

## 勾配計算法の再検討と新手法について

嶋英志

宇宙航空研究開発機構

## Reinvestigation and new method on gradient computation in MUSCL approach

by

Eiji Shima(JAXA)

## ABSTRACT

Reconstruction method is the key for the spatial accuracy of MUSCL type CFD schemes. A new gradient calculation method based on WLSQ (weighted least square method) merging the benefit of G-G(Green-Gauss) method is presented. The method, named GLSQ (G-G based weighted least square method), has second order accuracy for non-orthogonal and non-constant linear mesh and gives proper gradient for thin curved mesh for which LSQ shows huge error. Although GLSQ is originally developed for hybrid mesh that combines octree and layered mesh, it also shows better accuracy in usual rectangle and triangle mesh.

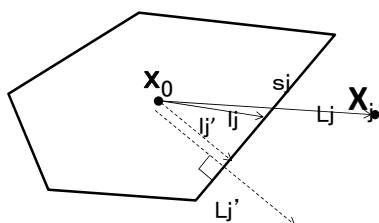


図1 計算セルと各変数の定義

- $L$  : セル中心間距離  
 $l$  : セル中心とセル境界面中心距離  
 $L'$  :  $L$ のセル面法線ベクトル成分  
 $l'$  :  $l$ のセル面法線ベクトル成分  
 $s$  : セル面の面積  
 $q$  : セル中心の基本変数  
 $\bar{q}$  : セル面の基本変数  
 $V$  : セル体積  
 $\tilde{\mathbf{F}}$  : セル界面に垂直な非粘性流束  
 $\tilde{\mathbf{F}}_v$  : セル界面に垂直な粘性流束

$\bar{\mathbf{X}} = (X, Y, Z)^T$  : セル中心座標

$\Delta \bar{\mathbf{x}} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$  : セルからセル面へのベクトル

$\bar{\mathbf{x}}_n = (x_n, y_n, z_n)^T$  : セル面の単位法線ベクトル

$\bar{\mathbf{x}}_i$  : 隣接セル方向への単位ベクトル

$\alpha$  : セル面内挿値の内挿係数

$\beta$  : 混合公式の重み係数

$\Delta$  : セル中心間の差分

$\omega$  : 重み付最小自乗法の重み関数

添え字

$i, j$  : 周辺セルのインデックス

$o$  : 着目するセルのセル中心値

$()_{o,j}$  : セル" $o$ "の隣接セル" $j$ "との境界面上の値

## 1. はじめに

八分木（2次元では四分木）直交格子と物体境界近くの層状格子を組み合わせたハイブリッド格子は高レイノルズ数流れのCFD解析における現実的複雑形状の解析手法として有望である。そのソルバーとして、様々なセル（検査体積）を任意多面体のセルとして統一的に扱うセルセンター型FVM（有限体積法）は最もシンプルな選択となりうる。更に、この様な手法が高精度かつ堅牢に構成できれば既存の構造・非構造格子生成手法による格子も全てを同じソルバーで対応することが可能になり応用の幅が大きく広がると予想される。

FVMの圧縮性流体のCFD解析手法としてMUSCL型スキームが幅広く用いられている。MUSCLではセル内物理量勾配算出が必要であり、任意の多面体に対する勾配計算法は既に幾つか存在する<sup>[1-3]</sup>。その中で、LSQ（最小自乗近似）による方法は点の配置に関わらず、線形分布を厳密に再現できる利点が知られる。他方、G-G（グリーン・ガウスの方法）はきれいな（対称性・等間隔性の良い）格子以外では、線形分布を再現しない。しかし、LSQは薄い歪んだ格子の場合に極めて誤差が大きくなりうる。一方、G-Gはそれほど酷い状況にはならないこと、WLSQ（重み付き最小自乗法）では、改善されること、等が報告されている<sup>[1]</sup>。

本研究の目的は、ハイブリッド格子を含む任意の多面体に対し、既存の勾配計算方は不十分であることを明らかにし、堅牢で、それを保てる範囲で高精度な新手法を構築することである。特に堅牢性に関して再構築での単調

