

高精度補間を導入した特性インターフェイス条件による マルチブロック計算法

住隆博, 黒滝卓司, 桧山淳
宇宙航空研究開発機構研究開発本部

Multi-block Computation by Characteristic Interface Conditions with High-order Interpolation

by
Takahiro Sumi, Takuji Kurotaki and Jun Hiyama

ABSTRACT

In the previous study, the authors proposed high-order finite difference multi-block flow computation technique with the generalized characteristic interface conditions (GCIC) in the structured grid system. The GCIC can realize single point connection between adjacent blocks, and allows metric discontinuities on the block interface, however, the grid points of adjacent blocks have to be collocated correspondingly on the block interface. In this work, in order to enhance the flexibility of the GCIC, by incorporating the high-order interpolation method, multi-block flow computation technique with non-uniform staggered grid connection on the block interface is newly proposed. In this article, their theoretical concept is briefly presented, and some proper numerical test analyses are conducted in order to validate the proposed theory.

1. はじめに

近年, コンパクト差分スキーム⁽¹⁾に代表される高次精度有限差分法が構造格子とともに LES や DNS 等の詳細な流体計算に広く用いられている. しかしながら, それらは単純形状によるものがほとんどであって, 複雑形状に適用された例は数少ない. それはこれらのスキームが高精度であるが故に境界条件に課する要求が厳しいからである.

複雑形状を取り扱う一つの選択肢としてマルチブロック法がある. 著者らはこれまで特性理論に基づくインターフェイス条件を構築し, 新たなマルチブロック計算法を提案してきた⁽²⁾. この手法はブロックの境界であるインターフェイス面においてメトリクスの不連続を許容するため, 複雑形状周りを比較的単純な幾何形状からなる格子で囲むことができる. しかしながら, この方法はその長所故に一般に格子点配置に無駄が多いという欠点を持ち合わせている.

もう一つの選択肢として補間を用いたオーバーセット法が考えられる. 近年, Sherer らは高次精度補間法と高次精度差分法を組み合わせ, 複雑形状周りに対していくつかの詳細な数値計算を実行している⁽³⁾. しかしながら, オーバーセット法は本質的に格子点配置や数値操作の面において複雑さや困難さを伴い, 特に三次元問題に対してこれらが顕在化する.

本報では, 高次精度補間法を導入し特性インターフェイス条件を拡張することで, 上記の欠点を払拭し, より柔軟なマルチブロック計算法を提案する.

2. 特性インターフェイス条件

特性インターフェイス条件は文献 2 に詳細な記述があり, ここではその概要を説明する. 図 1 上は特異性のある構造格子を示している. 黒丸で書かれた格子点では左右のメトリクスが不連続であるため単一格子での取り扱いができない. そこで, この特異性を避けるために, 図 1 下のように特異面に沿って二つのブロックに分離し, それを繋ぎ合わせるインターフェイス条件を考える.

Navier-Stokes 方程式はインターフェイスを横切る ζ 方向の移流項に着目して, 次のように書くことができる.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \zeta_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} + \zeta_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \zeta} + \zeta_z \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} + \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

ここで $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ は非粘性流束項であり, \mathbf{D} は残りの移流項と粘性項からなる. 特性理論による考察を行うために, 保存変数 \mathbf{U} , 原始変数 \mathbf{V} , および特性変数 \mathbf{W} よりなる次の二種類のヤコビアンを定義する.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}, \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}}. \quad (2)$$

これらを用いて(1)式は次のように書ける.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{P} \mathbf{S} \mathbf{L} + \mathbf{D} = 0, \quad (3)$$

ここで \mathbf{L} は特性波振幅変動ベクトルであり次式で表される.

$$\mathbf{L} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \left(\zeta_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} + \zeta_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \zeta} + \zeta_z \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} \right). \quad (4)$$

著者らの提案する特性インターフェイス条件はインターフェイス面上における保存変数の時間発展が左右で一致するという直感的な事実に基づいている. すなわち,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^l = \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^r \Leftrightarrow \mathbf{P}^l \mathbf{S}^l \mathbf{L} + \mathbf{D}^l = \mathbf{P}^r \mathbf{S}^r \mathbf{L} + \mathbf{D}^r, \quad (5)$$

であり, 次の二通り,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^l &= (\mathbf{S}^l)^{-1} \left[\mathbf{S}^r \mathbf{L}^r + (\mathbf{P}^l)^{-1} (\mathbf{D}^r - \mathbf{D}^l) \right], \\ \mathbf{L}^r &= (\mathbf{S}^r)^{-1} \left[\mathbf{S}^l \mathbf{L}^l + (\mathbf{P}^r)^{-1} (\mathbf{D}^l - \mathbf{D}^r) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

に書き直すことができる. ただし, 明らかに $\mathbf{P}^l = \mathbf{P}^r$ が成立するとしている⁽²⁾. インターフェイス面法線方向の反変速度成分の符号に従って, ブロック内で既知のものについては(4)式より直接計算し, 未知のものについては(6)式よりもう一方のブロックの影響を考慮して計算する. 結果として ζ 方向移流項は次のように修正される.

