交差独立性完結仮説による乱流理論の問題点と仮説の一般化

巽　友正　（京大名誉教授）

Theory of Turbulence based on Cross-Independence Closure Hypothesis and Generalization of Hypothesis

Tomomasa TATSUMI

Kyoto University, Professor Emeritus

ABSTRACT

The basic framework of the statistical theory of turbulence based on the *cross-independence closure hypothesis* is examined and its general validity is reconfirmed. Then the hypothesis which is genuinely concerned with the two-point closure is generalized to the n-point closures ($n \geq 3$) of the Lundgren-Monin equations for the multi-point velocity distributions.

Key Words: Multi-point velocity distribution, cross-independence closure hypothesis, homogeneous isotropic turbulence

1．　交差独立性仮説の有効性

『交差独立性完結仮説』を用いた乱流の統計理論は、著者によって年来進められてきたが、近年、この理論の基本的な部分について質問を受けることが多いので、この機会に理論の基礎を再検討し、その論理構成を明らかにしておくのが適当であると考える。

まず、「交差独立性仮説」の有効性に関して、次のような疑問を受けたことがある。

乱流の２点における速度（簡単のためスカラーとする）を$u_1=u(\mathbf{x}_1,t)$, $u_2=u(\mathbf{x}_2,t)$ とし、その交差速度を$u_+=(u_1+u_2)/2$, $u_-=(u_2-u_1)/2$ で表すと、それらの３次構造関数の間に次のような恒等式が成り立つ。

$$\langle u_1^3\rangle = \langle(u_+-u_-)^3\rangle = \langle u_+^3\rangle - 3\langle u_+^2u_-\rangle + 3\langle u_+u_-^2\rangle - \langle u_-^3\rangle,$$
$$\langle u_2^3\rangle = \langle(u_++u_-)^3\rangle = \langle u_+^3\rangle + 3\langle u_+^2u_-\rangle + 3\langle u_+u_-^2\rangle + \langle u_-^3\rangle.$$

これらの両辺の和と差をとると、次のような恒等式が得られる。

$$\langle u_1^3\rangle + \langle u_2^3\rangle = 2\langle u_+^3\rangle + 6\langle u_+u_-^2\rangle,$$
$$\langle u_2^3\rangle - \langle u_1^3\rangle = 6\langle u_+^2u_-\rangle + 2\langle u_-^3\rangle.$$

一様等方性乱流においては、$\langle u_1^3\rangle = \langle u_2^3\rangle = 0$ であるから、これらの恒等式は次の式に帰着する。

$$\langle u_+^3\rangle = -3\langle u_+u_-^2\rangle, \tag{1}$$
$$\langle u_-^3\rangle = -3\langle u_+^2u_-\rangle. \tag{2}$$

いま、交差速度u_+ と u_- との間に「交差独立性」が成り立つとすれば、両式は次のように書ける。

$$\langle u_+^3\rangle = -3\langle u_+\rangle\langle u_-^2\rangle, \tag{3}$$
$$\langle u_-^3\rangle = -3\langle u_+^2\rangle\langle u_-\rangle. \tag{4}$$

さらに、一様等方性乱流では、$\langle u_+\rangle = \langle u_-\rangle = 0$ であることを考慮すれば、

$$\langle u_+^3\rangle = \langle u_-^3\rangle = 0 \tag{5}$$

となる。

この結果は、交差速度の歪み度（skewness）、

$$S_+ = \langle u_+^3\rangle/\langle u_+^2\rangle^{3/2}, \quad S_- = \langle u_-^3\rangle/\langle u_-^2\rangle^{3/2}, \tag{6}$$

が、いずれも０ であることを意味するが、これは、慣性小領域において、速度差の歪み度が一般的に負($S_-<0$) であることと矛盾する。すなわち、「交差独立性仮説」は、慣性小領域では成り立たないのではないか。これが、仮説の有効性に対する疑問である。

これは、一見もっともであるが、実は「交差独立性」と「交差独立性仮説」とを混同した議論である。

「交差独立性」そのものは、無条件に (1), (2) 式から (3), (4) 式を導くから、慣性小領域においては成立しないが、「交差独立性仮説」は、そうは言っていない。Tatsumi (2001) において導入され、Tatsumi et al. (2004, 2007) によって一様等方性乱流に対して適用された「交差独立性仮説」は、正確には次のように表される。

『２点間の距離 $r=|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|$ が小さい領域 ($r\to 0$)、または大きい領域 ($r\to\infty$) において、交差速度u_+ およびu_- は互いに独立である。』

一般に高 Reynolds 数の乱流においては、「r の小さい領域」はKolmogorov (1941) の「局所領域 (local range)」に、「r の大きい領域」は「エネルギー含有領域」に対応するものと考えられるが、その中間には仮説が成り立たない領域が当然存在するものと思われる。したがって、もし、「慣性小領域 (inertial subrange)」において仮説が成り立たないのであれば、その下の「粘性小領域 (viscous subrange)」において仮説が成り立てば十分であって、このことは、速度分布の境界条件として保証されている。

