

超音速縦渦の線形安定解析

比江島 俊彦（阪府大工）

Linear Stability Analysis of Supersonic Streamwise Vortices

Toshihiko HIEJIMA

Dept. of Aerospace Eng., Osaka Prefecture University

ABSTRACT

This paper describes a theoretical study on the stability of supersonic streamwise vortices. The spatial as well as temporal stability calculations are made for a single streamwise vortex in a Mach 2.45 free stream. The basic flow data necessary for the stability analysis such as the velocity and vorticity distributions are obtained by conducting numerical simulation of the flow past the so-called alternating wedge vortex generator. By describing the results for the unstable modes the spatial stability characteristics are shown to be in good agreement with those of temporal one. It is emphasized that the streamwise vortex is demonstrated to be much more unstable and powerful in enhancing supersonic mixing, compared with the so-called mixing layer. Importantly this comparison is made possible by newly defining the convective Mach number for the streamwise vortex.

Key Words: Linear stability; supersonic mixing; streamwise vortex; compressible swirl flow; q -Vortex

1. はじめに

亜音速混合層においては、Brown-Roshko 渦に代表される大規模な横渦とその内部に生まれる小規模で3次元的な乱流渦の働きにより、流れは高い混合能をもつ。しかし超音速の混合層では、圧縮性の影響によって横渦の成長が強く抑制されるため、混合能は著しく低下する。このような超音速域において混合を人為的に促進させる制御を行う場合には、圧縮性の影響が緩和される縦渦の利用が効果的である¹⁾。この場合、人為的に導入される縦渦には、その内部に小規模で3次元的な乱流渦を容易に発生させる性質（不安定性）が求められ、それゆえに、縦渦にどのような渦度場を与えるかが重要なポイントになる。剛体回転に近い滑らかな渦度場は、渦軸方向の流れが同様であるとき安定である。しかし、中心部の渦度をゼロにした中空縦渦は不安定で激しい攪乱増幅特性をもつ²⁾。一方、縦渦がなくても軸対称後流のような分布の渦度場は不安定である。この縦渦の渦度場と軸対称後流の渦度場が合成された流れが、どのような不安定特性を有するかは大変興味深い。超音速混合の促進制御法として提案された西岡の縦渦導入ストラット^{1, 3)}と Settles らの Swirl-vanes^{4, 5)}に着目すると、これらが超音速主流中に作り出す縦渦は上記の合成渦度場に近いものとなる。しかしながら、このような超音速縦渦の安定性は、これまでほとんど調べられていない。

そこで本論文では、まず縦渦導入ストラットによって作られる超音速縦渦分布を数値計算で求めてモデル化した。次に、その縦渦の不安定特性を非粘性の圧縮性線形安定解析により、時間増幅と空間増幅に関して調べた。また、その不安定モードの圧縮性効果を評価するために、新しく縦渦に適用できる移流マッハ数の定義を提案し、それを用いて既知の混合層と縦渦の不安定特性を比較した。

2. 縦渦導入ストラット¹⁾

主流マッハ数 2.45 の縦渦導入ストラット周り流れを3次元の数値計算により求めた。Fig. 1 に、ストラット CNR11-R15 の横断面の等密度線図と CNR11-R22 の横断面および下流からみた断面の等渦度面図を示す。(CNR は Counter-rotation を、最初の数字はスパン方向の幅 [mm]

を、最後の数字は後縁スロープの角度 [deg] を表す。) これらの図から円形に近い楕円型の縦渦の形成と、ストラット後縁で生じる剪断層を渦内に取り込む様子がわかる。計算では、乱流混合を捉える分解能はないが、大きな構造の平均流分布をみることは可能と考える。以下では CNR11-R22 による縦渦の平均流について調べた。Fig. 2 に、3つのストラット下流位置 X での質量流束分布 ρU_x の計測値⁶⁾と計算との比較を示す。上下壁面で反射する衝撃波(ストラット前縁で発生する)の位置が実験と計算で異なるため(この計算では壁面境界層の剥離等は模擬不可)、 $X = 10$ mm 以外は定量的にずれがあるが定性的な分布はどれも近い。Fig. 3(A), (B) にそれぞれ $X = 22.25$ mm の断面での軸方向の速度分布と渦度分布を、(C) に流れ方向の循環分布を示す。大規模構造として、縦渦を評価する上で循環が重要である。この縦渦の循環 Γ は、ストラット高さ h と垂直速度成分のみで評価した非粘性の渦層概算⁷⁾では $4.76 \text{ m}^2/\text{s}$ 、数値計算では縦渦が形成された $X \geq 20$ mm の平均値が $4.67 \text{ m}^2/\text{s}$ である。このことから循環の概算評価法が精度面でも十分有効であることがわかる。なおストラット高さ 10 mm の CNR11-R15, CNR11-R22 の形状・気流条件の詳細は文献^{3, 7)}を、循環の小さな縦渦として取り上げる壁面設置型ストラット WCNR については文献⁸⁾を参照されたい。

