

# 2次元Jet-In-Cross Flowにおける時間変動場抑制に向けた形状最適化問題

中澤 嵩 (大阪大学MMDS), 三坂 孝志 (産総研)

## Shape Optimization Problem for Time Fluctuation Velocity Fields of the Two-Dimensional Jet-In-Cross Flow

NAKAZAWA Takashi (MMDS, Osaka University), MISAKA Takashi (AIST)

### ABSTRACT

This paper presents a versatile and Snapshot POD-based shape optimization method, to delay laminar-turbulent transition and to promote a mixing. The main problem is the nonstationary Navier-Stokes problem and eigenvalue problem for Snapshot POD, and more the eigenvalues of Snapshot POD is defined as the cost function. Based on Lagrange multiplier method, the objective cost functional is obtained, and by using Adjoint variable method main problem and adjoint problems are solved to evaluate the sensitivity. The two-dimensional Jet-In-Cross flow used as an initial domain is reshaped iteratively.

### 1. はじめに

現代の工学・産業界において、最適設計というかたちで発展を遂げてきた形状最適化問題は、約 100 年前から数理科学の一分野として研究がされてきた。特に、数値流体力学における形状最適化問題は乱流制御という一分野を築いており、航空宇宙工学分野において重要な役割を担っている。一般的に、このような乱流制御を行う際、時間平均場を用いて目的関数を定義することが多いが、本研究では、データ科学的手法により乱流場を時間平均場と時間変動場に分解し、乱流場の特徴的な時空間構造を持つ時間変動場を用いて目的関数を定義する。それにより、時間平均場を用いて目的関数を定義する従来の手法と比べて、直接的に乱流の時空間構造を制御することが可能となる。

このような最適設計による流体制御の先駆的な研究は、フランス人応用数学者である Pironneau<sup>1-2)</sup>が Poisson 方程式や Stokes 方程式、Navier-Stokes 方程式が定義された空間において、散逸エネルギー最小化問題に対する感度解析を行うところまで遡る。その後、Pironneau<sup>3)</sup>、Haslinger and Makinen<sup>4)</sup>、Moubachir and Zolesio<sup>5)</sup>、Sokolowski and Zolesio<sup>6)</sup>、Haug et. al.<sup>7)</sup>、Allaire<sup>8,9)</sup>が形状最適化問題に関する数学・数値解析を行っており、特に航空工学からの要請を受けるかたちで、Mohamadi and Pironneau<sup>10)</sup>が乱流モデルや圧縮性 Euler 方程式、Adaptive Mesh 法等 だけでなく、遺伝的アルゴリズム

や SOM ( Self Organized Map )等を取り込んだ形状最適化問題を定式化し、数値的に検証している。また国内では、有限要素法の数学解析を専門とする応用数学者と最適設計を専門とする工学者が協力する中で形状最適化問題の数学的背景<sup>11-14)</sup>が明らかとなってきた。上記に記述したように、形状最適化問題による流体制御に関する研究結果は、既に膨大なまでに存在するが、乱流制御を可能にする形状最適化手法は未だ発展の余地が十分に残されている。本論文では、これまで構築されてきた形状最適化問題を土台にしつつ、データ科学的手法を導入することで、乱流場の特徴的な時空間構造を持つ時間変動場の制御を実現する。

これまで、時空間に複雑な流れ場に対するメカニズムの解明を目的として線形安定性解析<sup>15,16)</sup>が主な手法であった。この線形安定性解析を土台として、Nakazawa and Azegami<sup>17)</sup>は線形安定性解析で得られる最大固有値の実部を目的関数とすることで、直接的に流れ場の安定性を制御することに成功した。その後、Kiriya et. al.<sup>18)</sup>、Brewster, J., Juniper<sup>19)</sup>、Martinez-Cava et. al.<sup>20)</sup>が、非圧縮性・圧縮性流体において様々な初期形状に対して適用し、その有効性を数値的に示している。ところで、当該形状最適化問題は、線形安定性解析を前提としているため、定常 Navier-Stokes 方程式を Newton-Raphson 法等で解き、定常解を求めておく必要がある。しかし、高レイノルズ数流体等の定常 Navier-

Stokes 方程式を数値的に解くことが困難であるし、時間変化する速度場が境界条件や体積力の外力として与えられた場合には、そもそも解くことができない。このような場合には、線形安定性解析が行えないため、結果的に Nakazawa and Azegami<sup>17)</sup>の方法は活用できないこととなった。