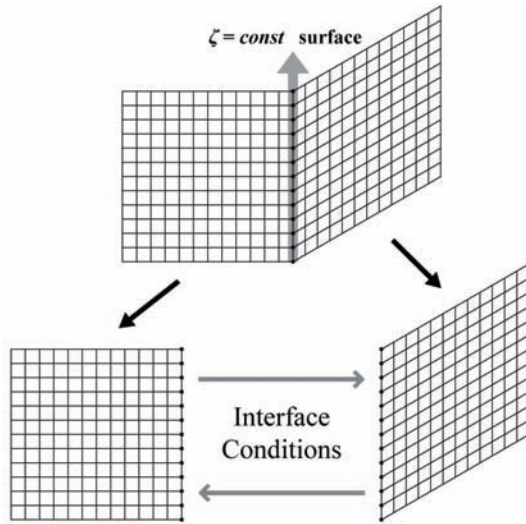


図1 特性インターフェイス条件の概念図。

$$\zeta_x \frac{\partial E}{\partial \zeta} + \zeta_y \frac{\partial F}{\partial \zeta} + \zeta_z \frac{\partial G}{\partial \zeta} = PSL^* \quad (7)$$

最後に、インターフェイス面上の値は内点と同様の手続きにより時間積分される。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^* = -PSL^* - D. \quad (8)$$

3. 補間法を導入した特性インターフェイス条件

オリジナルの特性インターフェイス条件では、左右ブロックの格子点はインターフェイス面上で厳密に一致する必要があった。ここでは、補間法を導入し特性インターフェイス条件を拡張することで、格子点が不一致の場合に対応

することを考える。図2は今回提案する補間法を導入した特性インターフェイス条件によるマルチブロック計算法の概念図である。前提として、左右 A, B のブロックは解析的に同一のインターフェイス面を共有しているとする。ただし格子点は一致していない。本手法の一連の手続きは以下のように進められる。

Step 1. 物理空間における情報を計算空間に写像する。

Step 2. 一方の計算平面 a, b における情報を他方の計算平面で定義される補間平面 a', b' にそれぞれ補間する：a → a', b → b'。

Step 3. 格子点位置の一致する計算平面 a, b と補間平面 a', b' の間に特性インターフェイス条件を適用し移流項を修正する：a ↔ b', b ↔ a'。

Step 4. それぞれの計算ブロック A, B 内で個別に方程式を解く。

Step 5. 計算空間から物理空間に再度写像する。

具体的には Step 2 から Step 4 を時間進行に合わせて計算中に繰り返し行うことになる。なお、Step 3 により(6)は以下のように修正を受ける。

$$\begin{aligned} L' &= (S^l)^{-1} \left[S^{r*} L^{r*} + (P^l)^{-1} (D^{r*} - D^l) \right], \\ L^r &= (S^r)^{-1} \left[S^{l*} L^{l*} + (P^r)^{-1} (D^{l*} - D^r) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、上添え字*は補間された量を表す。

これらの補間操作は三次元問題では基本的に二次元面内で行われる。すなわち、一般に補間次元は空間次元より一つ少ない。本研究では補間法として多項式近似によるラグランジェ補間と区分多項式近似による B-スプライン補間の二種類を採用している。補間定式化に関するこれ以上の議論は紙面の都合上割愛する。

