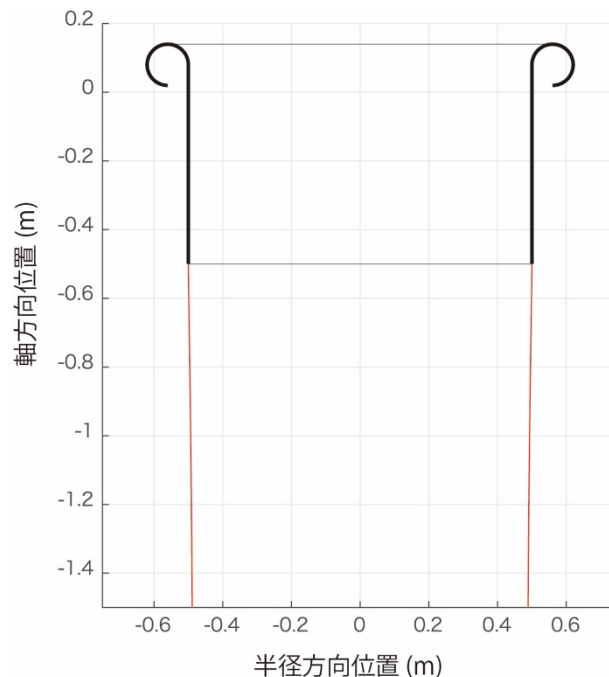


図 9.4-1 後流収縮の計算結果の図

#### 9.5. 影響係数の計算

後流の収縮の計算に引き続いて自動的に影響係数の計算が始まる. この影響係数の計算には時間がかかるので進捗が次の様に表示される. 下に行くほど計算が進んだことを示す.

```
「--- Creating Matrix ●○○○○○ ---」
「--- Creating Matrix ●●○○○○ ---」
「--- Creating Matrix ●●●○○○ ---」
「--- Creating Matrix ●●●●○○ ---」
「--- Creating Matrix ●●●●●○ ---」
「--- Creating Matrix ●●●●●● ---」
```

#### 9.6. 最適化計算

影響係数の計算に引き続き「==Start Optimization==」と表示され, 図 9.6-1 に示した計算の進捗の表示がされる.

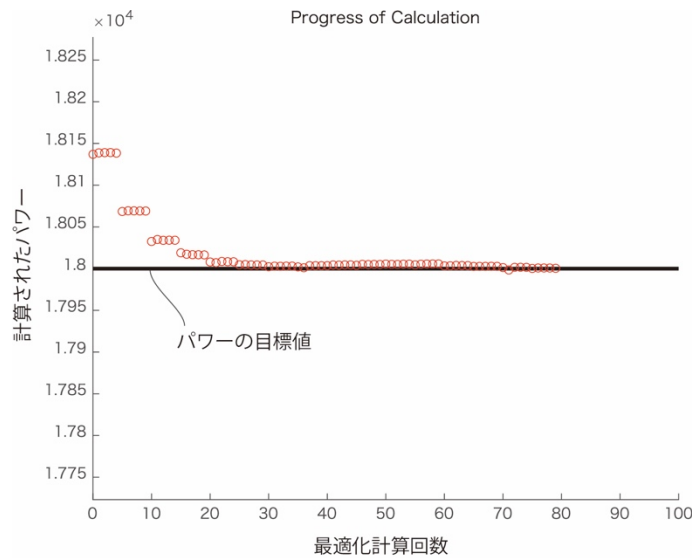


図 9.6-1 計算の進捗の表示

横軸がシミュレーテッドアニーリングによる最適化の回数であり、縦軸が拘束条件の一つである吸収パワーの設計値（太線）と計算結果（赤丸）である。図をみると計算の初期には計算されたダクトファンの吸収パワーが 18,130W 程度であったものが、80回の計算によって 18,000W に収束している様子がわかる。

### 9.7. 収束結果表示と軸方向速度の更新

最適化の繰り返し計算の誤差が打ち切り誤差を下回ると、繰り返し計算が終了し、計算の結果得られたダクトファンの性能が Matlab のコマンドウインドウに次の様に表示される。