このような状況を鑑みて、非定常 Navier-Stokes 方程式を用いて、流れ場の複雑な時空間構造を制御する必要に迫られた。そこで、Nakazawa<sup>21)</sup>は、乱流場の特徴的な時空間構造を持つ時間変動場を効率的に制御するために主成分分析と同様のデータ解析手法である Snapshot Proper Orthogonal Decomposition ( Snapshot POD ) を考慮した形状最適化問題を提案した。この Snapshot POD によって、非定常流を時間平均場と時間変動場にモード分解することが可能となり、それぞれの速度場を区別して目的関数を定義することが可能となった。ところで、従来、形状最適化問題を解く場合には感度を境界積分として評価することが一般的であった。そのため、Nakazawa<sup>21)</sup>と Nakazawa and Nakajima<sup>22)</sup>では粘着条件で定義された境界を設計境界としており、移流項を感度に反映することが出来なかった。また、Time Average Navier-Stokes 問題を主問題と定義していたため、時間変動成分を十分に考慮することができなかった。そこで、Nakazawa<sup>23)</sup>では、Reynolds Average Navier-Stokes 問題 (RANS) を主問題と定義し、更には領域積分型で感度を評価することで移流項を感度に反映することに成功した。これによって、より時間変動成分の性質を当該形状最適化問題で用いることが可能となった。更に、境界積分型と領域積分型で感度を評価した際の目的関数を比較しており、領域積分型の方が目的関数を最小化していることを数値的に明らかにした。しかしながら、応力が特定の領域に集中している状況下 (特異性の高い物理場) において感度を高い精度で評価することが困難であった。そこで、著者は破壊力学分野で研究が進められてきた一般 J 積分 (Ohtsuka<sup>24-26)</sup>, Ohtsuka and Khudnev<sup>27,28)</sup>, Kimura<sup>29)</sup>) を汎関数の感度評価改善に活用し、その上で Nakazawa<sup>30-32)</sup>では Newton 流体と非 Newton 流体における数値シミュレーションを通して当該形状最適化問題の妥当性を検証した。

これまで著者が構築してきた形状最適化問題を活用して、エネルギー・推進システムにおいて幅広い関連性を有する 2 次元 Jet-In-Cross flow に対して適用する。このような Jet-In-Cross flow (Fig. 1) は、流入入口が 2 カ所存在し ( $\Gamma_{in}$ ,  $\Gamma_{D3}$ ), 矩形境界の接合点  $\Gamma_{D4} \cap \Gamma_{D5}$  近傍で合流するため、時空間に複雑な構造を有する流れ場が発生する。本論文では、このような流れ場に対して矩形

境界である  $\Gamma_{D4} \cup \Gamma_{D5}$  を含む、

$$\begin{aligned} \Gamma_{Design} &= \Gamma_{D1} \cup \Gamma_{D2} \cup \Gamma_{D3} \cup \Gamma_{D4} \cup \Gamma_{D6}, \\ |\Gamma_{D1}| &= |\Gamma_{D2}| = |\Gamma_{D3}| = |\Gamma_{D4}| = |\Gamma_{D6}| = l = 1, \end{aligned}$$

を設計境界とした際に時間変動場の抑制が可能かどうかを数値的に検証する。

## 2. 主問題

### 2.1. The Nonstationary Navier-Stokes Problem

初めに、下記に本論文で扱う計算領域と境界を図示する。

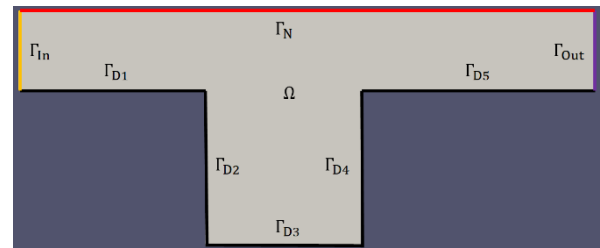


Fig. 1 Initial domain.

ここで、

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_M \setminus (\overline{\Omega_{m1}} \cup \overline{\Omega_{m2}}), \\ \Omega_M &= \{ \mathbf{x} = [x, y]^T \in \mathbb{R}^d; -1.2 < x < 2.5, -1 < y < 0.5 \}, \\ \Omega_{m1} &= \{ \mathbf{x} = [x, y]^T \in \mathbb{R}^d; -1.2 < x < 0, -1 < y < 0 \}, \\ \Omega_{m2} &= \{ \mathbf{x} = [x, y]^T \in \mathbb{R}^d; 1 < x < 2.5, -1 < y < 0 \} \end{aligned}$$

である。次に、主問題を設定するために非定常 Navier-Stokes 方程式を準備する。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \text{ in } \Omega, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega, \quad (1b)$$

$$\mathbf{u} = 16y^2(1 - y^2), v = 0 \text{ on } \Gamma_{in}, \quad (1c)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_{Design}. \quad (1d)$$

$$\mathbf{u} = 0, v = 16x^2(1 - x^2), \text{ on } \Gamma_{D4} \quad (1e)$$

$$\left( p - \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_N, \quad (1f)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \text{ and } \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_{\text{out}} \quad (1g)$$

そこで,  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]^T$ ,  $p$  は速度ベクトルと圧力であり  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  である. また, レイノルズ数  $\text{Re}$  については  $L$  と  $U$  をそれぞれ代表速度と代表長さとし,

$$L = l, \\ U = \max_{0 \leq y \leq \frac{1}{2}} u|_{\Gamma_{\text{in}}},$$

$\nu$  を動粘性率とすることで,  $\text{Re} = LU/\nu$  と定義される. 次に, 有限差分法により式(1)を時間方向に離散化を行い, 各時間ステップにおける弱形式を導出すると式(2)が得られる.

