非保存形の FEM 定式による衝撃波解析

真鍋圭司　　西尾正富
福山大学工学部機械システム工学科

Shock Wave Analysis by Non-conservative FEM Formulation

by
Keiji Manabe and Masatomi Nishio

ABSTRACT

The hypersonic-flow including shock wave problems are usually analyzed by solving compressible flow equations written by conservative form. In this study, shock wave analysis is carried out by solving non-conservative form of governing equations by Finite Element Method (FEM). First, it is shown that the non-conservative form of 1-dimensional Burgers equation can be properly solved by using upwind scheme of Finite difference method (FDM). This FDM formulation for 1-dimensional non-conservative Burgers equation can be obtained from FEM by using 1-dimensional linear shape function and Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) method. Consequently the same computational results of FDM and FEM for 1-dimensional Burgers equation is obtained. Second, compressible Navier-Stokes equations are changed to the non-conservative form. It is important for analyzing shock wave to consider artificial viscosity term, therefore, the non-conservative formulation is conducted for the equation including artificial viscosity term. The detail of the non-conservative formulations of governing equations are shown. This type of equations are introduced to the program of FEM, and the 2-dimensional axi-symmetric problem is calculated. The calculation result of shock wave around the Re-entry capsule under the condition of Mach 10 are shown, and the good agreement with experimental result is obtained. It is concluded that non-conservative form of governing equations of compressible fluid can also analyze the shock wave by considering the artificial viscosity term.

１．はじめに

圧縮性流体における衝撃波を解析するには、保存形で表された支配方程式を数値的に解くのが一般的である。数値解法としては差分法 (Finite Difference Method; FDM) に基づくものが多いが、著者らの有限要素法 (Finite Element Method; FEM)による衝撃波解析も報告されている[1), 2)]。

一方、非圧縮性流体の解析は、非保存形の式を用いて行われることが一般的であり、さまざまな流れの解析に実績を上げ、CFD(Computational Fluid Dynamics) の技術はほぼ完成していると思われる。

圧縮性流体解析においても、保存形の式から質量保存の式を消去して式変形すれば、非保存形の式が導かれる。双曲型問題において保存形は衝撃波のような不連続を弱解として捉えることができる。これを非保存形に書き直して解析する場合は、不連続部を人工粘性によりなめらかにして取り扱う。この人工粘性を０に近づけた極限の解が、保存形、非保存系の両者一致するかは数学的には明らかにされていない。しかし本研究は工学的立場から、非保存形での衝撃波捕獲解析の実用的構築を試みる。そこで非保存形で書かれた支配方程式を、FEM を用いて衝撃波解析を行った結果について報告する。

２．非粘性 Burgers 方程式の解析

衝撃波を解析する場合、
(1) 不連続の部分をシャープに取られる
(2) 不連続の部分の移動速度は、弱解から導出される値と一致する。

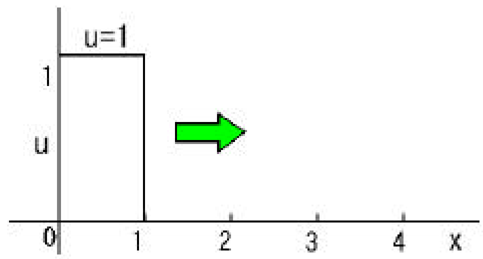
などの要求があり、それらに対し保存形の式を用いることが良いとされる。そこでまず衝撃波解析の基本方程式である１次元非粘性 Burgers 方程式を対象とし、上述のことが非保存形の式により解析できるか調べる。解析手法は、FDM、FEM の２種類とする。

２．１　差分法による解析

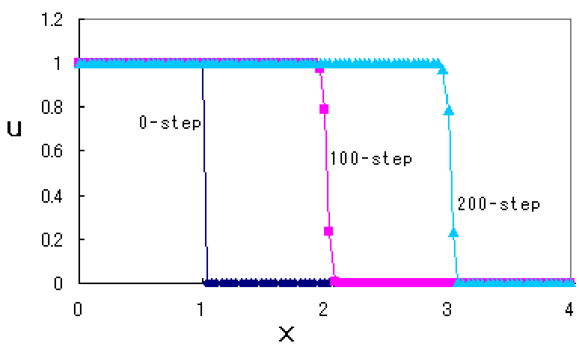
１次元非粘性 Burgers 方程式は、非保存形では次式である。なお、u>0 する。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \cdots (1)$$

