

ホールスラスタの勾配ドリフト不安定性と電子輸送促進に関する数値解析

Numerical Analysis on Gradient Drift Instability and Electron Transport Enhancement in Hall Thrusters

○川嶋 嶺・小紫 公也（東大）

○ Rei Kawashima・Kimiya Komurasaki (The University of Tokyo)

Abstract

An axial-azimuthal two-dimensional simulation is conducted to analyze a gradient drift instability (GDI) in a Hall thruster. A particle-fluid hybrid model is used for the plasma flow where the quasineutral plasma is assumed. The magnetized electron fluid is calculated by using a method called the differential operator switching (DOS). The DOS method contributes a stable computation of the magnetized electron fluid, which enables the analysis of physical oscillation phenomenon of GDI. The simulated plasma properties exhibit vortex-like structures in the ion acceleration and plume regions. An effective electron mobility is obtained from the simulated plasma properties. Enhanced electron transport is observed at the plume region, and the cross-field electron mobility is comparable with the mobility obtained from the Bohm diffusion model.

1. はじめに

宇宙電気推進システムの一つであるホールスラスタは、全電化衛星の開発活性化とともに近年急速に実用化が進められ¹⁾、基本的な設計技術は成熟してきている。推進機設計のアプローチも実験によって最適化を図るものから、数値シミュレーションを駆使した Computer-Aided-Engineering (CAE)、または Digital Twin といったフェイズに移行しつつある。今後さらに高性能な推進機を開発するための設計最適化には、忠実度の高いモデルを用いた正確な数値シミュレーション技術が必要不可欠となる。

ホールスラスタでの内部プラズマ流れの数値シミュレーションにおける課題の一つが電子異常輸送問題である。この問題の重要性については説明を割愛するが、直交する電場と磁場を利用するホールスラスタにおいて、磁化された電子の挙動はプラズマ特性および推進機性能に関わる物理である。通常ホールスラスタの性能解析に用いられる軸方向-半径方向の2次元シミュレーションにおいては、電子異常輸送に関する経験式を用いることによって対応してきた。この経験式はキセノンを推進剤に用いるホールスラスタ (Stationary Plasma Thruster: SPT) に関しては検討されており²⁾、得られた経験式を用いた推進機性能予測も実用的なものとなっている³⁾。しかしながら、キセノンに代わる推進剤を用いた場合や、アノードレイヤ型ホールスラスタ (以下 Thruster with Anode Layer: TAL) など SPT 型とは異なる特徴をもつ推進機に関する電子異常輸送の経験式

は得られていない。今後さらなる先進的な設計を持つホールスラスタに対し正確な数値シミュレーションを行っていくためには、電子輸送を理論的に解析する手法が求められる。

電子異常輸送の原因に関する仮説の一つは、磁場を横切る方向に誘起されるプラズマ振動や乱流に関するものである。ホールスラスタにおいては、周方向 ($E \times B$ 方向) に電位および電子密度が振動し、されにそれらの位相がずれていた場合には電子の軸方向輸送を誘起する。最近の研究によって、周方向振動を引き起こしうる現象として、電子サイクロトロンドリフト不安定性 (Electron Cyclotron Drift Instability: ECDI) と勾配ドリフト不安定性 (Gradient Drift Instability: GDI) が示唆されている。ECDI と GDI はともにホールスラスタのチャンネル出口付近とプルーム領域において引き起こされるものであり、いずれか片方、もしくは両方の振動現象によって電子輸送が促進されると考えられている。

GDI はプラズマ密度と磁束密度の勾配によって引き起こされるもので、レイリー・テイラー不安定性の一種である。ホールスラスタにおけるドリフト不安定性は摂動モデルによって多く解析されており^{4,5)}、加速領域~プルーム領域において、GDI が誘起されることが示唆されている。しかしながら、GDI を数値シミュレーションによって再現し、不安定性が飽和した準定常状態におけるプラズマの挙動や、GDI が誘起する電子輸送を解析した例は多くない。Lam et al. や Fernandez

et al. はハイブリッドモデルを用いて SPT の軸方向-周方向 ($Z-\theta$) 2次元解析を行い、特に回転スポーク現象と呼ばれる低周波数の周方向振動について解析を行っている^{6,7)}。これらのシミュレーションでは数十～数百 kHz で周方向に伝播する振動現象が観測されたものの、この振動現象による有意な電子輸送促進効果はなかったと報告されている⁸⁾。

