

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

2次元保存則の数値計算における平面波捕獲を解析するための 1次元化モデルの提案

One-dimensionalized Model for Analyzing Planar Wave Capturing in Numerical
Solution to Two-Dimensional Conservation Law.

相曾 秀昭

AISO Hideaki

2023年2月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

目次

概要	1
1 はじめに	2
2 1次元化モデルの構成	2
3 1次元化モデルを用いた数値粘性の解析	5
4 実際の計算での波面と格子の斜交による影響の評価	7
4.1 事前の理論解析	7
4.2 Lax-Friedrichs または LLF 差分の場合	8
4.3 Murmann-Roe の差分の場合	11
5 まとめ	15
参考文献	15

2次元保存則の数値計算における平面波捕獲を解析するための 1次元化モデルの提案

相曾 秀昭*¹

One-dimensionalized Model for Analyzing Planar Wave Capturing in Numerical Solution to Two-Dimensional Conservation Law.

AISO Hideaki*¹

ABSTRACT

We propose a one-dimensionalized model for analyzing planar wave in numerical solution to two-dimensional scalar conservation law. It is well known empirically that wave capturing, especially shock wave capturing, in numerical solution to multi-dimensional conservation law is often smeared when the wave surface is oblique to the axes of grid coordinate system, where the usage of finite volume method over structured grid, especially cartesian grid, is assumed. It has been said, just intuitively without strict theoretical analysis, that the so-called “numerical viscosity” would have some relation with the smearing effect above. But there has been no method to have quantitative discussion on the numerical viscosity in such a situation.

In this article, we propose a one-dimensionalized model to discuss and analyze the effect of numerical viscosity quantitatively in the case that the surface of planar wave is oblique to the axes of cartesian computational grid. Then we apply the one-dimensionalized model to analyze a few problems. We obtain the following results. First, a simple extension of one-dimensional discretization method with the second order accuracy is not enough to realize the second order accuracy in the two dimensional discretization. This fact is already known, but we give an alternative explanation. Second, in the case of linear conservation law, the oblique positional relation between the surface of planar wave and the axes system of cartesian computational grid does affect the numerical viscosity rather little.

Keywords: CFD, Numerical Analysis, Wave, Conservation Law, Numerical Viscosity, Finite Volume Method, Computational Grid, Positional Relation between Wave Surface and Grid

概要

2次元保存則の解の数値計算における平面波の捕獲や伝播の解析のための1次元化モデルを提案する。波の捕獲、特に衝撃波の捕獲においては、波面と計算格子が斜交関係になった場合に捕獲の鈍化が生じることは経験的によく知られている。ただし、計算格子は構造格子を仮定し、斜交とは波面と計算格子の座標系の座標軸の斜交（厳密には波面法線方向がどの座標軸にも一致しない）を意味している。そうした捕獲の鈍化はいわゆる数値粘性と関係があるのではないかと考えられてきた。しかしながら、波面が格子に対して斜交する場合の数値粘性の定量的な考察の例は従前には存在しない。

そこで、本稿ではこのような場合の解析に利用するための1次元化モデルを提案する。また、そのモデルを用いていくつかの例について解析を行い結果を得た。一つは2次精度の計算法に関するもので、1次元で2次精度を有する計算法を単純に2次元に拡張しても2次精度が実現できない事であり、これは

* 2022年11月24日受付 (Received November 24, 2022)

¹ 航空技術部門 航空環境適合イノベーションハブ
(Aviation Environmental Sustainability Innovation Hub, Aviation Technology Directorate)

既に知られた事実であるが、この事実に関別の形での説明を与えている。もう一つは、線形に限定した場合、この1次元化モデルの観点では波面と格子の斜交が著しい数値粘性の増大を起すとは言えず、場合によっては減少することもあり得る、というある意味予想外とも言える事実である。

キーワード: 保存則、圧縮性 Euler 方程式、有限体積法、数値粘性、計算格子、波面と格子の位置関係

1 はじめに

流体の数値計算の初期の時代から計算格子と流体现象の適合は計算品質を左右する重要な要素として認識されてきた。特に、特異性の強い不連続である衝撃波の捕獲が問題となる圧縮性流体の数値計算では、計算法(いわゆるスキーム)の他に格子と衝撃波の適合も計算品質を大きく左右する。そのため衝撃波に適合する計算格子の作成は数値計算の重要な要素とされてきたが、近年の数値計算の飛躍的な量の拡大により直交格子のような作成計算が容易な格子の利用も増加した。当然ながら、このような格子では個々の問題毎に流体现象の特徴に適合させて作成された格子と比較して、衝撃波捕獲や境界での問題点が生じる。ここではそのような問題意識から衝撃波と格子の不適合の影響を単純化された設定で簡潔に議論する事を試みる。

計算格子としては正方直交格子を考える。正方直交格子上で波面が格子と斜交する¹ 衝撃波の捕獲では格子に適合する場合に比べ鈍化や数値的な振動が起ることが知られる。また接触不連続においても鈍化が起ることが知られる。従来、こうした現象の説明には「数値計算で格子が解に適合しない場合には“数値粘性”が大きくなる(または大きく効く)」というような定性的な説明がなされることもあり、現象論的、感覚的な説明として広く受け入れられて来た事実もある。しかし、実際に波面と格子が斜交する状況下で“数値粘性”を定量化してそれを鈍化と関連付ける議論が行われた例はない。

そこで本稿では空間2次元の保存則を満たす平面波(波面が曲がっていない、即ち局所の波面法線ベクトルが波面上すべての点で同一方向)の正方直交格子上での数値計算を考える。この平面波は1次元的な現象と考える事も可能であり、そこに注目して、空間2次元の数値計算を1次元化したモデルを構成し提案する。次に1次元化モデルを利用して、数値粘性と呼ばれる鈍化作用についての定量的な議論を試みる。この1次元化モデルによる解析が有効な例として、1次元計算で2次精度を有する計算法を2次元に単純拡張した場合の精度の議論(単純拡張では2次の誤差が残り2次精度が実現できないことはよく知られるが、その事実の別の方法での説明にもなる)、および線形保存則の場合の波面と格子の斜交が数値粘性による鈍化の増大を引き起すことはなく場合によっては減少させることもあり得る事、の2つを示す。後者は比較的単純な解析の結果でありながら、「波面と格子の斜交が数値粘性を増加させ波面の捕獲の鈍化をもたらす」という従前の説明を根底から覆す発見であることは興味深い。また、格子と斜交する衝撃波捕獲で生じる鈍化や振動のような不都合の発生には波面と格子の斜交の他に非線形性が必須であることを示し、非線形性に注目した考察の必要性を示唆するものでもある。

2 1次元化モデルの構成

2次元 x, y -座標空間の保存則で1次元的な解 $U = U(x, y, t)$ (t は時刻変数) がある場合を考える。1次元的な解とは平行する直線群

$$px + qy = c, \quad p, q \text{ は適当な整数}, c \text{ は任意実数}$$

があり、その直線群の各直線上では $U = U(x, y, t)$ は x, y には依らないというような解である。波の伝播の観点で解を見れば波面の法線ベクトルが (p, q) になる。

¹ 厳密に言えば、波面が格子の座標軸と斜交する、または、波面の法線ベクトルの方向が格子の座標軸のどれにも一致しない、ということになる

この1次元的な解 $U = U(x, y, t)$ を各辺が x -軸または y -軸に平行である正方形からなる直交正方格子で数値計算すると、波面の法線が x -軸とも y -軸とも平行でなければ波面と格子が斜交する数値計算となる。計算格子の各有限体積 $C_{i,j}$ (i, j は整数) を、中心が $(i\Delta x, j\Delta x)$ 、各辺長さ Δx の正方形

$$C_{i,j} = \{(x, y) | (i - \frac{1}{2})\Delta x < x < (i + \frac{1}{2})\Delta x, (j - \frac{1}{2})\Delta x < y < (j + \frac{1}{2})\Delta x\} \quad (1)$$