この式を FDM によって解析する。移流速度を U とし風上差分により式(1)を近似すれば、次式となる。



(a) u の初期分布



(b) 数値解析結果

図１　Burgers 方程式の差分解析結果（その 1）
（Δx=0.04, Δt=0.02, CFL=0.5）

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+U\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}=0 \quad \cdot\cdot\cdot (2)$$

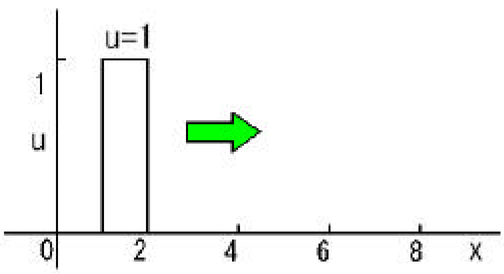
本報告では移流速度 U として、風上側 (i-1) との格子平均をとり、次のように近似する。

$$U=\frac{u_i^n+u_{i-1}^n}{2} \quad \cdot\cdot\cdot (3)$$

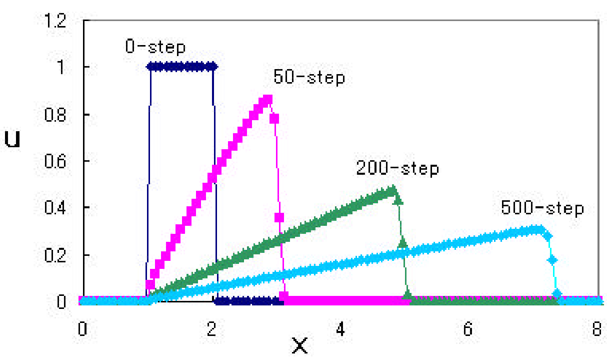
添字記号は通常用いるものと同様に、上の添字 n は時間ステップ、下添字 i は x 方向の格子の番号である。
この差分スキームで、数値計算した結果を図１、図 ２ に示す。図１は、図(a) に示すようにはじめ (0-step) 階段状の不連続部分を持つ変数 u の分布を初期条件に与えている。時間とともに、右方向に不連続のシャープさを保ちつつ移動していることが分かる。また風上差分であるから１次精度だが、解になまりはあまりなく、振動もしていない。

不連続部の移動速度は、理論では不連続部の跳びの速度の 1/2 で、(0+1)/2 = 0.5 であるから、この計算条件の Δt = 0.02 では 100 Step で x は１ だけ進むはずである。図より不連続部の移動速度はほぼ理論どおりとなっており、非保存形の式(1)でも妥当に解析できることがわかる。

図２は、初期に二つ不連続部があり、衝撃波と膨張波の存在する例題である。



(a) u の初期分布



(b) 数値解析結果
（Δx=0.08, Δt=0.04, CFL=0.5）

図２ Burgers 方程式の差分解析結果（その 2）

図２からわかるように、振動もなく妥当に解析されていることが分かる。

ところで、式(1)を保存形で表した次式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad f=\frac{1}{2}u^2 \quad \cdot\cdot\cdot (4)$$

を風上差分すると次式になる。

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\frac{\frac{1}{2}\left(u_i^n\right)^2-\frac{1}{2}\left(u_{i-1}^n\right)^2}{\Delta x}=0 \quad \cdot\cdot\cdot (5)$$

この式の第２項を因数分解して整理すると、式(2)が得られる。

Burgers 方程式は保存形の式を用いて解析するのがよいとされる（例えば文献 3））が、本報告のように非保存形の式に変形しても解析可能と思われる。

２．２ 有限要素法による解析

前項の Burgers 方程式を FEM で定式化する。式(1) に重み関数 w をかけて積分する。

$$\int w\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx=0 \qquad \cdot\cdot\cdot (6)$$

積分項の第２項に SUPG(Streamline Upwind Petrov-Galerkin)法を導入して、風上差分的な効果を導入する。

$$\int w\frac{\partial u}{\partial t}dx+\int WU\frac{\partial u}{\partial x}dx=0 \quad \cdot\cdot\cdot (7)$$

$$W=w+\tau U\frac{\partial w}{\partial x}$$

τ は安定化パラメータであり、次式とおく。

$$\tau=\frac{\Delta x}{2U} \quad \cdot\cdot\cdot (8)$$

１次元の１次要素で定式化し、式(7)の第１項目の行列を対角化し、時間積分に陽解法を適用する。そして、U は要素内で要素両端の節点の値の平均値とした場合、FEM は前項で示した差分による定式と一致する。（この定式化の詳細は、本論文の最後の付録に示す。）