2.　完結仮説としての交差独立性

さらに考慮すべきことは、本研究では「交差独立性仮説」は多点結合速度分布に対するLundgren (1967)およびMonin (1967)の方程式の完結仮説として用いられているということである。この分布方程式系に関する完結性の問題は、これまでの乱流理

論における速度相関やエネルギー･スペクトルに関する完結性とは違って、高次項が、ナビエ･ストークス方程式の非線形項ではなく、高次微分項から現れる。すなわち、高次分布に伴う距離 $r_m = |\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_m| \, (m = 1,\ldots,n)$ がそれぞれ0となる縮退形として現れるのである。

例えば1点速度分布 $f(\mathbf{v}_1,\mathbf{x}_1,t)$ の Lundgren-Monin 方程式、

$$[\partial/\partial t + \mathbf{v}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_1] f(\mathbf{v}_1,\mathbf{x}_1,t)$$
$$=(\partial/\partial\mathbf{v}_1)\cdot[(1/4\pi)(\partial/\partial\mathbf{x}_1)\int\int|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|^{-1}(\mathbf{v}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_2)^2 f^{(2)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2;t)\mathrm{d}\,\mathbf{v}_2\mathrm{d}\mathbf{x}_2$$
$$-\nu \lim_{|\mathbf{x}2-\mathbf{x}1|\to 0} |\partial/\partial\mathbf{x}_2|^2 \int \mathbf{v}_2 f^{(2)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2;t)\mathrm{d}\,\mathbf{v}_2], \qquad (7)$$

における2点速度分布 $f^{(2)}$ の項は、右辺第1項では距離 $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \to 0$ の極限からの寄与が優越し、第2項は $r \to 0$ の極限そのものであるという意味において、いずれも1点分布に縮退した形で現れている。

そして、「交差独立性完結仮説」は、まさにこの「縮退された2点」に対して適用されているのであって、この意味で、仮説の成立のための条件は完全に満たされている。

仮説の適用の結果、1点速度分布 f に対する完結した方程式は、一様等方性乱流に関しては次のような簡単な形に得られる（Tatsumi et al. (2004) を参照）。

$$[\partial/\partial t + \alpha(t)\,|\partial/\partial\mathbf{v}|^2] f(\mathbf{v},t) = 0, \qquad (8)$$
$$\alpha(t) = (2/3)\,\nu \lim_{|\mathbf{r}|\to 0} |\partial/\partial\mathbf{r}|^2 \int |\mathbf{v}_-|^2 \mathbf{g}_-(\mathbf{v}_-,\mathbf{r},t)\mathrm{d}\,\mathbf{v}_- . \qquad (9)$$

ここに、$\alpha(t)$ は方程式 (8) の唯一のパラメターで、(9) 式のように速度差分布 $\mathbf{g}_-$ の積分として定義されている。また、速度分布には一様等方形を用い、添字は省略している。

さらに、$\alpha(t)$ は、(9) 式の計算によって、乱流のエネルギー散逸率、

$$\varepsilon(t) = 3\alpha(t) = \nu \sum_{i,j=1}^{3} \langle(\partial u_i(\mathbf{x},t)/\partial x_j)^2\rangle, \qquad (10)$$

と同等であることが示される。このことは、$\alpha(t)$ が (9) 式によって、乱流の小規模成分を支配する速度差分布の積分で表されていることと相俟って、非平衡統計力学における「揺動散逸定理」が成り立つことを示している。

(8)式の時間的自己相似解は、1点速度の慣性正規分布、

$$f(\mathbf{v},t) = f_0(\mathbf{v},t) = (t/4\pi\alpha_0)^{3/2}\exp[-|\mathbf{v}|^2 t/4\alpha_0], \qquad (11)$$
$$\alpha(t) = \alpha_0 t^{-2}, \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 t^{-2}, \quad E(t) = \langle|\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2/2\rangle = E_0 t^{-1}, \qquad (12)$$

を与える。ここに、$E(t)$ は乱流の単位質量当たりの運動エネルギーを表し、(12)式はその逆1乗減衰則を与えている。

以上の結果は、交差独立性仮説の整合性によって、非粘性極限 $\nu\to 0$ における慣性相似性 $(\varepsilon(t) = 3\alpha(t) > 0)$ の仮定のもとに、絶対的な妥当性をもつものと考えられる。