3. 超音速縦渦モデル

Fig. 3 に示すように、縦渦導入ストラットにより形成される超音速縦渦は上述の合成渦度場に近しいことがわかる。この循環値と分布の特徴を踏まえた超音速縦渦を以下に示す式で表現する。ただし、周方向速度 U_θ 、軸方向速度を U_x 、スワール数 q (循環: $\Gamma = 2\pi q$)、軸方向主流速度の速度欠損 μ とする。

$$\begin{aligned} U_\theta(r) &= \frac{q}{r} (1 - e^{-Cr^2}) \\ U_x(r) &= 1 - \mu e^{-Dr^2} \end{aligned} \quad (1)$$

密度分布と圧力分布はそれぞれ動径方向速度分布 u_r をゼロと仮定し、Euler 方程式の動径方向運動量の式とエントロピーの式より求めた。(ここでは簡単のため非粘性、等エントロピー渦を仮定。) Fig. 3(A)~(C) の分布と循環の

値から、2 節の CNR11-R22 の縦渦を式 (1) に対応させると、 $q = 0.27, \mu = 0.35, C = 3.03, D = 4.0$ となる (渦軸方向の主流速度 550 m/s, 渦核半径 5 mm で無次元化)。WCNR の場合は $q = 0.1, \mu = 0.2, C = 2.03, D = 4.0$ (循環 $0.8 \text{ m}^2/\text{s}$, 渦核半径 2.5 mm) である。

乱流混合の観点からは、渦レイノルズ数すなわち循環を大きくすることが、縦渦を崩壊させる小規模渦運動の活発化につながるため重要な指標となる⁷⁾。CNR11-R22 による循環は比較的大きいが、Swirl-vanes タイプ⁵⁾ をここでの値に換算すると $q = 0.165$ である。超音速流中の縦渦の形成は非圧縮流と異なり、循環 (あるいはスワール数) には上限が存在する。エネルギーの点からみると、スワール成分は渦のある低圧領域にほとんど局在する。速度欠損がない流れの非粘性のスワール数の上限値は、縦渦モデルの渦中心軸上の圧力が正であるという次の条件から評価できる。

$$q < \frac{1}{\sqrt{(\gamma - 1) \cdot I_\theta(\infty) M_\infty}} \quad (2)$$

ただし、 $I_\theta(\infty)$ は U_θ から決まる値、 γ : 比熱比、 M_∞ : 主流マッハ数 (e.g. $M_\infty = 2.45$ で、 $q_{\max} \approx 0.45$)。

4. 線形安定解析の結果と考察

まず、マッハ数 2.45 の超音速縦渦の安定解析を行った。縦渦の線形安定解析における攪乱支配方程式、境界条件およびその解法は文献⁹⁾ と同じである。攪乱 $\tilde{\Phi}$ のノーマルモードは以下のように表わされる。

$$\tilde{\Phi}(r) = \Phi(r) \exp[i(\alpha x + m\theta - \omega t)] \quad (3)$$

ただし、周方向波数: m , 軸方向波数: α , 角周波数: ω , 時間増幅では、 $\omega = \omega_r + i\omega_i$, 空間増幅では、 $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, とする。CNR11-R22 については、Fig. 4(A)~(C) に時間増幅、(D)~(F) に空間増幅の周波数と軸方向波数の特性について求めた結果を、WCNR については、空間増幅特性のみ Fig. 4(H) に示す。縦渦の不安定性では、周方向のモードがスパイラルも含めて重要な働きをする。 $m \geq 0$ の正のモードは安定であるため、負の波数 $m = -1 \sim -12$ まで調べた。非粘性の結果であるが、増幅率は $|m|$ とともに増加し、 $|m|$ の大きい所でやがて頭打ちとなる傾向が特徴的である。また $|m|$ が増えると周波数域も広がり、Fig. 4(H) の循環が小さい場合の各モードの周波数域はゼロ側に寄り、増幅率の近いモードが多数競合する可能性があり、小規模渦の生成に適した特性を持つと考えられる。