とする。また、時間の離散化

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} < \dots$$

も仮定し、有限体積 $C_{i,j}$ における時刻 $t = t^n$ での $U = U(x, y, t)$ での数値解を $U_{i,j}^n$ で表す。

本節冒頭に述べた1次元解 $U = U(x, y, t)$ では

$$px + qy = px' + qy' \text{ ならば } U(x, y, t) = U(x', y', t)$$

であるから、数値解 $U_{i,j}^n$ でも

$$pi\Delta x + qj\Delta x = pi'\Delta x + qj'\Delta x \text{ 即ち } pi + qj = pi' + qj' \text{ ならば } U_{i,j}^n = U_{i',j'}^n$$

を仮定することは自然である。しかし $(i, j) \neq (i', j')$ である適当な整数対について、 $pi + qj = pi' + qj'$ が成立するには $p : q$ が整数比である事が必要十分である。整数比は互いに素な整数の比に簡約できるので、 p, q は互いに素である整数としてよい。また格子座標軸との斜交の度合いによる状況の変化を観察するためには波面の法線ベクトル (p, q) について p, q が共に正かつ $p \geq q$ の場合に限定してよい。(図1参照)

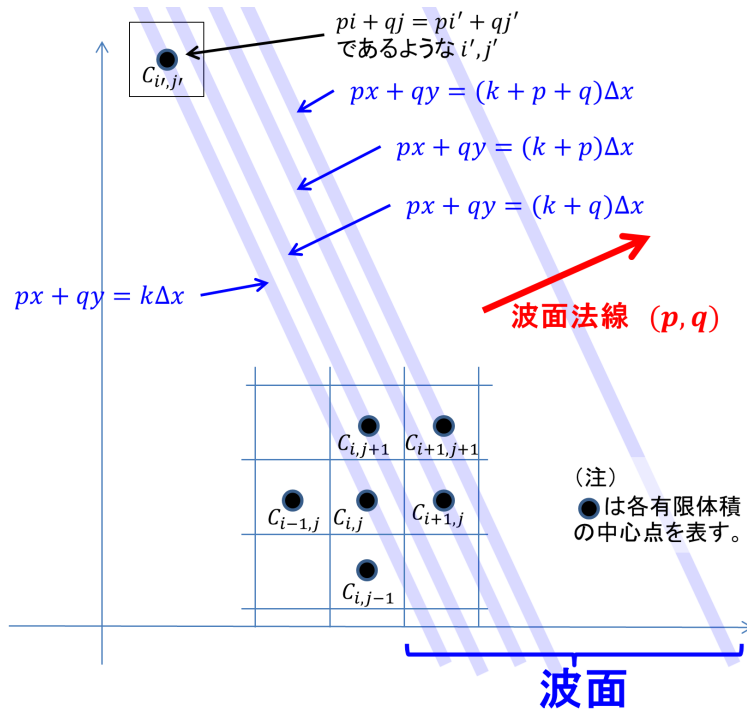


図 1: 波面、有限体積などの設定

そこで、考察対象の解及び数値解に次を仮定する²。

仮定 1. p, q は互いに素な自然数で $p \geq q$ とする。空間 2 次元の保存則の解 $U = U(x, y, t)$ について、

$$px + qy = px' + qy' \text{ ならば } U(x, y, t) = U(x', y', t) \quad (2)$$

² 厳密解で (2) が成立する場合に、ある計算法による数値解で (3) が成立することは一般には自明ではない。一方で、現実の計算では数値解はこのような性質を有すると見做せることが殆どである。その意味で仮定 1 は自然なものである。

が成立し、この $U = U(x, y, t)$ の直交正方格子の有限体積系 $\{C_{i,j}\}_{i,j \text{ は整数}}$ での有限体積法による数値解 $\{U_{i,j}^n\}_{i,j,n \text{ は整数}, n \geq 0}$ では

$$pi + qj = pi' + qj' \text{ ならば } U_{i,j}^n = U_{i',j'}^n \quad (3)$$

が成立する。

このとき、 p, q が互いに素な整数であることから、 i, j が任意の整数値をとるときに $pi + qj$ がとる値は全ての整数値となる。そこで、任意の整数値 k について、

$$\mathcal{C}_k = \{C_{i,j} | pi + qj = k\}$$

なる有限体積の集合 \mathcal{C}_k を考える。ある \mathcal{C}_k に属する有限体積 $C_{i,j}$ は無限個数だけ存在するが、それら各々の $C_{i,j}$ での時刻 $t = t_n$ における数値解 $U_{i,j}^n$ の値は仮定 1 の条件 (3) により同一の値となる。そこで、 \mathcal{C}_k に属する有限体積を同一視して I_k で表し、そこでの時刻 $t = t_n$ における数値解の値 W_k^n と記することができる³。

また、ある \mathcal{C}_k に属する任意の有限体積 $C_{i,j}$ の中心 (i, j) は全て直線 $l_k : px + qy = k\Delta x$ 上にあり、直線 l_k は解の波面でもある。このことから、 \mathcal{C}_k は波面 l_k を代表する有限体積の集合である、または I_k は波面 l_k に対応する有限体積である、とも言え、 W_k^n は波面 l_k での時刻 $t = t_n$ における数値解であると言える。更に、波面でもある平行直線の集合 $\{l_k\}_{k \text{ は整数}}$ を見れば、要素 l_k の位置順序は添字 k の大小順序に対応していることから、 $\{W_k^n\}$ は数値解 $\{U_{i,j}^n\}$ から抽出した 1 次元化数値解であるとも言える。

そこで、1 次元化モデルを次のように定義する。

定義 2. 上記のように定めた有限体積系 $\{I_k\}_{k \text{ は整数}}$ での数値解 $\{W_k^n\}$ を数値解 $\{U_{i,j}^n\}$ の 1 次元化モデルと呼ぶ。また、数値解 $\{U_{i,j}^n\}$ の離散時間発展スキーム (時刻 $t = t_n$ における数値解 $\{U_{i,j}^n\}_{i,j}$ から時刻 $t = t_{n+1}$ における数値解 $\{U_{i,j}^{n+1}\}_{i,j}$ を求めるためのスキーム) を、数値解 $\{W_k^n\}$ の離散時間発展スキームに書き換えたものを離散時間発展スキームの 1 次元化モデルと呼ぶ。

逐次時間発展の 1 次元化モデルについて具体的に見ていく。

$U = U(x, y, t)$ を支配する保存則を

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0 \quad (4)$$

とする。簡略化のため数値解での時刻の離散化は $t^n = n\Delta t, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (Δt は十分小さい正数) としておく。時刻 $t = t^n$ から $t = t^{n+1}$ への離散時間発展では、各 i, j について

- $C_{i,j}$ と $C_{i+1,j}$ の境界での流束 F の近似である数値流束 $\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n$ は $U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n$ に依存する数値流束関数 \bar{F} で定まるとする。即ち、

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n = \bar{F}(U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n).$$

- $C_{i,j}$ と $C_{i,j+1}$ の境界での流束 G の近似である数値流束 $\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ は $U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n$ に依存する数値流束関数 \bar{G} で定まるとする。即ち、

$$\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \bar{G}(U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n).$$

のように数値流束が定められ、次のような保存型スキーム

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ \bar{F}(U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n) - \bar{F}(U_{i-1,j}^n, U_{i,j}^n) \} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \{ \bar{G}(U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n) - \bar{G}(U_{i,j-1}^n, U_{i,j}^n) \} \quad (5)$$