性維持の課題を取り上げ、単調性を指針に、歪んだ格子で、堅牢性と精度を調整する手法を提案する。

## 2. 基礎方程式並びにスキームの基本

NS方程式は積分形式で次のように書ける。

$$\int \mathbf{Q}_t dv + \oint \tilde{\mathbf{F}} ds = \oint \tilde{\mathbf{F}}_v ds \quad (2-1)$$

これを多面体のセルに適用することでFVMの基礎式が得られる。

$$(\mathbf{VQ}_t)_o + \sum_j (\tilde{\mathbf{F}}s)_{o,j} = \sum_j (\tilde{\mathbf{F}}_v s)_{o,j} \quad (2-2)$$

MUSCL型スキームでは、非粘性流束は、隣り合うセル中心から外挿されたセル界面両側の物理量を用い、近似Riemann流束などを用いて次のように計算される。

$$\tilde{\mathbf{F}}_{o,j} = \tilde{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{q}}_{o,j}, \bar{\mathbf{q}}_{j,o}, \bar{x}_{no,j}) \quad (2-3)$$

セル界面値の外挿には様々な方法があるが、ここではセル中心での勾配を用いて次のように求める。

$$\bar{\mathbf{q}}_{o,j} = \mathbf{q}_o + \phi(\nabla \mathbf{q}_o, \Delta \bar{x}_{o,j}) \quad (2-4)$$

ここで $\phi$ は単調性を保つための勾配制限関数<sup>[4][5]</sup>である。勾配制限関数は原則的に衝撃波などの不連続に対応するためであり、歪みの小さい格子(6.3参照)での亜音速流れでは不要、即ち $\phi=1$ で充分のはずである。本稿では勾配制限関数は考慮せず、セル中心での勾配 $\nabla \mathbf{q}$ の算出法に集中する。また、セル中心勾配は、乱流モデルや粘性流束にも必要で、計算法構築の重要課題の一つである。

## 3. 既存の勾配計算法

### 3.1 WLSQによる勾配計算

WLSQ(Weighted Least Squares Method)による勾配計算は、

$$\Pi = \sum_j \omega_j (\nabla \mathbf{q} \cdot \Delta \bar{\mathbf{x}}_j - \Delta \mathbf{q}_j)^2, \quad \omega_j > 0 \quad (3-1)$$

を最小にするように勾配 $\nabla \mathbf{q}$ を決めるものである。

停留条件から次の連立一次方程式が導出される。

$$\mathbf{M} \nabla \mathbf{q} = \sum_j \omega_j L_j \Delta \mathbf{q}_j \bar{x}_{tj} \quad (3-2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{ZX} \\ I_{XY} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{YZ} & I_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

$$I_{AB} = \sum_j \omega_j \Delta A_j \Delta B_j \quad (3-4)$$

### 3.2 WLSQの空間2次精度条件

$\omega_j$ としてセル中心間の距離 $L_j$ を用いて

$$\omega_j = L_j^{-N} \quad (3-5)$$

とする方法を、ここではWLSQ(N)と呼ぶ。重みなしの

LSQはWLSQ(0)として統一的に扱う。直線格子の交点上の点などの対称性のある点分布に対してはWLSQ(3)が空間2次精度を与えることが示される。

### 3.3 G-Gによる勾配計算

G-G(Green-Gauss)の定理により領域 $\Omega$ の平均勾配は、領域境界 $\partial \Omega$ での表面積分を用いて次式で与えられる。

$$\nabla q = \frac{1}{V} \int_{\partial \Omega} q \bar{x}_n ds \quad (3-6)$$

この公式を多面体に適用し面内の平均を $\bar{q}$ とする。その値として下記の隣り合う格子点の内挿値

$$\bar{q}_i = q_o + \alpha_i \Delta q_i = (1 - \alpha_i) q_o + \alpha_i q_i \quad (3-8)$$

を用いると近似勾配は次のように求められる。

$$\nabla q = \frac{1}{V} \sum_i s_i \alpha_i \Delta q_i \bar{x}_{ni} \quad (3-9)$$

## 4. 既存の手法の問題点

### 4.1 G-Gの問題点

G-Gはセル界面での平均値が正確であればセル内の正確な平均勾配を与えるが、数値的には界面の平均値が近似的にしか分からないので、一般には線形分布すら保存できない。また不等間隔格子では高々1次精度である。