次に、空間増幅と時間増幅についてみる。局所的な基本流の分布が同一で増幅率が小さく、中立に近いとき、空間増幅と時間増幅の間¹⁰⁾ には群速度 C_g を使って、以下の関係があることが知られている。(ここでは時間増幅から変換された空間増幅を上付き添え字 (s) で表す。)

$$\omega^{(s)} = \omega_r, \quad \alpha_r^{(s)} = \alpha, \quad -\alpha_i^{(s)} = \frac{\omega_i}{C_g}, \quad C_g = \frac{d\omega}{d\alpha} \quad (4)$$

しかし、この関係が成り立つ増幅率の上限値はよく知られていない。そこで、比較的増幅率の大きい縦渦の場合について、式 (4) の妥当性を調べた。Fig. 4(G) に、式 (4) を使って時間増幅率から変換したものを種々の記号で、空間増幅で求めた増幅率を種々の線で示した。両者はほとんど一致し、 $m = -12$ のような比較的高い増幅率 (0.341) でも式 (4) が成立することを示した。

さらに、安定性に及ぼす圧縮性の影響の評価について述べる。圧縮性の影響は、マッハ数の影響として把握できると合理的であり、攪乱とともに動く座標系から見た移流マッハ数が圧縮性の指標として重要である。そこで、

文献¹¹⁾ に従い、縦渦の移流マッハ数 M_c を攪乱のスパイラルな伝播方向の位相速度 C_{ph} ならびに速度 U_0 を考慮して、式 (1) を用いて次式で表わす。(c_0 : 音速)

$$M_c = \frac{|U_0 - C_{ph}|}{c_0} \quad (5)$$

$$U_0 = \frac{\alpha_r U_x + (m/r^\dagger) U_\theta}{\sqrt{\alpha_r^2 + (m/r^\dagger)^2}} \Big|_0, \quad C_{ph} = \frac{\omega_r}{\sqrt{\alpha_r^2 + (m/r^\dagger)^2}}$$

ただし、下付き添え字 0: 軸上での値、 $r^\dagger = 1/\sqrt{2D} : U_x$ の変曲点の r の位置、としている。Fig. 4(I) に、式 (5) による $q = 0, 0.1, 0.27$ を 2 次元混合層や計測値とともにプロットした。この図の横軸は式 (5) の移流マッハ数、縦軸は増幅率を非圧縮の値で正規化したものである。 $M_\infty = 2.45$ の場合、縦渦の最大増幅率の値は循環 q に比例することを確認した。この点から循環 q の増幅率に対する圧縮性の影響も興味深い。まず $q = 0$ の wake 流の場合は 2 次元混合層とほぼ同じであるが、Lessen¹²⁾ と同様、軸対称流の方が 2 次元流よりわずかに弱いことがわかる。次に $q \neq 0$ の縦渦について示す。この場合、 $|m| = 1$ の低周波の増幅が強い $q = 0$ とは違い、前述のように大きな波数 $|m|$ が支配的になる。攪乱のスパイラルな移流を考慮したことにより、 $q = 0.1$ の場合は、2 次元混合層における 3 次元波の成長と似た傾向を示すこと、循環の大きい $q = 0.27$ では混合層とは異なった特徴をもつことが示された。これらは縦渦は循環が支配的で圧縮性の影響を受けにくい亜音速に近い不安定性を持つということを定性的に示唆している。しかし、この図で気になる点も存在する。攪乱とともに移流する座標系で見た流れのパターンに淀み点が現れるが¹³⁾、移流マッハ数が 1 を超す場合には、この淀み点に向かう流線上に必ず垂直衝撃波が現れると考えられる。本結果によると、ここでの移流マッハ数は 1 を超えた所でも大きな増幅率を維持していることが合理的でない。このような点で、移流座標系での淀み点や攪乱の位置に関する r^\dagger や U_0 の定義について式 (5) の検証が必要であり、今後の課題である。