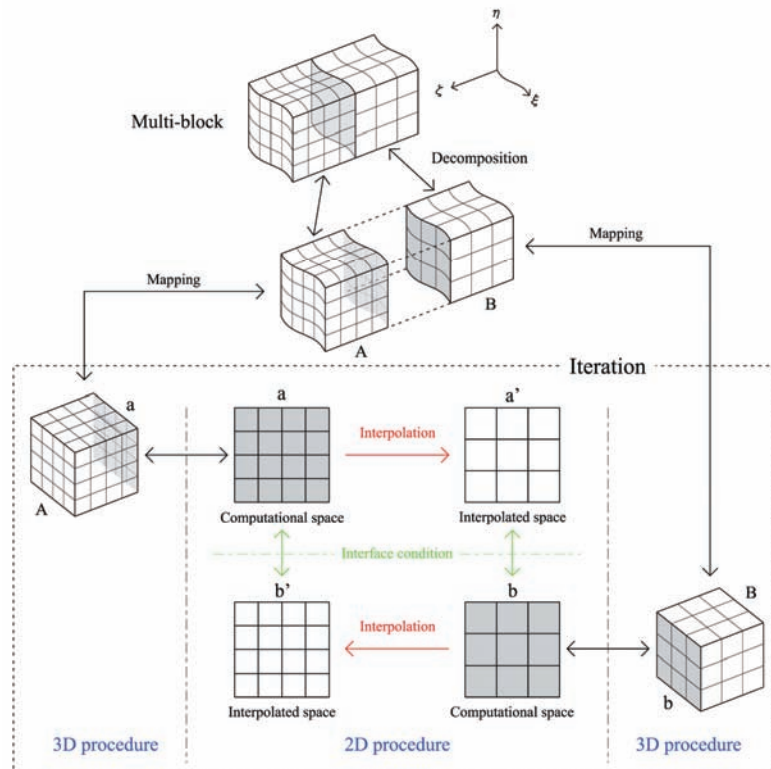


図2 補間法を導入した特性インターフェイス条件によるマルチブロック計算法の概念図。

4. 検証計算

この章では本研究の検証計算として、二次元非粘性渦の移流問題と二次元円柱周りの粘性流の問題を取り扱う。支配方程式が前者は非定常二次元 Euler 方程式、ならびに後者が非定常二次元 Navier-Stokes 方程式で異なる他は数値解法については全く同じものを用いる。移流項と粘性項の空間差分には Kim による Optimized 4th order penta-diagonal (OFOP) compact difference scheme⁽⁴⁾を用いる。このスキームは 5 重対角の Padé 形式を保ち、散逸誤差と分散誤差を同時に抑えつつ解像度を最適化したものである。時間積分には Stanescu らによる 2-step (5-6-stage) 4th order low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta (LDDRK) scheme の低容量型⁽⁵⁾を用いて陽的に行う。このスキームもまた散逸誤差と分散誤差を同時に抑えつつ、陽的時間積分における安定性と精度を最適化したものである。さらに、数値的不安定をもたらす高周波成分の除去には Gaitonde らによる 8th order Padé type compact filter scheme⁽⁶⁾を適用する。ここで、カットオフ周波数に関連するコントロールパラメータ α は 0.48 に設定している。壁面および流入境界条件には Kim らによって一般座標系に拡張された NSCBC^(7,8)を用いる。また、補間精度はラグランジェ補間法および B-スプライン補間法ともに 5 次精度とする。

4.1. 非粘性渦の移流

ここでは、隣接した 2 ブロック間のインターフェイスを通過する移流渦を考える。非粘性の一樣流中に置かれた二次元の移流渦の初期状態における圧力と速度成分は以下で与えられる⁽⁹⁾。

$$p_\infty - p = \frac{\rho C^2}{2R^2} \exp(-r^2),$$

$$u_\infty - u = \frac{C(y - y_c)}{R^2} \exp(-r^2/2),$$

$$v = \frac{C(x - x_c)}{R^2} \exp(-r^2/2),$$

$$r^2 = \frac{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}{R^2},$$

ここで、渦の強さとして $C = 0.167$ および特性半径として $R = 0.2$ を与える。一樣流のマッハ数は 0.3 であり、結果として渦の最大旋回速度は一樣流速度の 50%、中心圧力が一樣流静圧より約 4% 減少する。以下では図 3 に示すような二種類の異なる計算格子を用意して本理論の検証を行う。

(a) 格子線の急峻な変化を持って接続された計算格子

このケースでは、隣接する 2 ブロックがインターフェイス面において格子線の急峻な変化を持って接続されている。左右のブロックの計算座標の定義は同一であり、主流方向の ξ 軸の接続角は 30 deg とする。上流側の Block U では、 2.0×4.0 の矩形領域に ξ, η のいずれの方向にも $1/60$ の間隔で、全体として 121×241 の格子点を配置する。一方、下流側の Block D では、 2.0×4.0 の平行四辺形領域に ξ 方向は同様の $1/60$ 、 η 方向に $1/40$ の格子間隔で、全体として 121×161 の格子点を配置する。