一方で著者らはアノードレイヤ型推進機を対象としてハイブリッド PIC を用いた $Z-\theta$ 次元解析を行い、渦に近い構造を持つ GDI を観測した⁹⁾。このシミュレーションでは数値的な不安定性を抑えた磁化電子流体計算を行うことで、GDI を高解像度で解析している。またシミュレーション結果では、特にイオン加速領域とプルム領域において、GDI によって磁場を横切る電子輸送が、古典拡散によるものよりも 10 倍以上促進されることが明らかとなった。しかしながら、この結論は上述の Lam et al. の結論とは異なるものであるため、SPT を対象として詳細な検討が必要である。

本研究では、SPT における GDI の数値解析を行い、電子輸送促進効果を検証することを目的とする。SPT-100 推進機を対象に $Z-\theta$ 次元シミュレーションを行い、解析結果で得られた不安定現象の特徴について議論する。シミュレーション結果から実効的な電子移動度を抽出することで、GDI による電子輸送促進効果を検証する。これらの議論を通じ、ハイブリッドモデルを用いた $Z-\theta$ 次元シミュレーションが、TAL および SPT における電子異常輸送を解析可能であるか考察する。

2. ハイブリッドモデルによるホールスラスト解析

2.1. 軸方向-周方向二次元ハイブリッドモデル

プラズマモデルとして、イオン及び中性粒子を粒子ととらえ、電子を流体として近似する粒子-流体ハイブリッドモデル (Hybrid-PIC 法) を用いた。電子も粒子として扱う全粒子モデルと比較すると、タイムステップがプラズマ振動の周期や電子の CFL 条件に制限されず、長時間解析が可能となる。さらに、ハイブリッドモデルにおいて準中性プラズマを仮定することで、空間刻みがデバイ長によって制限されなくなるため、広大な計算領域を取ることが可能となる。

中性粒子流れを PIC 法で解析し、イオン生成も計算することから、電離振動や Rotating Spoke などの数十 kHz 程度の振動現象から、Ion Transit Time Instability や GDI などの数百 kHz 程度の不安定性を解析できる。一方、電荷分離や電子サイクロトロン運動は直接計算しないため、プラズマ振動や電子サイクロトロン振動 (Electron Cyclotron Drift Instability: ECDI) は解像することができない。故に、本モデルによるシミュレーション結果に ECDI が現れることはない。基本的な物理モデルは先行研究で用いられていたものと同様である^{9,10)}。

2.2. 微分演算子置換法

ハイブリッドモデルでは準中性プラズマ中電子流体モデルを用いているが、磁化された電子流体を数値的振動を発生させず安定に解くことは容易ではない。特にホールスラストにおける $Z-\theta$ 平面、すなわち磁力線を横切る平面内での電子流体を計算する場合は、線形方程式を解く際の対角優位性が損なわれ、計算が不安定となることが報告されている^{7,11)}。GDI などの物理的な振動現象を正しく解像するためには、数値的振動を最小限に抑えた計算手法を採用する必要がある。著者らは、 $Z-\theta$ 平面における電子流体を安定に計算するための手法として、微分演算子置換法 (Differential Operator Switching: DOS) と呼ばれる手法を考案した⁹⁾。

DOS はドリフト現象が支配的である方程式系、すなわちある方向への勾配が、それと直交する方向への流束を強く誘起するような方程式系を安定に計算するために考案された手法である。ここではその本質的な部分をピックアップして紹介する。 $Z-\theta$ 平面において、空間電位を計算するための電子の拡散方程式は以下の形を取る。

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left(-n_e \mu_{\perp} \begin{bmatrix} 1 & \Omega_e \\ -\Omega_e & 1 \end{bmatrix} \nabla \phi \right) \\ &= \nabla \cdot \left(-\mu_{\perp} \begin{bmatrix} 1 & \Omega_e \\ -\Omega_e & 1 \end{bmatrix} \nabla (n_e T_e) \right) - S_{\text{ion}}. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで μ_{\perp} , Ω_e , S_{ion} はそれぞれ、古典拡散による磁力線を横切る方向の電子移動度、電子ホールパラメータ、イオン生成率である。左辺は電場による拡散とドリフト ($E \times B$ ドリフト)、右辺第 1 項は圧力による拡散とドリフト (反磁性ドリフト) を表している。ホールスラスト内部では電子が強く磁化され、ホールパラメータは $\Omega_e \sim 10^3$ となるため、この拡散方程式はドリフト項 (非対角成分による項) が支配的となっている。ここで対角成分による通常の拡散項は、中心差分を用いることで対角優位性を保持したまま安定に計算することができる。一方、非対角成分によるドリフト項は、どのような離散化手法を適用したとしても、対角優位性を保持することができず、数値不安定を誘起する¹²⁾。このドリフト項を安定に計算するため、この拡散方程式をそれと等価な別の方程式に変換することを考える。