縦渦内に迅速に乱流変動を成長させる上で適切な不安定モードが存在するが、それは基本流の循環と速度欠損に依存することを安定解析の結果から示した。ただし、スクラムジェットエンジンにおける超音速混合の観点¹⁾ からは流れ場に低速流体部を作ることとは抗力と解離の面から、極力避けるべきなので、軸流速度に依らない不安定性の高い中空型渦度分布²⁾ (速度欠損を必要とせず、渦層が薄い場合の増幅率が本計算の CNR11-R22 より大きい) の利用や安定な縦渦でも衝撃波との干渉により生じるバロクリニック渦度利用¹⁴⁾ も効果があると思われる。

5. まとめ

線形安定性の立場から、ストラットで形成される超音速縦渦の不安定性について調べた。

- 攪乱に対する周波数と各波数の増幅特性から、縦渦の増幅率は周方向波数 $|m|$ の大きい所で頭打ちとなる傾向があることがわかった。
- 増幅率の大きい縦渦を使って、式 (4) の時間増幅と空間増幅の変換が成り立つことを確認した。
- 縦渦が超音速域で亜音速と同様の高い不安定性をもつことを、移流マッハ数を使って示したが、さらに検討が必要である。

本稿作成にあたり、適切かつ有益な御意見と御助言を多数いただきました。西岡通男名誉教授に深く感謝致します。

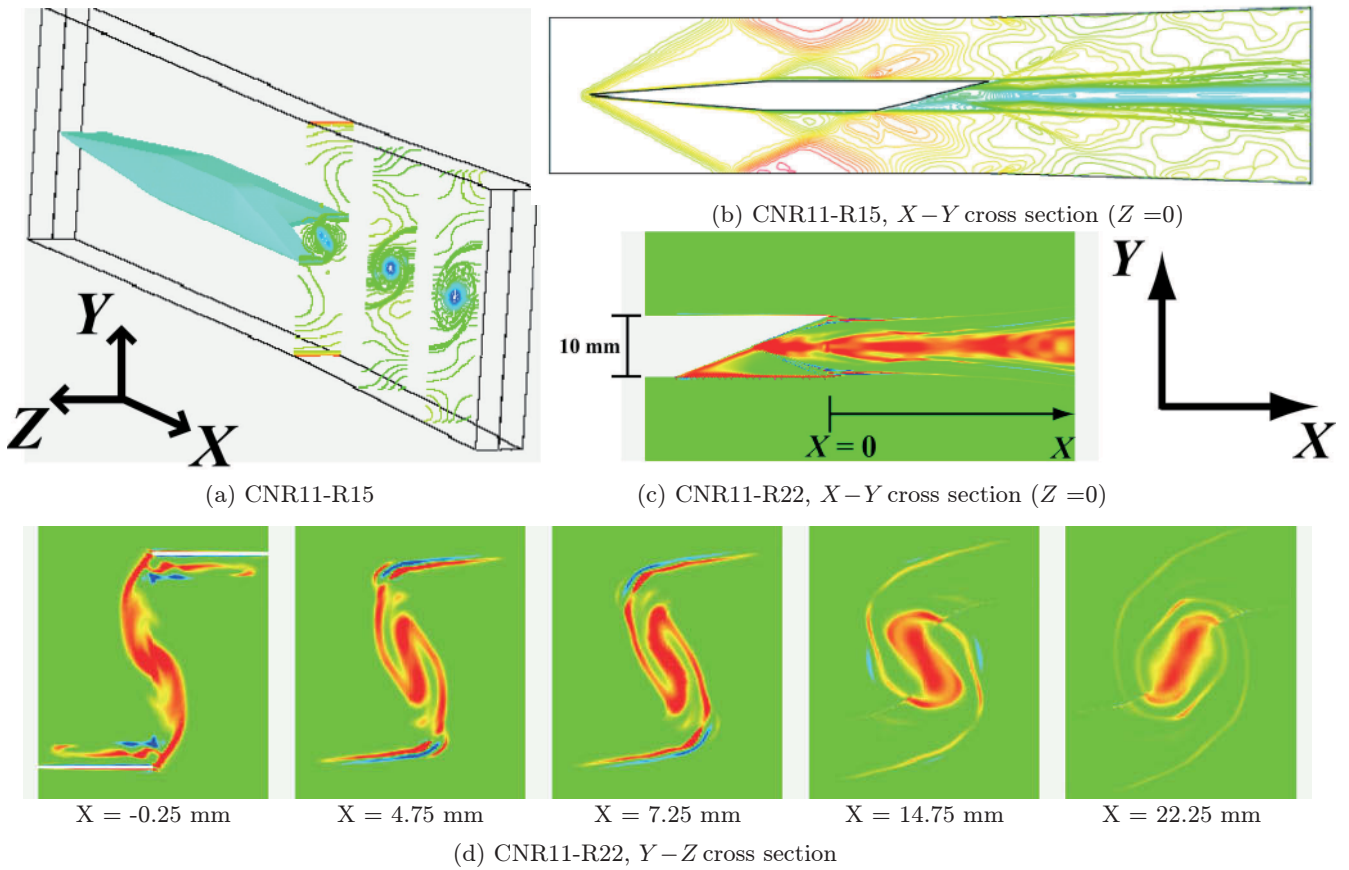