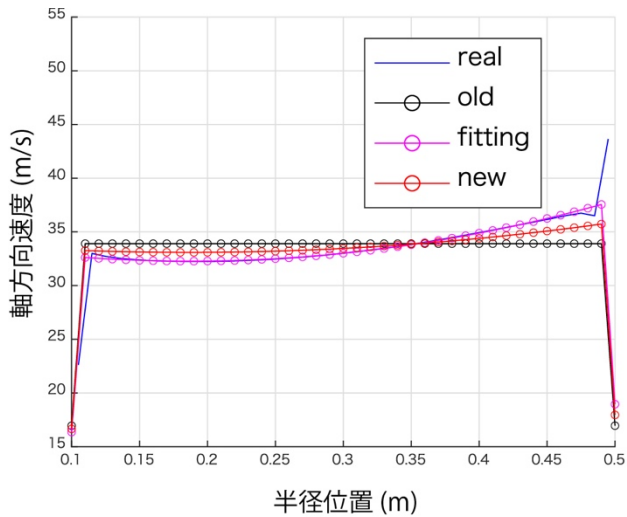
「1 回目の計算」

「推力, ダクト推力, パワー = 924.568013, 428.152679, 18000.803117」

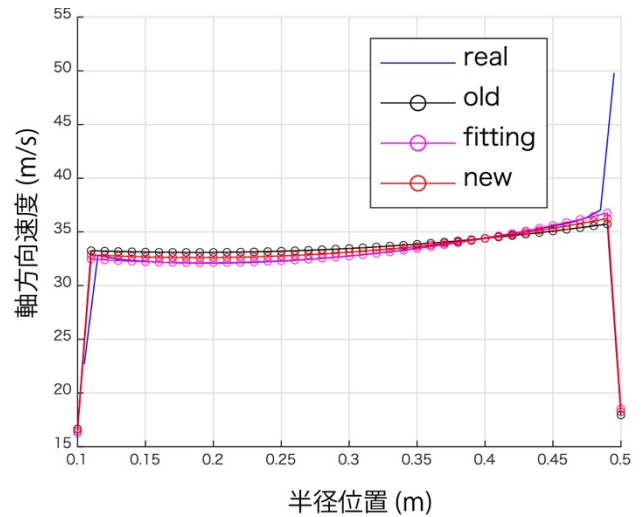
ここで推力はダクトファン全体の推力であり、その値は 924.568013N である。ダクト推力はダクトが発生する推力であり、428.152679N である。ファンが吸収するパワーは 18000.803117W であるという結果が得られている。

図 9.7-1 の a) に示す様に Matlab の Figure 4 に「軸方向速度分布」が表示される。黒の○で示された「old」として描かれている曲線が、今終了した計算で用いた軸方向速度分布であり、青の実線が今終了した計算で計算された軸方向速度分布である。マゼンダの○がこの「real」に 2 次関数でカーブフィッティングさせた曲線である。このカーブフィッティングで得られた関数を軸方向速度として用いると、計算が発散するので、6-2 式を用いて「old」と「real」の平均値を次の計算の軸方向速度として用いる。この次の計算の軸方向速度を赤い○で示す。

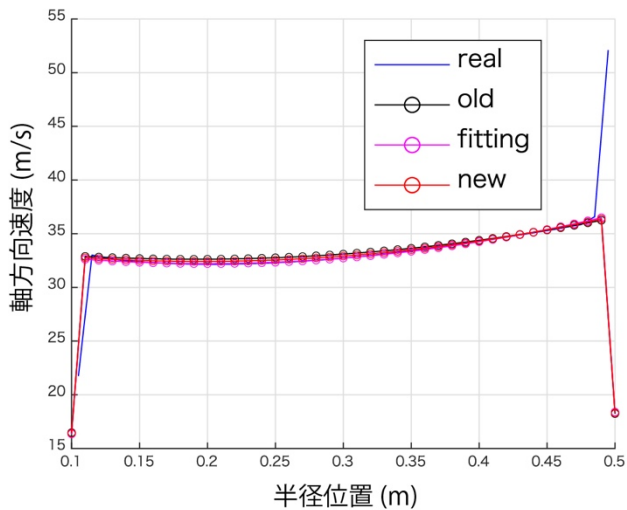
表 9.2-1 の 2 行目で設定した「繰り返し回数」が 4 であるので、以後、自動的に 3 回、9 章 5 節と 6 節を繰り返す。その際の matlab のコマンドウインドウでの表示内容を次に示す。同時に図 9.7-1 の b), c), d) に Matlab の Figure 4 に表示される「軸方向速度分布」に推移を示す。