(b) 波状の曲率を持って接続された計算格子

このケースでは、隣接する 2 ブロックが波状の曲率をもつインターフェイス面ではほぼ滑らかに接続されている。左右のブロックの計算座標の定義は同一であり、格子生成には次の式を用いる⁽⁹⁾。

$$x = x_{\min} + \frac{L_x}{i_{\max} - 1} \left[(i - 1) + A_x \sin(2\pi\omega\tau) \sin \left(n_x \pi \frac{j-1}{j_{\max} - 1} \right) \right],$$

$$y = y_{\min} + \frac{L_y}{j_{\max} - 1} \left[(j - 1) + A_y \sin(2\pi\omega\tau) \sin \left(n_y \pi \frac{i-1}{i_{\max} - 1} \right) \right],$$

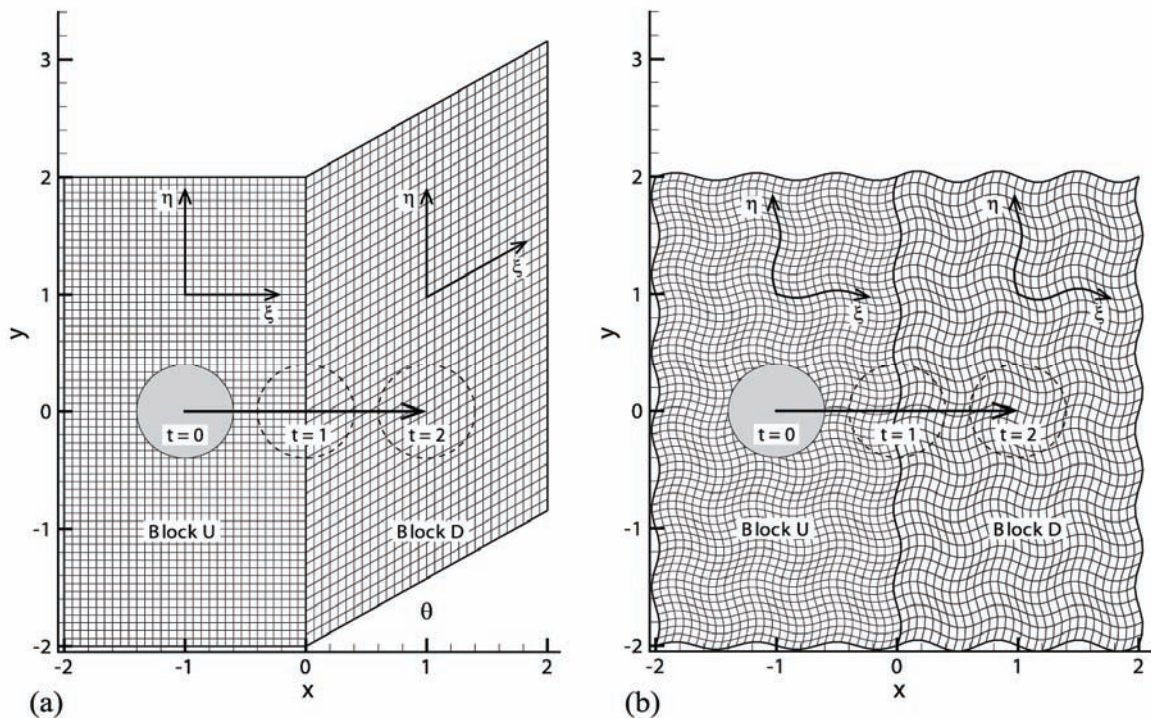


図3 計算格子と座標定義,
(a) 格子線の急峻な変化を持って接続された計算格子, (b) 波状の曲率を持って接続された計算格子.

ここで、各種パラメータとして、

$$A_x = A_y = 2, n_x = 12, n_y = 6, \omega\tau = 0.25,$$

を与える。さらに、格子点および計算領域のパラメータは、上流側の Block U では、

$$i_{\max} = 121, j_{\max} = 241, L_x = 2, L_y = 4,$$

下流側の Block D では、

$$i_{\max} = 121, j_{\max} = 161, L_x = 2, L_y = 4,$$

とする。

単独渦は x 軸に沿って一様流に乗りながら Block U から Block D へインターフェイスを横切って移流する。渦中心は初期状態の時刻 $t=0$ において $x=-1$ に位置し、続いて中間状態の時刻 $t=1$ においてインターフェイス $x=0$ を通過し、最終状態の時刻 $t=2$ において $x=1$ に到達する。すなわち、インターフェイスを挟んで距離 2 の間を時間 2 を経て移流する。なお、計算におけるクーラン数は 0.8 に設定する。以上のように計算格子(a)と(b)はともに格子解像度の異なるブ