$$\int_{\Omega} G_1^n(\mathbf{x}, \zeta_1) dx = 0, \quad (2a)$$

$$G_1^n(\mathbf{x}, \zeta_1) \\ = \frac{D\mathbf{u}^n}{Dt} \cdot \mathbf{v}^n - (\nabla \cdot \mathbf{v}^n)p^n - (\nabla \cdot \mathbf{u}^n)q^n \\ + \frac{1}{\text{Re}} \nabla(\mathbf{u}^n)^T : \nabla(\mathbf{v}^n)^T. \quad (2b)$$

ここで, 時間ステップ  $n \in [T_1, T_2]$ , 時間間隔  $\Delta t$ ,  $N_1 = \Delta t T_1, N_2 = \Delta t T_2$  を初期, 最終時間ステップ,  $m = N_2 - N_1 + 1$  とする. また,  $\{\mathbf{v}^n, q^n\}$  は,  $\{\mathbf{u}^n, p^n\}$  に対するテスト関数 (随伴変数) であり,  $\zeta_1 = \{\mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{v}^n, q^n\}$  と記述する. 最後に, 形状最適化問題における制約関数  $L_1(\Omega, \zeta_1)$  を以下のように定義する.

$$L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \zeta_1) = \frac{1}{m} \sum_{n=N_1}^{N_2} \int_{\Omega} G_1^n(\mathbf{x}, \zeta_1) dx. \quad (3)$$

## 2.2. The eigenvalue Problem for Snapshot POD

非定常 Navier-Stokes 方程式を時間積分した後, 相関係数行列  $R(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  を構成する.

$$R(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}} dx, \quad (4a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = [(\mathbf{u}^{N_1})^T, \dots, (\mathbf{u}^n)^T, \dots, (\mathbf{u}^{N_2})^T]. \quad (4b)$$

そして, Snapshot Proper Orthogonal Decomposition

(Snapshot POD) の固有値問題は下記のように定式化される.

$$R(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}} = \omega \hat{\mathbf{u}}, \quad (5a)$$

$$\omega = [\omega^1, \dots, \omega^i, \dots, \omega^m], \quad (5b)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{\mathbf{u}}^1, \dots, \hat{\mathbf{u}}^i, \dots, \hat{\mathbf{u}}^m]. \quad (5c)$$

ここで, 固有値  $\omega \in \mathbb{R}^m$ , 固有ベクトル  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  が数値的に求められれば, POD 基底  $\Phi$  が得られる.

$$\Phi = \omega^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{d \times m}, \quad (6a)$$

$$\Phi = [\Phi^1, \dots, \Phi^i, \dots, \Phi^m], \quad (6b)$$

$$\Phi_{\omega}^i = \sqrt{\omega^i} \Phi^i. \quad (6c)$$

最後に, 形状最適化問題における制約関数  $L_2(\Omega, \zeta_2)$  を定義する.

$$L_2(\boldsymbol{\phi}_0, \zeta_2) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m G_2(\mathbf{x}, \zeta_2), \quad (7a)$$

$$G_2(\mathbf{x}, \zeta_2) = \boldsymbol{\alpha} [\delta_{j \rightarrow k} \{\omega \hat{\mathbf{u}} - R(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}}\}]. \quad (7b)$$

ここで,  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  は  $\hat{\mathbf{u}}$  に対する随伴変数,  $\delta_{j \rightarrow k}$  は第  $j$  主成分から第  $k$  主成分の固有値を抽出するための重み関数,  $\zeta_2 = \{\omega, \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\alpha}\}$  である. -

## 2.3. The Reynolds Average Navier-Stokes Problem

ここでは,  $\bar{\zeta}_1 = \{\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{q}\}$  として形状最適化問題における制約関数  $L_1(\Omega, \bar{\zeta}_1)$  を再定義する.. 式(2)は非定常 Navier-Stokes 問題の時間変化に対する総和平均を取っているため Reynolds Average Navier-Stokes 問題を導出することと同意であり, 式(8)は Reynolds Average Navier-Stokes 問題の弱形式となっている.

$$L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1) = \int_{\Omega} \bar{G}_1(\mathbf{x}, \bar{\zeta}_1) dx, \quad (8a)$$

$$\bar{G}_1(\mathbf{x}, \bar{\zeta}_1) = \left( C + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \bar{\mathbf{u}}^T \right) : \nabla \bar{\mathbf{v}}^T \quad (8b)$$

$$- (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) \bar{p} - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \bar{q},$$

$$C = C_1 + C_2, \quad (8c)$$

$$C_1 = -\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}})^T, C_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} \{\Phi_{\omega}^i (\Phi_{\omega}^i)^T\},$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{m} \sum_{n=N_1}^{N_2} \mathbf{u}^n, \bar{p} = \frac{1}{m} \sum_{n=N_1}^{N_2} p^n. \quad (8d)$$

ここで、 $\{\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}\}$ は時間平均速度と圧力であり $\{\bar{\mathbf{v}}, \bar{q}\}$ は対応する随伴変数である。