ここでは $\Omega_e \rightarrow \infty$ の場合を考え、特に以下の $E \times B$ ドリフトによる異方性拡散項を離散化する手法について考える。

$$\nabla \cdot \left(-n_e \mu_{\perp} \begin{bmatrix} & \Omega_e \\ -\Omega_e & \end{bmatrix} \nabla \phi \right) = 0. \quad (2)$$

以下で扱う $E \times B$ ドリフトに対する変換法は、反磁性ドリフトによる異方性拡散項に対しても適用可能である。 $\sigma_{\wedge} \equiv n_e \mu_{\perp} \Omega_e$ と定義すると、上の方程式は以下の様に書き直せる。

$$\nabla \cdot \left(- \begin{bmatrix} & \sigma_{\wedge} \\ -\sigma_{\wedge} & \end{bmatrix} \nabla \phi \right) = 0. \quad (3)$$

この左辺を展開すると、以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left(- \begin{bmatrix} & \sigma_{\wedge} \\ -\sigma_{\wedge} & \end{bmatrix} \nabla \phi \right) \\ &= \nabla \cdot \left(-\sigma_{\wedge} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \sigma_{\wedge} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^T \\ &= -\frac{\partial \sigma_{\wedge}}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\wedge}}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

この展開式をさらに以下の様に変換する。

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \sigma_{\wedge}}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\wedge}}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial \sigma_{\wedge}}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\wedge}}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \phi \frac{\partial^2 \sigma_{\wedge}}{\partial x \partial y} + \phi \frac{\partial^2 \sigma_{\wedge}}{\partial x \partial y} \\ &= \nabla \cdot \left(\phi \frac{\partial \sigma_{\wedge}}{\partial y}, -\phi \frac{\partial \sigma_{\wedge}}{\partial x} \right)^T \\ &= \nabla \cdot \left(\begin{bmatrix} & \phi \\ -\phi & \end{bmatrix} \nabla \sigma_{\wedge} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

すなわち、式 (3) と以下の式は数学的に等価である。

$$\nabla \cdot \left(\begin{bmatrix} & \phi \\ -\phi & \end{bmatrix} \nabla \sigma_{\wedge} \right) = 0. \quad (6)$$

この変換過程で、2階空間微分演算子がかかる変数が ϕ から σ_{\wedge} に置換されている。この手法を微分演算子置換法と呼称する。式 (6) は変数 ϕ に対しては1階微分の方程式であるため、圧縮性 CFD など発展してきた風上差分法を適用すれば安定に計算することができる。詳細な離散化式は文献⁹⁾を参照されたい。尚、式 (6) は保存形式 (左辺が数値流束の発散である) となっているが、ここでの数値流束は電子流束とは異なることに注意が必要である⁹⁾。

ドリフト項が支配的である拡散方程式を解く上で、この手法は数学的に矛盾がなく、かつ数値不安定を生じない点で有用であると考えられる。しかしながら、計算精度の検証が十分に行われておらずこの点が今後の検討事項となっている。本研究では計算の安定化を保証するため、式 (6) に対し1次精度風上差分による離散化を用いて解析を行っている。

2.3. 計算条件

計算対象は SPT-100 を想定する。シミュレーションに際し仮定したパラメータを表 1 に示す。また計算領域と放電チャンネルの位置関係、半径方向磁束密度の軸方向分布、および境界条件を図 1 に示す。磁場は全て半径方向成分のみを持ち、チャンネル出口においてピーク値 18 mT を持つと仮定する。計算領域はチャンネル全周からなる円筒を想定するが、本解析では円筒を周方向に展開した平面での二次元解析を行う。すなわち、円筒座標系 $Z-\theta-R$ を直交座標系 $X-Y-Z$ に変換して計算を行っている。推進剤はキセノンを想定し、中性粒子としてアノード側の境界より周方向一様に供給する。電子流体の境界条件としては、アノード側で放電電圧である 300 V を与え、カソード側の境界では、カソード-