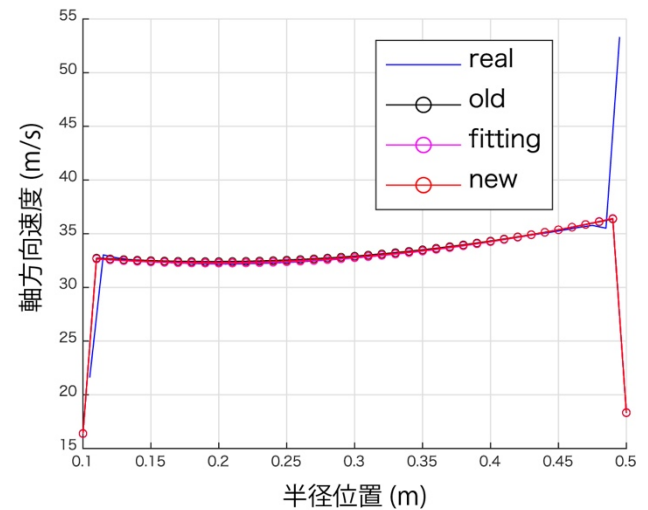
a) 第1回目の収束計算の結果



b) 第2回目の収束計算の結果



c) 第3回目の収束計算の結果



d) 第4回目の収束計算の結果

図 9.7-1 軸方向速度の収束状況

「--- Creating Matrix -●●●●●●● ---」

「==Start Optimization==」

「2回目の計算」

「推力, ダクト推力, パワー = 921.768776, 426.856341, 18000.840869」

「--- Creating Matrix -●●●●●●● ---」

「==Start Optimization==」

「3回目の計算」

「推力, ダクト推力, パワー = 920.779575, 426.397779, 18000.685363」

「--- Creating Matrix -●●●●●●● ---」

「==Start Optimization==」

「4回目の計算」

「推力, ダクト推力, パワー = 920.399421, 426.221518, 18000.786275」

この計算ケースでは, 図 9.7-1 の d)に見られる様に, 4回で十分「軸方向速度分布」は収束する.

「繰り返し回数」が4であるので, この計算回数を終えると

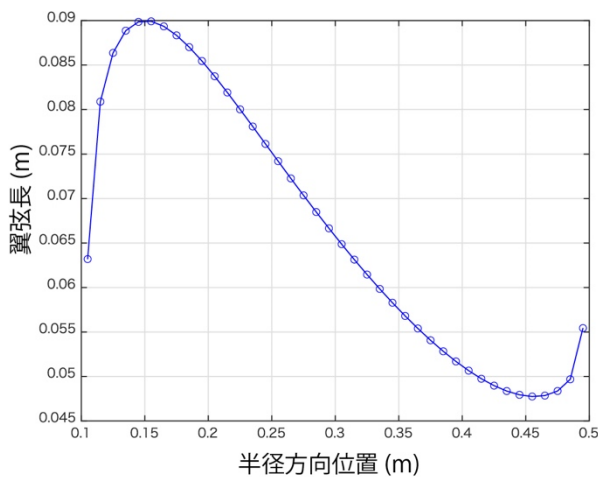
「さらに収束させますか? Yes = 1, No = 0, >>」

と Matlab のコマンドウィンドウに表示される. 「軸方向速度分布」がまだ収束していないと判断するならばここで「1」を入力してエンターキーを押す. するともう一度9章5節と6節を繰り返す. 「軸方向速度分布」が収束したと判断するならば「0」を入力してエンターキーを押すことで, 繰り返し計算は終了する.