### 3. 形状最適化問題

#### 3.1. The Objective Functional

当該研究における形状最適化問題の目的関数を下記のように定義する。

$$f(\boldsymbol{\phi}, \omega) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta_{j \rightarrow k} \omega^i. \quad (9)$$

Lagrange 未定乗数法に基づき、目的汎関数を

$$L(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1, \zeta_2) = f(\boldsymbol{\phi}, \omega) - L_1(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1) - L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2) \quad (10)$$

と記述する。

#### 3.2. Lagrange Multiplier Method

式(3-6)を考慮すると、式(16)の領域変分を以下のように導出することができる。

$$\dot{L}(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1, \zeta_2) = \dot{f}(\boldsymbol{\phi}, \omega) - \dot{L}_1(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1) - \dot{L}_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2). \quad (11)$$

ここで、 $f(\boldsymbol{\phi}_0, \omega)$ の物質微分 $\dot{f}(\boldsymbol{\phi}, \omega)$ は、 $\omega \in \mathbb{R}^m$ による $\nabla f(\boldsymbol{\phi}_0, \omega) = 0$ を考慮して

$$\begin{aligned} \dot{f}(\boldsymbol{\phi}, \omega) &= f(\boldsymbol{\phi}, \omega)[\boldsymbol{\phi}, \omega'] + \boldsymbol{\phi} \cdot \nabla f(\boldsymbol{\phi}_0, \omega) + o(\epsilon^2) \\ &= f(\boldsymbol{\phi}, \omega)[\boldsymbol{\phi}, \omega'] + o(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (12)$$

となり、結果的に $\dot{f}(\boldsymbol{\phi}, \omega)[\boldsymbol{\phi}, \omega'] = f(\boldsymbol{\phi}, \omega)[\boldsymbol{\phi}, \omega'] = \sum_{i=1}^m \delta_{j \rightarrow k}(\omega^i)'$ となる。次に、 $\nabla \bar{\zeta}_1 = \{\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}\}$ から、 $L_1(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1)$ の物質微分 $\dot{L}_1(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1)$ は、

$$\begin{aligned} \dot{L}_1(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1)[\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1'] &= L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\bar{\zeta}_1'] + L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\boldsymbol{\phi}], \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\boldsymbol{\phi}] &= \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \left\{ \left( C + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \bar{\mathbf{u}}^T \right) : \nabla \bar{\mathbf{v}}^T \right\} (\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}) \\ - \left\{ \left( 2\boldsymbol{\phi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \boldsymbol{\phi}^T \right) \bar{\mathbf{u}}^T \right\} : \nabla \bar{\mathbf{v}}^T \\ - \left( C + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \bar{\mathbf{u}}^T \right) : (\nabla \boldsymbol{\phi}^T) (\nabla \bar{\mathbf{v}}^T) \\ - \bar{q} \text{tr}[(\nabla \boldsymbol{\phi}^T) (\nabla \bar{\mathbf{u}}^T)] \\ - \bar{p} \text{tr}[(\nabla \boldsymbol{\phi}^T) (\nabla \bar{\mathbf{v}}^T)] \end{bmatrix} dx. \end{aligned} \quad (13b)$$

となる。次に、 $\Phi_{\omega}^i = \sqrt{\omega^i} \Phi^i$ であることを考慮して、 $L_2(\boldsymbol{\phi}_0, \zeta_2)$ の物質微分 $\dot{L}_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)$ は、

$$\dot{L}_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2) = L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\zeta_2'] + L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\boldsymbol{\phi}], \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\boldsymbol{\phi}] &= -2 \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^m \delta_{j \rightarrow k} \boldsymbol{\alpha} \Phi_{\omega}^T \right) \cdot (\boldsymbol{\phi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}) dx \end{aligned} \quad (14b)$$

$$-2 \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}) \sum_{i=1}^m \delta_{j \rightarrow k} \boldsymbol{\alpha} (\Phi_{\omega}^i)^T \Phi_{\omega}^i dx,$$

となる。そして、KKT条件を考慮すると、

$$L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\bar{\zeta}_1'] = 0, \quad (15a)$$

$$L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\zeta_2'] = 0, \quad (15b)$$

より主問題である式(2)及び式(4)と、それに対応する随伴問題を導出することができる。そして、式(2)に対する随伴問題として

$$\begin{aligned} (\nabla \bar{\mathbf{u}}^T) \bar{\mathbf{v}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{q} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{\mathbf{v}} &= 2 \sum_{i=1}^m \delta_{j \rightarrow k} \boldsymbol{\alpha} \Phi_{\omega} \hat{\mathbf{u}} \text{ in } \Omega, \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \text{ in } \Omega, \quad (17b)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \text{ on } \partial \Omega, \quad (17c)$$

が得られる。また、式(4)は自己随伴となるため随伴問題を解く必要がない。

最後に、主変数と随伴変数を式(11)に代入することで下記のように形状感度が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{L}(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1, \zeta_2)[\boldsymbol{\varphi}, \bar{\zeta}_1, \zeta_2] \\ = L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\boldsymbol{\varphi}] + L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\boldsymbol{\varphi}] \end{aligned} \quad (18)$$