### 4.2 WLSQ(N)での非等方点分布

図2のような非対称の点分布を考える。図中の曲線で構成される検査体積にG-Gを適用すると、セル界面の白丸で真の平均値が与えられれば、境界の面積が適切な重みとして働くことで、二次精度で勾配を算出することができる。一方、WLSQ(N)の場合には、点数の多い側の重みが大きくなり、極端な場合、片側差分となってしまう。

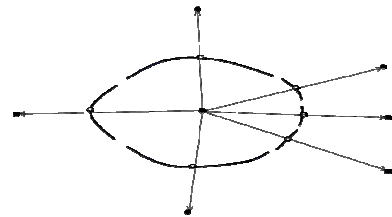


図2 非等方的な点分布の例

### 4.3 WLSQ(N)での曲がった薄いセルでの勾配算出

図3左に示す、僅かに曲がって並んだ薄いセルを考える。ここでは、各方向では、等間隔格子と考える。対称性から重み関数は左右( $\omega_1$ )および上下( $\omega_2$ )で同じとすると、WLSQを用いてy方向勾配は次のように求められる。

$$q_y = \frac{\omega_1 \Delta y_1^2 \frac{1}{\Delta y_1} \left( q_0 - \frac{q_1 + q_3}{2} \right) + \omega_2 \Delta y_2^2 \frac{q_2 - q_4}{2 \Delta y_2}}{\omega_1 \Delta y_1^2 + \omega_2 \Delta y_2^2} \quad (4-1)$$

一方、差分近似による参照値は、

$$q_y = (q_2 - q_4) / (2\Delta y_2) \quad (4-2)$$

となる。(x勾配は両者で一致) よって、式(4-1)は、分子前半の格子の曲がりによる誤差成分と式(4-2)と同じ後半の上下の点の差分との重み付き平均になっており、式(4-1)が式(4-2)に近似するには、次の条件が必要である。

$$\omega_1 \Delta y_1^2 \ll \omega_2 \Delta y_2^2 \quad (4-3)$$

格子の曲がり(角度)が小、すなわち、このケースの表記では、

$$\Delta y_1 / L_1 \ll 1 \quad (4-4)$$

かつ、 $\Delta y_2 / L_2 \cong 1$  の条件のもとでは

$$\omega_j = L_j^{-N}, N \geq 2 \quad (4-5)$$

は適切な重み関数であることが分かる。

一方、図3右のように逆に縦に細長い格子( $L_1 < L_2$ )の場合に対しても、式(4-1)は同様に成立し、このケースも考慮すると $N=2$ 、即ちWLSQ(2)のみが適切である事が分かる。

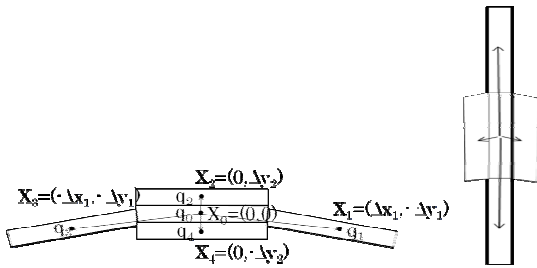


図3 曲率のある格子の例

## 5. 新しい勾配計算法

### 5.1 G-G の特徴を模擬する重み関数

4.2で述べた非等方格子点分布に対するG-G点の特長は、セル界面の面積が適切な重み関数として働くことによる。WLSQの定義式(3-2)とG-Gの式(3-9)を比較すると、右辺の $\Delta q_i$ に関わる係数は、各々、

$$\text{WLSQ: } \omega_i L_i \Delta q_i \bar{x}_{ti} \quad (5-1)$$

$$\text{G-G: } \frac{1}{V} s_i \alpha_i \Delta q_i \bar{x}_{ni} \quad (5-2)$$

となっている。直行性の良い格子では、 $\bar{x}_{ni} \approx \bar{x}_{ti}$

であり、定数係数はWLSQでは無視できるので、

$$\omega_i = \alpha_i s_i / L_i \quad (5-3)$$

であれば式(5-1)と式(5-2)は、同等になることが分かる。次に図4のような、一次元不等間隔格子を例に、空間二次精度の勾配算出を実現する重み関数を考える。内挿係数 $\alpha$ を