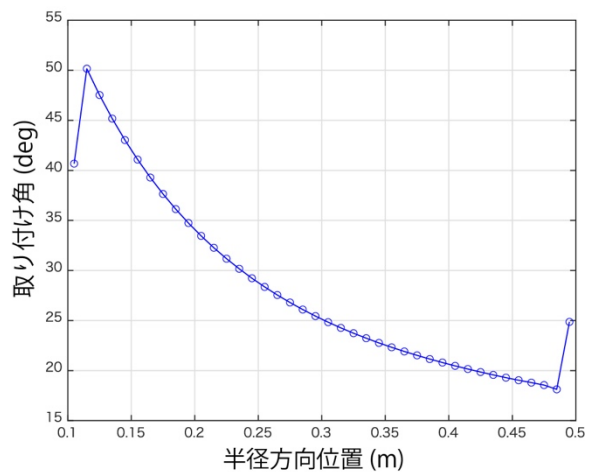
## 9.8. 終了処理

次に「揚力傾斜 (通常は 0.1) >>」と Matlab のコマンドウィンドウに表示される. この値はブレード形状の決定には使用されないが, 10章のブレード形状を与えた時の性能推算に使用可能なフォーマット (Performance\_geometry\_\*\*.dat) でブレード形状の情報を書き出すために使用される. 翼型の正確な揚力傾斜を入力することが好ましいが, ブレード形状を与えた時の性能推算を行う予定がない場合は「0.1」と概数を入力して良い

次に「計算結果は Performance\_geometry\_25.dat に保存されました」と Matlab のコマンドウィンドウに表示され, その次の行に「表示したい画面を数字で入力 (0で終了) >>」と表示される. ここで1から23までの異なる種類の図が用意されており, 対応する番号を入力すればその図が表示される. なにも入力しなくとも Matlab の Figure 14 に循環, Figure 15 にブレード翼弦長, Figure 16 にブレード取り付け角が表示される. 図 9.8-1 の a)にこれらのうちのブレード翼弦長を, b)にブレード取り付け角を示す.



a)翼弦長分布



b)取り付け角分布

図 9.8-1 計算終了後に表示される図



## 9.9. 画像出力

次に「表示したい画面を数字で入力（0で終了） >> 」と表示される．1から23までの数字を入力することで，23種類の異なる種類の表示を行うことができる．1から23までの図の内容を以下に列記する．1から13まではデバッグに使用し，一般にはあまり使用しない．また「0」を入力すると OptDuct が終了する．また Matlab のコマンドウインドウから「Result\_Figure」と入力すると，この9章9節の入力状態とすることができる．

- 「1」 渦面移動速度．黒の△が旋回成分も考慮した正確な渦面の見かけの移動速度であり，赤の○が最適化計算で用いられた軸方向の流速である．
- 「2」 ダクトの鳥瞰図．格子の色はブレード上の単位循環がダクト格子に引き起こす法線速度  $V_{bd}$  を表している．デバッグ用．
- 「3」 ダクトの鳥瞰図．格子の色はブレード上の単位循環がダクト格子に引き起こす法線速度  $V_{bd}$  を打ち消すために必要な循環  $\Gamma_m$  の大きさを表している．デバッグ用．
- 「4」 ダクトの鳥瞰図．格子の色は循環  $\Gamma_m$  がダクト格子に誘導する法線速度の大きさを表している．デバッグ用．
- 「5」 ダクトの鳥瞰図．格子の色は最適化計算の結果得られたダクト格子の循環の大きさを表している．デバッグ用．
- 「6」 ダクトの鳥瞰図．格子の色は最適化計算の結果得られたダクト格子の循環およびダクト放出渦がダクト格子に誘導する法線速度の大きさを表している．デバッグ用．
- 「7」 ダクトの鳥瞰図．格子の色は最適化計算の結果得られたダクト格子の循環がダクト格子に誘導する法線速度の大きさを表している．デバッグ用．
- 「8」 ダクトの鳥瞰図．格子の色は最適化計算の結果得られたダクト放出渦がダクト格子に誘導する法線速度の大きさを表している．デバッグ用．
- 「9」 青い○は最適化計算で得られたブレードがダクト格子に誘導する法線速度を打ち消すために必要なダクト格子の循環から得られるダクト放出渦の強さ．赤い○は最適化計算で得られたダクト格子の循環から得られるダクト放出渦の強さ．デバッグ用．
- 「10」 後縁のダクト格子のみ単位強度の循環を持つ際に，ダクト格子に誘導される法線速度の大きさ．デバッグ用．
- 「11」 ダクト渦全てが単位強度の循環を持つ際に，ダクト格子に誘導される法線速度の大きさ．デバッグ用．
- 「12」 「10」と「11」の速度の和．デバッグ用．
- 「13」 赤い○は放出渦が作る軸方向速度，緑の○はダクト格子の循環が作る軸方向速度，黒い○はダクト放出渦が作る軸方向速度，青い○は以上のすべての効果を足した軸方向速度．デバッグ用．
- 「14」 ブレードの循環
- 「15」 ブレード翼弦長
- 「16」 ブレードの取り付け角度
- 「17」 渦面移動速度．青い○は軸方向速度．黒い△は軸方向速度，周方向速度を考慮した放出渦の見かけの移動速度（渦面移動速度）．赤い○は最適化計算で用いたモデルの軸方向速度．
- 「18」 スピナ，ダクト，ダクトからのダクト馬蹄渦の鳥瞰図．ブレードとブレードの間のみを表示．
- 「19」 スピナ，スピナからのダクト馬蹄渦の鳥瞰図．放出渦はブレードとブレードの間のみを表示．