ロックを二つ結合させているが、細かい側はもとより粗い側のブロックにおいても移流渦を解像するに十分であることを予め確認している。

図 4 に B-スプライン補間法を用いて計算した際の静圧分布を示す。横並びの 3 つの図はそれぞれ代表時刻 $t=0, 1, 2$ における様子であり、図中央に位置する水平線は単独渦が沿って移流する x 軸、および縦の太線はブロック間のインターフェイスをそれぞれ示している。図から分かるように、どちらの計算格子においても渦は滑らかにインターフェイスをまたいで移動し、初期状態から最終状態に至るまで完全な形状を保っている。なお、この様相はラグランジェ補間法を用いた場合でも全く同じである。

さらに定量的に評価するために、図 5 においてインターフェイス通過時 $t=1$ における静圧分布と旋回速度分布を厳密解（初期値）と比較する。一見して分かるように、補間法の種類によらず静圧分布と旋回速度分布はともに厳密解と一致している。このことはせいぜい 5 次精度程度の次数では本問題設定において補間法の種類に優位差が見られないことを表しているが、一方で GCIC に補間法を組み合わせた本論文の提案する手法が成功裏に機能していることも示している。

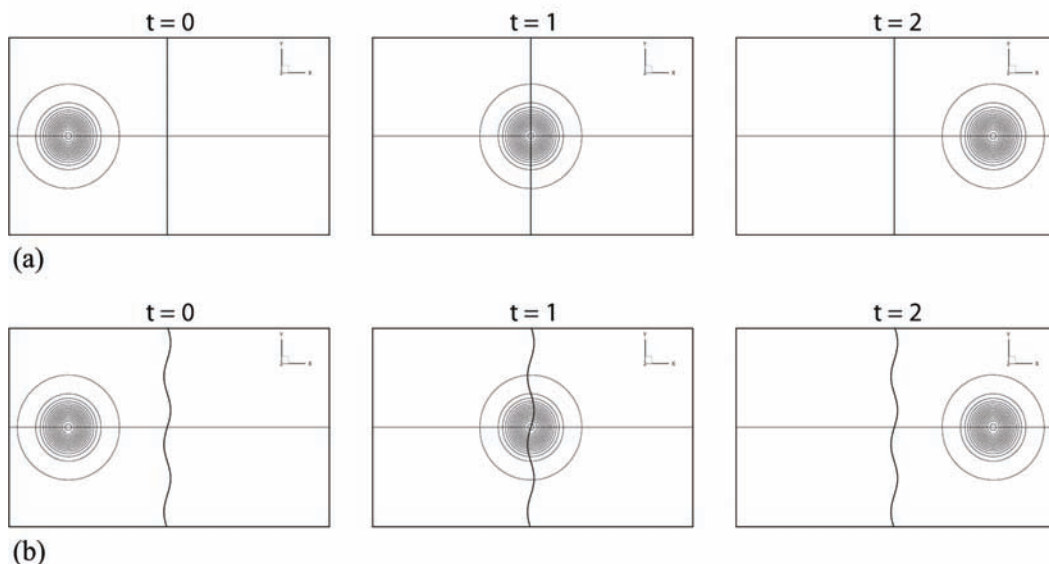


図 4 代表時刻における静圧分布 (B-スプライン補間) ,

(a) 格子線の急峻な変化を持って接続された計算格子, (b) 波状の曲率を持って接続された計算格子.

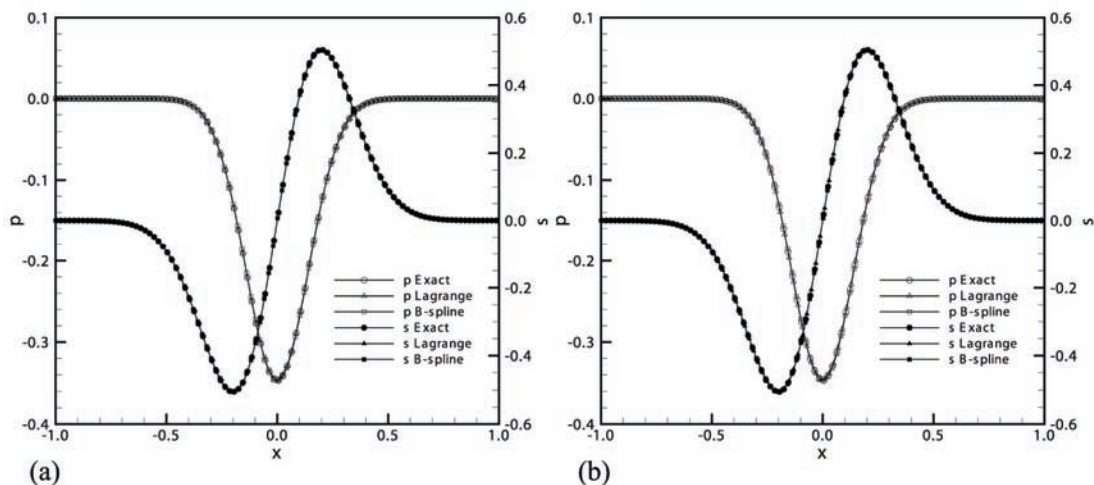


図 5 インターフェイス通過時 $t=1$ における静圧と旋回速度の水平軸上断面分布.