3．3点速度に対する交差独立性

以上の議論によって、「交差独立性完結仮説」の有効性に関する疑問は、1点速度分布に関する限り完全に解消されたと思われる。では、2点速度分布に関してはどうか。

2点速度分布 $f^{(2)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2;t)$ の Lundgren-Monin 方程式は、次式で与えられる。

$$[\partial/\partial t + \mathbf{v}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_1 + \mathbf{v}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_2] f^{(2)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2;t)$$
$$=(\partial/\partial\mathbf{v}_1)\cdot[(1/4\pi)(\partial/\partial\mathbf{x}_1)\int\int|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1|^{-1}(\mathbf{v}_3\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_3)^2\times$$
$$\times f^{(3)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3;t)\mathrm{d}\mathbf{v}_3\mathrm{d}\mathbf{x}_3$$
$$-\nu \lim_{|\mathbf{x}3-\mathbf{x}1|\to 0} |\partial/\partial\mathbf{x}_3|^2 \int \mathbf{v}_3 f^{(3)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3;t)\mathrm{d}\mathbf{v}_3],$$
$$+(\partial/\partial\mathbf{v}_2)\cdot[(1/4\pi)(\partial/\partial\mathbf{x}_2)\int\int|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2|^{-1}(\mathbf{v}_3\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_3)^2\times$$
$$\times f^{(3)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3;t)\mathrm{d}\mathbf{v}_3\mathrm{d}\mathbf{x}_3$$
$$-\nu \lim_{|\mathbf{x}3-\mathbf{x}2|\to 0} |\partial/\partial\mathbf{x}_3|^2 \int \mathbf{v}_3 f^{(3)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3;t)\mathrm{d}\mathbf{v}_3]. \qquad (13)$$

完結仮説は、この方程式における高次分布である3点速度分布 $f^{(3)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3;t)$ に適用されるが、「交差独立性完結仮説」は、2点速度に対して定義されたものなので、これをどのように3点速度に拡張するかが問題となる。

前論文 Tatsumi et al. (2004) においては、あえて仮説を3点速度に拡張する方法をとらず、(13) 式の高次分布 $f^{(3)}$ における3点速度 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ から、高次分布が縮退している2点速度 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$ と $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ を選んで、これに適用する方法をとった。この方法は、3点速度分布の完結に関する一般論を避けた一種の便法であったが、結果的には、前節で述べた完結仮説の精神に沿った良い選択であったかと思われる。

この意味で、前二論文 Tatsumi et al. (2004, 2007) における仮説の取扱い、とくに局所領域におけるそれは、必ずしも適当ではなかったかのではないか。これはむしろ、「仮説」と「高次速度分布の縮退性」との対応を堅持した上で、完結した速度分布方程式の解について、より綿密な解析を行うべきではなかったかと思われる。この点に関する議論の見直しと、それに沿った2点速度分布の本格的な解析は、別論文に譲ることとしたい。

4．交差独立性完結理論の一般化

前二節の議論によって明らかになったことは、多点速度分布方程式の完結は、その方程式における高次分布の縮退形に即した形で行われるべきであるとの原則である。

一般に n 点速度分布 $f^{(n)}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n;\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n;t)$ の Lundgren-Monin 方程式は次のように表される

$$[\partial/\partial t + \sum_{m=1}^{n}\mathbf{v}_m\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_m] f^{(n)}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n;\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n;t)$$
$$=\sum_{m=1}^{n}(\partial/\partial\mathbf{v}_m)\cdot[(1/4\pi)(\partial/\partial\mathbf{x}_m)\int\int|\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_m|^{-1}(\mathbf{v}_m\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_m)^2\times$$
$$\times f^{(n+1)}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1};\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_{n+1};t)\,\mathrm{d}\mathbf{v}_{n+1}\mathrm{d}\mathbf{x}_{n+1}$$
$$-\nu \lim_{|\mathbf{x}n+1-\mathbf{x}m|\to 0} |\partial/\partial\mathbf{x}_{n+1}|^2\times$$
$$\times\int \mathbf{v}_{n+1} f^{(n+1)}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1};\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_{n+1};t)\,\mathrm{d}\mathbf{v}_{n+1}]. \qquad (14)$$

この方程式における高次速度分布 $f^{(n+1)}$ に関する縮退速度変数は $(\mathbf{v}_{n+1},\mathbf{v}_m)\ (m = 1,\ldots,n)$ であるから、交差独立性仮説は、これらの n 個の速度変数の組に対して適用される。

その結果、得られる n 点速度分布 $f^{(n)}$ に対する完結した方程式は、一様等方性乱流の場合、(8)式を n 次元化した方程式に、局所領域において距離 $\mathbf{r}_m = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_m$ に依存する項を加えたものとなる。そして、パラメターは、やはり一様等方性乱流の場合、(9)式と本質的に同じ定義式を持つ、エネルギー散逸率 $\alpha(t) = \varepsilon(t)/3$ と同等のものとなる。

このように、「交差独立性完結仮説」の下では、多点速度分布は、1点および2点速度分布に限らず任意の n 点速度分布に対して、一般的かつ系統的な表現が得られる。この点に関しても、2点速度分布の解析と同様、別論文に譲ることとしたい。

参考文献

Kolmogorov, A.N. (1941) Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **30**, 301-305.
Lundgren, T.S. (1967) Phys. Fluids, **10**, 969-975.
Monin, A.S. (1967) PMM J. Appl. Math. Mech. **31**, 1057-1068.
Tatsumi, T. (2001) In Kambe, T. et al. eds. *Geometry and Statistics of Turbulence*, Kluwer, Dordrecht, pp.3-12.
Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (2004) Fluid Dyn. Res. **35**, 123-158.
Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (2007) Fluid Dyn. Res. **39**, 221-266.