$$\alpha_{wi} = (2l_i / L_i)^2 \quad (5-4)$$

のように定義すれば、この内挿係数を用いた重み関数は

$$\omega_j = (2l_j / L_j)^2 s_j / L_j = 4s_j l_j^2 L_j^{-3} \quad (5-5)$$

となり、 $s_j l_j$ が一定であること考慮すると、二次精度のWLSQ(3)と同等となる。ただし、一般のセルの場合には $\alpha$ を定義する $l_j L_j$ の選び方は自明ではない。歪の大きいセルでの堅牢性および後述する八分木格子への対応を考慮しセル面に垂直な方向の射影長 $l'_j, L'_j$ (図1参照)を用いて $\alpha$ を定義する。

$$\alpha_{wi} = (2l'_i / L'_i)^2 \quad (5-6)$$

最終的に

$$\omega_j = (2l'_j / L'_j)^2 s_j / L_j \quad (5-7)$$

を用いたWLSQをWLSQ(G)と呼ぶ。

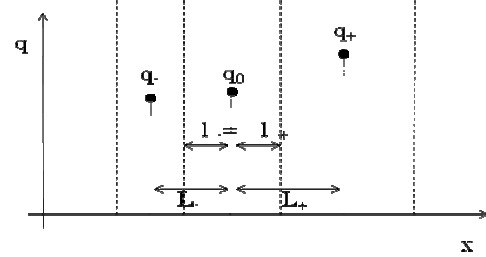


図4 一次元不等間隔格子の例

### 5.2 G-GとWLSQの混合公式

後述するように、WLSQ(G)は、少なくとも妥当な勾配を算出する。しかし、WLSQ(G)を含むWLSQ全般において、近似精度が高くとも再構築に用いた場合には大きなエラーを生じる危険がある。それに対し、G-Gは、そのような問題を生じにくい。そこでWLSQでは対処できない場合にG-Gに滑らかに切り替えられるよう、次のようなG-GとWLSQの混合公式を考える。(Appendix.B参照)

$$\begin{aligned} & [\beta_o \mathbf{M}_o + 2D(1 - \beta_o) \mathbf{I}] \nabla q_o = \\ & \beta_o \sum_j \omega_j L_j \Delta \bar{x}_{tj} \Delta q_j + 2D(1 - \beta_o) \sum_j \alpha_{Gj} s_j \bar{x}_{nj} \Delta q_j \\ & \beta \in [0, 1] \end{aligned} \quad (5-8)$$

これは $\beta=1$ でWLSQ、 $\beta=0$ でG-Gの勾配を与える。

WLSQとしてWLSQ(G)を用いると次元調整用の定数 $D$ は1で良いので次の式を得る。

$$\begin{aligned} & [\beta_o \mathbf{M}_o + 2(1 - \beta_o) \mathbf{I}] \nabla q_o = \\ & = \sum_j (\beta_o \alpha_{wj} \bar{x}_{tj} + 2(1 - \beta_o) \alpha_{Gj} \bar{x}_{nj}) s_j \Delta q_j \end{aligned} \quad (5-9)$$

これをGLSQ(G-G based WLSQ)と名付ける。 $\beta$ の算出法については6.3項で述べる。WLSQと同様に3x3行列の反転を必要とするが格子が時間不変であれば初期に一回

計算しておけばよいので、計算量は、ほとんど増えない。

## 6. WLSQ(G)による改良

GLSQは、6.3項で述べるようにセルの縦横比が大きい場合以外にはWLSQ(G)として振舞うので、ここではWLSQ(G)の性質を述べる。

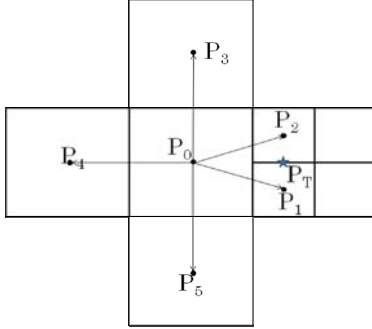


図5 四分木格子の例

### 6.1 非等方点分布の場合

例として、図5のような二次元格子を考える。点 $P_j$ の座標、物理量を $x_j, q_j$ のように表す。大きい正方形格子の辺長を $h$ とし、対称性から、 $P_1, P_2$ の重みを $\omega_a$ 、 $P_3 \sim P_5$ の重みを $\omega_b$ とすると、WLSQのx方向勾配は次のようになる。