- 「20」 設計データファイルから読み込んだデータをもとにプロットしたダクトの断面図.
- 「21」 ダクト, スピナ, 放出渦, 翼端渦の鳥瞰図. 放出渦は青で, 翼端渦は赤で表示.
- 「22」 ダクト, スピナ, ダクト馬蹄渦の鳥瞰図.
- 「23」 ダクトの断面形, 後流の収縮計算の結果の表示.

## 9.10. 出力ファイル

計算の結果得られた形状は9章8節で述べたように, 「計算結果は Performance\_geometry\_\*\*.dat に保存されました」と表示され, Performance\_geometry\_\*\*.dat の\*\*は使用した設計データファイルの番号がはいる.

ファイルの内容は1行目が半径位置(m), 2行目が翼弦長(m), 3行目が取り付け角度(rad), 4行目が0揚力角(deg), 5行目が揚力傾斜(1/deg), 6行目が抵抗係数である. 形状を記述するだけであれば1行目から3行目までで十分であるが, 次章から行う性能推算にそのまま用いることができるよう, 4行目から6行目を加えてある.

## 10. OptDuct によるダクトファンの性能推算

### 10.1. 性能推算の開始方法

9章1節で記述したように OptDuct を起動すると「設計を行う = 1、性能推算を行う = 2 >>」と表示される。ダクトファンの形状からその性能の推算を行いたいときは「2」を入力し、エンターキーを押す。すると「定義ファイルの番号を入力してください >>」と表示されるので、ダクトファンの情報をフォーマットに従って記入した形状データファイルをエクセル形式で作成する。

### 10.2. 形状設定ファイルの作成

形状設定ファイルのフォーマットを表 10.2-1 に示す。形状設定ファイル名は Performance\_setting\_\*.dat でなければならず、\*\*の部分に OptDuct が聞いてくる「定義ファイルの番号」を当てる。仮に「定義ファイルの番号」を 25 とすると、形状設定ファイルのファイル名は Performance\_setting\_25.dat となる。

2行目は6章の後半で記述した 6-2 式による放出渦の更新回数である。経験的にこの値は 4 程度が妥当である。3行目は「ブレード分割数」である。4, 5, 6 行目はそれぞれ「揚力傾斜」、「0 揚力角」、「抵抗係数」である。これらは OptDuct の旧バージョンの名残であり、次節の形状データファイルに半径ごとの値が記載されているので用いられない。従って 0 としておくのが妥当である。7行目は「回転数」であり単位は rpm である。以降、図 9.2-1 に示された語句を用いて説明する。8行目は「ダクト長さ」であり、単位は m である。このファイルにおいて長さの単位は m に統一する。9行目は「ダクト直径」である。10行目は「ブレード間の基本メッシュ周方向数」である。この値は9章2節で詳しく説明したので説明を省く。11行目は「セグメントの分割構造数」である。これも9章2節で詳しく説明した。12行目が「ダクトインテーク長さ」であり、意味するところは図 9.2-1 に示された通りである。13行目はダクトインテーク分割数」であり、「ダクトインテーク長さ」を軸方向に分割する数である。14行目は「リップ分割数」、15行目は「リップ半径」である。16行目は図 9.2-1 に示した「スピナ前方直線部長さ」である。17行目は「スピナ半径」、18行目は「スピナ肩部半径」である。19行目は「スピナ前方直線部分分割数」、20行目は「スピナ肩部分割数」、21行目は「スピナ水平部分割数」である。22行目は「最初の放出渦の分割数」、23行目は「最初の放出渦の細分化するセグメント数」であり、詳細は9章2節で説明した通りである。24行目は「ブレード数」である。25行目はブレードとダクトの隙間の距離であるが、本バージョンでは考慮できないので使用していない。0 としておくのが良い。同じく 26 行目のリップファクターも本バージョンでは使用しない。本バージョンの OptDuct では計算によってリップファクターを決定している。