Fig. 1 Direct numerical simulation results for the generation process of supersonic streamwise vortex behind the alternating wedge vortex generators CNR11-R15 and CNR11-R22 at $M_\infty = 2.45$: (a) and (b) density contour plots for the case of CNR11-R15; (c) and (d) axial vorticity of isosurface (positive: red, negative: blue) for the case of CNR11-R22.

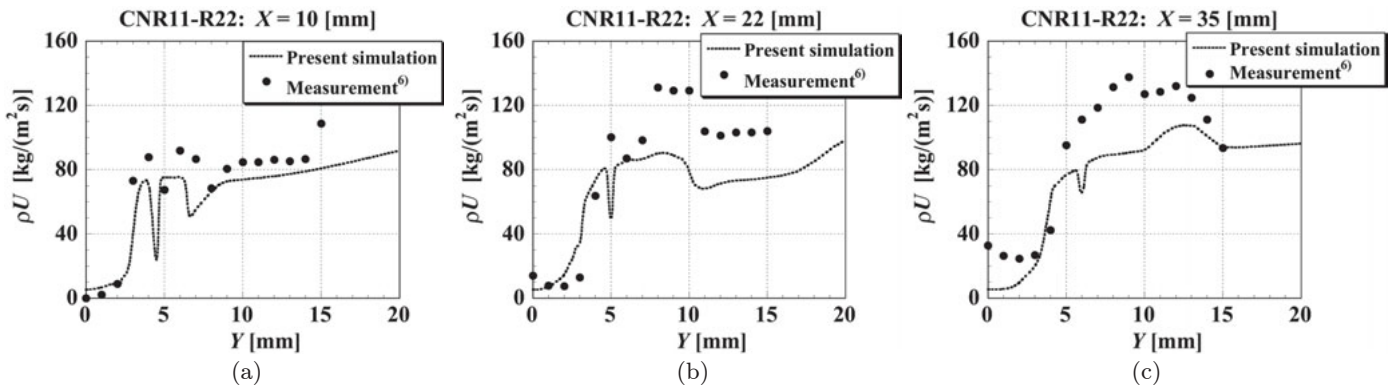


Fig. 2 Comparison of simulation results with measurements⁶⁾ for the streamwise mass-flux, for the case of CNR11-R22 at $M_\infty = 2.45$: (a) $X = 10$ mm, (b) $X = 22$ mm, and (c) $X = 35$ mm.