(a) 格子線の急峻な変化を持って接続された計算格子, (b) 波状の曲率を持って接続された計算格子.

4.2. 二次元円柱周りの粘性流

本理論の粘性流への拡張を検証するために、低レイノルズ数における二次元円柱周りの流れの計算を行う。一様流のマッハ数とレイノルズ数はそれぞれ 0.3 と 400 である。Williamson の詳細な実験研究⁽¹⁰⁾によれば、一般にレイノルズ数 200 前後以降では円柱後流においてスパン方向にモードを持つ三次元渦構造の出現が指摘されている。すなわち、二次元円柱周りの流れにおいて 400 というレイノルズ数領域を議論するのであれば、本質的にスパン方向を考慮した三次元計算を行うべきであるが、ここでは理論の数値実験に焦点を当てるため、意図的に Kim らと同様の計算条件^(7,8)で二次元計算を行うことにする。

図 6 に示すように、計算領域は円柱の直径を 1.0 とし太線で区切られた 8 区画のブロックに分かれている。補間なしのケース(a)では、半径 0.5 - 2.5 および周方向 90 度間の内部ブロックに 101*91 点、半径 2.5 - 50.0 および周方向 90 度間の外部ブロックに同様の 101*91 点を配置する。一方、B-スプラインを適用するケース(b)では、内部ブロックはケース(a)と同様に、外部ブロックの周方向はその 2/3 とし、101*61 点とする。計算格子はカルマン渦の発生に起因する流れの変動を十分に捉えるために、壁面とインターフェイス近傍で最小幅 0.02 と細かくしており、逆に遠方境界では渦

を減衰させるために大幅に粗くしている。計算時間はクーラン数を 1.0 として 275,000 ステップ、無次元時刻約 225 まで計算する。

図 7 と図 8 にそれぞれ最終ステップにおける静圧と主流方向の速度成分の瞬間分布を示す。円柱表面に付着した境界層が剥離し、カルマン渦列を形成する様子がはっきりと捉えられている。計算は定常の一樣流の状態を初期条件として突発的に始めるために、流れの非対称性が観測され始める時刻が補間なしのケース(a)と補間ありのケース(b)では異なる。結果として同時刻におけるカルマン渦列の位相が違っているのはこのためである。両ケースともに分布はインターフェイスをまたいで滑らかに繋がっており、いかなる数値的な不連続や振動も観察されない。ところで、GCIC は一次元理論に基づくため、一般に多重点周りで脆弱になりやすい。これは同一の初期値から出発したとしても計算による丸め誤差が蓄積しやすいためである。しかしながら、原始変数に対して算術平均による処理を繰り返す行うことでこの問題は十分に解決することができる⁽²⁾。このように、高精度補間を導入した特性インターフェイス条件が二次元円柱周りの粘性流の計算においても問題なく機能していることが示されている。