表 1 軸方向-周方向の二次元解析で使用した計算パラメータ。

パラメータ名	値
チャンネル中心線直径	85 mm
チャンネル幅	15 mm
推進剤流量	5.0 mg/s
放電電圧	300 V
ピーク磁束密度	18 mT
アノード・チャンネル壁面温度	650 K
カソード側境界電位	30 V
グリッド数	96×96
PIC 時間刻み	10 ns
電子流体時間刻み	0.3 ns
電子拡散モデル	古典輸送のみ

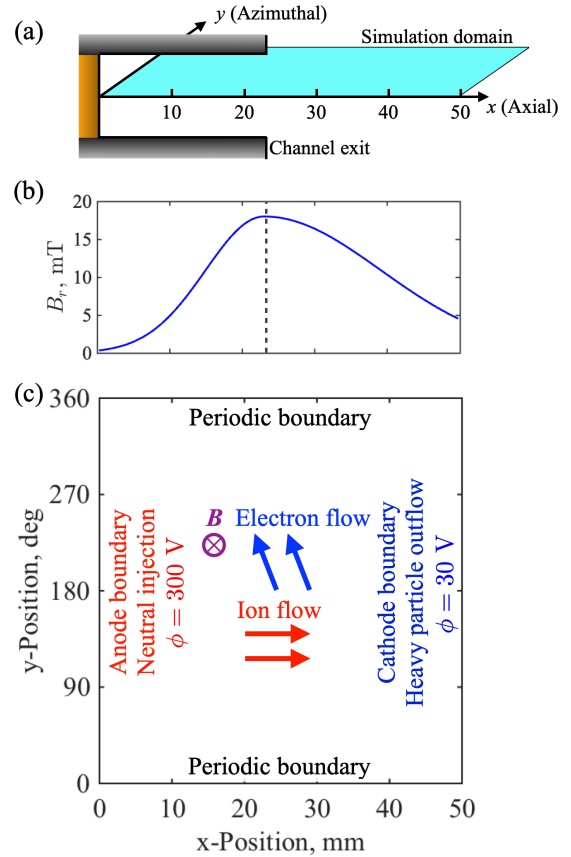


図 1 軸方向-周方向の二次元解析の計算条件。(a) 放電チャンネルと計算領域の位置関係。(b) 半径方向磁場の軸方向分布。(c) 計算領域および境界条件。

イオンビーム間の電位が放電電圧の 10%程度であると仮定し、30 V のディリクレ条件を与えた。また、電子温度は電子のエネルギー方程式を解くことによって計算しているが、その境界条件として、カソード側境界において 2 eV、アノード側境界において $\nabla T_e = 0$ を設定している。イオン、中性粒子、電子の全てについて、上下端の周方向境界については周期境界条件を適用する。

