

# 角柱後流の対流不安定性から絶対不安定性への交替

武本幸生 (SIMULIA Corp.), 水島二郎 (同志社大)

## Transition of convectively unstable flow past a rectangular cylinder to an absolutely unstable state

Y. Takemoto\* and J. Mizushima\*\*

\* Dassault Systemes Simulia Corp.,

\*\* Dept. of Mech. Eng., Doshisha Univ.

### ABSTRACT

Transition of convectively unstable flow past a rectangular cylinder to an absolutely unstable state is investigated numerically, in which a localized disturbance is added at a certain point in the flow field and the subsequent spatio-temporal development of the disturbance is observed. We found that the added localized disturbance propagates immediately to an absolutely unstable region just behind the cylinder, and then, it is convected downstream after growing in the absolutely unstable region if the flow is globally unstable (at supercritical Reynolds numbers). The boundary separating the absolutely and convectively unstable regions is estimated in numerical simulation for the non-parallel two-dimensional flow in which the flow is approximated by the parallel flow field in the downstream region than a prescribed distance behind the cylinder. We conclude that the existence of the absolutely unstable region causes the global instability of the flow and that the theory of stability for parallel flow is sufficient to identify the location and the scale of the absolutely unstable region.

Key Words: wake, rectangular cylinder, Kármán vortex street, absolute instability, convective instability

## 1 はじめに

カルマン渦列の発生メカニズムやその振動周波数の決定メカニズムは複雑であり、多くの研究者の興味を引きつけてきた。また、角柱や円柱などの後流の安定特性を知ることは、後流制御や物体後流の基礎的研究に不可欠であり、これまでも後流の安定性について多くの研究が行われてきた<sup>1)-8)</sup>。角柱や円柱などの後流は比較的低いレイノルズ数において物体近傍で不安定性が発生するので、流れ場を平行流で近似することは難しく、非平行流として取り扱わなければならない。しかし、安定性解析の基礎方程式であるレイリー方程式やオア・ゾンマーフェルト方程式では非平行流の安定性を直接扱うことができない。そのため、これまでの物体後流の安定性に関する多くの研究では<sup>1)-8)</sup>、流れ方向の各位置における垂直方向の速度分布を平行流近似した系の安定性(局所安定性)を調べ、流れ場全体の安定性(全体安定性)を推定するという研究方法が採用されてきた。

局所安定性と全体安定性の関係は、絶対不安定性と対流不安定性の概念を導入することによって整理することができる<sup>9)</sup>。外部から局所的に加えられた攪乱が、流れ場中のある固定した一点で見えて成長する場合、流れ

は局所絶対不安定である。一方、攪乱とともに動く座標系から見ると攪乱は成長するが、流れ場中のある固定した一点で見れば攪乱が減衰する場合、流れは局所対流不安定である。これまでの研究では、物体直後に存在するであろう局所絶対不安定領域において自己維持的な振動が生じ、その振動が下流側の局所対流不安定領域に波となって伝わり、カルマンの渦列が形成されると考えられている。しかし、これらの研究は平行流近似に基づき、局所安定性解析を行ったものであり、非平行な流れを直接に解析したものではない。実験的にカルマン渦列が発生するレイノルズ数、すなわち全体不安定となるレイノルズ数と、平行流近似を用いて求めた局所絶対不安定となるレイノルズ数に違いがあるのは、大きな非平行性を有した流れを平行流近似することが原因ではないかと考えられている<sup>3), 6), 8)</sup>。

本研究の目的は、人為的に加えられた微小な攪乱がカルマン渦列を誘起する過程を明らかにすることである。まず、数値シミュレーションと線形安定性解析によって、角柱後方の各位置の局所安定性と、流れ場の全体安定性を求める。次に、線形攪乱方程式を発展方程式として数値的に解くことにより、角柱を過ぎる 2 次元非平行流に与えた攪乱の空間的・時間的変化を数値シミュレーションにより調べる。さらに、この数値シミュレーショ

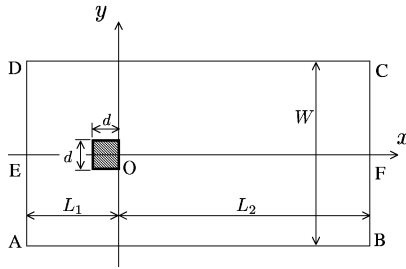


図1 計算領域と座標系.