### 3.3. Regularization of Sensitivity

前述したように、写像 $\boldsymbol{\phi}$ は $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ が仮定されているが、式(18)で得られる領域変動 $\boldsymbol{\varphi}$ が $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ となっている保証はない。そこで、 $H^1$ 勾配法 (Azegami and Wu<sup>33</sup>) を活用することで形状感度の正則性を担保する。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{E}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}) : \mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi}) dx \\ = -L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\boldsymbol{\varphi}] - L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\boldsymbol{\varphi}]. \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u}^T + (\nabla \mathbf{u}^T)^T \}. \quad (19b)$$

最終的に、微小パラメーター $\epsilon$ を任意に決定し、 $\boldsymbol{\phi}(\Omega) = \boldsymbol{\phi}_0(\Omega) + \epsilon \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega)$ によって領域を変動させる。このような過程を目的関数が収束するまで繰り返すことで最適形状が得られる。

### 4. 数値計算スキーム

本研究では、非定常 Navier-Stokes 問題が定義された領域で、Fig. 1 に図示している境界条件のもとで数値解を求めるが、Freefem++<sup>34</sup>)を用いて数値計算を行っている。速度と圧力の空間方向に対する離散化には、P1-P1 element pair を用いた。

非定常 Navier-Stokes 方程式を計算する際には、時間方向に有限差分法を用いて離散化した。更に、Notsu and Tabata<sup>25</sup>)を元に、特性曲線法を用いて物質微分項を数値的に近似しつつ Brezzi - Pitkaranta's Pressure Stabilization によって圧力を安定に解き、UMFPACK solver<sup>26</sup>)を用いて各時刻の速度場を解いた。Snapshot POD の固有値問題については lapack solver を用いた。随伴問題については、主問題と同様に P1-P1 element pair を用い、UMFPACK solver<sup>26</sup>)を用いて解を求めている。数値計算に必要なパラメーターを下記に記載している。

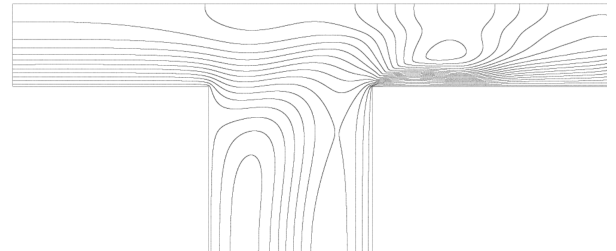
表 1 計算に用いたパラメーター

時間ステップ	$\Delta t = 0.001$
サンプリング開始・終了時刻	$T_1 = 8, T_2 = 10$
三角形の頂点数	38288
形状更新のステップサイズ	$\epsilon = 0.5$
レイノルズ数	Re = 2500

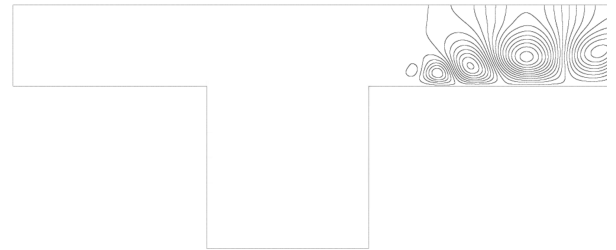
## 5. 数値計算結果

### 5.1. Initial domain

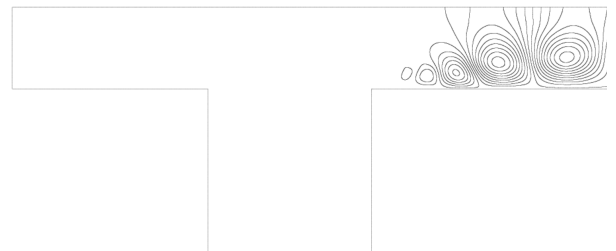
まず初めに、初期形状において非定常 Navier-Stokes 問題を解き、Snapshot POD を行った。Fig. 2 は、初期形状において第 1～第 5 主成分から構成した Streamline であり、固有値や POD 基底を用いて評価した形状感度を Fig. 3 に図示している。ところで、Jet-In-Cross flow は $\Gamma_{D4} \cap \Gamma_{D5}$ 近傍で応力集中が発生し、時空間に複雑な流れ場が観測される。このことを考慮すると、Fig. 3 から $\Gamma_{D4} \cap \Gamma_{D5}$ 近傍で高い形状感度が確認されており、このことが効率的に Jet-In-Cross flow の時間変動場を抑制することに繋がると考えられる。



(a) The 1<sup>st</sup> primary component.



(b) The 2<sup>nd</sup> primary component.



(c) The 3<sup>rd</sup> primary component.

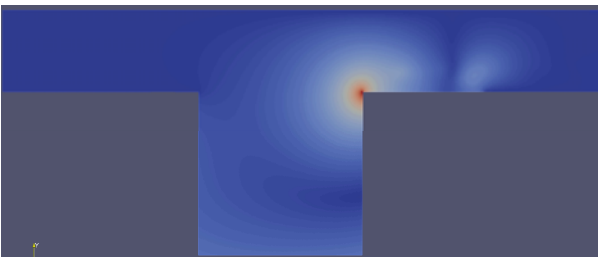


(d) The 4<sup>th</sup> primary component.