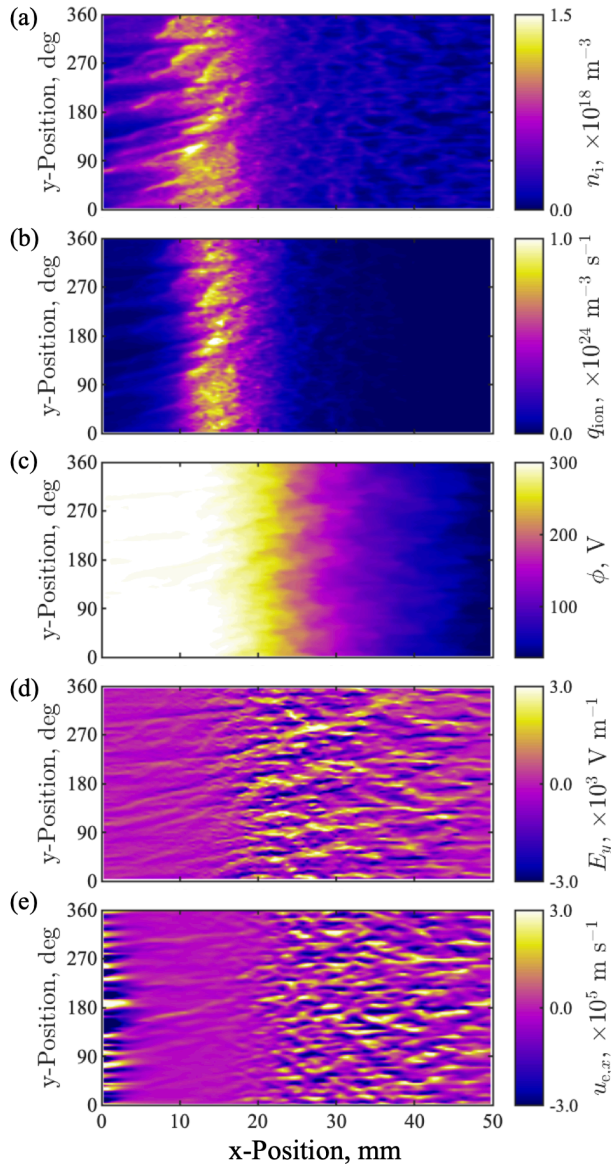


図 2 Z- θ 次元解析によって得られた二次元プラズマ特性分布。(a) イオン数密度 n_i , (b) イオン生成率 q_{ion} , (c) 空間電位 ϕ , (d) 周方向電場 E_y , (e) 軸方向電子流速 $u_{e,x}$.

3. 結果と考察

3.1. 2次元プラズマ特性分布

Z- θ 解析により得られたプラズマ特性を図 2 に示す。本解析の結果において、先行の TAL 解析で見られたものに類似する渦構造を持つ GDI が観測された⁹⁾。GDI によってプラズマ密度は周方向に振動し、さらにイオン生成率も周方向非一様となる。この解析で見られる振動現象では、同期した構造が周方向に伝播する様子は確認されず、ランダムな渦に近い構造が確認された。この振動現象は、Ion transit time oscillation と同様の数百 kHz の周波数を持っていた。GDI によって空間電位も周方向に振動し、kV/m オーダーの周方向電場が生じている。この周方向電場と半径方向磁場による $E \times B$ ドリフトによって、軸方向の電子の挙動も振動していた。

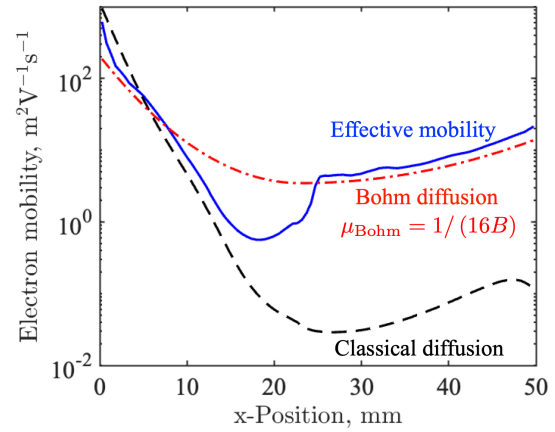


図 3 2次元解析から得られた実効電子移動度の軸方向分布。古典拡散による電子移動度 μ_{\perp} およびボーム拡散による電子移動度 μ_{Bohm} を表示している。

3.2. 電子輸送促進効果

Z- θ シミュレーションの結果から実効的な電子移動度を抽出し、GDI による電子輸送促進効果を検証する。軸方向の電子流束は以下の様に、軸方向勾配による拡散効果、および周方向勾配によるドリフト効果によって誘起される。

$$\begin{aligned} \Gamma_{e,z} &= \Gamma_{e,diffusion} + \Gamma_{e,drift} \\ &= \mu_{\perp} \cdot \left(n_e E_z + \frac{\partial}{\partial z} (n_e T_e) \right) \\ &\quad - \mu_{\perp} \Omega_e \left(e n_e E_{\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} (n_e T_e) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

実効的な電子移動度はこの電子流束がすべて軸方向勾配によるものと仮定して定義される。

$$\Gamma_{e,z} = \mu_{\perp,eff} \cdot \left(n_e E_z + \frac{\partial}{\partial z} (n_e T_e) \right) \quad (8)$$

図 4 に数値解析結果から得られた実効的な電子移動度を示す。比較のため、古典拡散に基づく電子移動度、およびボーム拡散モデルから得られる電子移動度 $\mu_{Bohm} \equiv 1/16B$ を示している。特に GDI が誘起される $x > 15$ mm の領域において、実効電子移動度は古典拡散によるものよりも 10–100 倍程度増加し、 $x > 23$ mm では、ボーム拡散による電子移動度と比肩する値となっている。本解析の結果より、先行研究における TAL の解析同様、SPT においても GDI による電子輸送促進効果を解析可能であることが明らかとなった。