ンの結果から局所安定性と全体安定性の関係を明らかにし, 平行流近似の有効性について明らかにする.

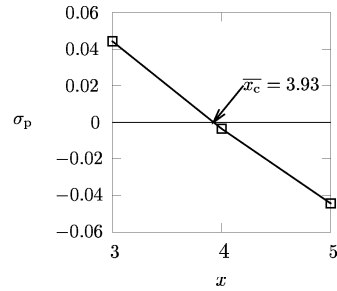
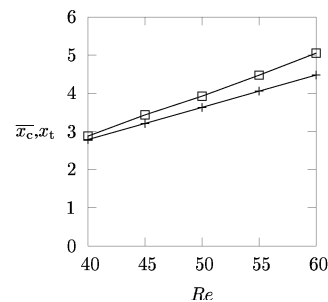
## 2 基礎方程式と境界条件

図1のように, 一様な流速  $U$  の流れの中におかれた1辺の長さが  $d$  の正方形断面をもつ角柱を過ぎる流れを考える. 角柱の後端辺の中点を原点  $O$  として, 流れ方向に  $x$  軸をとり,  $x$  軸と垂直に  $y$  軸をとる. 流れは非圧縮2次元流と仮定し, 流れ関数  $\psi(x, y, t)$  と渦度  $\omega(x, y, t)$  を導入する. このとき, 流れを支配する基礎方程式は  $\omega$  と  $\psi$  に関する渦度輸送方程式とポアソン方程式である. レイノルズ数は  $Re \equiv Ud/\nu$  で定義される. また, 数値計算においては, 図1の ABCD で囲まれた領域のみを考え, 角柱の壁面にはすべりなし境界条件を与えた. AD と AB および DC では一様流であるとする境界条件を考え, 流出境界 BC ではゾンマーフェルトの放射条件を用いる. 主流を  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ , 攪乱を  $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  とし, 非常常解を  $\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}, \omega = \bar{\omega} + \hat{\omega}$  とする. 攪乱は微小であるとして攪乱の2乗の項を無視すると, 渦度輸送方程式から線形攪乱方程式が得られる. この線形攪乱方程式とポアソン方程式を差分法で数値シミュレーションすることによって, 攪乱の時間発展を求める.

## 3 計算結果

### 3.1 局所安定性

これまでの多くの研究では, 粘性流の局所安定性はオア・ゾンマーフェルト方程式を用いて調べられてきたが, ここでは後で述べる全体安定性やインパルス応答との比較のため, 2次元流れ場における線形攪乱方程式を用いて局所安定性を調べた. 非常常解の角柱後方の各位置における流れと垂直方向の速度分布を平行流近似したものを主流  $U(y)$  とし, 線形攪乱方程式を初期条件のもとに数値的に解くことによって攪乱の増幅率  $\sigma_p$  を求め, 局所安定性を判定した. 一例として,  $Re = 50$  における

図2 局所不安定性の線形時間増幅率  $\sigma_p$ ,  $Re = 50$ .図3 絶対不安定領域と対流不安定領域の境界.  $\square$ :  $\bar{x}_c$ , 絶対不安定領域と対流不安定領域の境界.  $+$ :  $x_t$ , 双子渦長さ.

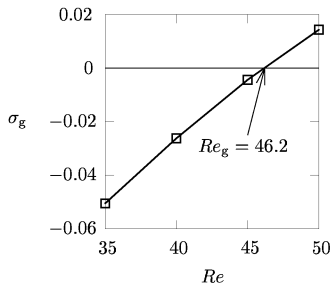
攪乱の増幅率  $\sigma_p$  を図2に示す. 図より,  $Re = 50$  の角柱直後の領域は局所絶対不安定であり,  $\bar{x}_c = 3.93$  より後方の領域は局所対流不安定となることが分かる. 同様にして,  $40 \leq Re \leq 60$  における局所絶対不安定領域と局所対流不安定領域の境界位置  $\bar{x}_c$  を求めると, 図3のようになる. この図には, それぞれのレイノルズ数における角柱後方の双子渦の長さ  $x_t$  も合わせて示した. 図3から, 境界位置  $\bar{x}_c$  は, レイノルズ数の増加とともに下流側へ移動することが分かる.