が離散時間発展を与えているとする。ただし、正方直交格子では $\Delta x = \Delta y$ である。また、時間進行の大きさ Δt は安定性のためのいわゆる CFL 条件を満たすとする。

³ $W_k^n = U_{i,j}^n, pi + qj = k$ により W_k^n を定義しても同じことである。

次に (5) の各項を数値解の 1 次元化モデル $\{W_k^n\}$ に合わせて書き換える。 $k = pi + qj$ なので、 $U_{i,j}^n$ が W_k^n に対応するのであれば、 $U_{i-1,j}^n, U_{i+1,j}^n, U_{i,j-1}^n, U_{i,j+1}^n$ はそれぞれ $W_{k-p}^n, W_{k+p}^n, W_{k-q}^n, W_{k+q}^n$ に対応する。(参考：図 1)

つまり、離散時間発展 (5) の 1 次元化モデルは

$$W_k^{n+1} = W_k^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \bar{F}(W_k^n, W_{k+p}^n) - \bar{F}(W_{k-p}^n, W_k^n) \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \bar{G}(W_k^n, W_{k+q}^n) - \bar{G}(W_{k-q}^n, W_k^n) \right\} \quad (6)$$

となる。

また、数値解の 1 次元化モデル $\{W_k^n\}$ については有限体積系 $\{I_k\}$ 上で定められるが、 $\{I_k\}$ が何の離散化であるかは直観的には理解し難い。数値解 $\{W_k^n\}$ の元になるのは 1 次元化された厳密解 $W = W(\xi, t)$ という事になるが、その空間変数 ξ の座標軸として波面法線 (p, q) に平行な直線、例えば $y = \frac{q}{p}x$ を考えることができる。その様にすると、数値解 $\{W_k^n\}$ において添字 k の増加分 1 に対応する ξ の増加分は $\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\Delta x$ であり、これは直線 l_k と直線 l_{k+1} の距離である。つまり、数値解 $\{W_k^n\}$ の空間離散化における差分増分は $\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\Delta x$ であり、また、各 W_k^n は、時刻 $t = t^n$ における、 $W\left(\frac{k}{\sqrt{p^2+q^2}}\Delta x, t^n\right)$ の近似もしくは ξ の区間 (有限体積) $\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(k - \frac{1}{2})\Delta x, \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(k + \frac{1}{2})\Delta x\right]$ 上での $W = W(\xi, t)$ の平均値の近似であるというように考え得る。

3 1次元化モデルを用いた数値粘性の解析

前節で提案した 1 次元化モデルを用いて、波面と格子の斜交の程度による数値粘性の変化を考えたい。

1 次元の線形スカラー保存則の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} (au) = 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

を単純に 2 次元化し、 $u = u(x, y, t)$ についての問題

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} (au) = 0 \\ u(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

を得るが、互いに素である自然数 p, q (但し $p \geq q$) について $\sin \theta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}, \cos \theta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ となる θ をとり、座標軸を $-\theta$ だけ回転することにより、

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} au \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} au \right) = 0 \\ u(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & px + qy < 0 \\ 0, & px + qy > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

なる問題を得る。問題 (9) を各有限体積が (1) で定められる計算格子で計算すれば波面が格子の座標軸に斜交する数値計算となる。

1 次元問題 (7) の流束関数は $f(u) = au$ だが、その数値流束 $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = \bar{f}(u_i^n, u_{i+1}^n)$ には様々なものがある。よく利用される多くの数値流束は

$$\bar{f}(u_-, u_+) = \frac{1}{2} \{f(u_-) + f(u_+)\} - \frac{1}{2} A(u_+ - u_-) = \frac{1}{2} a(u_- + u_+) - \frac{1}{2} A(u_+ - u_-) \quad (10)$$

のように記すことができる。ここで、 A を数値粘性係数と呼ぶ。数値粘性係数の選択により種々の差分法 (差分スキーム) を得ることもよく知られる [1, 2]。例えば、

- ・ 上流差分 (Murmman-Roe の差分)

$$A = |a| \quad (11)$$

- ・ Lax-Wendrof の差分

$$A = \frac{\Delta t}{\Delta x} a^2 \quad (12)$$

- ・ Lax-Friedrichs 差分 (LLF=Local Lax-Friedrichs も含む)

$$A = (|a| \text{ より大なる定数}) \quad (13)$$

のようなものがある。

2次元問題 (9) においても、 x, y 各方向の数値流束はそれぞれの方向の流束関数から1次元問題と同様に定められる。具体的な差分法の定義では A の決定について上の1次元の場合の記述 (10), (12), (13) で a を $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}a$ または $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}a$ に置き換えればよい。

1次元問題 (7) での数値解の離散時間発展は、(10) の数値流束関数を用いた場合、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} a(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{1}{2} A(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \right\} \quad (14)$$

と記されるが、右辺に $u_i^n = u(x, t)$, $u_{i\pm 1}^n = u(x \pm \Delta x, t)$ を代入し、右辺を Δx の2次項までを展開すると

$$u_i^{n+1} = u - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ au_x \Delta x - \frac{1}{2} Au_{xx} (\Delta x)^2 \right\} = u + (\Delta t)u_t + (\Delta t)^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{2} Au_{xx} \quad (15)$$

となる。ただし、 $(x, t) = (i\Delta x, t^n)$ のときには $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$, $u_t(x, t)$ をそれぞれ u, u_x, u_{xx}, u_t と略記している。

2次元問題 (9) で離散時間段階が n の時に (1) が定める各有限体積 $C_{i,j}$ での数値解を $u_{i,j}^n$ とするならば、その離散時間発展スキームは

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} a(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2} A_1(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} a(u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n) - \frac{1}{2} A_2(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \right\} \quad (16)$$

と記せる。ただし、空間2次元問題では x, y -各方向の流束から数値流束を構成する際に方向により異なる数値粘性係数の選択も可能なため、各方向の数値流束での数値粘性係数をそれぞれ A_1, A_2 と記している。上式 (16) に

$$u_{i-1,j}^n = w_{k-p}^n, u_{i,j-1}^n = w_{k-q}^n, u_{i,j}^n = w_k^n, u_{i,j+1}^n = w_{k+q}^n, u_{i+1,j}^n = w_{k+p}^n$$

を代入すれば、数値解の1次元化モデル $\{w_k^n\}$ の離散時間発展スキーム

$$w_k^{n+1} = w_k^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} a(w_{k+p}^n - w_{k-p}^n) - \frac{1}{2} A_1(w_{k+p}^n - 2w_k^n + w_{k-p}^n) \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} a(w_{k+q}^n - w_{k-q}^n) - \frac{1}{2} A_2(w_{k+q}^n - 2w_k^n + w_{k-q}^n) \right\} \quad (17)$$

が得られる。

これも右辺に $u_i^n = u(x, t)$, $u_{i\pm p}^n = u(x \pm \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\Delta x, t)$, $u_{i\pm q}^n = u(x \pm \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\Delta x, t)$ を代入して Δx の2次項までを展開 (3次以上の項は記述を省略) すれば

$$\begin{aligned} w_k^{n+1} &= w - \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} aw_x \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)^2 A_1 w_{xx} (\Delta x)^2 \\ &\quad - \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} aw_x \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)^2 A_2 w_{xx} (\Delta x)^2 \\ &= w - aw_x \Delta x + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+q^2} (p^2 A_1 + q^2 A_2) w_{xx} (\Delta x)^2 \\ &= w + (\Delta t)w_t + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{p^2+q^2} (p^2 A_1 + q^2 A_2) w_{xx} \end{aligned} \quad (18)$$