$$q_x = \left( \frac{9}{8} \omega_a + \omega_b \right)^{-1} \left( \frac{9}{8} \omega_a \frac{\frac{1}{2}(q_1 + q_2) - q_0}{\frac{3}{4}h} + \omega_b \frac{q_4 - q_0}{h} \right) \quad (6-1)$$

次に、図6中の $P_T$ に仮想点を設け、平均値 $(q_1 + q_2)/2$ を置いて、 $P_1, P_2$ の代りに用いた勾配を求める。(WLSQ(G)を用いれば2次精度近似となる。)

$$q_x = \left( \frac{9}{16} \omega_T + \omega_b \right)^{-1} \left( \frac{9}{16} \omega_T \frac{q_T - q_0}{\frac{3}{4}h} + \omega_b \frac{q_4 - q_0}{h} \right) \quad (6-2)$$

(3-25)、(3-26)を比較すると、

$$\omega_T = 2\omega_a \quad (6-3)$$

の条件のもとで、式(6-1)の勾配は $P_T$ の位置に $P_1, P_2$ の平均値を置いたものと一致し、WLSQ(G)では式(6-3)が成立し不等間隔性を正しく考慮できることが分かる。

### 6.2 曲がった薄いセルの場合

4.3項と同様のセルに対して、WLSQ(G)の重み関数式(5-7)および

$$\begin{aligned} s_1 &\approx s_3 \approx L_2 \\ s_2 &\approx s_4 \approx L_1 \\ V &\approx L_1 L_2 \end{aligned} \quad (6-4)$$

の関係を用いると、重み関数は、下記となり、定数係数を除くとWLSQ(2)に一致する。

$$\omega_1 = \frac{s_1}{L_1} \left( \frac{L_1'}{L_1} \right)^2 \approx \frac{1}{4} \frac{L_2}{L_1} \approx \frac{1}{4} \frac{V}{L_1^2} \quad (6-5)$$

$$\omega_2 = \frac{s_2}{L_2} \left( \frac{L_2'}{L_2} \right)^2 \approx \frac{1}{4} \frac{L_1}{L_2} \approx \frac{1}{4} \frac{V}{L_2^2}$$

したがって、WLSQ(G)は、この場合でも適切である。

### 6.3 歪んだセルでの単調性維持の課題

WLSQ、G-Gのいずれにおいても、セル界面の物理量外挿値は次のようにあらわされる。

$$\bar{q}_{o,j} - q_o = \Delta \bar{q}_i = \sum_j C_{ij} \Delta q_j \quad (6-9)$$

例えば、GLSQでは次のように書ける。

$$C_{ij} = \left( \Delta x_i \cdot [\beta_o \mathbf{M}_o + 2(1 - \beta_o) \mathbf{M}]^{-1} \sum_j (\beta_o \alpha_{wj} \bar{x}_{ij} + 2(1 - \beta_o) \alpha_{Gj} \bar{x}_{nj}) s_j \right) \quad (6-10)$$

ここで、次のような単調性条件を要求する。

$$|\Delta \bar{q}_j| < |\Delta q_j| \quad (6-11)$$

したがって係数行列には、次のような条件が要求される。

$$|C|_{\max} \equiv \max(|C_{ij}|) < 1 \quad (6-12)$$

例えば、滑らかな構造格子に中心差分を適用した場合には、下記が成立する。

$$|C|_{\max} \approx 0.25 \quad (6-13)$$

G-Gの係数行列は下式であらわされるが、セル界面が平面で、各層の厚みが滑らかに変化する層状格子では状況は構造格子と同様であることを示せる。

$$C_{ij} = \Delta \bar{x}_i \cdot \frac{(s \bar{x}_n)_j}{2V_o} \quad (6-14)$$

GLSQでは式(6-12)を満足するようにセル毎に $\beta$ を決める。 $\beta \ll 1$ を仮定すると、式(2)は $\beta$ の1次までの展開で次のように書ける。なおここでは $\alpha_G = 1/2$ としている。

$$C_{ij} \approx \Delta x_i \cdot \frac{s_j}{2V_o} \left\{ \bar{x}_n + \beta_o \left( \alpha_{wi} \bar{x}_i - \frac{1}{2V_o} \mathbf{M}_o \bar{x}_n \right) \right\}_j \quad (6-15)$$