### 3.2 全体安定性

非平行な非常常解を主流とし, 線形攪乱方程式を適当な初期条件のもとに数値シミュレーションを行い求めた攪乱の増幅率  $\sigma_g$  を図4に示す. 図4より, 全体不安定となる臨界レイノルズ数は  $Re_g = 46.2$  となった.

### 3.3 インパルス応答

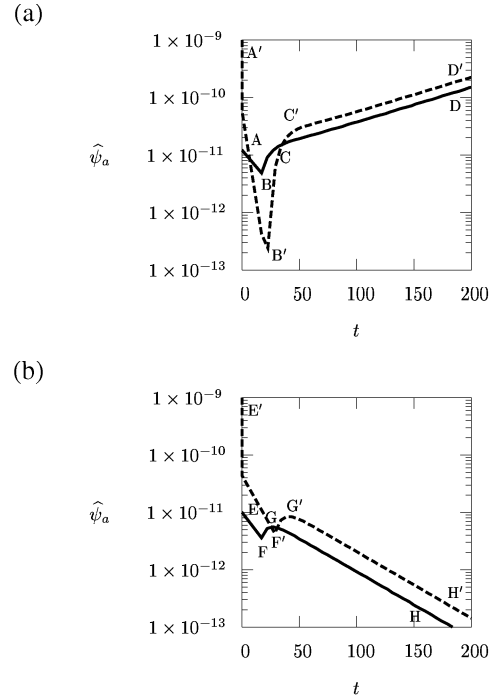
角柱の下流にインパルス(矩形攪乱)を与えて, その時間発展を調べる. ここでは, 角柱の下流  $(x, y) = (35, 0)$  に攪乱を与え, 角柱中心を通る  $x$  軸上の攪乱振幅を観測する. 攪乱の大きさは  $t = [0, 0.01]$  のとき  $\hat{\psi} = 0.01$  とした. 図5(a)は, 全体不安定性の超臨界レイノルズ

図 4 全体不安定性の線形増幅率  $\sigma_g$ .

数  $Re = 50$  における,  $(x, y) = (10, 0)$  の点で観測した  $\hat{\psi}$  の振幅  $\hat{\psi}_{a10}$  と  $(x, y) = (20, 0)$  の点で観測した  $\hat{\psi}$  の振幅  $\hat{\psi}_{a20}$  である. 初期に与えた攪乱が減衰した後 (AB および A'B'),  $\hat{\psi}_{a10}$  と  $\hat{\psi}_{a20}$  は急激に増加し (BC および B'C'), その後一定の増幅率で増加し続ける (CD および C'D'). よって, 超臨界レイノルズ数  $Re = 50$  における流れ場全体の安定性は絶対不安定である. なお, 初期攪乱を与えた時刻と, 攪乱の振幅が一定の増幅率で増加し始める時刻に差があるのは (AC および A'C'), 角柱直後の局所絶対不安定領域で増幅された攪乱が観測点まで移流する時間が必要なためであり, このことは上流側で観測した  $\hat{\psi}_{a10}$  よりも下流側で観測した  $\hat{\psi}_{a20}$  の方が攪乱の振幅が一定の増幅率で増加し始める時刻が遅いことから明らかである.

一方, 図 5 (b) から明らかのように, 亜臨界レイノルズ数  $Re = 40$  では,  $\hat{\psi}_{a10}$  と  $\hat{\psi}_{a20}$  は初期に与えた攪乱が減衰した後 (EF および E'F'), 攪乱の振幅は増加し (FG および F'G'), その後一定の増幅率で減少し続ける (GH および G'H'). また, 上流側で観測した  $\hat{\psi}_{a10}$  と下流側で観測した  $\hat{\psi}_{a20}$  を比較すると,  $\hat{\psi}_{a20}$  は  $\hat{\psi}_{a10}$  より大きく, 減少に転じる時刻も遅い. これは, 波束の振幅は成長するが波束そのものは流れ去ることを示している. よって, 亜臨界レイノルズ数  $Re = 40$  における流れ場全体の安定性は対流不安定である.