表 10.2-1 形状データファイルのフォーマット

| 1  | 内部変数名      | 説明                 | 値    |
|----|------------|--------------------|------|
| 2  | e_itr      | 繰り返し計算の回数          | 4    |
| 3  | Ndiv       | ブレード分割数            | 40   |
| 4  | CL_alpha   | 揚力傾斜 (1/rad)       | 0    |
| 5  | AOA0       | 0 揚力迎角 (deg)       | 0    |
| 6  | CD0        | 抵抗係数               | 0    |
| 7  | Rpm        | 回転数 (rpm)          | 2500 |
| 8  | Length     | ダクト長さ (m)          | 0.5  |
| 9  | Dia        | 直径 (m)             | 1    |
| 10 | M0         | ブレード間の基本メッシュ周方向数   | 8    |
| 11 | Msub       | セグメントの構造分割数        | 2    |
| 12 | L_in_duct  | ダクトインテーク長さ (m)     | 0.08 |
| 13 | Nin_s      | ダクトインテーク分割数        | 4    |
| 14 | Nin_r      | リップ分割数             | 16   |
| 15 | R_rip      | リップ半径 (m)          | 0.06 |
| 16 | L_in_spn   | スピナ前方直線部長さ (m)     | 0.08 |
| 17 | R_spn      | スピナ半径 (m)          | 0.1  |
| 18 | R_rip_s    | スピナ肩部半径 (m)        | 0.06 |
| 19 | Nin_s_s    | スピナ前方直線部 分割数       | 4    |
| 20 | Nin_r_s    | スピナ肩部 分割数          | 6    |
| 21 | Nin_p_s    | スピナ水平部分割数          | 3    |
| 22 | Visub      | 最初の放出渦の分割数         | 3    |
| 23 | Visub_l    | 最初の放出渦の細分化するセグメント数 | 5    |
| 24 | N_blade    | ブレード数              | 5    |
| 25 | Gap        | ブレードギャップ (m)       | 0    |
| 26 | Rip_Factor | リップファクター           | 0.5  |

### 10.3. 形状データファイルの作成

形状データファイルの名称は Performance\_geometry\_\*.dat でなければならず、\*には 10 章 2 節で作成した設計設定ファイルと同じ番号がはいる。

ブレード半径の取り方として 2 種類考えられる。翼素を代表する点をコントロールポイントとして、半径にコントロールポイントの半径をとり、翼弦長、取り付け角としてこの位置の値を用いる方法が一つ。半径として翼素に分割した分割位置の半径をとり、翼弦長、取り付け角としてこの位置の値を用いる方法がもう一つである。OptDuct では「ブレード分割数」とデータの数が等しければ前者として解釈し、「ブレード分割数」よりデータの数が一つ多ければ後者として解釈する。

9章10節で最適計算結果は Performance\_geometry\_25.dat に保存され、このファイルはそのまま性能推算に用いることができると記述した。ここでは最適計算の精度を確認する目的も兼ねて、この最適計算の結果をブレードの形状のデータとして用いる。もし、任意の形状のブレードの性能を計算したい時は、ファイルの1行目に半径位置(m)、2行目に翼弦長(m)、3行目に取り付け角度(rad)、4行目に0揚力角(deg)、5行目に揚力傾斜(1/deg)、6行目に抵抗係数を記載する。

#### 10.4. 読み込んだデータの確認

10章1節で表示された「定義ファイルの番号を入力してください >>」に対し、定義ファイル(形状設定ファイル、形状データファイル)の番号である「25」を入力し、エンターキーを押す。すると Matlab の Figure 15, Figure 16, Figure 20 にそれぞれ翼弦長、取り付け角、ダクトの断面を表示する。表示される翼弦長及び取り付け角を図 10.4-1 の a)と b)に示す。今回のデータは形状設定ファイルに記入したブレード