これより十分条件として次式が導かれる。

$$\beta_o < \min \left( \frac{\left| \frac{2V_o}{s_i} - |\bar{x}_{ni} \cdot \Delta \bar{x}_j| \right|}{\left| \left( \alpha_{wi} \bar{x}_i - \frac{1}{2V_o} \mathbf{M}_o \bar{x}_n \right) \cdot \Delta \bar{x}_j \right|} \right) \quad (6-16)$$

WLSQのマトリックス $\mathbf{M}$ のため式(8)を満たす $\beta$ は自明

ではないが WLSQ(G)では下記が成立する。

$$\text{分子} \approx \frac{2V_o}{s_i} \quad (6-17)$$

$$\text{分母} < |\Delta \vec{x}_j| \quad (6-18)$$

これらを想定し、ハイブリッド格子での数値実験により次の定義式が十分であることが分かった。

$$\beta_o = \min \left( 1, \frac{V_o}{\max(\Delta x_j) \cdot \max(s_j)} \right) \quad (6-19)$$

例えば、矩形格子の場合、縦横比が 2 までは完全に WLSQ(G)で、それ以上では徐々に G-G の比率が増すことになる。したがって、ハイブリッド格子の直交格子部では WLSQ(G)のみが有効となる。

## 7. 数値例

### 7.1 円柱周り格子の例

図 7 に示すような半径 1 の円柱周りの格子において関数  $q=r^2$  に対し半径方向微係数  $q_r$  を G-G、WLSQ(0)、WLSQ(3)、WLSQ(G)で評価し厳密解と比較した。図 8,9 に矩形格子、三角形格子の結果を示す。まず、WLSQ(G)は、いずれのケースでも比較的誤差が小さい。次に、両ケースの WLSQ(0)、三角形格子の WLSQ(3)は物体近傍で  $q_r \neq 0$  となって 100%近い誤差を生じている。また、三角形格子では G-G の定式化で仮定する隣合うセル中心間に境界線の中点があるという点配置の前提条件が崩れるため誤差が常に大きい。ここには示さないが GLSQ は WLSQ(G)と G-G の中間なので物体近傍では G-G にそれ以外では WLSQ(G)と同様に振る舞う。

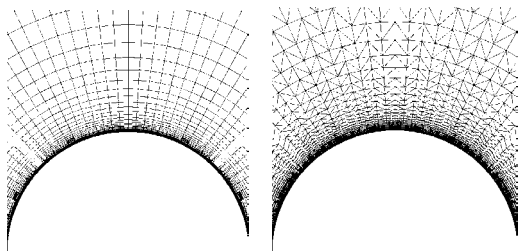


図 7 円柱周りの格子(左、矩形、右三角形)