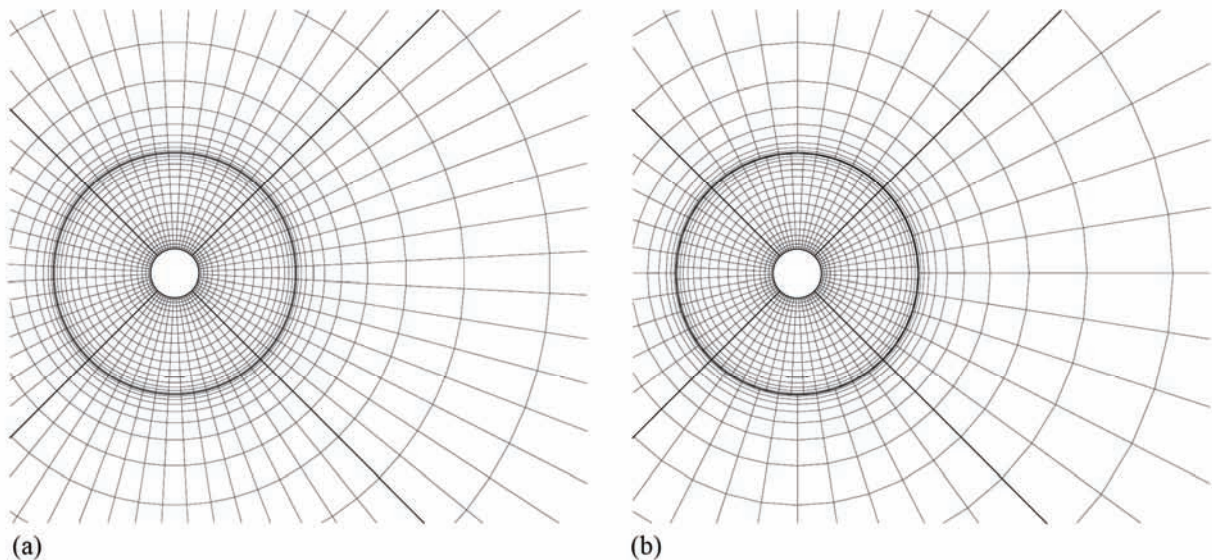


図 6 二次元円柱周りの計算格子, (a) 補間なし, (b) B-スプライン補間 (6 点おきに描画)。

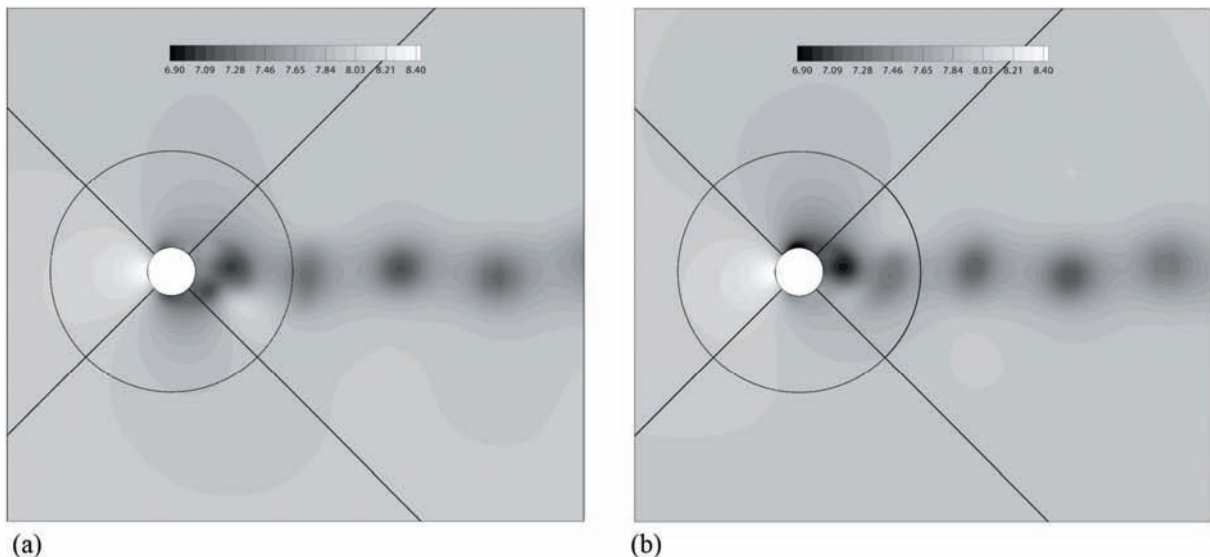


図 7 $T \approx 225$ における静圧の瞬間分布, (a) 補間なし, (b) B-スプライン補間。

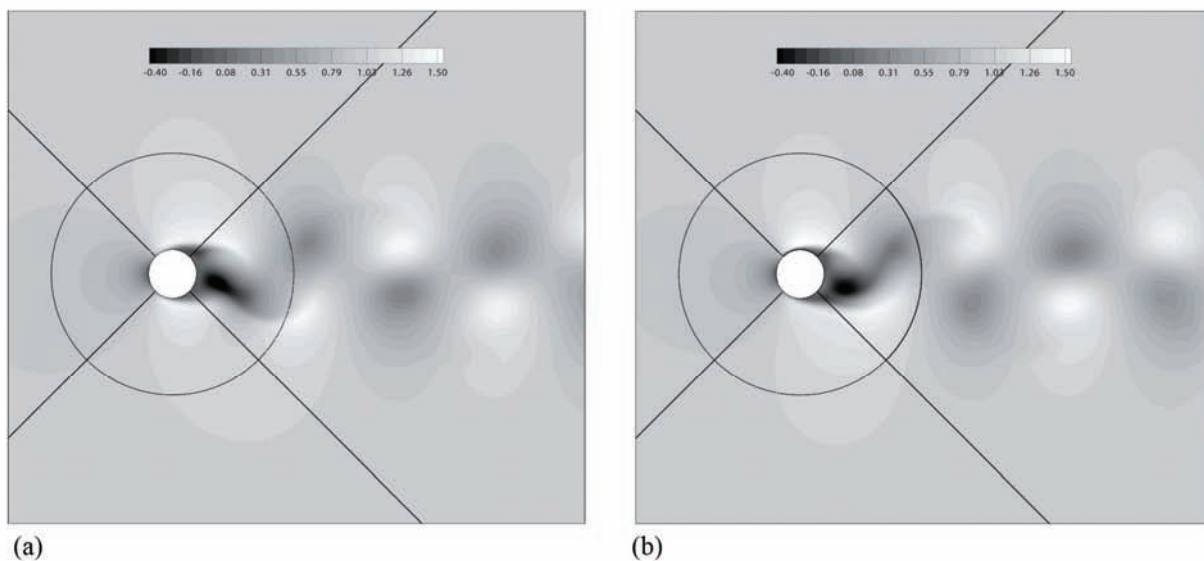


図8 $T \approx 225$ における主流方向速度成分の瞬間分布, (a) 補間なし, (b) B-スプライン補間.

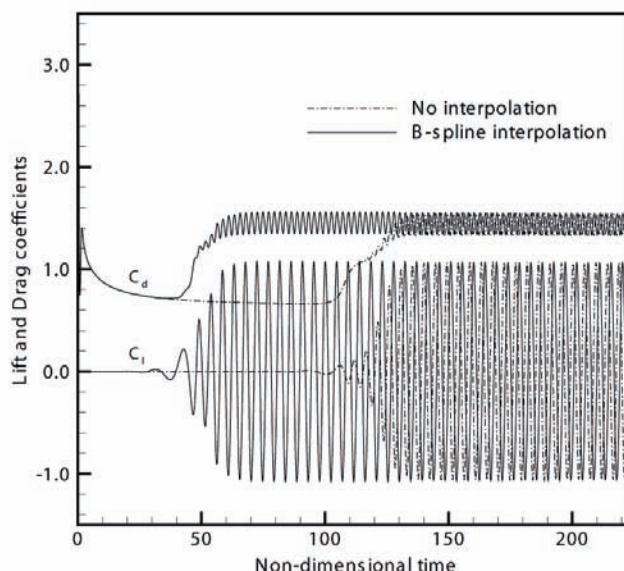


図9 揚力係数と抵抗係数の時間履歴.

次に計算結果を定量的な側面より検討するために、図9に揚力係数と抵抗係数の時間履歴を示す。揚力と抗力は円柱表面に加わる圧力と粘性応力を表面全体に渡って積分することで求める。初期条件によるある程度の過渡状態の後、カルマン渦の発生による一定の振動数と振幅を持った周期的な運動が観察される。これらにより算出されるストローハル数は両ケースともに約0.21と見積もられる。この値は同様の計算例である文献7, 8および古典的な実験値11と良い一致を示している。図ではB-スプライン補間法を適用したケース(b)が補間なしのケース(a)に対して周期モードへ至る時間が圧倒的に短いことが分かる。このことは、インターフェイス面における補間誤差がカルマン渦を誘起するための有効なトリガとなっていることを示している。しかしながらこの誤差は最終的な数値解に全く影響していない。

5. まとめ