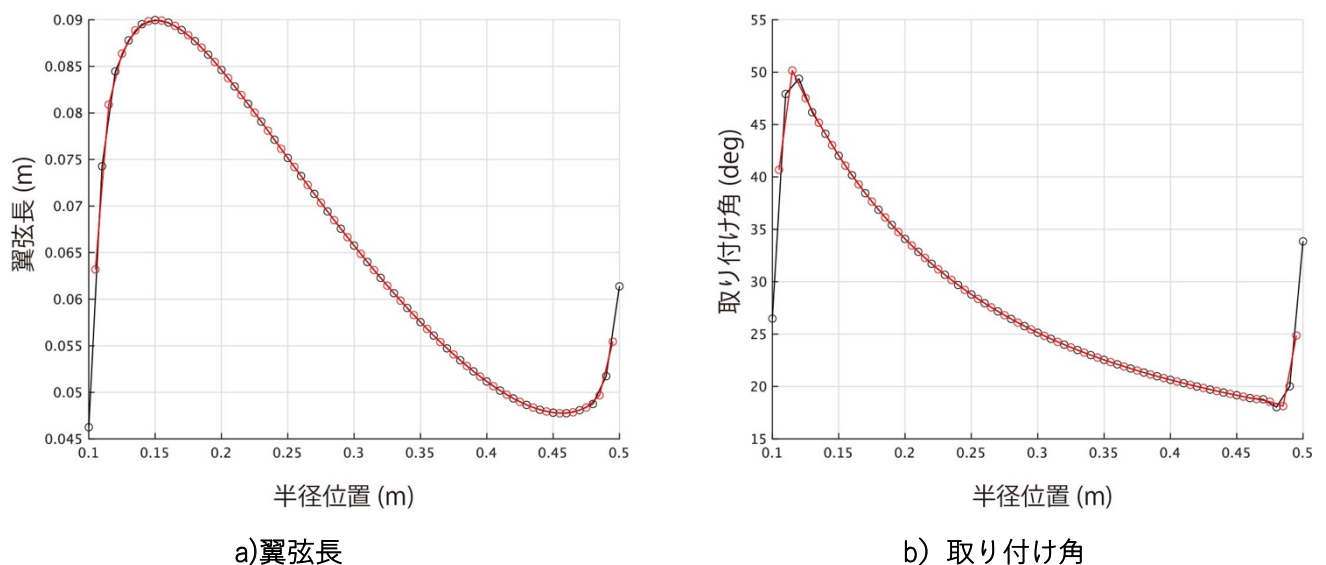


図 10.4-1 形状の確認画面

ド分割数と形状データファイルの分割数(行の数)が等しいため、前節の2種類考えられる定義方法の前者であると自動的に判断し、翼素の分割点を生成する。図 10.4-1 の赤い○は形状データファイルで与えたコントロールポイントの位置であり、黒い○は OptDuct が生成した翼素の分割点である。この翼弦長と取り付け角のグラフを見て異常がないか確認する。また Figure 20 に図 9.3-1 と同様にダクトファンの断面図が表示されるので、意図した通りの形状、分割点の間隔になっているかを確認する。

「このブレード形状、ダクト形状でいいですか? Yes = 1, No = 0 >> 1」と Matlab のコマンドウィンドウに表示されるので「1」と入力してエンターキーを押すと次へ進む。

#### 10.5. 性能の推算

Matlab のコマンドウィンドウに「後流の収縮を計算中」と表示される。数秒間の計算ののちに、画面に「収縮したあとの半径は 0.482504」、「Rip\_Factor=0.463083」と表示される。ダクトの直径が 1.016m であるので、半径は 0.508 であり、これが後流の下流では 0.482504m になるということであり、この収縮で(5.2-12)式によりリップファクターが 0.463083 と計算されたと言う意味である。また後流にどのような収

縮が生じたのか、Matlab の Figure 23 に図 9.4-1 と同様な図が表示される。

後流の収縮の計算に引き続いて自動的に影響係数の計算が始まる。この影響係数の計算には時間がかかるので進捗が 9 章 5 節と同様に表示される。

```
「--- Creating Matrix ●●●●○○ ---」
```

これは全体の 6 分の 4 の計算が終了したという意味である。

影響係数の計算に引き続き

```
「==Start Calculation==」
```

と表示さる。この直後に性能推算計算は終了し、

```
「1 回目の計算」
```

```
「Th, Rip_Th, Power = 920.333089, 426.090022, 18004.016480」
```