従って当然ながら FEM による計算結果は、FDM による図１、図２と全く同じである。そこで、次に衝撃波を解析することを目的に、保存形で書かれた支配方程式を非保存形に式変形するという方針で、定式化を行う。

３．圧縮性流体の解析

３．１ 保存形の支配方程式

流れの基礎式は質量保存、運動量保存、エネルギー保存の３種類の保存式で表される。すなわち、保存形の定式は次に示すとおりである。

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho\}+\frac{\partial}{\partial x_k}\{v_k\rho\}=0 \quad \cdot\cdot\cdot (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho v_i\}+\frac{\partial}{\partial x_k}\{v_k\rho v_i\}-\frac{\partial}{\partial x_k}\{\sigma_{ik}\}=0 \quad \cdot\cdot\cdot (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho e\}+\frac{\partial}{\partial x_k}\{v_k\rho e\}-\frac{\partial}{\partial x_k}\{v_m\sigma_{mk}-q_k\}=0 \quad \cdot\cdot\cdot (11)$$

ここで記号は通常用いられるものと同じで、ρ は密度、v_i は速度、e は全エネルギー、σ_{ik} は応力である。なおこれらの式において添字 k および m には総和規約を用いている。これらの式をまとめて変数を次のように表示する。

$$U=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho v_i\\ \rho e\end{Bmatrix}\quad G_k=\begin{Bmatrix}0\\ \sigma_{ik}\\ v_m\sigma_{mk}-q_k\end{Bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot (12)$$

この表示を用いれば、式(9)、(10)、(11)は次の形にまとめられる。

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\{v_k U\}-\frac{\partial G_k}{\partial x_k}=0 \quad \cdot\cdot\cdot (13)$$

これは、圧縮性、非圧縮性流体の両方に成り立つ式である。圧縮性流体の解析は、通常の場合この式を用いて行う[3)]。

衝撃波を捕獲するには、右辺に人工粘性項を加える必要がある。ν を定数（安定化パラメータ）として、

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\{v_k U\}-\frac{\partial G_k}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu\frac{\partial U}{\partial x_k}\right\} \quad \cdot\cdot\cdot (14)$$

この人工粘性項が衝撃波解析に対し重要な項となる。

３．２　非保存形の支配方程式

次に、本研究の目的である非保存形式で解析を行うため、次の変数を導入する。

$$V=\begin{Bmatrix}1\\ v_i\\ e\end{Bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot (15)$$

すなわち、$U=\rho V$　であり、これを式（14）に代入すると、

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\{v_k\rho V\}-\frac{\partial G_k}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu\frac{\partial \rho V}{\partial x_k}\right\} \quad \cdot\cdot\cdot (16)$$

これを式変形して、

$$\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(v_k\rho)}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\right)\right\}V$$
$$+\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}+v_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial G_k}{\partial x_k} \quad \cdot\cdot\cdot (17)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu\rho\frac{\partial V}{\partial x_k}\right\}+\nu\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\frac{\partial V}{\partial x_k}$$

式(15)において、V=1、G_k =0 の場合の質量保存則は、次のようになる。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_k\frac{\partial\rho}{\partial x_k}+\rho\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\right\} \quad \cdot\cdot\cdot (18)$$

これを用いると、式(17)の第 1 項は消える。

運動量保存式は、式(15)で $V=vi$、$G_k=\sigma_{ik}$ の場合で、

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right\}+\nu\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad \cdot\cdot\cdot (19)$$

エネルギー保存式も同様に、式(15)で $V=e$、$G_k=v_m\sigma_{mk}-q_k$ の場合で、

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+v_k\frac{\partial e}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\{v_m\sigma_{mk}-q_k\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu\rho\frac{\partial e}{\partial x_k}\right\}+\nu\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\frac{\partial e}{\partial x_k} \quad \cdot\cdot\cdot (20)$$

となる。さらにこの式を、ε を内部エネルギー、C_Vを定圧比熱として、

$$e=\varepsilon+\frac{1}{2}v_kv_k=\rho C_V T+\frac{1}{2}v_kv_k \quad \cdot\cdot\cdot (21)$$

の関係から、運動量保存式を用いて書き換えると、式(20)は次のように温度 T を変数として次のように簡略化される。

$$\rho C_V\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_k\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)-\sigma_{mk}\frac{\partial v_m}{\partial x_k}-\frac{\partial q_k}{\partial x_k}$$
$$=C_V\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu\rho\frac{\partial T}{\partial x_k}\right\}+\nu\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\frac{\partial T}{\partial x_k}\right]+\nu\frac{\partial v_m}{\partial x_k}\frac{\partial v_m}{\partial x_k} \quad \cdot\cdot\cdot (22)$$