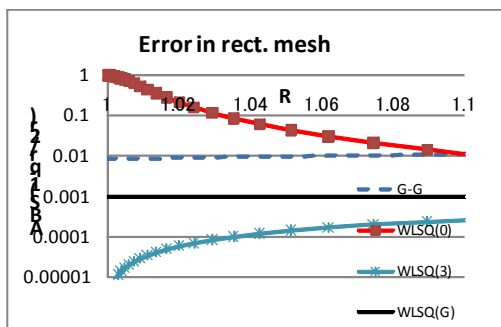


図 8 矩形格子の場合の誤差分布

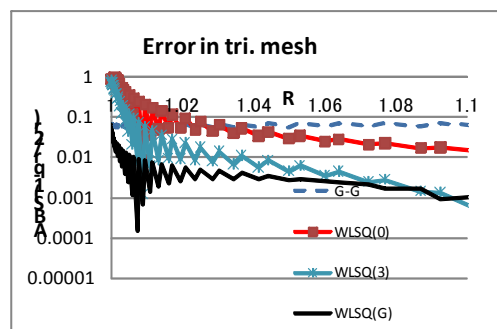


図 9 三角形格子の場合の誤差分布

### 7.2 単調性維持の確認

図 10,11 に示されるような球(SPHERE)および NACA0012 翼型(AIRFOIL)まわりの高レイノルズ数計算用のハイブリッド格子において、6.3 項で述べた単調性条件の成立を確認する。表 1 に式(6-9,12)で定義される  $|C|_{\max}$  の全空間での最大値を示す。単調性条件を満足するには  $|C|_{\max} < 1$  が必要であるが、表に示されるように、G-G、GLSQ、WLSQ(0)以外は、単調性を維持していない。この単調性の破れは、セルの縦横比が大きいたとこで生じる。縦横比の大きなセルでは G-G に切り替わる GLSQ が単調性を維持していることも、これを裏付けている。WLSQ(0)が単調性を維持しているのは、薄い層方向の勾配を実質的に無視しているからであり、勾配算出精度は低い。(4.3、7.1 項参照)

表 1 各勾配計算法による  $|C|_{\max}$  最大値

	AIRFOIL	SPHERE
G-G	0.443	0.556
GLSQ	0.606	0.517
WLSQ(G)	553	290
WLSQ(0)	0.971	0.442
WLSQ(1)	3.031	4.156
WLSQ(2)	445	253
WLSQ(3)	58418	18469

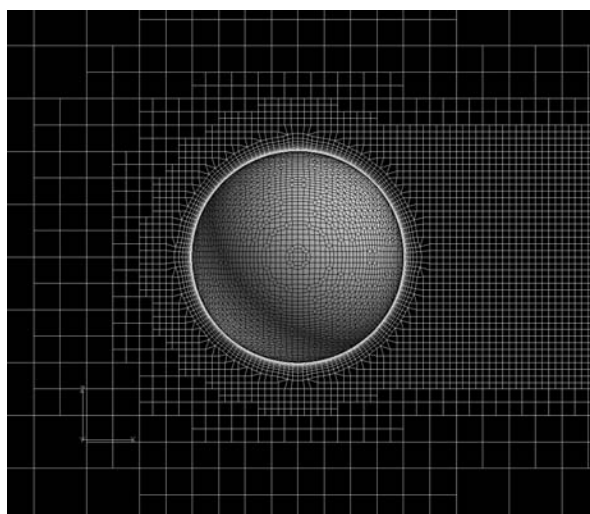


図 10 球周りのハイブリッド格子



### 7.3 2次元翼型の粘性計算

Mach 数=0.3 の NACA0012 翼型まわり流れ場の圧力分布を図 11 に示す。手法の性質から、G-G は格子間隔が急変するところで、WLSQ(0)は前縁付近の層状格子で問題を生じるはずであるが、このケースでは GLSQ がやや滑らかな等高線を示している以外大きな違いは見えない。WLSQ(1-3,G)は 7.1 項で示した単調性維持の問題のため安定に計算できなかった。