と表示される。これは左から順に推力、ダクト推力、吸収パワーであり、それぞれ 920.33N, 426.09N, 180.04kW であることが分かる。

9 章 7 節と同様に、Matlab の Figure 4 に「軸方向速度分布」が表示される。黒の○で示された「old」として描かれている曲線が、今終了した計算で用いた軸方向速度分布であり、青の実線が今終了した計算で計算された軸方向速度分布である。マゼンダの○がこの「real」に 2 次関数でカーブフィッティングさせた曲線である。このカーブフィッティングで得られた関数を軸方向速度として用いると、計算が発散するので、6-2 式を用いて「old」と「real」の平均値を次の計算の軸方向速度として用いる。この次の計算の軸方向速度を赤い○で示す。

表 10.2-1 の 2 行目で設定した「繰り返し回数」が 4 であるので、以後、自動的に合計 3 回、10 章 5 節の冒頭からここまでをくりかえす。その際の matlab のコマンドウインドウでの表示内容を次に示す。

```
「--- Creating Matrix -●●●●●● ---」
```

```
「==Start Calculation==」
```

```
「2 回目の計算」
```

```
「Th, Rip_Th, Power = 920.661792, 426.038122, 18015.095395」
```

```
「--- Creating Matrix -●●●●●● ---」
```

```
「==Start Calculation==」
```

```
「3 回目の計算」
```

```
「Th, Rip_Th, Power = 920.972488, 425.945229, 18027.383195」
```

```
「--- Creating Matrix -●●●●●● ---」
```

```
「==Start Calculation==」
```

```
「4 回目の計算」
```

```
「Th, Rip_Th, Power = 921.074054, 425.930997, 18030.693102」
```

```
「さらに収束させますか? Yes = 1, No = 0, >>」
```

Figure 4 に表示された「軸方向速度分布」から、計算が収束していると判断される場合は「0」を入力し

て計算を終了させ、収束がまだであると判断される場合は「1」を入力して計算を継続する。

「表示したい画面を数字で入力（0で終了） >> 」と表示される。ここで1から23までの異なる種類の図が用意されており、対応する番号を入力すればその図が表示されるのは9章8節と同じである。

この性能推算で得られたダクトファンの推力、ダクト推力および吸収パワーは、4回目の計算の結果得られた、921.07N, 425.93N, 180.30kWであり、このダクトファンを設計した時の値である920.39N, 426.22N, 180.00kW とほとんど同じ値であり、性能推算コードは最適設計結果と比較する限り妥当であることが分かる。

## 11. おわりに

ドローンおよび eVTOL で使用されることが多いダクテッドファンにおいて、静止推力を最大とする設計を行うことができる OptDuct について纏めた。第一部では OptDuct の静止推力を最大とする最適設計の理論および形状が与えられた場合の性能の推算の理論について説明を行い、第二部では OptDuct を用いたダクテッドファンの最適設計の行い方、および形状が与えられた時の性能推算の行い方について説明を行った。OptDuct を使用して効率的にダクテッドファンの開発を行っていただけたら幸いである。

### 参考文献

- 1) 今井功, “応用超関数論 I”, 東京, サイエンス社, 1981-5.
- 2) ランダウ=リフシッツ, “電磁気学 1”, 東京, 東京図書, 1982-9.
- 3) Abramowitz, M., Stegun, I. A., “Handbook of mathematical functions”, New York, Dover Publications, 1972.
- 4) 山名正夫, 中口博, “飛行機設計論”, 東京, 養賢堂, 1968, pp.387-393.

宇宙航空研究開発機構研究開発資料 JAXA-RM-21-006

JAXA Research and Development Memorandum

**ダクトファン最適設計プログラム, OptDuctの理論背景と使用法**

Theoretical Background and User's Manual of Ducted Fan Optimal Design Program, OptDuct

---

発行 国立研究開発法人 宇宙航空研究開発機構 (JAXA)

〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1

URL: <http://www.jaxa.jp/>

発行日 2022年1月28日

電子出版制作 松枝印刷株式会社

※本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。

Unauthorized copying, replication and storage digital media of the contents of this publication, text and images are strictly prohibited. All Rights Reserved.

---