これらの式は，ただ書き換えただけであるから、圧縮、非圧縮性流体のいずれにも成り立つ式である。

以上をまとめると、密度、速度、温度を変数として、

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ v_i \\ T \end{Bmatrix} \quad \cdots (23)$$

とする。これらを変数とし、支配方程式を非保存形で書くと、次のようになる。

○質量保存式

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \alpha \quad \cdots (24)$$

○運動方程式

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \beta_i \quad \cdots (25)$$

○エネルギ式

$$\rho C_V \frac{DT}{Dt} - \sigma_{mk} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = \gamma \quad \cdots (26)$$

ここで、$D/Dt = \partial/\partial t + v_k\ \partial/\partial x_k$ は物質導関数である。これらの式は、非圧縮性流体や固体の解析によく出てくる形の式であり、それに人工粘性に相当する項 α、βi、γ を加えた形になっている。

α、βi、γ は、具体的には次式である。

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \nu \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right\} \quad \cdots (27)$$

$$\beta_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \nu \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\} + \nu \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad \cdots (28)$$

$$\gamma = C_V \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \nu \rho \frac{\partial T}{\partial x_k} \right\} + \nu \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right] + \nu \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \quad \cdots (29)$$

これら非保存形の式を用い、FEM による基礎式の導出過程に従い、次の手続きで離散化を行う。

(1) 重み関数 w をかけて積分する。移流項に掛ける重み W は SUPG 法に従う。すなわち、

$$W = w + \tau U_k \frac{\partial w}{\partial x_k} \quad \cdots (30)$$

ここで、移流速度 U_k は、要素周りの節点の平均値とする。

(2) 圧力、応力の項や、人工粘性の項は部分積分し、1 階の微分にする。

(3) 時間微分の項の行列を対角化し、時間積分に陽解法を適用する。

安定化パラメータである τ、ν は、次式[4)]を用いた。

$$\tau = \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2|U_i|}{h} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad \nu = \frac{h}{2} |U_i| \quad \cdots (31)$$

h は要素長さであり、ν は衝撃捕獲項に基づく。

4．結果および考察

以上で示した非保存形 FEM 定式を用い、再突入カプセル（MSUR）周りの流れの解析を行う。カプセル模型は、図 3 に示すとおりであり軸対称の形状を有する。

計算条件は、既報の風洞実験と同条件で解析した。すなわち、一様流密度 4.5×10^{-4} kg/m^3、一様流速度 1,500 m/s 静温度 54K のマッハ 10 の条件である。

この模型まわりを要素分割した例を図 4 に示す。図は見やすくするため 4 つの要素を一つの要素で表している。このモデルでは、節点数 10,579、 要素数 10,360　で軸対称モデルである。計算は時間増分Δt=1.0 $\times 10^{-7}$ (s)で 4,000 step で行った。