を得る。(15)と同様に略記している。

上で得られた(15)と(18)を比較することで、波面が格子と斜交することによる数値粘性への影響を観察できる。

簡単な議論の一例として、1次元で2次精度を得られるLax-Wendroff差分を2次元の計算式(5)に単純適用した場合を観察する。(12)を(15)に代入し、 $u_{tt} = (u_t)_t = (-au_x)_t = -a(u_t)_x = -a(-au_x)_x = a^2u_{xx}$ であることから次を得る。これは2次精度であることを示している。

$$u_i^{n+1} = u + (\Delta t)u_t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 a^2 u_{xx} = u + (\Delta t)u_t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt}. \quad (19)$$

1次元化モデル(18)では、

$$A_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} a \right)^2, A_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} a \right)^2,$$

を代入して、

$$u_i^{n+1} = u + (\Delta t)u_t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{p^4 + q^4}{(p^2 + q^2)^2} u_{tt}. \quad (20)$$

を得るが、(19)との比較から時間発展において2次の誤差を生じる事が分かる。即ち、1次元計算で2次精度を実現する数値流束について、それを2次元計算の各方向の数値流束に適用するだけの単純な拡張では2次精度が実現できない事を示している。

4 実際の計算での波面と格子の斜交による影響の評価

Lax-Friedrichs 差分 (LLF も含む) と Murmann-Roe の差分で実際の数値実験を行う。

4.1 事前の理論解析

まず、それぞれの場合に(15)(18)がどのようになるか観察する。

Lax-Friedrichs 差分 (LLF も含む) の場合、 A が(13)を満たす定数であるとして、(15)はそのまま

$$u_i^{n+1} = u + (\Delta t)u_t + (\Delta t)^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{2} A u_{xx}$$

であり、一方、(18)には A を A_1, A_2 に代入して

$$w_k^{n+1} = w + (\Delta t)w_t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} A w_{xx} \quad (21)$$

を得る。⁴つまり、波面と格子が斜交しても2次までの展開式においては1次元計算と変わらない。実際の計算では鈍化の度合いが p, q の値に殆ど依存しない事が予想される。

Murmann-Roe の差分の場合、 $A = |a|$ を(15)に代入して

$$u_i^{n+1} = u + (\Delta t)u_t + (\Delta t)^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{2} |a| u_{xx} \quad (22)$$

を得、一方、(18)には $A_1 = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} |a|, A_2 = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} |a|$ を代入して

$$w_k^{n+1} = w + (\Delta t)w_t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{p^3 + q^3}{(\sqrt{p^2 + q^2})^3} |a| w_{xx} \quad (23)$$

を得る。(23)における w_{xx} の係数が p, q に依存して変化することが分かる。 $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{p^3 + q^3}{(\sqrt{p^2 + q^2})^3} \leq 1$ で、最小値となるのは $p = q = 1$ のときである。このことは波面が格子に斜交する場合の方が w_{xx} の係数が小さくなる事を意味し、実際の計算において鈍化が小さくなると予想される。

数値実験の設定は次の通りである。

⁴ (21)においても、 $w_k^n = w \left(\frac{k}{\sqrt{p^2 + q^2}} \Delta x, t^n \right)$ を w と略記し、同様に $(x, t) = \left(\frac{k}{\sqrt{p^2 + q^2}} \Delta x, t^n \right)$ のときの $w_t(x, t), w_{xx}(x, t)$ をそれぞれ w_t, w_{xx} のように略記している。

- ・流束関数の決定： $a = 0.5$ とする。
- ・Lax-Friedrichs または LLF 差分では $A = 0.5$ とする。
- ・時間刻み Δt については $\Delta t = \Delta x$ とする。

なお、数値実験では 1 次元化モデルの (17) を用いた。式 (17) で $p = 1, q = 0$ とおけば元々の 1 次元計算にもなるので好都合でもある。初期値は、 k の或る値を境としてそれより小さい k の側は 1 でそれ以外では 0 としておく。図 2 のように、時間進行に伴って数値解は鈍化する。

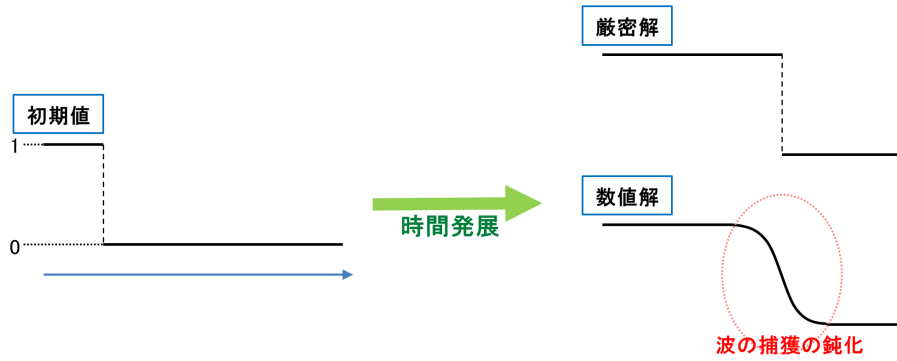


図 2: 数値解の鈍化

なお、線形問題なので、時間進行を進めれば鈍化の度合いはだんだん大きくなる。

以下、初期値からの離散時間進行を 50 回行った際の数値解を、 p, q の値を変化させながら、同一グラフ内にプロットした結果を見せる。これにより p, q の値の変化による鈍化の度合の変化（数値粘性の変化）が観察される。なお、 q/p の値が 0 に近ければ波面と y -軸のなす角が 0 に近く、 q/p の値が 1 に近ければ波面と y -軸のなす角が $\pi/4$ （45 度）に近くなる事に注意する。

4.2 Lax-Friedrichs または LLF 差分の場合

Lax-Friedrichs または LLF 差分の場合は上の結果からは波面と格子の斜交による鈍化はない様に思われる。数値実験からも同様の結果が見て取れる。実際 (p, q) の組合せを変えてもグラフは殆ど変わらない。

なお、ここで用いた A の値では、 q/p の値が 1 になると LLF 差分から元来の Lax-Friedrichs 差分になり、所謂 staggeredness(隣接する 2 ノードが組になり同じ値をとる)が見られる。しかし staggeredness が出現しても全体的な鈍化傾向はよく一致している。