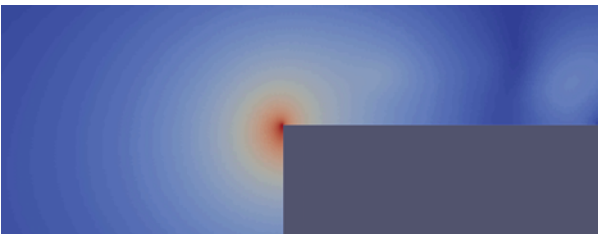


(e) The 5<sup>th</sup> primary component.

Fig.2 Streamline in the initial domain.



(a) Wide View.



(b) Zoom View.

Fig.3 Shape sensitivity in the initial domain.

**5.2. Optimal Shape**

次に、当該形状最適化問題を解き、Fig. 4 に形状更新に対する目的関数を示した。そして、6 ステップ目で十分最小化したことを確認している。そして、Fig. 5 では初期形状と最適形状における運動エネルギーと固有値を比較しており、時間変動場を抑制していることがわかる。Fig. 6 は最適形状の有限要素メッシュであり、Fig.7 は最適形状における Streamline である。Fig. 2 と比較しても渦構造が縮小していることが確認される。

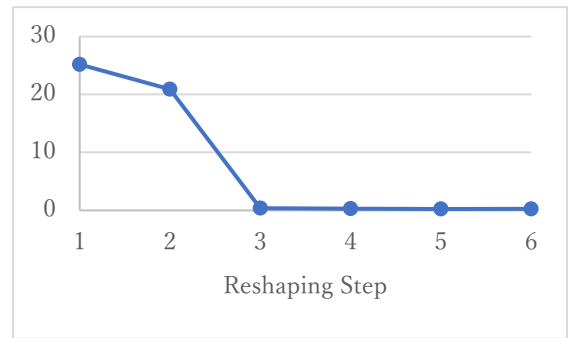
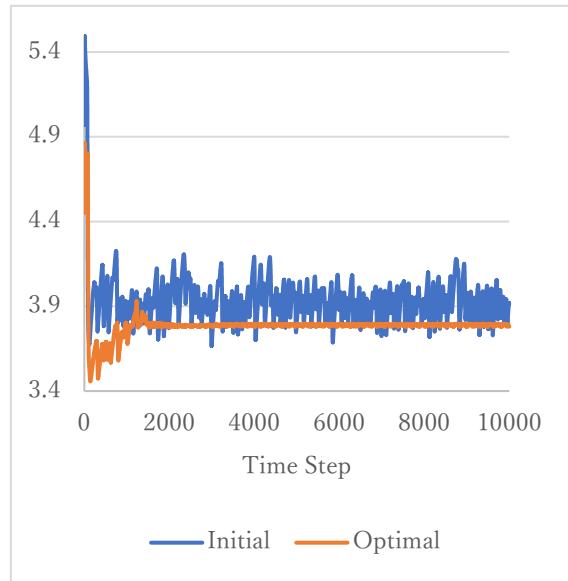
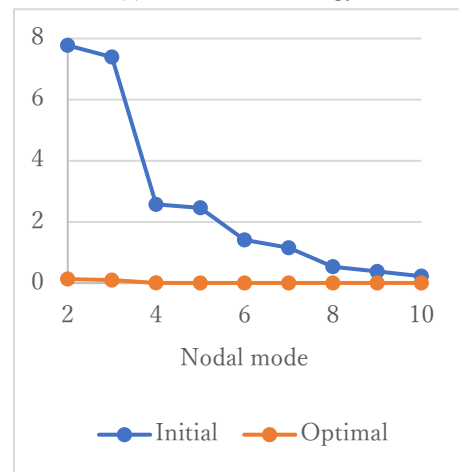


Fig.4 Cost function with reshaping step.

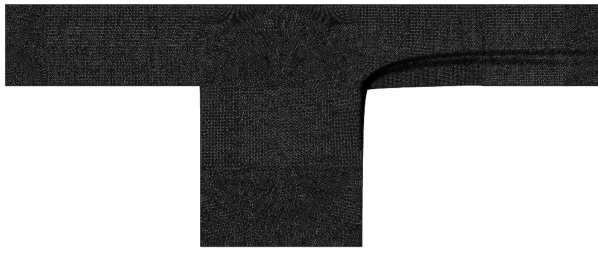


(a) Momentum energy.

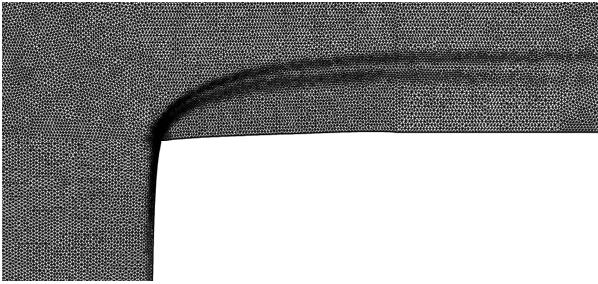


(b) Eigenvalue.