次に,  $\hat{\psi}$  の空間分布の時間変化を見ることにする. 超臨界レイノルズ数  $Re = 50$  における,  $x$  軸上の  $\hat{\psi}$  の空間分布は図 6 (a) と図 6 (b) のようになる. 図 6 (a) (フェーズ 1,  $t = 10$  まで) のように, 攪乱を与えた直後  $t = 0.1$  には, 攪乱は下流側だけではなく上流側の角柱近傍にも伝播し, その後は減衰しながら下流へ移流する. その後, 図 6 (b) (フェーズ 2,  $t = 10$  以降) のように,  $t = 10$  においては, 角柱から離れた領域 ( $x \geq 10$ ) には十分減衰していない初期に与えた攪乱が残っているが, 角柱近傍 ( $x \simeq 5$ ) には初期に与えた攪乱とは別のピークが生じる. この角柱近傍の攪乱の振幅は, 時間とともに大きくなっている. これは, 局所絶対不安定領域で攪乱が増幅されているためであり, 3.1 節で求めたように,  $Re = 50$

図 5  $x$  軸上の  $\hat{\psi}$  の振幅.  $x = 35$  にインパルスを与えた場合. 実線:  $\hat{\psi}_{a10}$ ,  $x = 10$ . 破線:  $\hat{\psi}_{a20}$ ,  $x = 20$ . (a)  $Re = 50$ , 絶対不安定. (b)  $Re = 40$ , 対流不安定.

における局所絶対不安定領域は角柱直後に存在し, 局所絶対不安定領域と局所対流不安定領域の境界位置は  $\bar{x}_c = 3.93$  であることに対応している. また,  $t = 10$  のとき角柱近傍にある波束の前縁は, 時間とともに下流に移流している ( $t = 20$  で  $x \simeq 17$ ,  $t = 30$  で  $x \simeq 26$ ,  $t = 40$  で  $x \simeq 35$ ). これらのことから, 局所絶対不安定でない領域に与えられた攪乱は瞬時に局所絶対不安定領域に伝わり, そこで増幅され続け, 増幅された攪乱が下流に伝播することで流れが全体不安定となることが分かった. また, 攪乱を与えた点や観測点の局所安定性は, 全体安定性には影響を与えないことも分かった.

一方, 亜臨界レイノルズ数  $Re = 40$  においては, 図 3 からわかるように角柱直後に局所絶対不安定領域が存在するにもかかわらず, 局所絶対不安定領域で攪乱が増幅され続けることがなく, 流れ場全体の安定性は対流不安定となることが分かった. このことは, 局所絶対不安定領域の存在が流れ場全体が絶対不安定となるための十分条件にならないことを示しており, Chomaz *et al.*<sup>10)</sup> が 1 次元のモデル方程式を用いて示したシナリオと一致する. これまでの研究<sup>3), 6)</sup>において, 全体不安定となるレイノルズ数と, 平行流近似を用いて求めた局所絶対不安定となるレイノルズ数が一致しないのは, このことが原因である.

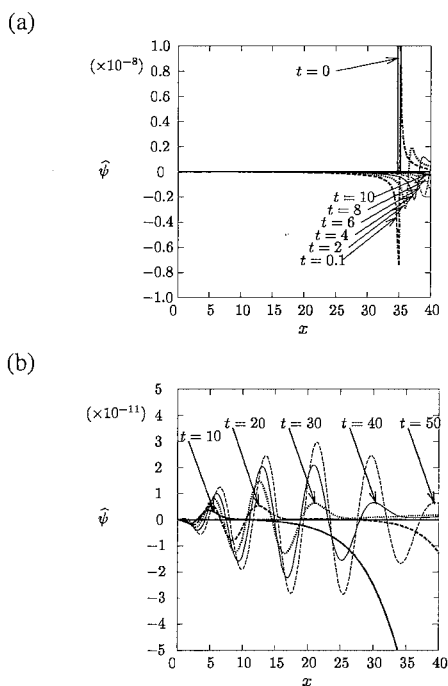


図6  $x$  軸上の  $\hat{\psi}$  の空間分布.  $x = 35$  にインパルスを与えた場合.  $Re = 50$ . (a) フェーズ 1,  $t = [0, 10]$ . (b) フェーズ 2,  $t = [10, 50]$ .