4. 結論

SPT 型のホールスラスタにおける勾配ドリフト不安定性の発生と電子輸送促進効果を解析するため、軸方向–周方向の二次元数値シミュレーションを行った。準中性を仮定したハイブリッドモデルを採用し、磁化された電子の移動度では古典拡散のみを仮定した。軸方向–周方向平面における磁化電子流体を安定に計算するため、微分演算子置換法と呼ばれる手法を用いた。

数値シミュレーションの結果では、渦のような構造を持つ勾配ドリフト不安定性が確認された。プラズマ密度や空間電位といったパラメータに不安定性が生じ、周方向電場による $E \times B$ ドリフトによって、電子流れに振動が現れている様子が確認された。

GDI による電子輸送促進効果を検証するため、シミュレーション結果から実効的な電子移動度を抽出した。実効的な電子移動度は古典拡散によるものより 10–100 倍程度増加しており、SPT においても GDI による電子輸送促進効果を解析可能であることが明らかとなった。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP20H02346 の助成を受けたものです。

参考文献

- 1) 船木一幸, 張科寅, 佐野伊彦, 深津敦, 田代洋輔, 椎木泰三, and 中村陽一郎, “オール電化衛星向けホールスラスタの開発状況,” 日本航空宇宙学会誌, Vol. 66, No. 11, 2018, pp. 346–351.
- 2) Koo, J. W. and Boyd, I. D., “Modeling of anomalous electron mobility in Hall thrusters,” *Physics of Plasmas*, Vol. 13, No. 3, 2006, pp. 033501.
- 3) Mikellides, I. G., Katz, I., Hofer, R. R., Goebel, D. M., de Grys, K., and Mathers, A., “Magnetic shielding of the channel walls in a Hall plasma accelerator,” *Physics of Plasmas*, Vol. 18, No. 3, 2011, pp. 033501.
- 4) Esipchuk, Y. B. and Tilinin, G. N., “Drift Instability in a Hall-Current Plasma Accelerator,” *Soviet Physics. Technical Physics*, Vol. 21, 1976, pp. 417.
- 5) Frias, W., Smolyakov, A. I., Kaganovich, I. D., and Raitses, Y., “Long wavelength gradient drift instability in Hall plasma devices. II. Applications,” *Physics of Plasmas*, Vol. 20, No. 5, 2013, pp. 052108.
- 6) Lam, C., Fernandez, E., and Cappelli, M., “A 2-D Hybrid Hall Thruster Simulation That Resolves the $E \times B$ Electron Drift Direction,” *Plasma Science, IEEE Transactions on Plasma Science*, Vol. 43, No. 1, Jan 2015, pp. 86–94.
- 7) Fernandez, E., Dowdy, C., and Aley, J., “Characterization of Fluctuations in Hybrid Axial-Azimuthal Hall Thruster Simulations,” 34th International Electric Propulsion Conference, IEPC-2015-206, 2015.
- 8) Lam, C. M., “Two-dimensional Axial-Azimuthal ($Z-\theta$) Simulation of Cross-field Electron Transport in a Hall Thruster Plasma Discharge,” Ph.D. Thesis, Stanford University, 2015.
- 9) Kawashima, R. and Komurasaki, K., “Two-dimensional hybrid model of gradient drift instability and enhanced electron transport in a Hall thruster,” *Physics of Plasmas*, Vol. 28, No. 6, 2021, pp. 063502.
- 10) Kawashima, R., Hara, K., and Komurasaki, K., “Numerical analysis of azimuthal rotating spokes in a crossed-field discharge plasma,” *Plasma Sources Science and Technology*, Vol. 27, No. 3, 2018, pp. 035010.
- 11) Hara, K. and Boyd, I. D., “Axial-azimuthal hybrid-direct kinetic simulation of Hall effect thrusters,” 34th International Electric Propulsion Conference, IEPC-2015-286, 2015.
- 12) Kawashima, R., Komurasaki, K., and Schönherr, T., “A hyperbolic-equation system approach for magnetized electron fluids in quasi-neutral plasmas,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 284, 2015, pp. 59–69.