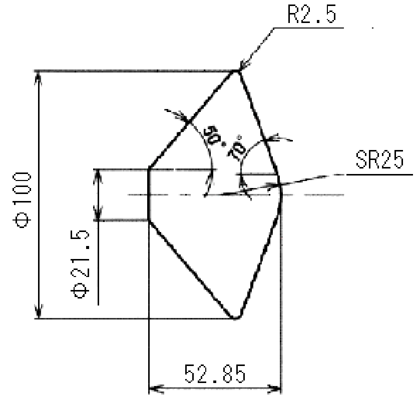


図３　カプセル模型の概要

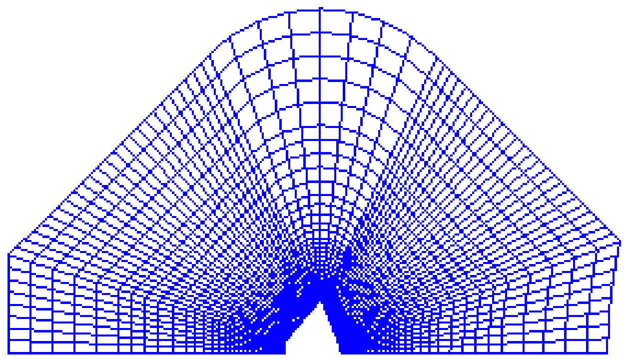


図４　カプセル周りの要素分割例

図５に、計算で得られた密度分布を示す。上半分が計算結果、下半分がシュリーレン法による実験結果である。この計算結果は、この計算結果は、保存形の基礎式による

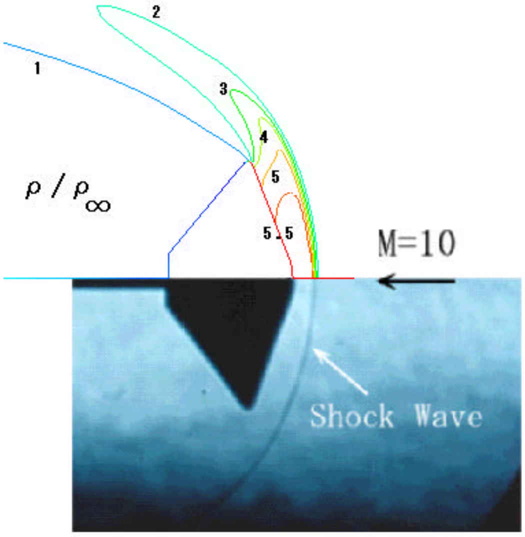


図５　計算結果と実験結果の比較

既報[1]の計算結果とほぼ一致する。従って、非保存形の式を用いた場合でも、FEM により衝撃波は妥当に計算できることがわかる。

非保存形の形式は、非圧縮性流体の解析によく用いられているが、圧縮性流体の解析も可能であることが明らかになった。ただ、人工粘性という人工的な項が必要という点で、理論的にはあいまいな部分が残ると思われる。

５．結論

本研究の成果を以下にまとめる

１）１次元非粘性 Burgers 方程式を、非保存形式の風上 FDM により解析した。移流速度を上流側との平均を取ることにより、妥当な解が得られた。

２）この１次元非粘性 Burgers 方程式を FEM により解析する場合、SUPG 法を導入し、質量マトリックスを対角化すれば風上 FDM と一致する。（具体的定式化は付録参照）

３）保存形で表示した流体の基礎式に人工粘性を加え、非保存形に式変形した。これにより FEM 解析を行った場合、衝撃波が妥当に計算され、保存形により解析結果とほぼ一致した。

以上のことから、衝撃波の解析は、非保存形の式に人工粘性を加えることにより、FEM により計算可能であることが分かった。

参考文献

1) 西尾、真鍋、中村、瀬崎：超音速/極超音速流れの新しい計算手法、日本航空宇宙学会論文集、Vol. 51, No.599, pp683-689(2003)

2) M.Nishio, K.Manabe, and H.Nakamura, New Calculation Method of Supersonic/Hypersonic Flow: Application to MESUR Capsule, Journal of Spacecraft and Rokets,Vol.43,No.4,2006,pp.916-918.

3) 数値流体力学編集委員会編、数値流体力学シリーズ２、圧縮性流体解析、東京大学出版会,1995,p.43.

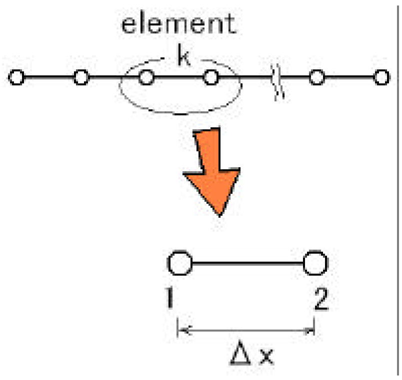
4) 日本計算工学流れの有限要素法研究会編、続・有限要素法による流れのシミュレーション、シュプリンガージャパン,2008,p.67,70.

付録．１次元 Burgers 方程式の FEM 定式

１次元 Burgers 方程式は、非保存形式で、式(1)であり、FEM の定式化により、式(6),(7) を用いると次式になる。なお U は要素内で一定とする。

$$\int w\frac{\partial u}{\partial t}dx+\int wU\frac{\partial u}{\partial x}dx+\int \tau U^2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx=0$$

・・・(付 1)



付図１　１次元領域の有限要素分割

いま、重み関数 w と変数 u を形状関数 ϕ を用いて、次式で近似する。付図１のように１次元の領域を、長さΔx の要素で等分割し、要素 k の両端の節点を１、２とすると、

$$w=\begin{pmatrix}w^1 & w^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\end{pmatrix}$$

$$u=\begin{pmatrix}\phi^1 & \phi^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^1\\ u^2\end{pmatrix}$$

・・・(付 2)