高次精度補間を導入した特性インターフェイス条件によるマルチブロック計算法を新たに提案した。本報ではその理論的概要と数値手続きについて説明し、検証計算として

二次元非粘性渦の移流問題と二次元円柱周りの粘性流の問題を取り扱った。結果として本手法の良好な機能を確認し、構造格子における高次精度有限差分法を用いたマルチブロック計算法の汎用性を高めることが可能になった。

参考文献

- (1) S. Lele, J. Comput. Phys., Vol. 103, 1992.
- (2) T. Sumi et al., Int. J. Comput. Fluid Dyn., Vol. 21, 2007.
- (3) S. Sherer et al., J. Comput. Phys., Vol. 210, 2005.
- (4) J. Kim, J. Comput. Phys., Vol. 225, 2007.
- (5) D. Stanescu et al., J. Comput. Phys., Vol. 143, 1998.
- (6) D. Gaitonde et al., AIAA J., Vol. 38, 2000.
- (7) J. Kim et al., AIAA J., Vol. 38, 2000.
- (8) J. Kim et al., AIAA J., Vol. 42, 2004.
- (9) M. Visbal et al., J. Comput. Phys., Vol. 181, 2002.
- (10) C. Williamson, J. Fluid Mech., Vol. 328, 1996.
- (11) H. Schlichting, Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, 1979.