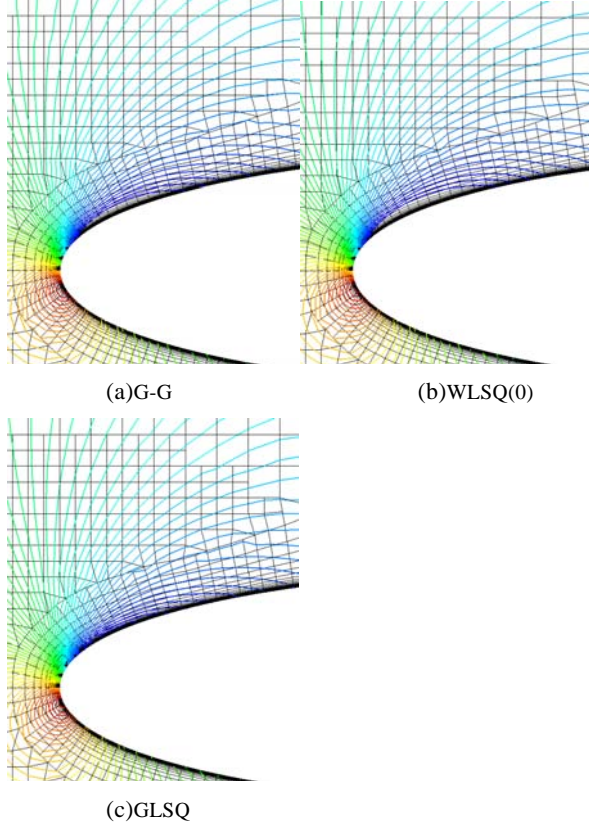


図 11 翼型まわり流れの圧力分布比較

### 8. まとめと課題

ハイブリッド格子への適用を主眼に新しい勾配計算法 GLSQ の定式化を示した。GLSQ は、(1)不等間隔格子でも最大 2 次精度、(2)曲がった格子においても適切な勾配を計算する。(3)点分布の非対称性に影響されにくい、(4)再構築での単調性の維持、等の特徴を持つ。

今後、現実的なケースで精度の検証が必要である。また、バーテックスセンター型 FVM 等の他のスキームにおいても有効性が期待される。

#### 参考文献

- [1]D.J.Mavriplis, “Revisiting the least-squares procedure for gradient reconstruction on unstructured meshes” , AIAA-Paper 2003-3986, 2003
- [2]Z.-J.Wang ZJ, “A fast nested multi-grid viscous flow solver for adaptive Cartesian/Quad grids”, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2000; Vol.33, 657-680, 2000

[3]M.Aftosmis, Gaitonde D, Tavares TS, “On the accuracy, stability and monotonicity of various reconstruction algorithms for unstructured meshes”, AIAA Paper 94-0415, 1994

[4] T. J. Barth and D. C. Jespersen. “The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. “, AIAA paper 89-0366, 1989

[5] V. Venkatakrishnan, “Convergence to steady state solutions of the Euler equations on unstructured grids with limiters”, Journal of Computational Physics, 118(1), 1995.

### Appendix

#### A. GLSQ 定式化のまとめ ( $\alpha_6=1/2$ の場合)

$$\begin{aligned} & [\beta_o \mathbf{M}_o + 2(1 - \beta_o) \mathbf{V}_o \mathbf{I}] \nabla q_o = \\ & \beta_o \sum_j \omega_j L_j \Delta \bar{x}_{ij} \Delta q_j + (1 - \beta_o) \sum_j s_j \bar{x}_{nj} \Delta q_j \\ & \beta_o \in [0, 1] \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \\ I_{AB} &= \sum_j \omega_j \Delta A_j \Delta B_j \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

$$\omega_j = (2l_j' / L_j)^2 s_j / L_j \quad (\text{A-4})$$

$\beta_o$  はセル毎に次のように定義される。

$$\beta_o = \min \left( 1, \frac{V_o}{\max(\Delta x_j) \cdot \max(s_j)} \right) \quad (\text{A-6})$$

#### B. 最小自乗問題としての G-G の定式化と混合公式

G-G による x 方向の勾配  $q_x$  は形式的に次の関数の停留値とみなすことができる。

$$\Pi_{G-Gx} = \sum s_j x_{nj} \Delta x \left( \alpha_j \frac{\Delta q_j}{\Delta x_j} - q_x \right)^2 \quad (\text{B-1})$$

これを利用して停留値が G-G と WLSQ の混合公式を与える次のような関数が考えられる。

$$\begin{aligned} \Pi_o &= \beta_o \sum_j \omega_j (\nabla q_o \cdot \Delta \bar{x}_j - \Delta q_j)^2 \\ &+ 2(1 - \beta_o) D \{ \Pi_{G-Gx} + \Pi_{G-Gy} + \Pi_{G-Gz} \} \\ &\beta \in [0, 1] \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

ただし、 $D$  は次元調整の正定数である。この停留値は次で与えられる。

$$\begin{aligned} & [\beta_o \mathbf{M}_o + 2D(1 - \beta_o) \mathbf{V} \mathbf{I}] \nabla q_o = \\ & \beta_o \sum_j \omega_j L_j \Delta \bar{x}_{ij} \Delta q_j + 2D(1 - \beta_o) \sum_j \alpha_j s_j \bar{x}_{nj} \Delta q_j \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$