Fig.5 Comparison between the initial and the optimal domains.

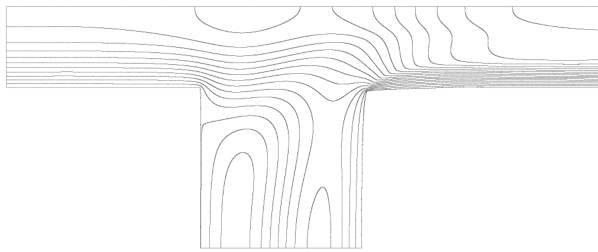


(a) Wide View.

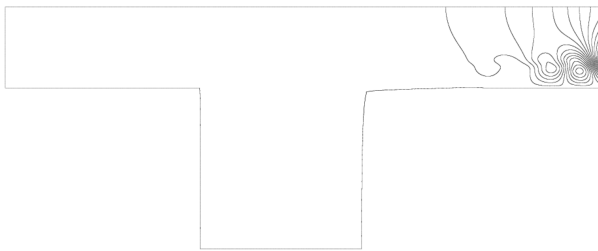


(b) Zoom view.

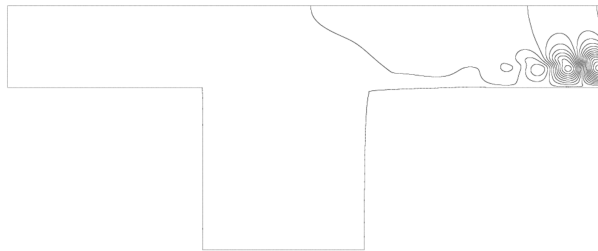
Fig.6 finite element mesh in the optimal domain.



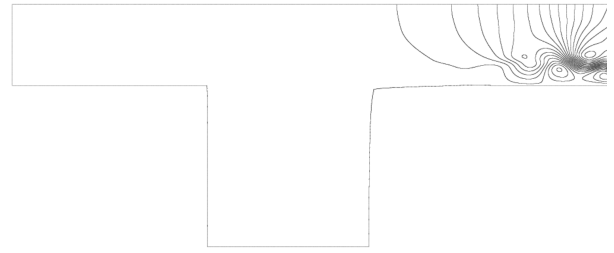
(a) The 1<sup>st</sup> primary component.



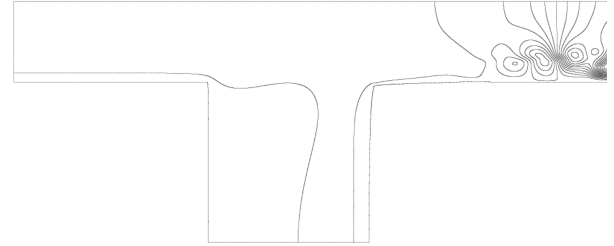
(b) The 2<sup>nd</sup> primary component.



(c) The 3<sup>rd</sup> primary component.



(d) The 4<sup>th</sup> primary component.



(e) The 5<sup>th</sup> primary component.

Fig.7 Streamline in the optimal domain.

## 6. 結言

本研究では、これまで著者が構築してきた形状最適化問題<sup>21-23,30-32)</sup>の概要を示し、2次元 Jet-In-Cross flow に適用した。具体的な内容を下記で記述する。

まず初めに、時間変動場の効率的制御を目的として、Snapshot POD を活用した流れ場の形状最適化問題を定式化した。その際、Snapshot POD で得られた固有値を目的関数と定義し、Reynolds Average Navier-Stokes 問題と Snapshot POD の固有値問題を制約関数とした。そして、Lagrange 未定乗数法と有限要素法に基づき目的汎関数を設定する。次に、この目的汎関数の領域変分を取り、主問題と随伴問題を解いた後、感度を評価する。その際、感度の評価に一般 J 積分を利用し、正則化として  $H^1$  勾配法を用いる。そして、目的関数が最小化するまで逐次的に領域変形を行う。最後に、この形状最適化問題を 2 次元 Jet-In-Flow を採用したところ、時間変動場の固有値が最小化していることを確認した。

## 参考文献

- (1) Pironneau, O., "On optimum profiles in Stokes flow," JFM, 59 (1973), pp.117-128.
- (2) Pironneau, O., "On optimum design in fluid mechanics," JFM, 64 (1974), pp. 97-110.
- (3) Pironneau, O., "Optimal shape design for Elliptic System," Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag New York inc., (1984).