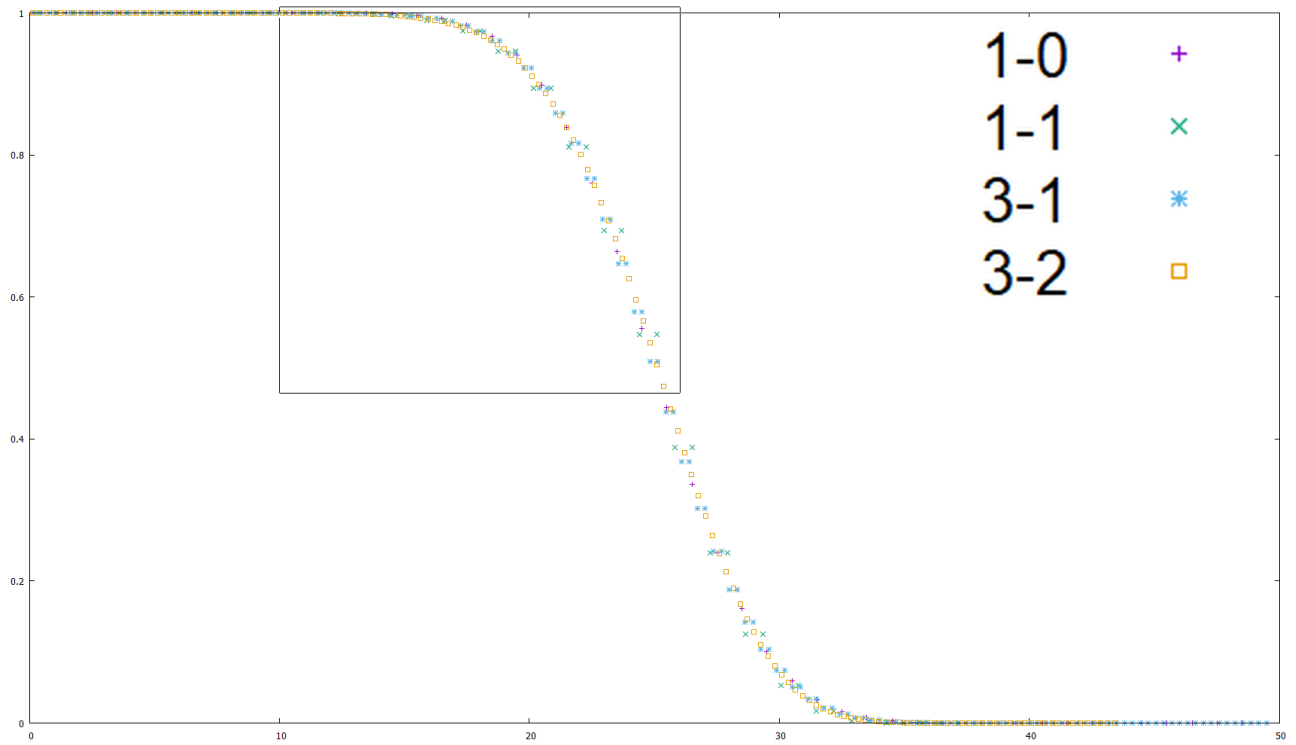


図 3: $(p,q)=(1,0)(3,1)(3,2)(1,1)$

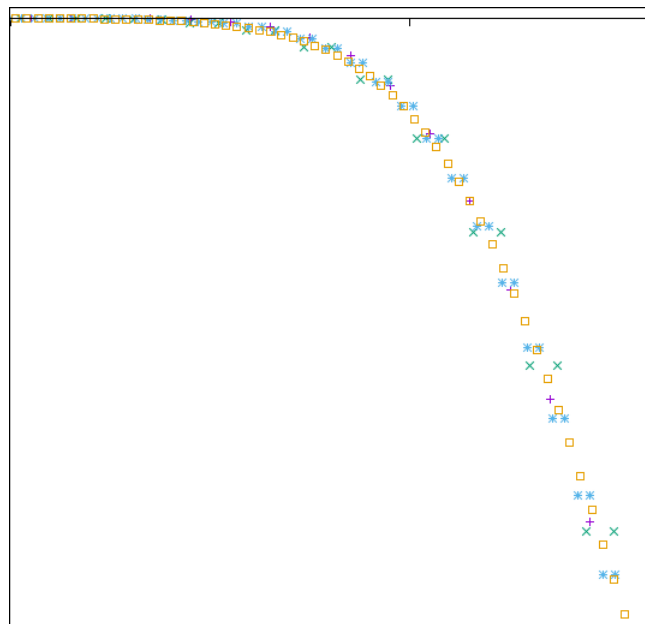


図 4: 上図 3 の枠で囲んだ部分の拡大図

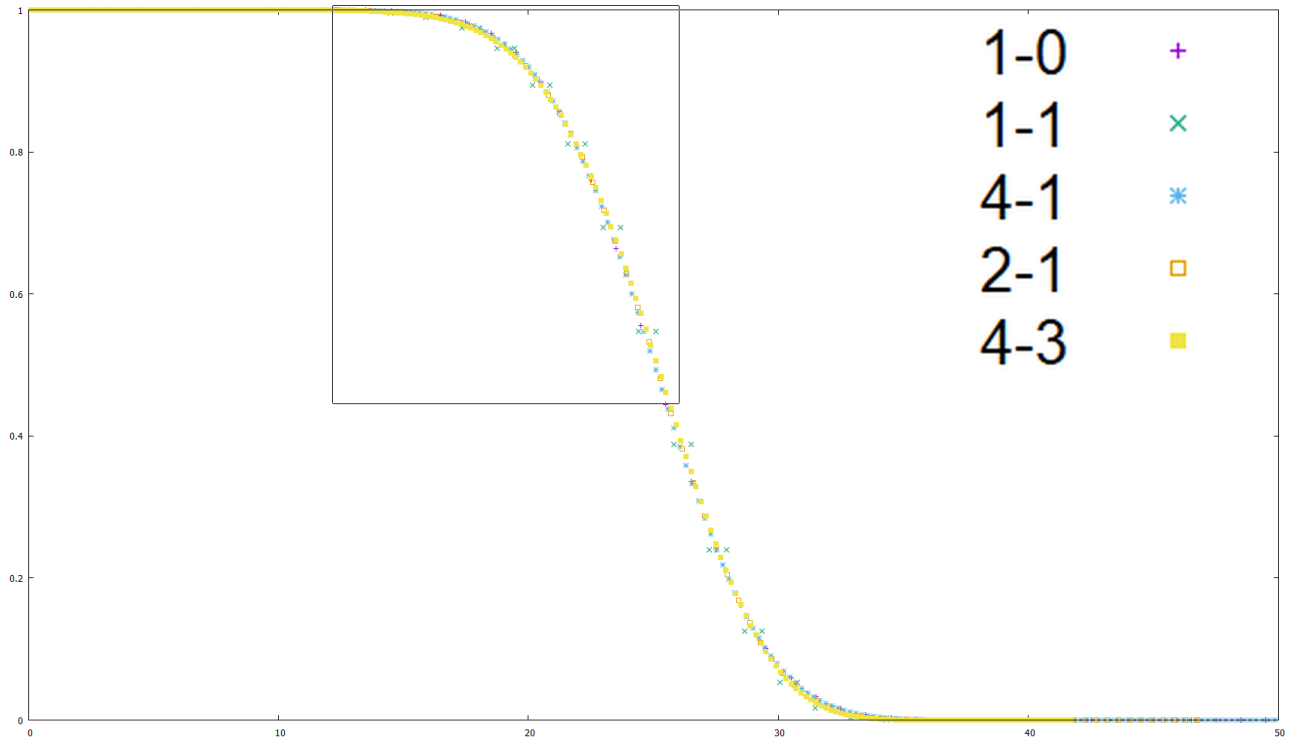


図 5: $(p, q) = (1, 0), (4, 1), (2, 1), (4, 3), (1, 1)$

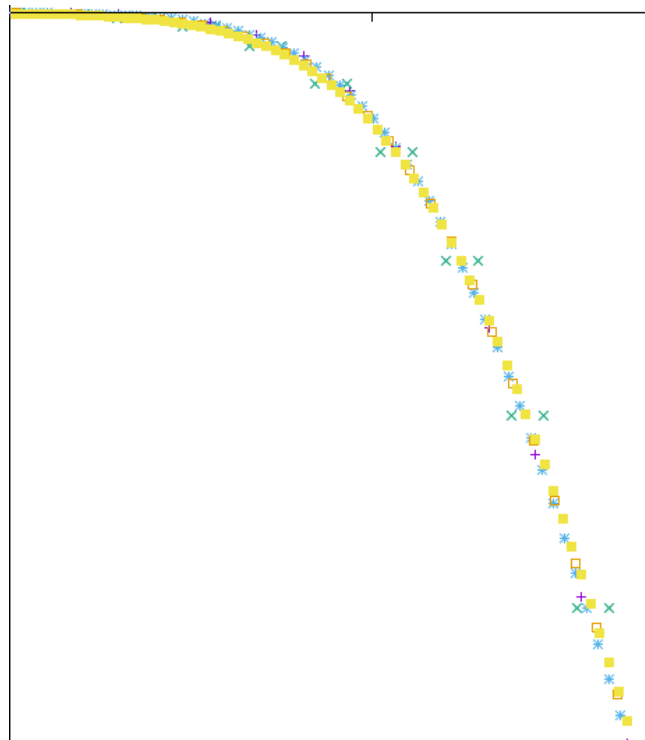


図 6: 上図 5 の枠で囲んだ部分の拡大図