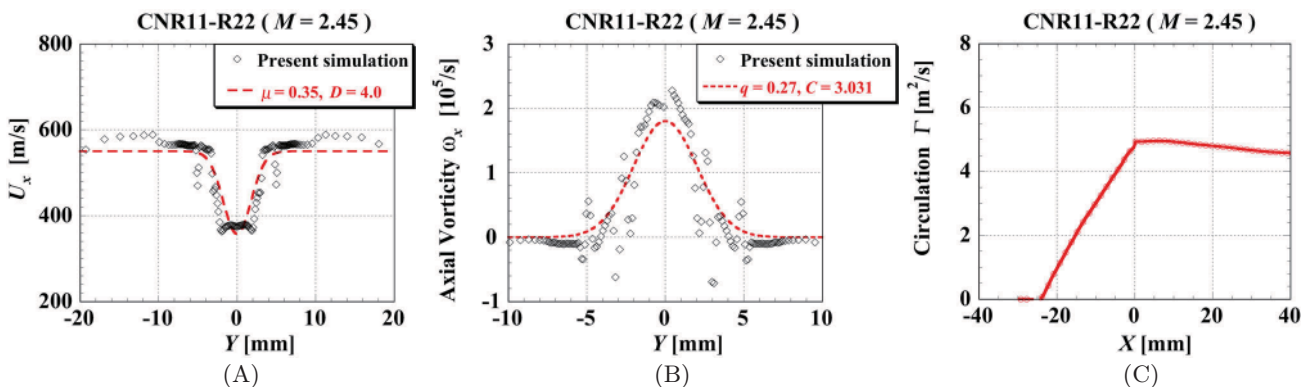


Fig. 3 Simulation results for Y -distributions of (A) axial velocity, (B) axial vorticity at $X = 22.25$ mm and for (C) streamwise variation of circulation in Y - Z cross section, for the case of CNR11-R22 at $M_\infty = 2.45$.