- (4) Haslinger, J. and Makinen R, A. E., "Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation," SIAM, Philadelphia, (2003).
- (5) Moubachir, M and Zolesio, J. P., "Moving Shape Analysis and Control: Applications to Fluid Structure Interactions," Chapman and Hall / CRC Pure and Applied Mathematics. Boca Raton, (2006).
- (6) Sokolowski, J. and Zolesio, J. P., "Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis," Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1991).
- (7) Haug, E. J, Choi, K. K. and Komkov, V., "Design Sensitivity Analysis of Structural System," Mathematics in Science and Engineering, Academic Press Inc., 177 (1986).
- (8) Allaire, G., "Shape Optimization by the Homogenization Method," Applied Mathematical Science, Springer-Verlag New York Inc., (2002).
- (9) Allaire, G., "Numerical Analysis and Optimization," Applied Mathematical Science, Oxford University Press, (2007).
- (10) Mohammadi, B. and Pironneau, O., "Applied Shape Optimization for Fluids," Oxford University Press, (2001).
- (11) 畔上秀幸：領域最適化問題の一解法，日本機械学会論文集 (A 偏)，60, pp. 1479-1486, 1994.
- (12) 海津 聡，畔上秀幸：最適形状問題と力法について，日本応用数学会 論文集，16, pp. 143-156. 2006.
- (13) 海津 聡：ストークス問題における最適形状問題と感度解析を用いた有限要素法，数理解析研究所講究録，1556, pp. 158-169, 2007.
- (14) 畔上秀幸：形状最適化問題，森北出版，2016.
- (15) Theofilis, V., "Advances in global linear instability of nonparallel and three-dimensional flows," Progress in Aerospace Sciences, 39 (2003), pp. 249-315.
- (16) Theofilis, V., "Global linear instability," Annual Reviews of Fluid Mechanics, 43 (2011), pp. 319-352.
- (17) Nakazawa, T and Azegami, H., "Shape optimization of flow field improving hydrodynamic stability," Jpn. J. of Indust. And Applied Math., 33 (2016), pp. 167-181.
- (18) Kiriya, Y., Katamine, E. and Azegami, H., "Shape optimisation problem for stability of Navier–Stokes flow field," Int. J. of Comp. Fluid Dyn., 32 (2018), pp. 68-87.
- (19) Brewster, J., Junipier, P. M., "Shape sensitivity of eigenvalues in hydrodynamic stability, with physical interpretation for the flow around a cylinder," E. J. of Mechanics-B/Fluids, 80 (2020), pp. 80-91.
- (20) Martinez-Cava, A., Valero, E., Vicente, Javier de, Ferrer, E., "Sensitivity gradients of surface geometry modifications based on stability analysis of compressible flows," Phys. Rev. Fluids, 5 (2020), 063902.
- (21) Nakazawa, T., "Shape Optimization of Flow Fields Considering Proper Orthogonal Decomposition," Math.l Anal. of Cont. Mech. and Indust. Appl., 3 (2020), pp.125-145.
- (22) Nakazawa, T. and Nakajima, C., "Optimal Design by Adaptive Mesh Refinement on Shape Optimization of Flow Fields Considering Proper Orthogonal Decomposition," IIS, 25 (2019), pp.147-160.
- (23) Nakazawa, T., "Flow control by the fusion between mathematical and data science," JAXA Special Publication, (2019), JAXA-SP-18-005.
- (24) Ohtsuka, K., "Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics 1," Hiroshima Math. J., 11 (1981), pp. 21-52.
- (25) Ohtsuka, K., "Generalized J-integral and its application 1-Basic theory-", Jpn. J. Appl. Math. J., 2 (1985), pp. 329-350.
- (26) Ohtsuka, K., "Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics 2," Hiroshima Math. J., 6 (1986), pp. 327-352.
- (27) Ohtsuka, K and Khludnev, A., "Generalized J-integral method for sensitivity analysis of static shape design," Control and Cybernetics, 29 (2000), pp. 513-533.
- (28) Ohtsuka, K and Khludnev, A., "shape differentiability of Lagrangians and application to Stokes problem," SIAM J. Control Optim., 56 (2018), pp. 3668-3684.
- (29) Kimura, M., "Shape derivative of minimum potential energy: abstract theory and applications," Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling Lecture notes Volume IV, Topics in Mathematical Modeling, (2008), pp.1-38.
- (30) Nakazawa, T., "Generarized Shape Optimization with Snapshot POD," JSCAM, 75 (2019), pp.135-143.
- (31) Nakazawa, T., "Shape Optimal Problem based on the sensitivity evaluated by the Generalized J Integral considering RANS and Snapshot POD," JFST, 14(2019), page JFST0015.
- (32) Nakazawa, T., Misaka, T. and Poinard, C., "Shape Optimization for Suppressing Coherent Structure of Two-dimensional Open Cavity Flow", JFST, 16(2021), page JFST0002.



- (33) Azegami, H. and Wu, Z.: Domain Optimization Analysis in Linear Elastic Problems: Approach Using Traction Method, JSME Int. J. Ser. A 39, pp. 272–278, 1996.
- (34) Hecht, F.: New development in FreeFem++, J. of Numerical Math, 20, pp. 251-265, 2012.
- (35) Notsu, H. and Tabata, M.: Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for Oseen equations, J. Sci. Comput, 65, pp. 940-955, 2015.
- (36) Davis, T.: Algorithm 832: UMFPACK, an unsymmetric-pattern multifrontal method, ACM Transactions on Math. Software, 30, 196-199, 2004.