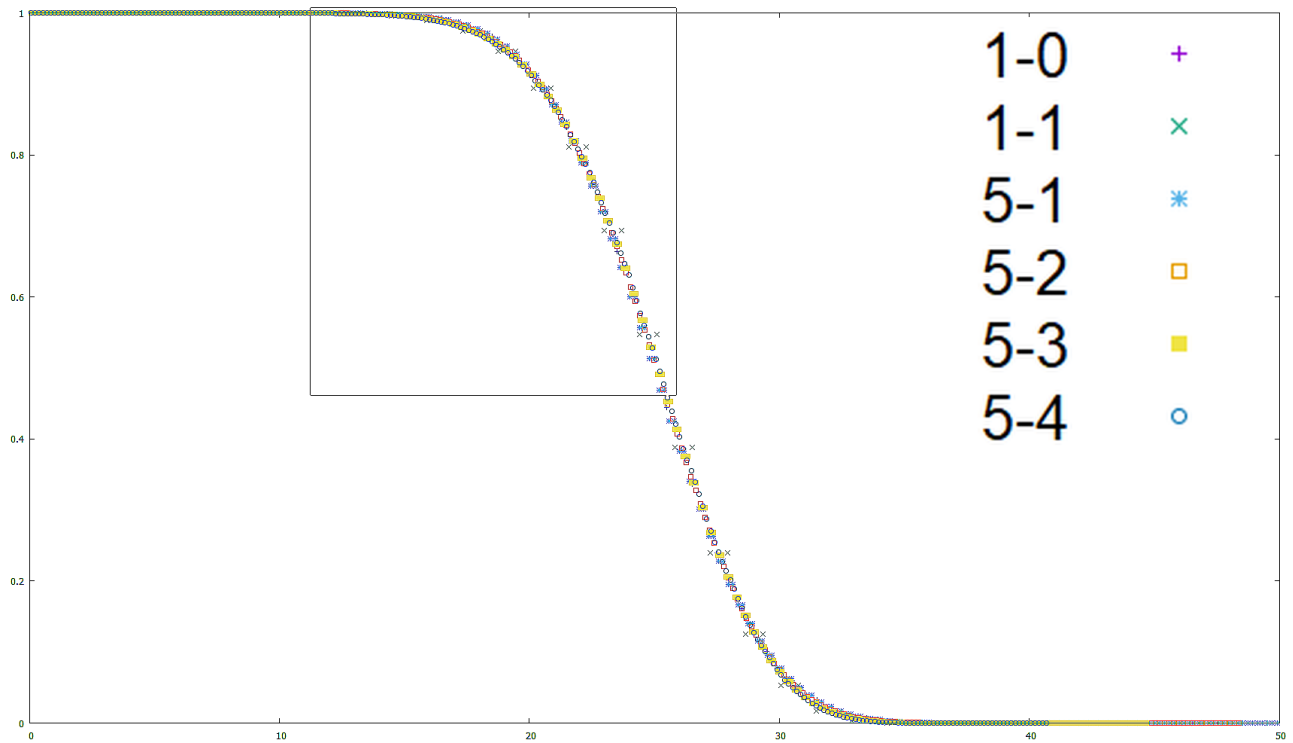


図 7: $(p, q) = (1, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (1, 1)$

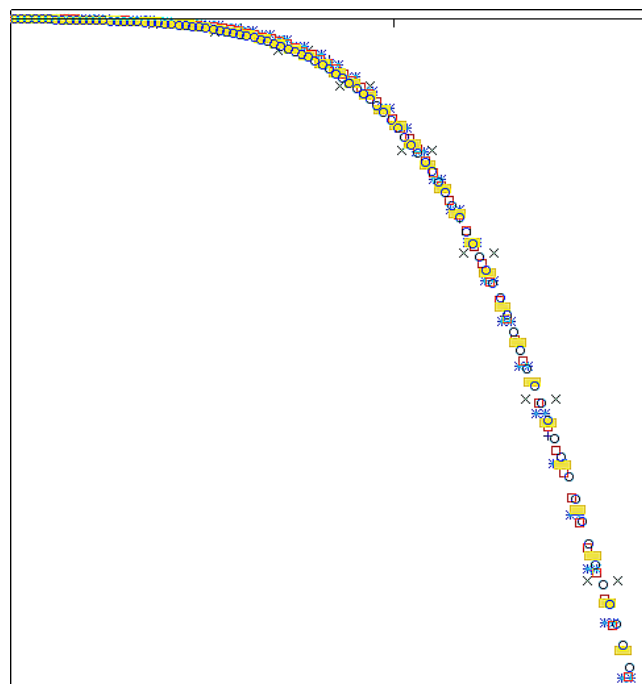


図 8: 上図 7 の枠で囲んだ部分の拡大図

4.3 Murmann-Roe の差分の場合

上の解析では、 q/p が 1 に近づけば (波面と格子座標軸のなす角度が 45 度に近づけば) 却って鈍化が小さくなる事が予想されるが、数値実験においてもそれが観察される。これは本稿で提案する 1 次元化モデルによる解析の有効性を示していると言える。