これらを式（付 1）に代入し、重み関数wが任意という条件から、次式が要請される。

$$\int\begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^1 & \phi^2\end{pmatrix}dx\begin{pmatrix}\dot{u}^1\\ \dot{u}^2\end{pmatrix}$$
$$+\int\begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\end{pmatrix}U\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\phi^1}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi^2}{\partial x}\end{pmatrix}dx\begin{pmatrix}u^1\\ u^2\end{pmatrix}$$
$$+\int\tau U^2\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\phi^1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\phi^2}{\partial x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\phi^1}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi^2}{\partial x}\end{pmatrix}dx\begin{pmatrix}u^1\\ u^2\end{pmatrix}=0$$

・・・(付 3)

ここでは、$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ を $\dot{u}$ と書いた。

　形状関数を１次線形関数とすると、次の積分値は次式になる。

$$\int \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^1 & \phi^2 \end{pmatrix} dx = \frac{\Delta x}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi^1}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi^2}{\partial x} \end{pmatrix} dx = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi^1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi^2}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi^1}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi^2}{\partial x} \end{pmatrix} dx = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

・・・(付 4)

これらを用いると、式（付 3）は、次式になる。

$$\frac{\Delta x}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}^1 \\ \dot{u}^2 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} U \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} + \tau U^2 \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = 0$$

・・・(付 5)

　次に各行の値を対角項に加え、第１項目の行列を対角化する。すなわち、

$$\frac{\Delta x}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{\Delta x}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots (付 6)$$

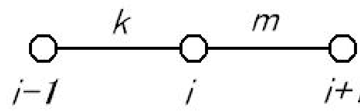
すると、式(付 5)は次のようになる。

$$\frac{\Delta x}{2} \begin{pmatrix} \dot{u}^1 \\ \dot{u}^2 \end{pmatrix} + \frac{U}{2} \begin{pmatrix} u^2 - u^1 \\ u^2 - u^1 \end{pmatrix} + \tau \frac{U^2}{\Lambda x} \begin{pmatrix} u^1 - u^2 \\ u^2 - u^1 \end{pmatrix} = 0$$

・・・(付 7)

いま、安定化パラメータ τ を式(8)で、 τ =⊿x /2U とおくと、式(付 7)は簡単になって、

$$\frac{\Delta x}{2} \begin{pmatrix} \dot{u}^1 \\ \dot{u}^2 \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} 0 \\ u^2 - u^1 \end{pmatrix} = 0 \quad \cdots (付 8)$$



付図２　要素方程式の全体への組込み

これが、FEM の要素方程式である。FEM の手順で、これを全体行列に組み込む。

　いま、付図２のように節点 i の回りの要素ｋ、ｍ　を考える。U は要素内で一定としたが、要素ｋの U を $U^{(k)}$、要素ｍの U を $U^{(m)}$ とおくと、要素の方程式は、

○要素ｋについて

$$\frac{\Delta x}{2} \begin{pmatrix} \dot{u}^{i-1} \\ \dot{u}^{i} \end{pmatrix} + U^{(k)} \begin{pmatrix} 0 \\ u^i - u^{i-1} \end{pmatrix} = 0 \quad \cdots (付 9)$$

○要素ｍについて

$$\frac{\Delta x}{2} \begin{pmatrix} \dot{u}^{i} \\ \dot{u}^{i+1} \end{pmatrix} + U^{(m)} \begin{pmatrix} 0 \\ u^{i+1} - u^{i} \end{pmatrix} = 0 \quad \cdots (付 10)$$

となる。これを全体行列に組み込んだ場合、節点 i　に関する式は式(付 9)の第２式、式(付 10)の第１式を重ね合わせて、

$$\frac{\Delta x}{2} \dot{u}^i + U^{(k)} (u^i - u^{i-1}) + \frac{\Delta x}{2} \dot{u}^i + U^{(m)} \times 0 = 0 \quad \cdots (付 11)$$

すなわち、

$$\dot{u}^i + U^{(k)} \frac{u^i - u^{i-1}}{\Delta x} = 0 \quad \cdots (付 12)$$

となり、空間的に風上差分の式となる。$U^{(k)}$は要素内で要素の両端の節点(i-1),i の値の平均とする。

$$U^{(k)} = \frac{u^{i-1} + u^i}{2} \quad \cdots (付 13)$$

そして時間的には、第１項を前進差分化し、移流速度 U に関して、要素 k の両端節点の平均を取ると、本文式(2)(3) を用いたものと等しくなる。

（付録終わり）