### 3.4 平行流近似の妥当性

流れの中に自己維持的な振動が生じるためには、ある一定の広さの絶対不安定領域が必要であると考えられる<sup>10)</sup>. ここでは、自己維持的な振動が生じるために最低限必要な絶対不安定領域の広さを、必要広さと呼び、この必要広さを推定し、平行流近似によって得られた局所絶対不安定領域の広さと比較することによって、平行流近似による局所安定性の判別が妥当であるかどうかを評価する.

全体安定性についてわずかに超臨界となるレイノルズ数では、角柱近傍だけが局所絶対不安定であると考えられるので、このときの必要広さを  $0 \leq x \leq x_c$  とする. ある位置  $x_b$  より下流側の領域  $x_b \leq x$  を局所対流不安定な平行流で置き換えた流れを考える. この流れの全体安定性が絶対不安定であれば  $x_c \leq x_b$  であるので、 $x_b$  と全体安定性の関係を調べることによって、 $x_c$  を推定することができる. 平行流  $U(y)$  の速度分布には非平行流の  $u(x_b, y)$  を用い、この平行流が局所対流不安定となるよう、 $x_b$  には  $x_b = \bar{x}_c + \delta x$  を採用した (図2参照). ここで  $\delta x \ll 1$  である.

このようにして、超臨界となるレイノルズ数  $Re_g \leq Re$  において、 $x_b \leq x$  の領域を対流不安定な平行流で置

き換えた流れの全体安定性を調べると、絶対不安定であることが分かった. すなわち、 $Re_g \leq Re$  では、平行流近似によって求めた局所絶対不安定領域には、流れ場全体が絶対不安定となるのに十分な絶対不安定領域が含まれていることが明らかになった. このことから、平行流近似が成り立ちにくいと思われるレイノルズ数・領域においても、平行流近似が有効であることが分かった.

### 参考文献

- (1) Betchov, R., Criminale, W. O., "Spatial instability of the inviscid jet and wake", *Phys. Fluids*, Vol. 9, (1966), pp. 359-362.
- (2) Gaster, M., "Growth of disturbances in both space and time", *Phys. Fluids*, Vol. 11, (1968), pp. 723-727.
- (3) Nakaya, C., "Instability of the near wake behind a circular cylinder", *J. Phys. Soc. Japan.*, Vol. 41, (1976), pp. 1087-1088.
- (4) Triantafyllou, G. S., Triantafyllou, M. S., Chryssostomidis, C., "On the formation of vortex streets behind stationary cylinders", *J. Fluid Mech.*, Vol. 170, (1986), pp. 461-477.
- (5) Triantafyllou, G. S., Kupfer, K., Bers, A., "Absolute instabilities and self-sustained oscillations in the wakes of circular cylinders", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 59, (1987), pp. 1914-1917.
- (6) Monkewitz, P. A., "The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds numbers", *Phys. Fluids*, Vol. 31, (1988), pp. 999-1006.
- (7) Koch, W., "Local instability characteristics and frequency determination of self-excited wake flows", *J. Sound. Vib.*, Vol. 99, (1985), pp. 53-58.
- (8) Belan, M., Tordella, D., "Convective instability in wake intermediate asymptotics", *J. Fluid Mech.*, Vol. 552, (2006), pp. 127-136.
- (9) Huerre, P., Monkewitz, P. A., "Local and global instabilities in spatially developing flows", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 22, (1990), pp. 473-537.
- (10) Chomaz, J. M., Huerre, P., Redekopp, L. G., "Bifurcations to local and global modes in spatially-developing flows", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 60, (1988), pp. 25-28.
- (11) 山田道夫, "流れとパターン - 流れの安定性理論序論" ("パターン形成" 第3章), (朝倉書店, 1991, 東京), pp. 38-79.