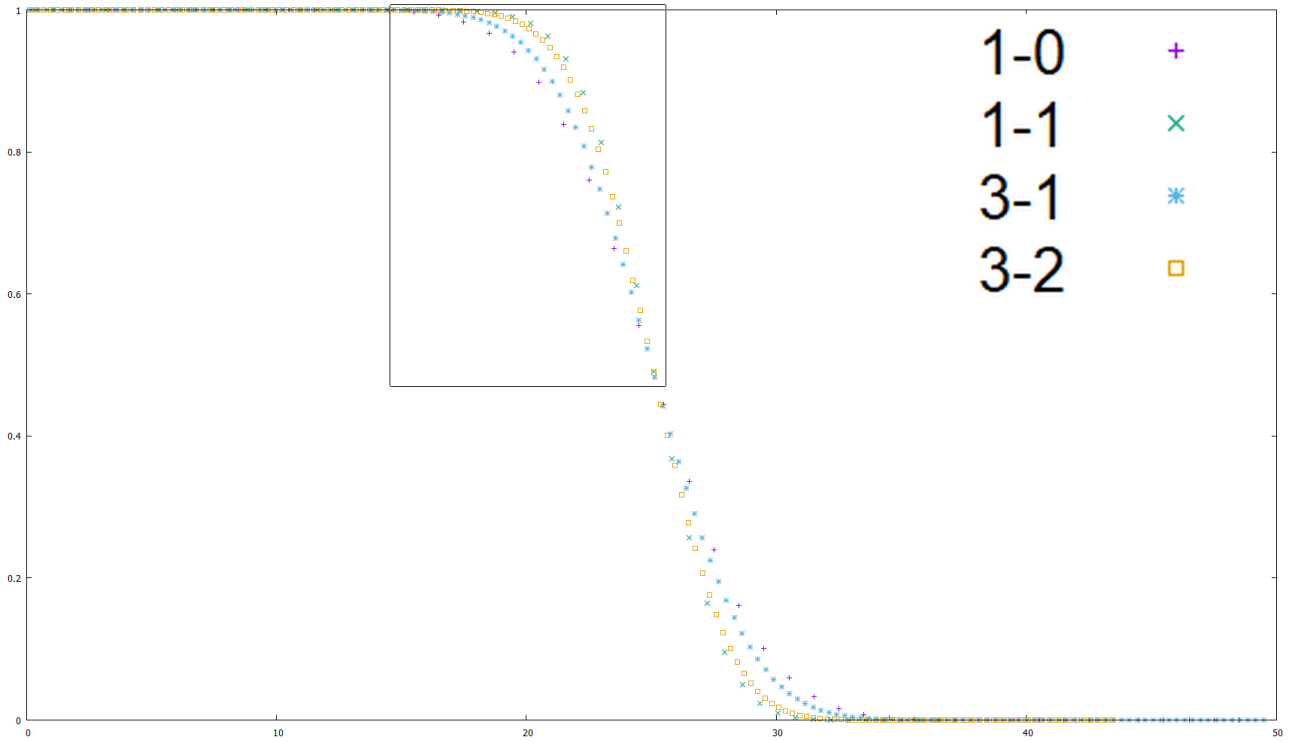


図 9: $(p,q)=(1,0)(3,1)(3,2)(1,1)$

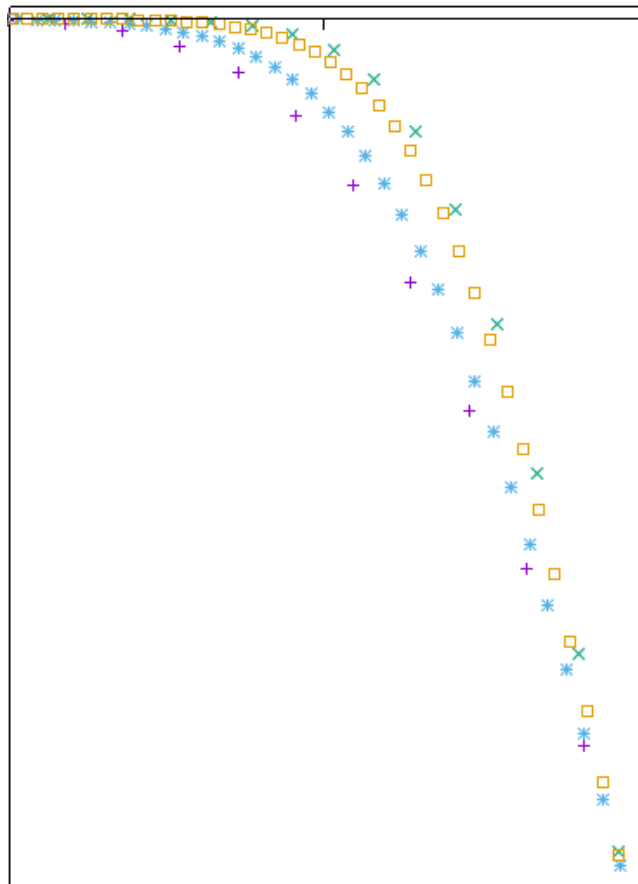


図 10: 上図 9 の枠で囲んだ部分の拡大図

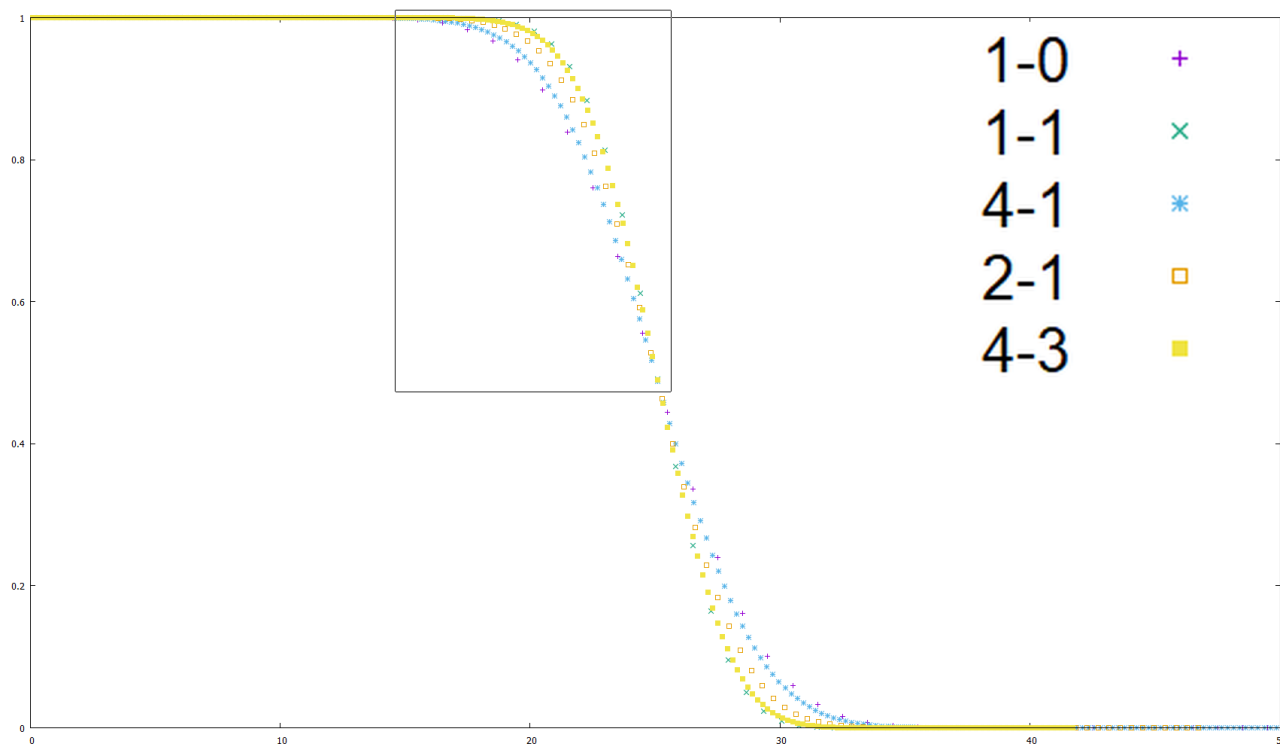


図 11: $(p, q) = (1, 0), (4, 1), (2, 1), (4, 3), (1, 1)$

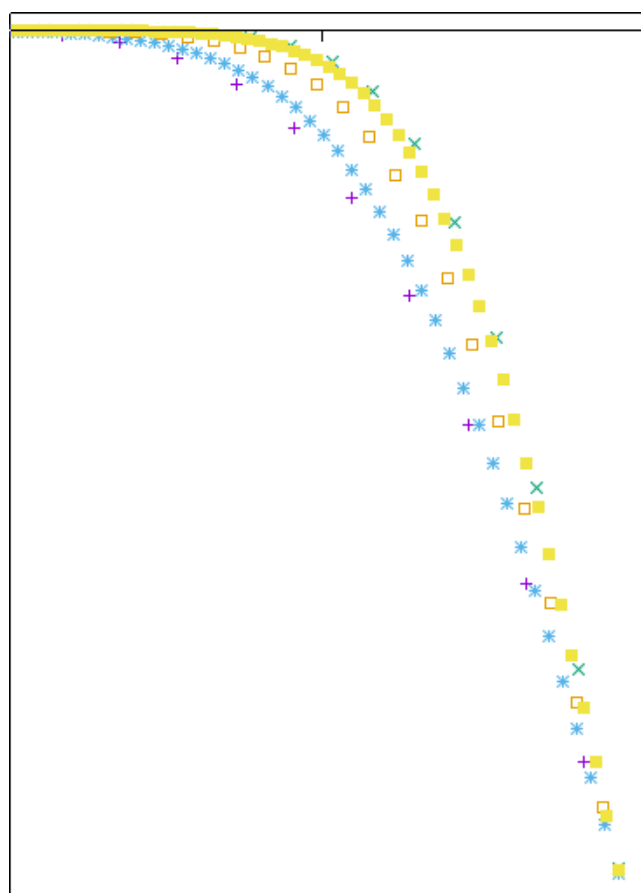


図 12: 上図 11 の枠で囲んだ部分の拡大図

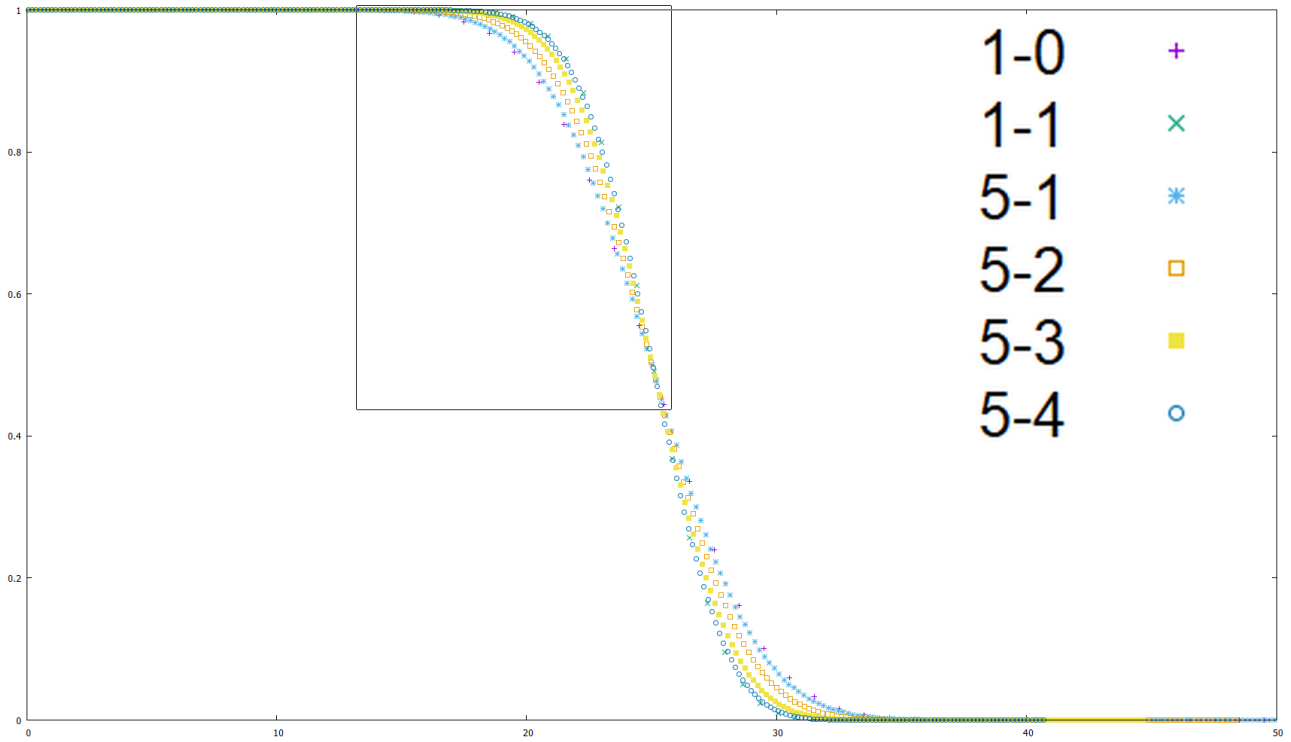


図 13: $(p, q) = (1, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (1, 1)$

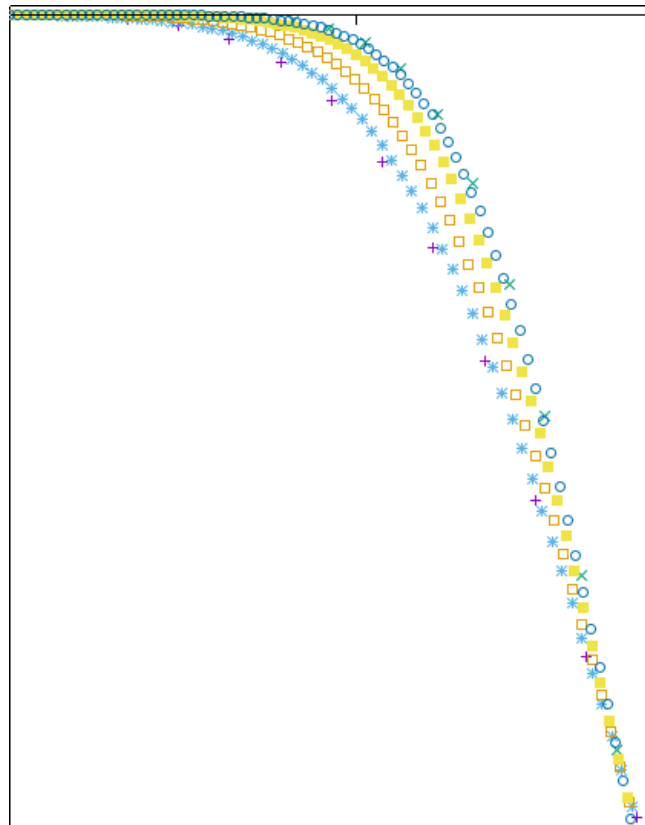


図 14: 上図 13 の枠で囲んだ部分の拡大図

5 まとめ

本稿では、従来あまり定量的に議論される事のなかった波面と格子の斜交による波の捕獲の鈍化について定量的に考察するために1次元化モデルを提案した。前節の数値実験は線形という限られた条件下ではあるが1次元化モデルの有効性を示している。また、線形の場合はスカラー保存則から系への形式的拡張が可能である。

しかしながら、従来から言われていた、波面と格子が斜交する場合は“数値粘性”の効果により波の捕獲の鈍化が生じる、という議論は、少なくとも線形の場合には成立しないようである。つまり、波面と格子の斜交は単独では波の捕獲の鈍化には全く繋がらない。実際、4.1の解析結果は波面と格子が斜交してもそれによる鈍化は生じない事を意味しており、従来の説に慣れていると非常に意外に感じられる。だが、数値実験の結果からも同様の事が確認できる。

一方、衝撃波が格子と斜交する場合にば捕獲の鈍化や数値振動といった問題が生じることはよく知られる通りであり、そうした数値現象の発生の機構には「非線形性」の要素も本質的であると思われる。つまり、非線形性の上に波面と格子の斜交が組み合わせられて何らかの効果を及ぼすと予想される。[3]では、非線形性が衝撃波捕獲に及ぼす影響が明らかに見られる。しかしながら現状の知見のままでは[3]の結果の1次元化モデルの手法による再解釈は自明に近いものになってしまい、解析の進展のためには1次元化モデルの議論への非線形性のより本質的な取り込みが必須である。

本稿の1次元化モデルを非線形性の影響も考慮できるように拡張し、非線形性と波面と格子の斜交の複合作用の解析を行う事が今後の課題となる。

参考文献

- [1] H. Aiso. Admissibility of difference approximation for scalar conservation laws. *Hiroshima Math. J.*, Vol. 23, No. 1, pp. 15–61, 1993.
- [2] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 2005.
- [3] 相曾 秀紹. スカラー保存則の直交格子有限体積近似における衝撃波面の形成機構について JAXA-RR-17-005. Technical report, 宇宙航空研究開発機構, 2015.

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-22-007
JAXA Research and Development Report

2次元保存則の数値計算における平面波捕獲を解析するための1次元化モデルの提案

One-dimensionalized Model for Analyzing Planar Wave Capturing in Numerical Solution to Two-Dimensional Conservation Law.

発行 国立研究開発法人宇宙航空研究開発機構(JAXA)
〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1
URL: <https://www.jaxa.jp/>

発行日 2023年2月21日
電子出版制作 松枝印刷株式会社

※本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。
Unauthorized copying, replication and storage digital media of the contents of this publication, text and images are strictly prohibited. All Rights Reserved.