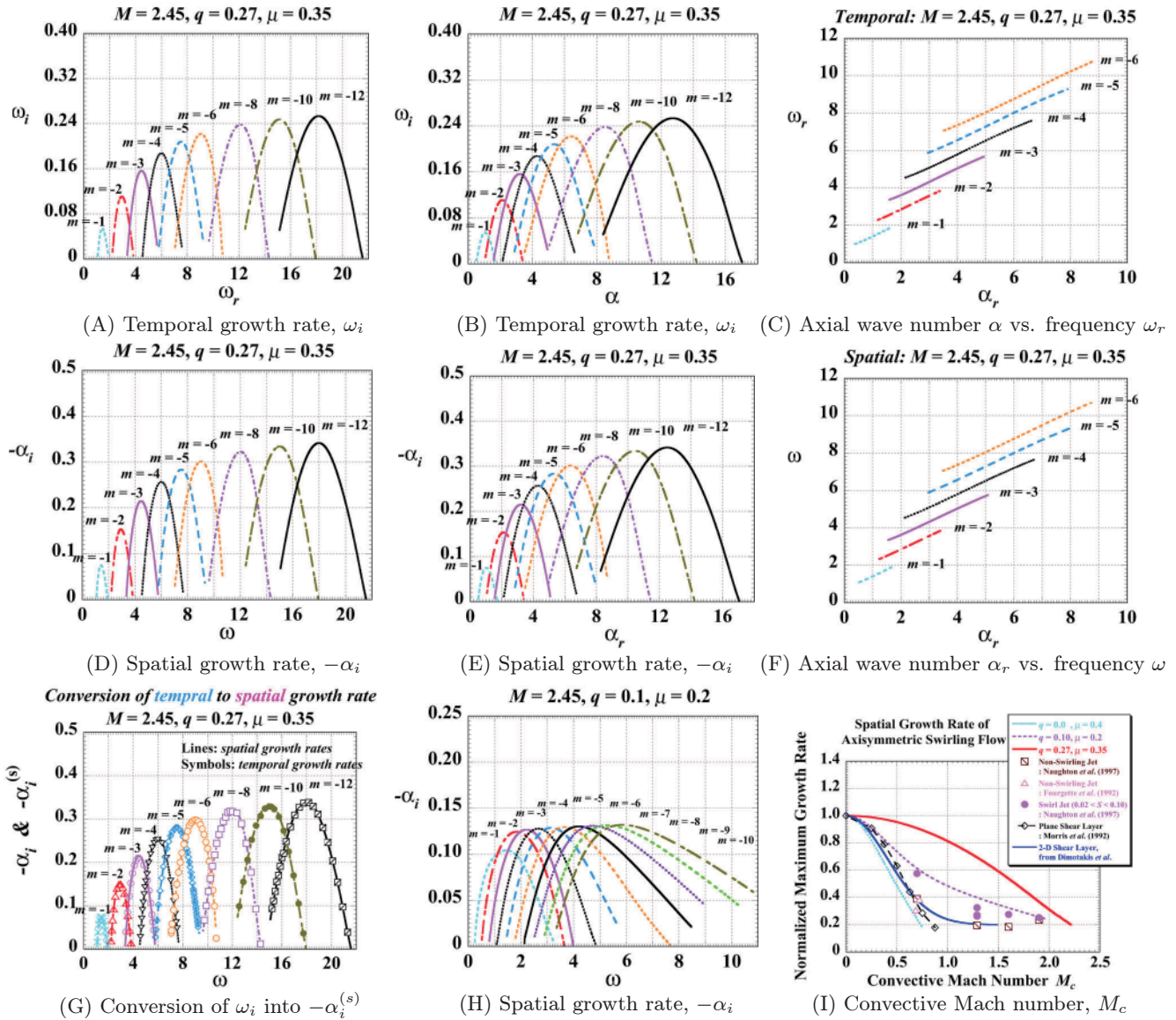


Fig. 4 Linear instability characteristics of compressible streamwise vortices at $M_\infty = 2.45$: CNR11-R22, $q = 0.27$, $\mu = 0.35$, (A) ω_i vs. ω_r , (B) ω_i vs. α_r , (C) ω_r vs. α_r ; (D) $-\alpha_i$ vs. ω , (E) $-\alpha_i$ vs. α_r , (F) ω vs. α_r , (G) comparison between spatial growth rate $-\alpha_i$ and $-\alpha_i^{(s)}$ converted from ω_i . WCNR, $q = 0.1$, $\mu = 0.2$, (H) $-\alpha_i$ vs. ω , for various azimuthal wave numbers; and (I) normalized maximum growth rate vs. M_c for $q = 0, 0.1$, and 0.27 .

参考文献

- 西岡通男, “超音速乱流混合の制御,” 航空宇宙技術研究所特別資料, NAL SP-12, (1990), pp. 39-42.
- 西岡通男, 松岡光大, 辻本健士, 比江島俊彦, “不安定な縦渦と混合促進制御へのその応用について,” 日本機械学会論文集. B 編, 63 (605), (1997), pp. 119-125.
- T. Sunami and F. Scheel, “Analysis of mixing enhancement using streamwise vortices in a scramjet combustor by application of laser diagnostics,” AIAA Paper 2002-5203, (2002).
- G. S. Settles, “Supersonic mixing enhancement by vorticity for high-speed propulsion,” NASA CR-188920, (1991).
- J. W. Naughton, L. N. Cattafesta, and G. S. Settles, “An experimental study of compressible turbulent mixing enhancement in swirling jets,” J. Fluid Mech. **330** (1997), pp. 271-305.
- 駒田和也, “キャビティ振動流による超音速縦渦混合の促進,” 大阪府立大学大学院修士論文, (2003).
- M. Nishioka, S. Sakaue, K. Komada, H. Sakoshi, and I. Furukawa, “On the mixing transition in supersonic streamwise vortices,” *Proc. IUTAM Symposium on Elementary Vortices and Coherent Structures: Significance in Turbulence Dynamics*, Springer, (2006), pp. 249-258.
- T. Arai, S. Sakaue, T. Morisaki, T. Hiejima, and M. Nishioka, “Supersonic streamwise vortices breakdown in scramjet combustor,” AIAA Paper 2006-8025, (2006).
- 比江島俊彦, “圧縮性非粘性縦渦の線形不安定性,” 日本流体力学会年會 2008 講演拡張要旨集, 31034, CD-ROM, (2008), pp. 1-6.
- P. G. Drazin and W. H. Reid, “*Hydrodynamic Stability*,” Cambridge University Press. (1981).
- M. Nishioka, T. Hiejima, T. Sunami, and S. Sakaue, “Streamwise Vortices as a Powerful Means for Supersonic Mixing Enhancement,” *Proc. of International Symposium on Dynamics and Statistics of Coherent Structures in Turbulence: Roles of Elementary Vortices*, (2002), pp. 217-228.
- M. Lessen and P. J. Singh, “The stability of axisymmetric free shear layers,” J. Fluid Mech. **60** (1973), pp. 433-457.
- P. E. Dimotakis, “Turbulent Free Shear Layer Mixing and Combustion,” *High Speed Flight Propulsion Systems*, Progress in Astronautics and Aeronautics, **137**, Ch. 5, (1991), pp. 265-340.
- 比江島俊彦, “縦渦と衝撃波の相互作用の数値結果と縦渦の不安定性について,” 第 22 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, B5-1, CD-ROM, (2008), pp. 1-6.